UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Offen im Denken

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Frank Müller

Analysis II im Wintersemester 2023/24

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte). (a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 1} \frac{x^9-3x+2}{4x^2-7x+3}$.

(b) Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ gegeben mit $g' \neq 0$ auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Weiter gelte $f(3) = 0$, $f'(3) = 1$, $g(3) = 1$, $g'(3) = 0$, $g''(3) = 2$. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)^2}{g(x)-1}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle lokalen Extremalstellen und den jeweiligen Typ der Extrema:

(a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) $g(x) = \frac{|x-3|}{(x+1)^2}$, $x \in (-1, +\infty)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex auf dem Intervall I. Zeigen Sie:

(a) Sind $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in (0,1)$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ beliebig, so gilt

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n), \quad x_1, \ldots, x_n \in I.$$

(b) Ist zusätzlich $f \in C^2(I)$ und $x_0 \in I$ beliebig, so gilt $f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$, $x \in I$, d.h. der Graph von f liegt oberhalb jeder Tangente an f.

Hinweis: Nutzen Sie den Mittelwertsatz.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen auf punktweise Konvergenz und geben Sie ggf. den Grenzwert an. Welche der Funktionenfolgen konvergieren gleichmäßig?

(a) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$, $x \in [0,1]$.

(b) $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g_n(z) = \frac{n|z|}{n+|z|^2}$, $z \in B_2(0) \subset \mathbb{C}$.

Abgabe: 25.10.23 bis 10 Uhr, Briefkasten „Analysis II", Foyer WSC-Gebäude. Geheftet und unter Angabe von Namen und Übungsgruppe.