Übungsblatt 1 - Lineare Algebra I

Jovan Petrov - Übungsgruppe 8

Aufgabe 1 $A, B, C \subset X$

(a) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
x \in (A - (B \cap C)) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg (x \in (B \cap C)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg (x \in B \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \notin C)) \\
&\Leftrightarrow x \in A - B \vee x \in A - C \\
&\Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

b) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

<u>Beweis</u>

$$
\begin{aligned}
x\in A-(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\cup C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\in C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A-B)\wedge(x\in A-C)\\
&\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 X, Y Mengen, $x_1, x_2 \in X$.

$$Y_{x_1} := \{(x_1, y) : y \in Y\} \subset X \times Y$$

$$Y_{x_2} := \{(x_2, y) : y \in Y\} \subset X \times Y$$

Dann $Y_{x_1} \cap Y_{x_2} \neq \emptyset \Leftrightarrow Y_{x_1} = Y_{x_2}$

Beweis.

$$Y_{x_1} \cap Y_{x_2} \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists (x_0, y_0) \in X \times Y : (x_0, y_0) \in Y_{x_1} \cap Y_{x_2})$$

$$\Leftrightarrow (x_0, y_0) \in Y_{x_1} \wedge (x_0, y_0) \in Y_{x_2}$$

$$\Leftrightarrow (\exists y_1 \in Y : (x_0, y_0) = (x_1, y_1)) \wedge$$

$$(\exists y_2 \in Y : (x_0, y_0) = (x_2, y_2))$$

$$\Leftrightarrow (x_0 = x_1) \wedge (y_0 = y_1) \wedge (x_0 = x_2) \wedge (y_0 = y_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_0 = x_1 = x_2) \wedge (y_0 = y_1 = y_2)$$

$$\Leftrightarrow Y_{x_1} = Y_{x_2} \quad \blacksquare$$

Aufgabe 3

$X := \{(x, x+2) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

$Y := \{(2x, 3x+5) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

$$X \cap Y = \{\overbrace{(x_0, y_0)}^{\in \mathbb{R}^2} : (x_0, y_0) \in X \wedge (x_0, y_0) \in Y\}$$

$$= \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : (\exists x_1 \in \mathbb{R} : (x_0, y_0) = (x_1, x_1+2)) \wedge (\exists x_2 \in \mathbb{R} : (x_0, y_0) = (2x_2, 3x_2+5))\}$$

$$= \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : (\exists x_1 \in \mathbb{R} : x_0 = x_1 \wedge y_0 = x_1+2) \wedge (\exists x_2 \in \mathbb{R} : x_0 = 2x_2 \wedge y_0 = 3x_2+5)\}$$

$$= \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_0 = x_1 = 2x_2 \wedge y_0 = x_1+2 = 3x_2+5\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 \\ x_1+2 &= 3x_2+5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 \\ 2x_2+2 &= 3x_2+5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= -6 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}\right.$$

$$X \cap Y = \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : x_0 = x_1 = -6, \; y_0 = x_1+2 = -4\}$$

$$= \{(-6, -4)\}$$

Aufgabe 4

(a) $Y \subset X$, $\#(Y) \in \mathbb{N}_0$, $x_0 \in X - Y$. Sei

$n := \#(\mathcal{P}(Y))$

Dann $\#(\mathcal{P}(Y \cup \{x_0\})) = 2n$

<u>Beweis.</u> Es gilt offensichtlich $\mathcal{P}(Y) \subset \mathcal{P}(Y \cup \{x_0\})$ da jede Teilmenge von Y auch eine Teilmenge von $Y \cup \{x_0\}$. Für eine TM Y' von $Y \cup \{x_0\}$ ist x_0 entweder ein Element oder kein Element von Y'.

1. Für den Fall $x_0 \notin Y'$ gilt $Y' \subset Y$.
   Es gibt n solche Mengen Y'.
2. Für den Fall $x_0 \in Y'$ gilt $Y' \setminus \{x_0\} \subset Y$
   Es gibt also n verschiedene $Y' \setminus \{x_0\}$
   Da $x_0 \notin Y$ gilt, dass es n verschiedene Mengen $Y' \setminus \{x_0\} \cup \{x_0\} = Y'$ gibt.

Daher gibt es insgesamt $n + n = 2n$ solche Mengen $\Rightarrow$ $\#(Y \cup \{x_0\}) = 2n$ ∎

(b) $\#(\mathcal{P}(X)) = 2^n$, $n := \#(X)$

<u>Beweis.</u>

(IA): $n = 0 \Leftrightarrow X = \emptyset$ also gilt

$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\} \Rightarrow \#(\mathcal{P}(X)) = 1 = 2^0$

(IS): $n \to n+1$: Es gelte

$\#(\mathcal{P}(X)) = 2^n$ für $\#(X) = n$. (IV)

Es sei ein $x_0 \in \overline{X}$ d.h. $x_0 \in S - X$

für ein $S \subset X$ echte Teilmenge von X.

Dann gilt $\#(X \cup \{x_0\}) = \#(X) + 1 = n+1$

Aus (a) folgt

$$\#(\mathcal{P}(X \cup \{x_0\})) = 2\,\#(\mathcal{P}(X)) \overset{(IV)}{=} 2 \cdot 2^n$$
$$= 2^{n+1}$$

Also gilt dann $\#(\mathcal{P}(X)) = 2^{n+1}$ für $\#(X) = n+1$.

Damit folgt die gewünschte Aussage durch vollständige Induktion. ∎