

Logik

Jovan Petrov

9. Januar 2025

1 Kalkül des natürlichen Schließens

1.1 Konjunktion

Regel 1.1: Konjunktionseinführung

$$(E\wedge): \mathfrak{A}_L, \mathfrak{B}_{L'} \Rightarrow (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})_{L \cup L'}$$

Regel 1.2: Konjunktionsbeseitigung (1)

$$(B\wedge)_1: (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})_L \Rightarrow \mathfrak{A}_L$$

Regel 1.3: Konjunktionsbeseitigung (2)

$$(B\wedge)_2: (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})_L \Rightarrow \mathfrak{B}_L$$

Beispiel 1.1. (Kommutativität der Konjunktion) Wir zeigen, dass $A \wedge B \models B \wedge A$

1	$A \wedge B$	(P1)		
2	A	$(B\wedge)_1$	1	(1)
3	B	$(B\wedge)_2$	1	(1)
4	$B \wedge A$	$(E\wedge)$	2, 3	(1)

Beispiel 1.2. (Assoziativität der Konjunktion) Wir zeigen, dass $A \wedge (B \wedge C) \models (A \wedge B) \wedge C$

1	$A \wedge (B \wedge C)$	(P1)		
2	A	$(B\wedge)_1$	1	(1)
3	$B \wedge C$	$(B\wedge)_2$	1	(1)
4	B	$(B\wedge)_1$	3	(1)
5	C	$(B\wedge)_2$	3	(1)
6	$A \wedge B$	$(E\wedge)$	2, 4	(1)
7	$(A \wedge B) \wedge C$	$(E\wedge)$	6, 5	(1)

1.2 Subjunktion

Regel 1.4: Subjunktionseinführung

$$(E \rightarrow): [\mathfrak{A}_i] \dots \mathfrak{B}_L \Rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})_{L \setminus \{i\}}$$

Regel 1.5: Subjunktionsbeseitigung/ Modus ponens

$$(B \rightarrow): (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})_L, \mathfrak{A}_{L'} \Rightarrow \mathfrak{B}_{L \cup L'}$$

Beispiel 1.3. Wir zeigen, dass $A \rightarrow (B \wedge C) \models A \rightarrow B$

1	$A \rightarrow (B \wedge C)$	(P1)		
2	A	(A2)		
3	$B \wedge C$	(B \rightarrow)	1,2	(1,2)
4	B	(B \wedge)	3	(1,2)
5	$A \rightarrow B$	(E \rightarrow)	4	(1)

Beispiel 1.4. Wir zeigen, dass $A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \rightarrow C$

1	$A \rightarrow B$	(P1)		
2	$B \rightarrow C$	(P2)		
3	A	(A3)		
4	B	(B \rightarrow)	1,3	(1,3)
5	C	(B \rightarrow)	2,4	(1,2,3)
6	$A \rightarrow C$	(E \rightarrow)	3,5	(1,2)

Sollte in Zeile 6 3,5 oder nur 5 stehen?

1.3 Disjunktion

Regel 1.6: Disjunktionseinführung (1)

$$(E \vee): \mathfrak{A}_L \Rightarrow (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})_L$$

Regel 1.7: Disjunktionseinführung (2)

$$(E \vee): \mathfrak{A}_L \Rightarrow (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A})_L$$

Regel 1.8: Disjunktionsbeseitigung

$$(B \vee): (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})_L, [\mathfrak{A}] \dots \mathfrak{C}, [\mathfrak{B}] \dots \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{C}$$

Beispiel 1.5. Wir zeigen, dass $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C \models C$

1	$A \vee B$	(P1)		
2	$A \rightarrow C$	(P2)		
3	$B \rightarrow C$	(P3)		
4	A	(A4)		
5	B	(A5)		
6	C	(B \rightarrow)	2, 4	(2,4)
7	C	(B \rightarrow)	3, 5	(3,5)
8	C	(B \vee)	1, 6, 7	(1,2,3)