Übungsblatt 3 - Jovan Petrov - Übungsgruppe 8 (Jagalski)

Aufgabe 1

- X - endlich, $f: X \to X$, dann gilt f injektiv $\overset{(a)}{\Leftrightarrow}$ f surjektiv $\overset{(b)}{\Leftrightarrow}$ f - bijektiv $\overset{(c)}{}$)

Beweis. Sei X nichtleer.

"$a \Rightarrow (b \wedge c)$": Sei $f: X \to X$ injektiv. Da X endlich ist, ex. ein $n \in \mathbb{N}^*$, so dass eine Bijektion $g: \{1, \dots, n\} \to X$ ex. Wir betrachten die Menge $f(X)$. $f^*: X \to f(X)$ mit $x \mapsto f^*(x) = f(x)$ ist surjektiv und damit bijektiv. Daher sind X und $f(X) \subseteq X$ gleichmächtig. Dann ist $g' = f^* \circ g: \{1, \dots, n\} \to f(X)$ bijektiv. Angenommen gelte $f(X) \subsetneq X$ und $\#(X \setminus f(X)) = m > 0$.

* <u>Lemma 1</u>: Seien M_1, M_2 nichtleere endliche Mengen mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Dann gilt $\#(M_1 \cup M_2) = \#(M_1) + \#(M_2)$.

<u>Beweis</u>: Da M_1, M_2 endlich sind, ex. $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ und $f_1: \{1, \dots, m_1\} \to M_1$, $f_2: \{1, \dots, m_2\} \to M_2$. Dann ist $f: \{1, \dots, m_1 + m_2\} \to M_1 \cup M_2$

mit $f(n) = \begin{cases} f_1(n), & \text{falls } 1 \le n \le m_1 \\ f_2(n - m_1), & \text{falls } m_1 + 1 \le n \le m_1 + m_2 \end{cases}$ ebenfalls bijektiv.

Daher gilt $\#(M_1 \cup M_2) = m_1 + m_2 = \#(M_1) + \#(M_2)$.

Offenbar gilt $(X \setminus f(X)) \cap f(X) = \emptyset$. Nach Lemma 1 gilt also

$$n = \#(M) = \#\big((X \setminus f(X)) \cup f(X)\big) = \#(X \setminus f(X)) + \#(f(X)) = m + n$$

$\Rightarrow m = 0$ Widerspruch!

Also gilt $\#(X \setminus f(X)) = 0 \Rightarrow X \setminus f(X) = \emptyset$

Da $f(X) \subseteq X$ gilt also $f(X) = X$ und ist f <u>surjektiv</u> und damit <u>bijektiv</u>.

"$b \Rightarrow (a \wedge c)$": Sei $f: X \to X$ surjektiv d.h. $f(X) = X$.

Angenommen sei f nicht injektiv. Wir betrachten $X' \subsetneq X$ s.d. $f|_{X'}$ injektiv mit $f|_{X'}(X') = f(X) = X$ und nämlich auch bijektiv ist.

Dann sind $X' \subsetneq X$ und X gleichmächtig. Analog wie oben können wir zeigen, dass für endliches X dies ein Widerspruch ist.

Daher folgt, dass f <u>injektiv</u> und folglich ebenfalls <u>bijektiv</u> ist. $\square$

Aufgabe 2

(1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto (x+2y, y)$ – bijektiv, $f^{-1} = ?$

* Injektivität: Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$

$\Rightarrow (x_1+2y_1, y_1) = (x_2+2y_2, y_2) \Rightarrow y_1 = y_2 \wedge x_1+2y_1 = x_2+2y_2$

$\Rightarrow y_1 = y_2 \wedge x_1+2y_1 = x_2+2y_1$

$\Rightarrow y_1 = y_2 \wedge x_1 = x_2$

$\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

* Surjektivität: Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ bel. Dann gilt für (x_0-2y_0, y_0)

$f(x_0-2y_0, y_0) = ((x_0-2y_0)+2y_0, y_0) = (x_0, y_0)$

Da f also bijektiv ist ex. $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}^2} = f^{-1} \circ f$.
Für bel. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gilt also $\underline{f^{-1}(x_0, y_0) = (x_0-2y_0, y_0)}$.

(2) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto (2x+3y, 0)$

g ist weder surjektiv noch injektiv, da $(0,1) \notin g(\mathbb{R}^2)$ und $g(0,2) = g(3,0)$.

Sei $g \circ f$ surjektiv, dann ist g folglich surjektiv. Widerspruch!
Also ist $g \circ f$ <u>nicht surjektiv</u>. Analog ist $f \circ g$ <u>nicht injektiv</u>.
$(f \circ g)(x,y) = f(2x+3y, 0) = (2x+3y, 0) = g(x,y)$ also ist $f \circ g$ <u>nicht surjektiv</u>.

$(g \circ f)(x,y) = g(x+2y, y) = (2(x+2y)+3y, 0) = (2x+7y, 0)$.
Da $(g \circ f)(0,2) = (g \circ f)(2,0)$ ist $g \circ f$ <u>nicht injektiv</u>.

Aufgabe 3

(1) $\sim$ auf $\mathbb{N}^2$, $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) :\Leftrightarrow m_1 \leq m_2 \land n_1 \leq n_2$ ist Ordnungsrel. aber keine Totalordnung

Beweis. Seien $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) \in \mathbb{N}^2$

- Reflexivität: $(m_1, n_1) \sim (m_1, n_1)$, da $m_1 \leq m_1 \land n_1 \leq n_1$
- Antisymmetrie: $\big((m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \land (m_2, n_2) \sim (m_1, n_1)\big) \Rightarrow (m_1, n_1) = (m_2, n_2)$

Da $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \land (m_2, n_2) \sim (m_1, n_1) \Rightarrow m_1 \leq m_2 \land n_1 \leq n_2 \land m_2 \leq m_1 \land n_2 \leq n_1$

$\Rightarrow m_1 = m_2 \land n_1 = n_2 \Rightarrow (m_1, n_1) = (m_2, n_2)$

- Transitivität: $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \land (m_2, n_2) \sim (m_3, n_3) \Rightarrow (m_1, n_1) \sim (m_3, n_3)$

da $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \land (m_2, n_2) \sim (m_3, n_3) \Rightarrow m_1 \leq m_2 \land n_1 \leq n_2 \land m_2 \leq m_3 \land n_2 \leq n_3$

$\Rightarrow m_1 \leq m_2 \leq m_3 \land n_1 \leq n_2 \leq n_3 \Rightarrow (m_1, n_1) \sim (m_3, n_3)$

Da weder $(0,1) \sim (1,0)$ noch $(1,0) \sim (0,1)$ gilt, ist $\sim$ keine Totalordnung auf $\mathbb{N}^2$. $\square$

(2) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ bijektiv, $\tilde{\sim}$ Rel. auf $\mathbb{N}_2$ mit $(m_1, n_1) \tilde{\sim} (m_2, n_2) \Leftrightarrow f^{-1}(m_1, n_1) \leq f^{-1}(m_2, n_2)$ ist eine Totalordnung.

Beweis. Seien $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) \in \mathbb{N}^2$ bel.

- Reflexivität: $(m_1, n_1) \sim (m_1, n_1)$ da $f^{-1}(m_1, n_1) \leq f^{-1}(m_1, n_1)$
- Antisymmetrie: $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \land (m_2, n_2) \sim (m_1, n_1) \Rightarrow (m_1, n_1) = (m_2, n_2)$

da $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \land (m_2, n_2) \sim (m_1, n_1) \Rightarrow f^{-1}(m_1, n_1) \leq f^{-1}(m_2, n_2) \land f^{-1}(m_2, n_2) = f^{-1}(m_1, n_1)$

$\Rightarrow f^{-1}(m_1, n_1) = f^{-1}(m_2, n_2) \overset{f\text{ bijektiv}}{\Rightarrow} (f \circ f^{-1})(m_1, n_1) = (f \circ f^{-1})(m_2, n_2)$

$\Rightarrow (m_1, n_1) = (m_2, n_2)$

- Reflexivität: $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \land (m_2, n_2) \sim (m_3, n_3) \Rightarrow (m_1, n_1) \sim (m_3, n_3)$

da $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \land (m_2, n_2) \sim (m_3, n_3) \Rightarrow f^{-1}(m_1, n_1) \leq f^{-1}(m_2, n_2) \leq f^{-1}(m_3, n_3)$

$\Rightarrow (m_1, n_1) \sim (m_3, n_3)$.

- Totalität: es gilt entweder $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)$ oder $(m_2, n_2) \sim (m_1, n_1)$

da entweder $f^{-1}(m_1, n_1) \leq f^{-1}(m_2, n_2)$ oder $f^{-1}(m_2, n_2) \leq f^{-1}(m_1, n_1)$

für $f^{-1}(m_1, n_1), f^{-1}(m_2, n_2) \in \mathbb{N}$ ($\leq$ ist Totalordnung auf $\mathbb{N}$) $\square$

Aufgabe 4

X bel. dann gilt $\#(X) < \#\mathcal{P}(X)$

Beweis.

Wir zeigen zuerst, dass eine Injektion $X \to \mathcal{P}(X)$ ex.
Nämlich ist $f: X \to \mathcal{P}(X)$ mit $x \mapsto f(x) := \{x\}$ eine Injektion,
denn: Für $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$ gilt $\{x\} = \{x'\} \Rightarrow x = x'$.
Zunächst zeigen wir, dass keine surjektive Abbildung $g: X \to P(X)$
ex. Angenommen, es ex so eine surjektive Abbildung g.
Wir betrachten $Y = \{x \in X : x \notin g(x)\}$, $Y \in \mathcal{P}(X) = g(X)$.
Daher ex. ein $x_0 \in X$ mit $g(x_0) = Y$
Angenommen gelte $x_0 \in Y \Rightarrow x_0 \notin g(x_0) = Y$. Widerspruch!
Dann gilt $x_0 \notin Y \Rightarrow x_0 \in g(x_0) = Y$ auch ein Widerspruch!
Daher ex. keine Surjektion $g: X \to \mathcal{P}(X)$ und es
gilt $\#(X) < \#(\mathcal{P}(X))$. $\square$