Übungsblatt 2 - Jovan Petrov - Übungsgruppe 8 (Jagalski)

Aufgabe 1 $f: X \to Y$, $X_1, X_2 \subset X$, $Y_1, Y_2 \subset Y$

(a) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

Beweis:

$$\begin{aligned} y \in f(X_1 \cup X_2) &\Leftrightarrow \exists x \in X_1 \cup X_2 : f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X : x \in X_1 \vee x \in X_2 : f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X : ((x \in X_1) \wedge f(x) = y) \vee ((x \in X_2) \wedge (f(x) = y)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(X_1) \vee y \in f(X_2) \\ &\Leftrightarrow y \in f(X_1) \cup f(X_2) \quad \square \end{aligned}$$

(b) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$

Beweis:

$$\begin{aligned} y \in f(X_1 \cap X_2) &\Rightarrow \exists x \in X_1 \cap X_2 : f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x \in X : x \in X_1 \wedge x \in X_2 : f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x \in X : (x \in X_1 \wedge f(x) = y) \wedge (x \in X_2 \wedge f(x) = y) \\ &\Rightarrow y \in f(X_1) \wedge y \in f(X_2) \\ &\Rightarrow y \in f(X_1) \cap f(X_2) \quad \square \end{aligned}$$

Bsp. für Ungleichheit: Wir betrachten hier $X = \{x, x'\}$, $Y = \{y\}$

$f: X \to Y$ mit $f(x) = f(x') = y$, $x \neq x'$

$$f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{y\} = \{y\} \cap \{y\} = f(\{x\}) \cap f(\{x'\})$$

(c) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

<u>Beweis.</u>

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) &\Leftrightarrow f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \\
&\Leftrightarrow f(x) \in Y_1 \vee f(x) \in Y_2 \\
&\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(Y_1)) \vee (x \in f^{-1}(Y_2)) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \quad \square
\end{aligned}
$$

(d) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

<u>Beweis.</u>

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) &\Leftrightarrow f(x) \in Y_1 \cap Y_2 \\
&\Leftrightarrow f(x) \in Y_1 \wedge f(x) \in Y_2 \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \wedge x \in f^{-1}(Y_2) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \quad \square
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

(a) $f: X \to Y$ bijektiv $\Rightarrow f^{-1}: Y \to X$ bijektiv

<u>Beweis:</u>

Sei $f: X \to Y$ bijektiv. Wir beweisen, dass f^{-1} auch injektiv und surjektiv ist:

- Injektivität: Seien $y_1, y_2 \in Y$ mit $x_1 = f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x_2$, $x_1, x_2 \in X$.

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2))$

$\Rightarrow (f \circ f^{-1})(y_1) = (f \circ f^{-1}) y_2$

$\Rightarrow id_Y(y_1) = id_Y(y_2)$

$\Rightarrow y_1 = y_2 \in Y$

$(f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2) \Leftrightarrow (y_1 \neq y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2))$

Also ist f^{-1} injektiv.

- Surjektivität. Sei $x \in X$ beliebig. Dann ex. ein $y \in Y$ mit $y = f(x)$. $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) = id_X(x) = x$.

Also ex. für jedes $x \in X$ ein $y \in Y$ mit $x = f^{-1}(y)$.

Daher ist f^{-1} ebenfalls surjektiv.

(b) $\#(X) = 2 \Rightarrow (f, g: X \to X$ -bijektiv $\Rightarrow f \circ g = g \circ f)$

<u>Beweis:</u>

Seien $\#(X) = 2$ und $f, g: X \to X$ bijektiv

Sei $h: X \to X$ bijektiv. Dann gilt ga $f(x_1) \in Y$ entweder

- $h(x_1) = x_1$: da h injektiv ist gilt $h(x_2) \neq x_1 \Rightarrow h(x_2) = x_2$, h ist also surjektiv und es gilt $h = id_X$; oder
- $h(x_1) = x_2$: da h injektiv ist gilt $h(x_2) \neq x_2 \Rightarrow h(x_2) = x_1$, h ist also surjektiv und ist h die Fkt. die x_1 und x_2 vertauscht.

Also gibt es 2 Fälle:

- $f = id_X \Rightarrow f \circ g = id_X \circ g = g = g \circ id_X = g \circ f$
- $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_1$. Es gibt ebenfalls 2 Fälle für g:
  - Ist $g = id_X$, so gilt $f \circ g = f \circ id_X = f = id_X \circ f = g \circ f$
  - gilt $g(x_1) = x_2$, $g(x_2) = x_1$, so gelten

$$(f \circ g)(x_1) = f(g(x_1)) = f(x_2) = x_1 = g(x_2) = g(f(x_1)) = (g \circ f)(x_1)$$
$$(f \circ g)(x_2) = f(g(x_2)) = f(x_1) = x_2 = g(x_1) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$$

Also gilt $f \circ g = g \circ f$ $\square$

(c) $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$

$k = g \circ f : X \to Z$, $\quad l = h \circ g : Y \to W$

Dann gilt $h \circ k = l \circ f$ ($\Leftrightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$)

Beweis: Es sei $x \in X$. $f(x) \in Y$ und es gilt $k(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, $k(x) \in Z$, $(h \circ k)(x) = h(k(x)) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \in W$. $(*)$

Für alle $y \in Y$ gilt $l(y) = (h \circ g)(y) = h(g(y))$ $(**)$. Da $f(x) \in Y$

$(l \circ f)(x) = l(f(x)) \overset{(**)}{=} h(g(f(x))) \overset{(*)}{=} (h \circ k)(x)$. Da x bel. war,

gilt die Aussage für alle $x \in X$ und daher $(l \circ f) = (h \circ k)$ $\square$

Aufgabe 3

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \longmapsto x^3$ ist bijektiv.

Beweis.

- Injektivität: Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ mit $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3$.

$\Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0)$

$\overset{x_1 \neq x_2}{\Rightarrow} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$

Wir betrachten $(x_1+x_2)^2$ und $(x_1-x_2)^2$.

Es gelten $(x_1+x_2)^2 \geq 0$ und $(x_1-x_2)^2 \geq 0$ da $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$ und

$(x_1+x_2)^2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq -2x_1x_2$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$ und $x_1^2 + x_2^2 \geq -2x_1x_2$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq |2x_1x_2| = 2|x_1x_2|$

Es gelte $|x_1x_2| = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 0$

O.B.d.A sei $x_1 = 0$. $x_2^3 = x_1^3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 = x_1$ - Widerspruch (da $x_1 \neq x_2$)

Also gilt $|x_1x_2| \neq 0 \Leftrightarrow |x_1x_2| > 0 \Rightarrow 2|x_1x_2| > |x_1x_2|$

Dann gilt: $x_1^2 + x_2^2 \geq 2|x_1x_2| > |x_1x_2| \geq -x_1x_2$ (per Def. von $|\cdot|$)

nämlich also $0 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$ - Widerspruch!

Also gilt für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ bel. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, und ist f injektiv.

- Surjektivität: Sei $y \in \mathbb{R}$ bel. Für $x = \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$. Also ist f surjektiv.

1b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \longmapsto x^2 - 4x$ ist weder injektiv noch surjektiv.

<u>Beweis:</u>

- f - nicht injektiv: $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0 = 4^2 - 4 \cdot 4 = f(4)$ mit $0 \neq 4$. Also gilt $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ nicht und ist f <u>nicht injektiv.</u>
- f - nicht surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R}$, $y < -4$.
  Angenommen, es gäbe ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$

$$
\begin{aligned}
f(x) = y &\Leftrightarrow x^2 - 4x = y < -4 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < 0 \\
&\Leftrightarrow (x-2)^2 < 0
\end{aligned}
$$

Ein Widerspruch!

Also ex. für alle $y < -4$, $y \in \mathbb{R}$, kein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Damit ist f <u>nicht surjektiv.</u>

Aufgabe 4

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $g \circ f \to X \to Z$

(1) $g \circ f$ - injektiv $\Rightarrow$ f - injektiv

Beweis: Es seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. $f(x_1), f(x_2) \in Y$

$\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$

Da $g \circ f$ injektiv ist gilt $x_1 = x_2$.

Also für $x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, d.h.

f ist injektiv $\square$

(2) $g \circ f$ - surjektiv $\Rightarrow$ g - Surjektiv.

Beweis. Sei $z \in Z$ bel. Da $g \circ f: X \to Z$ surjektiv ist, gilt $\exists x \in X$ mit $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Sei $y = f(x) \in Y$. Dann gilt $z = g(y)$ für ein $y \in Y$.

Da z bel. gewählt war, ex. $\forall z \in Z$ ein $y \in Y$ mit $z = g(y)$, und somit ist g surjektiv $\square$

(3) $g \circ f$ - bijektiv, g, f nicht bijektiv.

Aus (1) und (2) können wir folgern, dass $g \circ f$ - bijektiv impliziert g - surjektiv und f - injektiv. Da g, f beide nicht bijektiv sind, müssen wir zwei Fkt. $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ konstruieren, so dass, f - injektiv aber nicht surjektiv, g - surjektiv aber nicht injektiv, $g \circ f$ - bijektiv.

Wir betrachten $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x \mapsto x^2$

* f ist injektiv aber nicht surjektiv:

- Injektivität: Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- nicht surjektiv: Für $y \in (\mathbb{R} - \mathbb{R}_{\geq 0})$ ex. kein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $y = f(x) = x$.

* g ist surjektiv aber nicht injektiv:

  - Surjektivität: Für $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt für $\sqrt{y} \in \mathbb{R}$, $g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.
  - nicht injektiv: $g(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = g(1)$.

* $g \circ f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist bijektiv

  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

  - Injektivität: Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow x_1 = x_2$
  - Surjektivität: Für bel. $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt für $\sqrt{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $(g \circ f)(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$