Übungsblatt 1
Algebra - WS 23/24

Jovan Petrov
Übungsgruppe 3

Aufgabe 1

2. $p(x) = x^3 - 2$, $q(x) = x^2 + x$, $m(x), n(x) = ?$ $m(x), n(x) \in \mathbb{Q}[x]$

mit $m(x)p(x) + n(x)q(x) = 1$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2) : (x^2 + x) = x - 1 \\
-(x^3 + x^2) \\
\hline
\quad -x^2 - 2 \\
\quad -(-x^2 - x) \\
\hline
\qquad x - 2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
(x^2 + x) : (x - 2) = x + 3 \\
-(x^2 - 2x) \\
\hline
\qquad 3x \\
\quad -(3x - 2) \\
\hline
\qquad\quad 6
\end{array}
$$

Somit gilt:

1. $x^3 - 2 = (x - 1)(x^2 + x) + (x - 2)$

2. $x^2 + x = (x + 3)(x - 2) + 6$

3. $x - 2 = \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}\right) \cdot 6 + 0$

$(2) \Leftrightarrow \quad 6 = (x^2 + x) - (x + 3)(x - 2)$

$(2), (3) \Rightarrow \quad 6 = (x^2 + x) - (x + 3)\left[(x^3 - 2) - (x - 1)(x^2 + x)\right]$

$$\Leftrightarrow \quad 6 = [1 + (x+3)(x-1)](x^2+x) + [-x-3](x^3-2)$$

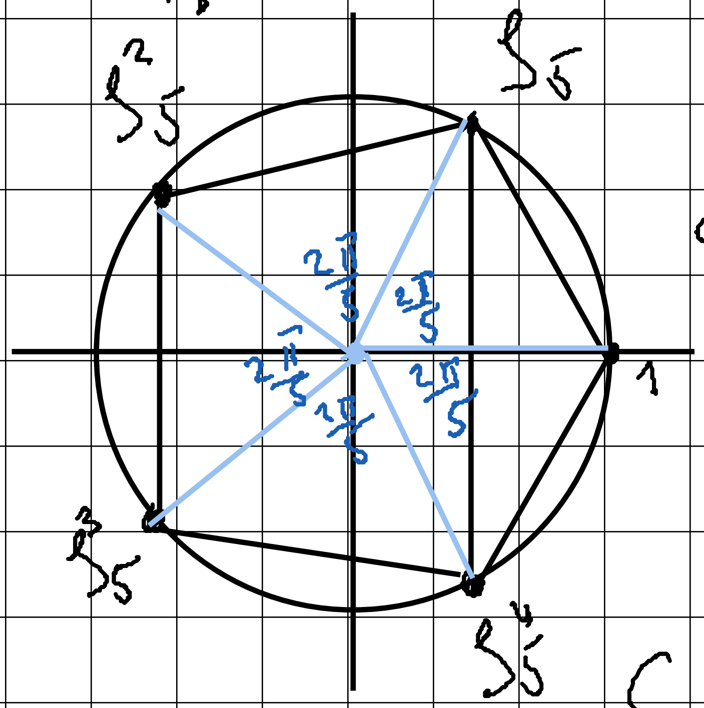
$$\Leftrightarrow \quad 6 = [x^2+2x-2](x^3+x) + [-x-3](x^3-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \overset{n(x)}{\left[\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}\right]}\overset{q(x)}{(x^2+x)} + \overset{m(x)}{\left[-\tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{2}\right]}\overset{p(x)}{(x^3-2)}$$

Daher gilt $\boxed{n(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}}$, $\boxed{m(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}}$

Aufgabe 3

1.



Winkel zwisch. 1 und $\zeta_5 = e^{\frac{2\pi}{5}i} \rightarrow \frac{2\pi}{5}$

$\sphericalangle$ zwisch. 1 und $\zeta_5^2 = e^{2\cdot\frac{2\pi}{5}i} \rightarrow 2\cdot\frac{2\pi}{5}$

" " 1 und $\zeta_5^3 = e^{3\cdot\frac{2\pi}{5}i} \rightarrow 3\cdot\frac{2\pi}{5}$

" " 1 und $\zeta_5^4 = e^{4\cdot\frac{2\pi}{5}i} \rightarrow 4\cdot\frac{2\pi}{5}$

Somit gilt $\sphericalangle(\zeta_5^i, \zeta_5^{i+1}) = \frac{2\pi}{5}$ $i = 0, \dots, 3$

$\Rightarrow 1, \dots, \zeta_5^4$ bilden einen regelmäßigen 5-Eck.

da, $|\zeta_5| = |e^{\frac{2\pi}{5}i}| = 1 = |\zeta_5^2| = |\zeta_5^3| = |\zeta_5^4| = |1|$

2. Da $|\zeta_5| = |\zeta_5^4| = 1$ und $\zeta_5^4 = e^{4\cdot\frac{2\pi}{5}i} = e^{(2\pi i - \frac{2\pi}{5}i)}$

$$= e^{-\frac{2\pi}{5}i} = \overline{e^{\frac{2\pi}{5}i}} = \overline{\zeta_5}$$

gilt $\frac{1}{2}(\zeta_5 + \zeta_5^4) \in \mathbb{R}$ und

$\operatorname{Re}(\zeta_5) = \frac{1}{2}(\zeta_5 + \zeta_5^4) = \operatorname{Re}(\zeta_5^4)$, $\operatorname{Im}(\zeta_5^4) = -\operatorname{Im}(\zeta_5)$

Sei $\frac{1}{2}(\zeta_5 + \zeta_5^4)$ konstruierbar.

So können wir zusätzlich zu 1 die Zahlen ζ_5 und ζ_5^4 konstruieren, indem wir den Kreis um Punkt 0 mit Radius 1 zeichnen und dessen Schnittpunkte mit der bei 1 zu der Gerade zwischen 0 und 1 senkrechten Gerade betrachten. Diese sind jeweils ζ_5 (der obere) und ζ_5^4 (der untere Schnittpunkt) da diese die beide Zahlen mit $Re(z) = Re(\frac{1}{2}(\zeta_5 + \zeta_5^4))$ und $|z| = 1$ sind. Um ζ_5^2, ζ_5^3 zu konstruieren, können wir den Winkel $\frac{2\pi}{5}$ zweimal von ζ_5 aus im Gegenuhrzeigersinn übertragen (wir übertragen den Abstand zwischen 1 und ζ_5 zweimal im Gegenuhrzeigersinn auf dem Einheitskreis)

Ist daher $\frac{1}{2}(\zeta_5 + \zeta_5^4)$ konstruierbar so sind alle 5-te Einheitswurzel.

3. $\zeta_5 \in \mathbb{C} \Rightarrow 1+\zeta_5+\zeta_5^2+\zeta_5^3+\zeta_5^4 = \frac{1-\zeta_5^5}{1-\zeta_5}$

Offensichtlich gelten $1-\zeta_5^5 = 1-1 = 0$ (per Def.)

und $1-\zeta_5 \neq 0$

$\Rightarrow 1+\zeta_5+\zeta_5^2+\zeta_5^3+\zeta_5^4 = 0$ $\square$

4. Wir betrachten das Polynom

$$p(x) = (x-\zeta_5-\zeta_5^4)(x-\zeta_5^2-\zeta_5^3-1)$$

offensichtlich ist $\zeta_5+\zeta_5^4$ = eine Nullstelle von p.

$$p(x) = x^2-(1+\zeta_5+\dots+\zeta_5^4)x+(\zeta_5+\zeta_5^4)(\zeta_5^2+\zeta_5^3+1)$$

$$= x^2+\zeta_5^3+\zeta_5^4+\zeta_5+\zeta_5^6+\zeta_5^7+\zeta_5^4+1-1$$

$$= x^2+(1+\dots+\zeta_5^4)+\zeta_5+\zeta_5^4-1$$

$$= x^2+(\zeta_5+\zeta_5^4)-1$$

$$0 = p(\zeta_5+\zeta_5^4) = (\zeta_5+\zeta_5^4)^2+(\zeta_5+\zeta_5^4)-1$$

$\overset{p\text{-}q\text{-Form.}}{\Rightarrow} \zeta_5+\zeta_5^4 = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$Re(\zeta_5), Re(\zeta_5^4) > 0 \Rightarrow Re(\zeta_5+\zeta_5^4) > 0$

Daher $\boxed{\zeta_5+\zeta_5^4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

$$\mathrm{Re}(\zeta_5) = \frac{1}{2}\zeta_5 + \zeta_5^4 = \underline{\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})}$$

$$\mathrm{Im}(\zeta_5) > 0, \quad \mathrm{Im}(\zeta_5) = \sqrt{1^2 - \frac{1}{16}(-1+\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{16-(-1+\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{16-(1+5-2\sqrt{5})}$$

$$= \underline{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\zeta_5 = \left(\underline{\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})}\right) + i\left(\underline{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)}$$

5. Wir konstruieren ζ_5 wie folgend:

1. Zuerst konstruieren wir $\sqrt{5}$ (siehe Skript Skizzen 4.)
2. Zunächst konstr. wir $-1+\sqrt{5}$ (siehe Skript Skizzen 1.)
3. Wir konstruieren die zur Gerade zwisch. 0 und 1 bei $(-1+\sqrt{5})$ senkrechte Gerade G_1
4. Wir zeichnen den Kreis mit Rad. 4 um den Punkt 0 und markieren seinen Schnittpunkt mit der Gerade G_1 als S.
5. Wir zeichnen die Gerade G_2 zwischen 0 und S.
6. Wir markieren den Schnittpunkt zwischen

G_2 und dem Einheitskreis als z

<u>Beh</u> $z = \zeta_5$

Da z auf dem Einheitskreis liegt, gilt $|z| = 1$.

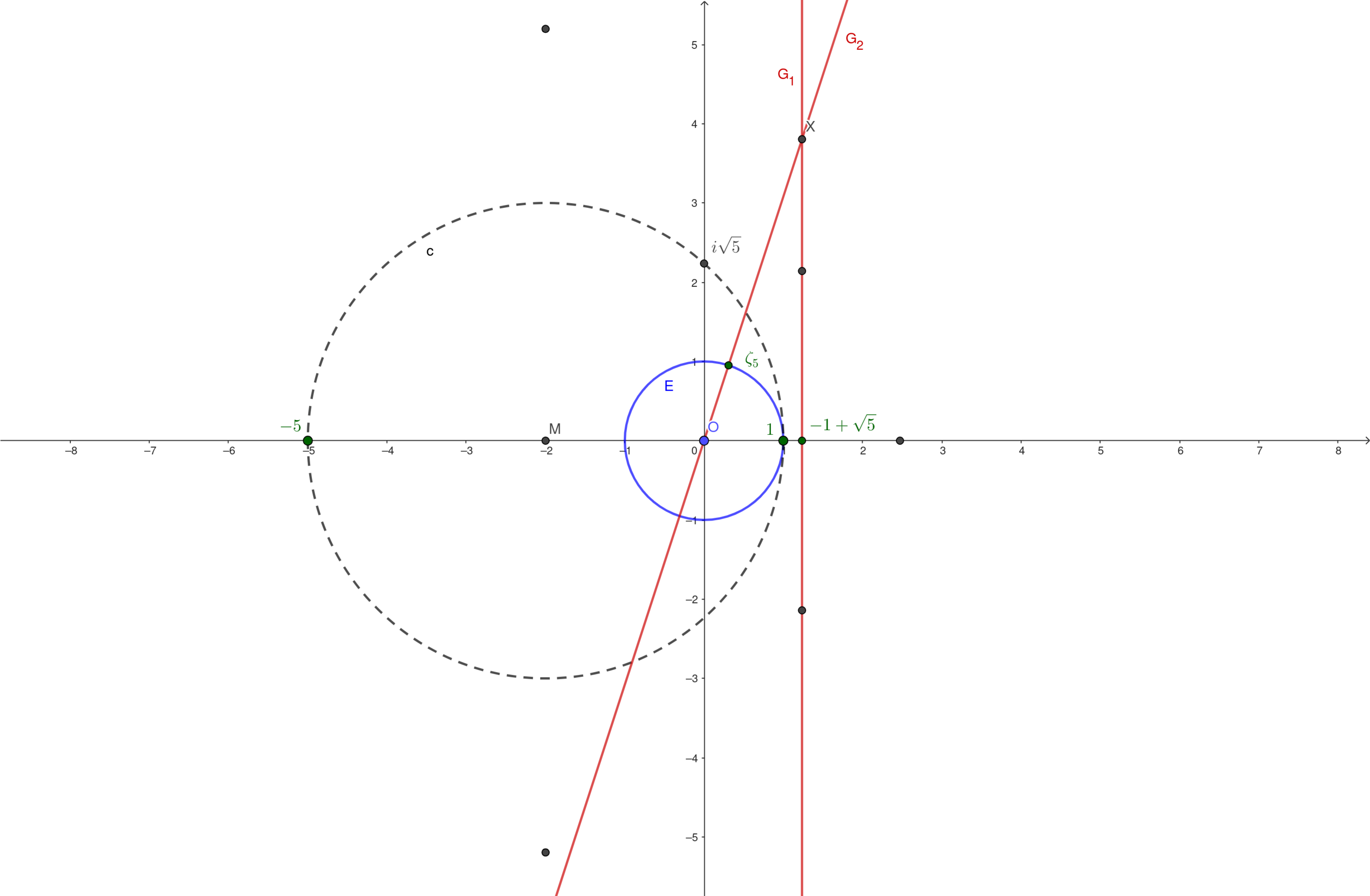
Wir konstruieren zunächst die durch z zur Gerade G_1 parallelen Gerade. Nach dem Strahlensatz können wir festlegen, dass

$Re(z) = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) = Re(\zeta_5)$

Da $Im(z) > 0$ $Im(\zeta_5) > 0$ folgt

$Im(z) = Im(\zeta_5)$ und weiter $z = \zeta_5$ $\square$

- Auf der nächsten Seite befindet sich eine Konstruktion der 5-ten Einheitswurzel ζ_5.



G_1
G_2
X
c
$i\sqrt{5}$
ζ_5
E
-5
M
O
1
$-1+\sqrt{5}$