Übungsblatt 5 - Jovan Petrov - ÜG2 (Kohlhaus) Mat-Nr: 3185712

Aufgabe 1

1. Einheiten in $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $K[x]/(x^2)$

- $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ - Beh: $[m] \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ist g.d. Einheit, wenn $ggT(m,N)=1$.

"$\Leftarrow$": Sei $m \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(m,N)=1$. Nach Euklid ex. $k,l \in \mathbb{Z}$ mit $1 = ggT(m,N) = k\cdot m + l\cdot N$

$\Rightarrow [1] = [km + lN] = [k][m]$, d.h. $[m]$ ist eine Einheit.

"$\Rightarrow$": Sei $[m] \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ eine Einheit. Dann ex. $[k] \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ mit $[mk] = [m][k] = 1$. $\Rightarrow mk = 1 - l\cdot N$ für ein $l \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow mk + lN = 1$. Angenommen $ggT(m,N) = d \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow d \mid km + lN = 1 \Rightarrow d = 1$. $\square$

Also gelten: $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^* = \{[1],[2],[4],[5],[7],[8]\}$

$(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^* = \{[1],[3],[7],[9]\}$

- $K[x]/(x^2)$

Analog kann man für Polynome zeigen, dass $[p] \in K[x]/(x^2)$ g.d. Einheit ist, wenn $ggT(p(x), x^2) = 1$ gilt. Also gilt $(K[x]/(x^2))^* = (K[x]/(x^2)) \setminus \{[x],[0]\}$

2. $R = \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ $\quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1\varepsilon \\ a_2 + b_2\varepsilon \end{pmatrix} \in R^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$

$$1_R = x^2 + y^2 = (a_1 + b_1\varepsilon)^2 + (a_2 + b_2\varepsilon)^2 = a_1^2 + b_1^2\varepsilon^2 + 2a_1b_1\varepsilon + a_2^2 + b_2^2\varepsilon^2 + 2a_2b_2\varepsilon$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)\varepsilon = 1 + 0\cdot\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 = 1 \wedge \left(a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0\right)$$

Also liegt $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ auf S^1 und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ist senkrecht zu $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$,

d.h. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\varepsilon$ beschreibt tangente Geraden zu S^1.

Aufgabe 3

1. $4x^2+8x+4$, x^5+5x^3+15, x^6+x^3+1

- $4x^2+8x+4 = 4(x^2+2x+1) = 4(x+1)^2$

  Da 4 keine Einheit in $\mathbb{Z}[x]$ ist und $x+1$ primitiv und linear ist ist $2\cdot 2\cdot(x+1)^2$ eine Zerlegung in irreduziblen Faktoren in $\mathbb{Z}[x]$.
  Diese ist auch eine Zerlegung in $\mathbb{Q}[x]$.

- x^5+5x^3+15 da $\overset{5\nmid 1 = a_5}{5 \mid a_3 = 5}$ aber $25 \nmid a_0 = 15$ ist
  dieses Polynom nach dem Eisensteinkriterium in $\mathbb{Z}[x]$ und damit auch in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel.

- $x^6+x^3+1 = \dfrac{x^9-1}{x^3-1} = \Phi_{3^2}(x)$, nach Aufgabe 3.2. des letzten ÜB also irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$ und auch in $\mathbb{Q}[x]$.

2. x^2+y^2+1, $\mathbb{Q}(x,y)$, $\mathbb{C}(x,y)$. Angenommen: reduzibel.

Da für ein Körper K $K[x,y]$ und $(K[y])[x]$ isomorph sind und $\mathrm{Grad}_x(x^2+y^2+1) = 2$ in $(\mathbb{C}[y])[x]$ können wir es in zwei lineare Faktoren zerlegen:

$$(x^2+y^2+1) = (a_1(y)\,x + b_1(y))(a_2(y)x + b_2(y)),\quad a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbb{C}[y]$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+1 = (a_1a_2(y))\,x^2 + (b_1b_2)(y) + (a_1b_2+b_1a_2)(y)\cdot(x)$$

$$\Rightarrow a_1(y)a_2(y) = 1,\quad b_1(y)b_2(y) = y^2+1,\quad a_1(y)b_2(y) + b_1(y)a_2(y) = 0$$

Daher sind a_1, a_2 Einheiten und somit konstante Polynome in $\mathbb{Q}[y]$. $\Rightarrow a_1(y) = k,\ a_2(y) = c,\ k,c\in\mathbb{C}$.

$$k\cdot c = 1,\quad k b_2(y) + b_1(y)\cdot c = 0 \overset{k,c\neq 0}{\Leftrightarrow} b_2(y) = -\frac{c}{k}b_1(y)$$

$$\Rightarrow -\frac{c}{k}b_1(y)^2 = y^2+1 \Rightarrow c^2 b_1(y)^2 = -(y^2+1)$$

Damit so ein $b_1(y)$ ex. muss $y^2+1 = (ax+b)^2$, $a,b\in\mathbb{C}$ gelten.

$$y^2+1 = a^2x^2 + 2abx + b^2 \Rightarrow a^2 = 1,\ 2ab = 0,\ b^2 = 1 \rightarrow \lightning$$

Also ex. kein solches $b_1(y)\in\mathbb{C}[y]$, d.h. x^2+y^2+1 irreduzibel über $\mathbb{C}(x,y)$ und lediglich über $\mathbb{Q}[x,y]$.