

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra im WS 23/24, Blatt 1

Aufgabe 1 (Euklidischer Algorithmus für Polynome)

1. Erinnern Sie sich an das Argument warum für jede Primzahl p die Menge $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper ist. (Schauen Sie das notfalls im Skript zur Linearen Algebra 1 nach. Diesen Aufgabenteil sollten Sie nicht abgeben.)
2. Erinnern Sie sich an den euklidischen Algorithmus für Polynome (Polynomdivision für Teilen mit Rest) und verwenden Sie diesen um für die Polynome $p(x) = x^3 - 2$ und $q(x) = x^2 + x$ Polynome $m(x), n(x)$ zu finden, so dass gilt:

$$m(x)p(x) + n(x)q(x) = 1.$$

Aufgabe 2 (Konstruktionen mit Zirkel und Lineal I) Erklären Sie kurz, wie Sie die folgenden Zahlen und Figuren mit Zirkel und Lineal konstruieren können. Geben Sie dabei jeweils auch kurz an, wieso die Konstruktion funktioniert.

1. $\frac{1}{3}$.
2. Ein Quadrat.
3. Ein regelmäßiges 6-Eck.
4. $\sqrt{5}$.
5. $\sqrt{1+i}$.

Aufgabe 3 (Konstruktion eines regelmäßigen 5-Ecks) In der linearen Algebra haben wir die Einheitswurzeln in den komplexen Zahlen kennen gelernt (schauen Sie das nach). Insbesondere wissen Sie, dass die Zahlen

$$1, e^{\frac{2\pi i}{5}}, e^{\frac{2\pi i}{5} \cdot 2}, e^{\frac{2\pi i}{5} \cdot 3}, e^{\frac{2\pi i}{5} \cdot 4}$$

die Nullstellen des Polynoms $x^5 - 1$ in \mathbb{C} sind. Wir schreiben $\zeta_5 := e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

1. Machen Sie eine Skizze der Zahlen $1, \zeta_5, \zeta_5^2, \zeta_5^3, \zeta_5^4$ in der komplexen Ebene und erklären Sie kurz, wieso diese Zahlen die Ecken eines regelmäßigen 5-Ecks sind.
2. Machen Sie sich an der Skizze klar, dass es zur Konstruktion eines regelmäßigen 5-Ecks mit Zirkel und Lineal genügt, wenn wir $\frac{\zeta_5 + \zeta_5^4}{2}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren können.
3. Zeigen Sie, dass aus der Tatsache, dass $1, \zeta_5, \zeta_5^2, \zeta_5^3, \zeta_5^4$ die Nullstellen von $x^5 - 1$ sind folgt, dass gilt:

$$1 + \zeta_5 + \zeta_5^2 + \zeta_5^3 + \zeta_5^4 = 0.$$

4. Finden Sie eine quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, für die $\zeta_5 + \zeta_5^4$ eine Nullstelle ist und nutzen Sie diese Gleichung um eine Formel für $\zeta_5 = a + ib$ anzugeben.

Das hatten Sie sich auf einem Übungsblatt zur Linearen Algebra 2 schon einmal allgemeiner überlegt.

5. Konstruieren Sie ζ_5 mit Zirkel und Lineal, d.h., überlegen Sie sich, wie Sie mit Hilfe der vorigen Aufgabenteile eine Konstruktionsanleitung finden können und führen Sie diese einmal selbst durch.

Abgabe: Sie können Aufgaben 1 und 3 bis Montag 16.10. um 20:00 Uhr auf Moodle abgeben.

Bitte geben Sie die Aufgaben in 2er-Gruppen ab.

Wichtig: Geben Sie eine einzelne pdf-Datei ab. Bitte verwenden Sie einen Dateinamen der Form:

VornameNachnameBlatt1.pdf.

Schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf die erste Seite.

Abgeschriebene Lösungen und die zugehörigen Originale werden nicht bewertet. Wenn Sie ehrlich selbst aufschreiben, müssen Sie sich keine Sorge machen, das merken wir schon.

