UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

*Offen im Denken*

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. FRANK MÜLLER


Analysis II im Wintersemester 2023/24

## Übungsblatt 1

**Aufgabe 1** (4 Punkte). (a) Zeigen Sie direkt mit Definition 7.1.1 für $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, dass $f$ in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'(x_0)$.

(b) Existieren die ersten Ableitungen folgender Funktionen in allen Punkten von $\mathbb{R}$? Bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

- $g(x) = \frac{x^2}{x^6+x^3+1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $h(x) = \left(\sqrt[3]{1+2x^2}, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte). (a) Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{C}$ gegeben und im Punkt $x_0 \in I$ seien $f$ stetig, $g$ differenzierbar und $g(x_0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann $fg$ in $x_0$ differenzierbar ist mit $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0)$.

(b) Bestimmen Sie - wenn existent - $h'(0)$ für die Funktion $h(x) := \frac{x+x|x|}{i+|x|^3}$, $x \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 3** (4 Punkte). Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(a) Für beliebige $d \in (0, +\infty)$ gilt $1 + \frac{d}{2+d} < \sqrt{1+d} < 1 + \frac{d}{2}$.

(b) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar in $(a, b)$, und existiert der Grenzwert $\lim_{x\to a+} f'(x) =: L$, so ist $f$ differenzierbar in $a$ mit $f'(a) = L$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte). (a) Zeigen Sie, dass $p(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + 2x^3 + x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist. Geben Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von $p$ an der Stelle 2 an.

(b) Für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ gelte $\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leq |x_1 - x_2|^2$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\varphi$ konstant auf $\mathbb{R}$ ist.

**ABGABE:** 18.10.23 BIS 10 UHR, BRIEFKASTEN „ANALYSIS II“, FOYER WSC-GEBÄUDE. GEHEFTET UND UNTER ANGABE VON NAMEN UND ÜBUNGSGRUPPE.