# Übungsblatt 4 - Algebra 1

Jovan Petrov

13. November 2023

## Aufgabe 3

1. $\frac{x^{p^2}-1}{x-1} \in \mathbb{Q}[x]$ ist nicht irreduzibel

   *Beweis.*

   $$\frac{x^{p^2}-1}{x-1} = \frac{(x^p)^p-1}{x-1} = \frac{(x^p-1)\left(\sum_{k=0}^{p-1} x^{pk}\right)}{x-1} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p-1} x^{pk}\right)$$

   Mit $r(x) := \sum_{k=0}^{p-1} x^k$ und $s(x) := \sum_{k=0}^{p-1} x^{pk}$, ist $\frac{x^{p^2}-1}{x-1} = r(x)s(x)$, $r(x), s(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $\operatorname{Grad} r = p-1 > 0, \operatorname{Grad} s = p^2 - p > 0$ reduzibel.

   □

2. $\Phi_{p^2} := \operatorname{minpol}_{\zeta_{p^2}} = ?$

   *Beweis.* Wir zeigen $\operatorname{minpol}_{\zeta_{p^2}} = s(x) := \sum_{k=0}^{p-1} x^{pk}$. Es gilt

   $$s(\zeta_{p^2}) = \sum_{k=0}^{p-1} \zeta_{p^2}{}^{pk} = \sum_{k=0}^{p-1} e^{i\frac{2\pi}{p}k} = \sum_{k=0}^{p-1} \zeta_p^k = \frac{\zeta_p^p - 1}{\zeta_p - 1} = 0$$

   d.h. das Minimalpolynom von $\zeta_{p^2}$ teilt $s(x)$. Wir zeigen noch, dass $s(x)$ irreduzibel in $\mathbb{Q}$ ist. Wir betrachten zunächst $s'(y) = s(y+1) = \frac{(y+1)^{p^2}-1}{(y+1)^p-1}$. Offensichtlich ist $s$ g.d. irreduzibel wenn $s'$ irreduzibel ist. Modulo $p$ gilt $s'(y) = \frac{((y+1)^p)^p-1}{(y+1)^p-1} = \frac{(y^p+1)^p-1}{(y^p+1)-1} = \frac{y^{p^2}}{y^p} = y^{p^2-p} \in \mathbb{F}_p[x]$ Da $\operatorname{Grad} s' = \operatorname{Grad} s = p^2 - p$ sind also alle Koeffizienten aus dem führenden Koeffizient durch $p$ teilbar. Ferner gilt

   $$s'(y) = \sum_{k=0}^{p-1} (y+1)^{pk} = \sum_{k=0}^{p-1}\left(1 + y\sum_{j=1}^{pk}\binom{pk}{j} y^{j-1}\right) = p + y\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{pk-1}\binom{pk}{j+1} y^j$$

   d.h. der konstante Term von $s'(y)$ ist $s_0 = p$. Nach dem Eisensteinkriterium ist $s'$ und damit $s$ in $\mathbb{Z}[x]$ (folglich auch in $\mathbb{Q}[x]$) irreduzibel.

   □

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k}\right]$$