Übungsblatt 4 – Jovan Petrov – ÜG 8 (Jagulski) – Mat. Nr: 3185712

Aufgabe IV. 1

i) $\#(X) = n$, $\sim \subset \mathcal{P}(X)^2$, $Y, Z \subset X$, $Y \sim Z :\Longleftrightarrow \#(Y) = \#(Z)$

z.z.: $\#(\mathcal{P}(X)/\sim) = n+1$

__Beweis.__ Wir führen Induktion auf $n = \#(X)$ durch:

(IA): $n = 0 \Rightarrow \#(X) = 0 \Rightarrow \mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$

$\Rightarrow \mathcal{P}(X)/\sim = \{[\emptyset]\} \Rightarrow \#(\mathcal{P}(X)/\sim) = 1 = n+1$

(IS): Es gelte die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$.

Sei dann X – Menge mit $\#(X) = n+1$. Sei $X = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ für $(x_i \neq x_j) \Leftrightarrow (i \neq j)$. $X' := X - \{x_{n+1}\}$.

$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X') \cup \{\{x_{n+1}\} \cup X_0 : X_0 \in \mathcal{P}(X')\}$.

$\Rightarrow (\mathcal{P}(X)/\sim) = \{[X_0] : X_0 \in \mathcal{P}(X')\} \cup \{[X_0] : X_0 = \{x_{n+1}\} \cup X_1 : X_1 \in \mathcal{P}(X')\}$.

Da die Def. unserer Äquiv. Rel. unverändert bleibt und nur der Def.-Bereich von $\sim \subset \mathcal{P}(X')^2$ auf $\sim \subset \mathcal{P}(X)^2 \supset \mathcal{P}(X')^2$ erweitert wird, bleiben Elemente aus $\mathcal{P}(X')$ die unter $\sim \subset \mathcal{P}(X')^2$ äquivalent sind auch unter $\sim \subset \mathcal{P}(X)^2$ äquivalent, d.h.

(*) $\#(\{[X_0] : X_0 \in \mathcal{P}(X')\}) \overset{(IV)}{=} n+1$. Sei $X_0 = \{x_{n+1}\} \cup X_1$ mit $X_1 \in \mathcal{P}(X')$

__Fall 1:__ $X_1 \neq X'$. Dann gilt $\#(X_1) < \#(X') = n \Rightarrow \#(X_0) < n+1$

$\Rightarrow \#(X_0) \leq n$. Da X_0 gleichmächtig X_2 mit

$X_2 = X_1 \cup \{x^*\}$ mit $x^* \in X' - X_1$ (welche ex. da $\#(X_1) < \#(X')$).

$\Rightarrow [X_0] = [X_2]$. Da $X_2 \in \mathcal{P}(X')$ gilt also

$[X_0] \in \{[X_0] : X_0 \in \mathcal{P}(X')\}$, d.h. wir gewinnen keine neue Äquivalenzklasse.

__Fall 2:__ $X_1 = X' \Rightarrow X_0 = X \Rightarrow \#(X_0) = n+1$.

Da $\forall X^* \in \mathcal{P}(X') : \#(X^*) \leq \#(X') = n$ gilt, folgt $\forall X^* \in \mathcal{P}(X')$:

$[X^*] \neq [X_0] = [X]$. $\Rightarrow \#(\mathcal{P}(X)/\sim) = n+2$ nach (*). $\square$

(iii) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})/\sim$ ist abzählbar.

Beh: Sei $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Dann ist Y entweder endlich oder abzählbar.

Beweis. Da $\mathbb{Q}$ - abzählbar ex. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ - bijektiv.

Wir betrachten $I \subset \mathbb{N}$ $I = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in Y\}$.

Falls Y endlich ist sind wir fertig. Sei Y dann unendlich. Wegen $g: I \to Y$ mit $n \mapsto f(n)$ - bijektiv gilt $\# I = \# Y$.

Da $I \subseteq \mathbb{N}$ ex. $n_0 = \min I$. Wir betrachten

$h: \mathbb{N} \to I$ mit $h(0) = n_0$, $h(n+1) = \min\{I \cap \{m \in \mathbb{N} : m > h(n)\}\}$

Die Abb. ist offensichtlich injektiv. Sei $k \in I$ bel.

Da $\{1, ..., k-1\}$ endlich ist, ist $\{m \in I : m < k\}$ auch endlich.

Sei $\#(\{m \in I : m < k\}) =: l$. Dann gilt $h(l) = k$, also ist h bijektiv $\Rightarrow \#(\mathbb{N}) = \#(I) = \#(Y)$, d.h. Y ist abzählbar. $\square$

Sei $Y \in P(X)$. Dann ist Y entweder abzählbar oder endlich.

Fall 1: Y - abzählbar $\Rightarrow \#(Y) = \#(\mathbb{N}) \Rightarrow Y \sim \mathbb{N} \Rightarrow [Y] = [\mathbb{N}]$.

Fall 2: Y - endlich. Falls $\#(Y) =: n \in \mathbb{N}^*$ gilt $\#(Y) = \#(\{1, ..., n\}) \Rightarrow [Y] = [\{1, ..., n\}]$. Falls $Y = \emptyset$, gilt $[Y] = [\emptyset]$.

Da $[\mathbb{N}], [\emptyset], [\{1\}], ...$ paarweise verschieden sind gilt:

$\mathcal{P}(\mathbb{Q})/\sim \; = \{[\mathbb{N}], [\emptyset]\} \cup \{[\{1, ..., k\}] : k \in \mathbb{N}^*\}$.

Wir betrachten $f: \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})/\sim$ mit

$$f(k) = \begin{cases} [\mathbb{N}], & \text{falls } k = 0 \\ [\emptyset], & \text{falls } k = 1 \\ [\{1, ..., k\}], & \text{falls } k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \end{cases}$$

Diese ist bijektiv, also ist $\mathcal{P}(\mathbb{Q})/\sim$ abzählbar. $\square$

Aufgabe IV.2

i) f_k - wohldefiniert.

Beweis. Sei $f_k : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit $[i] \mapsto [i \cdot k]$.

Sei $j \in [i]$ bel. Dann gilt $j = i + q_1 m$ für ein $q_1 \in \mathbb{Z}$.

$k \cdot j = k \cdot i + q_1 \cdot k m \Rightarrow k \cdot j = k \cdot i + q_2 m,\ q_2 \in \mathbb{Z}. \Rightarrow kj \equiv k \cdot i \pmod m$

$\Rightarrow [k \cdot j] = [k \cdot i]$ d.h. unsere Abbildung ist von der Wahl des Repräsentanten unabhängig und damit wohldefiniert. $\square$

ii) ∧ iii) Wir zeigen, dass f_k g.d. bijektiv ist, wenn $ggT(k, m) = 1$ gilt.

"$\Rightarrow$" Angenommen gelten $\overbrace{}^{ggT(k,m)=1 \text{ und}}$ $f_k([i]) = f_k([j]) \Leftrightarrow [k \cdot i] = [k \cdot j]$

$\Leftrightarrow [k \cdot i] - [k \cdot j] = 0 \Rightarrow [k \cdot i] + [-k \cdot j] = 0 \Leftrightarrow [k(i-j)] = 0$

$\Leftrightarrow k(i-j) = q \cdot m$ für ein $q \in \mathbb{Z}$. Da k und m teilerfremd sind und $m \mid q \cdot m = k(i-j)$ gilt, gilt $m \mid i-j$ d.h.

$[i] = [j]$. Da $f_k : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist f_k nach III.1 bijektiv.

"$\Leftarrow$" Seien $ggT(k, m) = d \neq 1$, $m = m_1 d$, $k = k_1 d$.

Dann gilt $f_k([0]) = [0]$. $f_k([m_1]) = [k \cdot m_1] = [k_1 d\, m_1] = [k_1 \cdot m] = [0]$

Da $0 < m_1 < m$ gilt $[0] \neq [m_1]$ und ist f_k weder injektiv noch surjektiv (III.1).

Also ist f_k für $k = 2$ und $m = 15$ bijektiv und $k = 3$, $m = 15$ wegen $ggT(3, 15) = 3$ weder injektiv noch surjektiv.