

I. Tìm nguyên hàm bằng định nghĩa và các tính chất

1/ Tìm nguyên hàm của các hàm số.

1. $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$

ĐS. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$

2. $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$

ĐS. $F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$

3. $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

ĐS. $F(x) = \ln x + \frac{1}{x} + C$

4. $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^2}$

ĐS. $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{1}{x} + C$

5. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

ĐS. $F(x) = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5} + C$

6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

ĐS. $F(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + C$

7. $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$

ĐS. $F(x) = x - 4\sqrt{x} + \ln x + C$

8. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$

ĐS. $F(x) = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C$

9. $f(x) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

ĐS. $F(x) = x - \sin x + C$

10. $f(x) = \tan^2 x$

ĐS. $F(x) = \tan x - x + C$

11. $f(x) = \cos^2 x$

ĐS. $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

12. $f(x) = (\tan x - \cot x)^2$

ĐS. $F(x) = \tan x - \cot x - 4x + C$

13. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

ĐS. $F(x) = \tan x - \cot x + C$

14. $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

ĐS. $F(x) = -\cot x - \tan x + C$

15. $f(x) = \sin 3x$

ĐS. $F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$

16. $f(x) = 2\sin 3x \cos 2x$

ĐS. $F(x) = -\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x + C$

17. $f(x) = e^x(e^x - 1)$

ĐS. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + C$

18. $f(x) = e^x(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x})$

ĐS. $F(x) = 2e^x + \tan x + C$

19. $f(x) = 2a^x + 3^x$

ĐS. $F(x) = \frac{2a^x}{\ln a} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$

20. $f(x) = e^{3x+1}$

ĐS. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C$

2/ Tìm hàm số f(x) biết rằng

1. $f'(x) = 2x + 1$ và $f(1) = 5$

ĐS. $f(x) = x^2 + x + 3$

2. $f'(x) = 2 - x^2$ và $f(2) = 7/3$

ĐS. $f(x) = 2x - \frac{x^3}{3} + 1$

3. $f'(x) = 4\sqrt{x} - x$ và $f(4) = 0$ ĐS. $f(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{40}{3}$
4. $f'(x) = x - \frac{1}{x^2} + 2$ và $f(1) = 2$ ĐS. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + 2x - \frac{3}{2}$
5. $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ và $f(-1) = 3$ ĐS. $f(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$
6. $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, $f'(1) = 0$, $f(1) = 4$, $f(-1) = 2$ ĐS. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{5}{2}$

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số.

Tính $I = \int f[u(x)].u'(x)dx$ bằng cách đặt $t = u(x)$

- ☐ Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$
- ☐ $I = \int f[u(x)].u'(x)dx = \int f(t)dt$

BÀI TẬP

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

1. $\int (5x-1)dx$
2. $\int \frac{dx}{(3-2x)^5}$
3. $\int \sqrt{5-2x}dx$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$
5. $\int (2x^2+1)^7 xdx$
6. $\int (x^3+5)^4 x^2 dx$
7. $\int \sqrt{x^2+1}.xdx$
8. $\int \frac{x}{x^2+5} dx$
9. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5+2x^3}} dx$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$
11. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$
12. $\int x.e^{x^2+1} dx$
13. $\int \sin^4 x \cos x dx$
14. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$
15. $\int \cot g x dx$
16. $\int \frac{tg x dx}{\cos^2 x}$
17. $\int \frac{dx}{\sin x}$
18. $\int \frac{dx}{\cos x}$
19. $\int tg x dx$
20. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
21. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x-3}}$
22. $\int \frac{e^{tg x}}{\cos^2 x} dx$
23. $\int \sqrt{1-x^2}.dx$
24. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
25. $\int x^2 \sqrt{1-x^2}.dx$
26. $\int \frac{dx}{1+x^2}$
27. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$
28. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$
29. $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$
30. $\int x\sqrt{x-1}.dx$
31. $\int \frac{dx}{e^x+1}$
32. $\int x^3 \sqrt{x^2+1}.dx$

2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

Nếu $u(x)$, $v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên I

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$$

Hay

$\int u dv = uv - \int v du$ (với $du = u'(x)dx$, $dv = v'(x)dx$)

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

1. $\int x.\sin x dx$
2. $\int x \cos x dx$
3. $\int (x^2+5) \sin x dx$
4. $\int (x^2+2x+3) \cos x dx$
5. $\int x \sin 2x dx$
6. $\int x \cos 2x dx$
7. $\int x.e^x dx$
8. $\int \ln x dx$
9. $\int x \ln x dx$
10. $\int \ln^2 x dx$
11. $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$
12. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

13. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ 14. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$ 15. $\int \sin \sqrt{x} dx$ 16. $\int \ln(x^2 + 1) dx$
 17. $\int e^x \cdot \cos x dx$ 18. $\int x^3 e^{x^2} dx$ 19. $\int x \ln(1 + x^2) dx$ 20. $\int 2^x x dx$
 21. $\int x \lg x dx$ 22. $\int 2x \ln(1 + x) dx$ 23. $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$ 24. $\int x^2 \cos 2x dx$

TÍCH PHÂN

I. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG CÁCH SỬ DỤNG TÍNH CHẤT VÀ NGUYÊN HÀM CƠ BẢN:

- | | |
|---|---|
| 1. $\int_0^1 (x^3 + x + 1) dx$ | 2. $\int_1^e (x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + x^2) dx$ |
| 2. $\int_1^3 x - 2 dx$ | 3. $\int_1^2 \sqrt{x+1} dx$ |
| 4. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx$ | 5. $\int_0^1 (e^x + x) dx$ |
| 6. $\int_0^1 (x^3 + x\sqrt{x}) dx$ | 7. $\int_1^2 (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$ |
| 8. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin x + 2 \cos x + \frac{1}{x}) dx$ | 9. $\int_0^1 (e^x + x^2 + 1) dx$ |
| 10. $\int_1^2 (x^2 + x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$ | 11. $\int_1^2 (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1) dx$ |
| 12. $\int_{-1}^3 (x^3 + 1) \cdot dx$ | 13. $\int_{-1}^2 \frac{x \cdot dx}{x^2 + 2}$ |
| 14. $\int_1^{e^2} \frac{7x - 2\sqrt{x} - 5}{x} dx$ | 15. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}$ |
| 16. $\int_1^2 \frac{(x+1) \cdot dx}{x^2 + x \ln x}$ | 17. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x \cdot dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ |
| 18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} \cdot dx}{\cos^2 x}$ | 19. $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ |
| 20. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} \cdot dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}$ | 21. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 8x}}$ |
| 22. $\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ | 22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x}$ |
| 24. $\int_{-1}^1 (2x^2 + x + 1) dx$ | 25. $\int_0^2 (2x^3 - x - \frac{2}{3}) dx$ |

$$26. \int_{-2}^2 x(x-3)dx$$

$$28. \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$$

$$30. \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\sqrt{e}}} \frac{dx}{x}$$

$$32. \int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{x} + 5 - 7x}{x} dx$$

$$27. \int_{-3}^4 (x^2 - 4)dx$$

$$29. \int_1^2 \frac{x^2 - 2x}{x^3} dx$$

$$31. \int_1^{16} \sqrt{x} \cdot dx$$

$$33. \int_1^8 \left(4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$$

II. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ:

$$1. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + 3\cos x} dx$$

$$4. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x dx$$

$$6. \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1} dx$$

$$8. \int_0^1 x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

$$10. \int_0^1 x^3 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$12. \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$14. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$16. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$$

$$18. \int_0^1 e^{x^2 + 2} x dx$$

$$20. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$$

$$2. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan x dx$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + 4\sin x \cos x} dx$$

$$7. \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} dx$$

$$9. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$$

$$11. \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^3 + 1}} dx$$

$$13. \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$15. \int_0^1 \frac{1}{(1 + 3x^2)^2} dx$$

$$17. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$$

$$19. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx$$

$$21. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$$

$$22. \int_0^1 e^{x^2+2} x dx$$

$$24. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$26. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$$

$$28. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+4 \sin x} \cos x dx$$

$$30. \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$$

$$32. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$$

$$34. \int_1^2 \frac{1}{x \sqrt{x^3+1}} dx$$

$$36. \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

$$38. \int_1^e \frac{e^{2 \ln x+1}}{x} dx$$

$$40. \int_e^{e^2} \frac{1}{\cos^2(1+\ln x)} dx$$

$$42. \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$$

$$44. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} dx$$

$$46. \int_1^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

$$47. \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

$$49. \int_1^e \frac{e^{2 \ln x+1}}{x} dx$$

$$51. \int_e^{e^2} \frac{1}{\cos^2(1+\ln x)} dx$$

$$23. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx$$

$$25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+3 \cos x} dx$$

$$27. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x dx$$

$$29. \int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx$$

$$31. \int_0^1 x^3 \sqrt{x^2+1} dx$$

$$33. \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$35. \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$$

$$37. \int_1^e \frac{\sqrt{1+3 \ln x} \ln x}{x} dx$$

$$39. \int_e^{e^2} \frac{1+\ln^2 x}{x \ln x} dx$$

$$41. \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx$$

$$43. \int_0^1 x \sqrt{x+1} dx$$

$$45. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} dx$$

$$46. \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$$

$$48. \int_1^e \frac{\sqrt{1+3 \ln x} \ln x}{x} dx$$

$$50. \int_e^{e^2} \frac{1+\ln^2 x}{x \ln x} dx$$

$$52. \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3+5} dx$$

$$53. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x + 1) \cos x dx$$

$$54. \int_0^4 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$55. \int_0^4 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$56. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$57. \int_{-1}^0 e^{2x+3} dx$$

$$58. \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$59. \int_0^1 \frac{x}{(2x+1)^3} dx$$

$$60. \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$$

$$61. \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$$

$$62. \int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx$$

$$63. \int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-4x+4} dx$$

$$64. \int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1} dx$$

$$65. \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin^6 x + \cos^6 x) dx$$

$$66. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{1+\cos x} dx$$

$$67. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x} dx$$

$$68. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 2x dx$$

$$69. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x} dx$$

$$70. \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx.$$

$$71. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$$

$$72. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+2 \sin 2x} dx$$

$$73. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{2 \cos 3x+1} dx$$

$$74. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5-2 \sin x} dx$$

$$75. \int_{-2}^0 \frac{2x+2}{x^2+2x-3} dx$$

$$76. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$77. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx$$

$$78. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$$

$$79. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$80. \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$81. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1+\sin^2 x)^3 dx$$

$$82. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

$$83. \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$$

$$84. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$$

$$85. \int_1^e \frac{1 + \ln^2 x}{x} dx$$

$$87. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x} dx$$

$$89. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3 + \sin 2x}} dx$$

$$91. \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$$

$$93. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\sin 2x} dx$$

$$95. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$$

$$97. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx$$

$$99. \int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx$$

$$101. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$$

$$103. \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$105. \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$$

$$107. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x + \sin x} dx$$

$$109. \int_1^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$101. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{9 + 3x^2}}{x^2} dx$$

$$113. \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

$$115. \int_0^1 \frac{1 + x^4}{1 + x^6} dx$$

$$117. \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$86. \int_0^1 x^5 (1 - x^3)^6 dx$$

$$88. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos 2x} dx$$

$$90. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$$

$$92. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx$$

$$94. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \operatorname{tg}^8 x) dx$$

$$96. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$$

$$98. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx$$

$$100. \int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x} \ln x}{x} dx$$

$$102. \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$104. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$106. \int_0^1 \frac{x}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

$$108. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$110. \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

$$112. \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{(1 + x)^5}} dx$$

$$114. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{7 + \cos 2x}} dx$$

$$116. \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$$

$$118. \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + 3x}}$$

$$119. \int_1^2 \frac{x\sqrt{x-1}}{x-5} dx$$

$$120. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$121. \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$$

$$122. \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx$$

$$123. \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{e^x+2}} dx$$

$$124. \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$$

$$125. \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3+1} dx$$

$$126. \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN:

Công thức tích phân từng phần : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$

Tích phân các hàm số để phát hiện u và dv

@ **Dạng 1** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx$

$$\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx \end{cases}$$

@ **Dạng 2:** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \ln(ax) dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(ax) \\ dv = f(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \int f(x)dx \end{cases}$$

@ **Dạng 3:** $\int_{\alpha}^{\beta} e^{ax} \cdot \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{bmatrix} dx$

Ví dụ 1: tính các tích phân sau

a/ $\int_0^1 \frac{x^2 e^x}{(x+1)^2} dx$ đặt $\begin{cases} u = x^2 e^x \\ dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases}$

b/ $\int_2^3 \frac{x^8 dx}{(x^4-1)^3}$ đặt $\begin{cases} u = x^5 \\ dv = \frac{x^3 dx}{(x^4-1)^3} \end{cases}$

c/ $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = I_1 - I_2$

Tính $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ bằng phương pháp đổi biến số

Tính $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$ bằng phương pháp từng phần : đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \end{cases}$

Bài tập

1. $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x^3} dx$

2. $\int_1^e x \ln x dx$

3. $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$

4. $\int_1^e x^2 \ln x dx$

5. $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x^3} dx$

6. $\int_1^e x \ln x dx$

7. $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$

8. $\int_1^e x^2 \ln x dx$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos x) \sin x dx$

10. $\int_1^e (x + \frac{1}{x}) \ln x dx$

11. $\int_1^2 \ln(x^2 + x) dx$

12. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x \tan^2 x dx$

13. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

15. $\int_0^1 x e^x dx$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

Tính các tích phân sau

1) $\int_0^1 x e^{3x} dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cos x dx$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x) \sin 3x dx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$

5) $\int_1^e x \ln x dx$

6) $\int_1^e (1-x^2) \ln x dx$

7) $\int_1^3 4x \ln x dx$

8) $\int_0^1 x \ln(3+x^2) dx$

9) $\int_1^2 (x^2 + 1) e^x dx$

10) $\int_0^{\pi} x \cos x dx$

11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 2x) \sin x dx$

$$\begin{array}{llll}
13) \int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx & 14) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx & 15) \int_0^1 e^x \sin x dx & 16) \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx \\
17) \int_1^e x \ln^2 x dx & 18) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x + \sin x}{\cos^2 x} dx & 19) \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx & 20) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(2 \cos^2 x - 1) dx \\
21) \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx & 22) \int_0^1 (x+1)^2 e^{2x} dx & 23) \int_1^e (x \ln x)^2 dx & 24) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln(1 + \cos x) dx \\
25) \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx & 26) \int_0^1 x t g^2 x dx & 27) \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx & 28) \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx \\
29) \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx & 30) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos^3 x) \sin x dx & 31) \int_0^2 (2x+7) \ln(x+1) dx & 32) \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx
\end{array}$$

III. TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỶ:

$$\begin{array}{ll}
1. \int_3^5 \frac{2x-1}{x^2-3x+2} dx & 2. \int_a^b \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx \\
3. \int_0^1 \frac{x^3+x+1}{x+1} dx & 4. \int_0^1 \frac{x^3+x+1}{x^2+1} dx \\
5. \int_0^1 \frac{x^2}{(3x+1)^3} dx & 6. \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2(x+3)^2} dx \\
7. \int_1^2 \frac{1-x^{2008}}{x(1+x^{2008})} dx & 8. \int_{-1}^0 \frac{2x^3-6x^2+9x+9}{x^2-3x+2} dx \\
9. \int_2^3 \frac{x^4}{(x^2-1)^2} dx & 10. \int_0^1 \frac{x^{2n-3}}{(1+x^2)^n} dx \\
11. \int_1^2 \frac{x^2-3}{x(x^4+3x^2+2)} dx & 12. \int_1^2 \frac{1}{x(1+x^4)} dx \\
13. \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx & 14. \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx \\
15. \int_0^2 \frac{1}{x^2-2x+2} dx & 16. \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx \\
17. \int_2^4 \frac{1}{x^3-2x^2+x} dx & 18. \int_2^3 \frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2} dx \\
19. \int_1^2 \frac{1-x^2}{1+x^4} dx & 20. \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \\
21. \int_0^1 \frac{x^6+x^5+x^4+2}{x^6+1} dx & 22. \int_0^1 \frac{2-x^4}{1+x^2} dx \\
23. \int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6} dx & 24. \int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx
\end{array}$$

$$25. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

$$26. \int_2^3 \frac{x+2}{x-1} dx$$

$$27. \int_0^1 \left(\frac{2x-2}{x+1} - 3 \right) dx$$

$$28. \int_{-1}^0 \left(\frac{x-2}{2x-1} - 2x+1 \right) dx$$

$$29. \int_0^2 \left(\frac{3x-1}{x+2} - x-1 \right) dx$$

$$30. \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 3}{x+3} dx$$

$$31. \int_{-1}^0 \left(\frac{x^2 + x + 1}{x-1} - 2x+1 \right) dx$$

$$32. \int_0^1 \left(\frac{2x^2 + x - 2}{x+1} - x+1 \right) dx$$

$$33. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$$

IV. TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC:

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x dx$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^5 x dx$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^3 x) dx$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad 6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x) dx$$

$$7. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$$

$$8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{10} x + \cos^{10} x - \cos^4 x \sin^4 x) dx$$

$$9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 - \cos x}$$

$$10. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \sin x} dx$$

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$12. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos x}$$

$$13. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}$$

$$14. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$$

$$15. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx$$

$$16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 + \sin x} dx$$

$$17. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1 + \cos x} dx$$

$$18. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x + 1} dx$$

$$19. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^2}$$

$$21. \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx$$

$$23. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^4 x dx$$

$$25. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x \cos(x + \frac{\pi}{4})}$$

$$27. \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx$$

$$29. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos^4 x} dx$$

$$31. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{1 + \cos x} dx$$

$$33. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$$

$$35. \int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$$

$$37. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

$$39. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^5 x dx$$

$$41. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 \sin x + 3}$$

$$43. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \sin(x + \frac{\pi}{6})}$$

$$20. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + 2 \cos x + 3} dx$$

$$22. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot g^3 x dx$$

$$24. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + tg x} dx$$

$$26. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 7 \cos x + 6}{4 \sin x + 5 \cos x + 5} dx$$

$$28. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + \sqrt{13}}$$

$$30. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$32. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin 2x - \sin x}$$

$$34. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1 + \sin^2 x)^3 dx$$

$$36. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x tg x} dx$$

$$38. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \sin x + 1}$$

$$40. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$2. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}$$

$$4. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cos(x + \frac{\pi}{4})}$$

$$45. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x}$$

$$47. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4 \sin x dx}{(\sin x + \cos x)^3}$$

$$49. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \sqrt[3]{x} dx$$

$$51. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot e^{2x+1} dx$$

$$53. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x \sin 4x}{\operatorname{tg} x + \cot g 2x} dx$$

$$55. \int_1^2 \cos(\ln x) dx$$

$$57. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \cos^2 x dx$$

$$59. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$61. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx$$

$$63. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2}$$

$$65. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 7x dx$$

$$67. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} dx$$

$$69. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 7x \cdot \sin 2x dx$$

$$46. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx$$

$$48. \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx$$

$$50. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$52. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx$$

$$54. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6}$$

$$56. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$$

$$58. \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx$$

$$60. \int_0^{\pi} e^{2x} \sin^2 x dx$$

$$62. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$$

$$64. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x) \cos x}{(1 + \sin x)(2 - \cos^2 x)} dx$$

$$66. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$$

$$68. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x \cdot \cos 3x dx$$

$$70. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \frac{x}{2} \cos x dx$$

$$71. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$$

V. TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ:

$$\int_a^b R(x, f(x)) dx \quad \text{Trong đó } R(x, f(x)) \text{ có các dạng:}$$

$$+) R(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}) \text{ Đặt } x = a \cos 2t, t \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$+) R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \text{ Đặt } x = |a| \sin t \text{ hoặc } x = |a| \cos t$$

$$+) R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) \text{ Đặt } t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$+) R(x, f(x)) = \frac{1}{(ax+b)\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} \text{ Với } (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = k(ax+b)$$

$$\text{Khi đó đặt } t = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}, \text{ hoặc đặt } t = \frac{1}{ax+b}$$

$$+) R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) \text{ Đặt } x = |a| \operatorname{tg} t, t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$+) R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \text{ Đặt } x = \frac{|a|}{\cos x}, t \in [0; \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$$

$$+) R(\sqrt[n_1]{x}; \sqrt[n_2]{x}; \dots; \sqrt[n_i]{x}) \text{ Gọi } k = \text{BCNN}(n_1; n_2; \dots; n_i)$$

$$\text{Đặt } x = t^k$$

$$1. \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

$$2. \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$3. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+5}}$$

$$4. \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^3+1}}$$

$$5. \int_1^2 \sqrt{x^2+2008} dx$$

$$6. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2008}}$$

$$7. \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^2} dx$$

$$8. \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$$

$$9. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1}{x^2 \sqrt{x^2+1}} dx$$

$$10. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

$$11. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$12. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$13. \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

$$14. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{7 + \cos 2x}}$$

$$17. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \cos^2 x}}$$

$$19. \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1 + x^2}}$$

$$21. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{2x + 1}}$$

$$23. \int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{2x + 1} + 1}$$

$$25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^3 x} \sin x \cos^5 x dx$$

$$27. \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$29. \int_{\frac{5}{4}}^1 \sqrt{12x - 4x^2 - 8} dx$$

$$31. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5 + x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

$$33. \int_{-1}^0 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x + 1}) dx$$

$$35. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}} + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$$

$$37. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \cos 2x}}$$

$$39. \int_0^7 \frac{x + 2}{\sqrt[3]{x + 3}} dx$$

$$16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\cos x - \cos^2 x} dx$$

$$18. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$$

$$20. \int_0^3 x^3 \sqrt{10 - x^2} dx$$

$$22. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$24. \int_0^1 x^{15} \sqrt{1 + 3x^8} dx$$

$$26. \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

$$28. \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

$$30. \int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x} \ln x}{x} dx$$

$$32. \int_0^4 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx$$

$$34. \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\ln^2 x}{x \sqrt{\ln x + 1}} dx$$

$$36. \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$$

$$38. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$$

$$40. \int_0^{2a} \sqrt{x^2 + a^2} dx$$

VI. MỘT SỐ TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT:

Bài toán mở đầu: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a; a]$, khi đó: $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$

Ví dụ: +) Cho $f(x)$ liên tục trên $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2 \cos 2x}$,

$$\text{Tính: } \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$$

+) Tính $\int_{-1}^1 \frac{x^4 + \sin x}{1+x^2} dx$

Bài toán 1: Hàm số $y = f(x)$ liên tục và lẻ trên $[-a, a]$, khi đó: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Ví dụ: Tính: $\int_{-1}^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

Bài toán 2: Hàm số $y = f(x)$ liên tục và chẵn trên $[-a, a]$, khi đó: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

Ví dụ: Tính $\int_{-1}^1 \frac{|x| dx}{x^4 - x^2 + 1}$ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{4 - \sin^2 x} dx$

Bài toán 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, chẵn trên $[-a, a]$, khi đó: $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \int_0^a f(x) dx$
($1 \neq b > 0, \forall a$)

Ví dụ: Tính: $\int_{-3}^3 \frac{x^2 + 1}{1 + 2^x} dx$ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \sin 3x \cos 5x}{1 + e^x} dx$

Bài toán 4: Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[0; \frac{\pi}{2}]$, thì $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

Ví dụ: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2009} x}{\sin^{2009} x + \cos^{2009} x} dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

Bài toán 5: Cho $f(x)$ xác định trên $[-1; 1]$, khi đó: $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$

Ví dụ: Tính $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x} dx$ $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{2 + \cos x} dx$

Bài toán 6: $\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_0^b f(b-x) dx = \int_0^b f(x) dx$

Ví dụ: Tính $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x \ln(1 + \tan x) dx$

Bài toán 7: Nếu $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và tuần hoàn với chu kỳ T thì:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \Rightarrow \int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx$$

Ví dụ: Tính $\int_0^{2008\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$

Các bài tập áp dụng:

$$1. \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx$$

$$2. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7 - x^5 + x^3 - x + 1}{\cos^4 x} dx$$

$$3. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+e^x)(1+x^2)}$$

$$4. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{4 - \sin^2 x} dx$$

$$5. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos 2x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$$

$$6. \int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx$$

$$7. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^5 x}{\sqrt{1+\cos x}} dx$$

$$8. \int_{\frac{1}{e}}^{tga} \frac{x dx}{1+x^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot ga} \frac{dx}{x(1+x^2)} = 1 \quad (tga > 0)$$

VII. TÍCH PHÂN HÀM GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI:

$$1. \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$$

$$2. \int_0^2 |x^2 - 4x + 3| dx$$

$$3. \int_0^1 |x - m| dx$$

$$4. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx$$

$$5. \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$$

$$6. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2} dx$$

$$7. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin 2x| dx$$

$$8. \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos x} dx$$

$$9. \int_{-2}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$$

$$10. \int_0^3 |2^x - 4| dx$$

$$11. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$$

$$12. \quad 2) \int_{-1}^4 |x^2 - 3x + 2| dx$$

$$13. \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$$

$$14. \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} dx$$

$$15. \int_0^3 |2^x - 4| dx$$

$$16. \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$$

$$17. \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx$$

$$18. \int_0^2 |x^2 - x| dx$$

VIII. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN:

TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

Ví dụ 1 : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a/ Đồ thị hàm số $y = x + x^{-1}$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và đường thẳng $x = 1$

b/ Đồ thị hàm số $y = e^x + 1$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$

c/ Đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và đường thẳng $x = 4$

d/ Đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2\pi$

Ví dụ 2 : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a/ Đồ thị hàm số $y = x + x^{-1}$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và đường thẳng $x = 1$

b/ Đồ thị hàm số $y = e^x + 1$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$

c/ Đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và đường thẳng $x = 4$

d/ Đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2\pi$

BÀI 1: Cho (p) : $y = x^2 + 1$ và đường thẳng (d): $y = mx + 2$. Tìm m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường trên có diện tích nhỏ nhất

Bài 2: Cho $y = x^4 - 4x^2 + m$ (c) Tìm m để hình phẳng giới hạn bởi (c) và Ox có diện tích ở phía trên Ox và phía dưới Ox bằng nhau

BÀI 3: Xác định tham số m sao cho $y = mx$ chia hình phẳng giới hạn bởi $y = \begin{cases} x - x^3 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Có hai phần diện tích bằng nhau

BÀI 4: (p): $y^2 = 2x$ chia hình phẳng giới bởi $x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần. Tính diện tích mỗi phần

BÀI 5: Cho $a > 0$ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y = \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4} \\ y = \frac{a^2 - ax}{1 + a^4} \end{cases}$ Tìm a để

diện tích lớn nhất

BÀI 6: Tính diện tích của các hình phẳng sau:

$$\begin{array}{lll} 1) (H_1): \begin{cases} y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \\ y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \end{cases} & 2) (H_2): \begin{cases} y = |x^2 - 4x + 3| \\ y = x + 3 \end{cases} & 3) (H_3): \begin{cases} y = \frac{-3x - 1}{x - 1} \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ 4) (H_4): \begin{cases} y = x^2 \\ x = -y^2 \end{cases} & 5) (H_5): \begin{cases} y = |x| \\ y = 2 - x^2 \end{cases} & 6) (H_6): \begin{cases} y^2 + x - 5 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \\ 7) (H_7): \begin{cases} y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \\ y = 0 \\ x = e \\ x = 1 \end{cases} & 8) (H_8): \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 4x \end{cases} & 9) (H_9): \begin{cases} y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = |x| \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
10) (H_{10}): \begin{cases} y^2 - 2y + x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} & 11) \begin{cases} (C): y = \sqrt{x} \\ (d): y = 2 - x \\ (Ox) \end{cases} & 12) \begin{cases} (C): y = e^x \\ (d): y = 2 \\ (\Delta): x = 1 \end{cases} \\
13) \begin{cases} y^2 = 2x + 1 \\ y = x - 1 \end{cases} & 14) \begin{cases} y = -\sqrt{4 - x^2} \\ x^2 + 3y = 0 \end{cases} & 15) \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
16) \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = \frac{1}{1 + x^2} \end{cases} & 17) \begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x, y = 0, y = 3 \end{cases} & 18) \begin{cases} y = \ln x, \quad y = 0 \\ x = \frac{1}{e}, x = e \end{cases} \\
19) \begin{cases} y = \frac{1}{\sin^2 x}; y = \frac{1}{\cos^2 x} \\ x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{3} \end{cases} & 20): y = 4x - x^2; (p) \text{ và tiếp tuyến của } (p) \text{ đi qua } M(5/6, 6) & \\
21) \begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = -2x + 4 \\ y = 4x - 11 \end{cases} & 22) \begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = 3x - 15 \end{cases} & 23) \begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{x} \\ y = 0 \\ x = e \end{cases} \\
24) \begin{cases} y = /x^2 - 1/ \\ y = /x/ + 5 \end{cases} & 25) \begin{cases} y = x^3 \\ y^2 = x \end{cases} & 26) \begin{cases} y = -3x^2 - /x/ + 2 \\ y = 0 \end{cases} \\
27) \begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 4 - x \end{cases} & 28) \begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = x^2 + 4x + 5 \\ y = 1 \end{cases} & 29) \begin{cases} y = /x^2 - 1/ \\ y = -x^2 + 7 \end{cases} \\
30) \begin{cases} y = x^3 \\ y = 0 \\ x = -2; x = 1 \end{cases} & 31) \begin{cases} y = \sin x - 2 \cos x \\ y = 3 \\ x = 0; x = \pi \end{cases} & 32) \begin{cases} y = x + 3 + \frac{2}{x} \\ y = 0 \end{cases} \\
33) \begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = x + 2 \end{cases} & 34) \begin{cases} y = 2x^2 - 2x \\ y = x^2 + 3x - 6 \\ x = 0; x = 4 \end{cases} & 35) \begin{cases} y = /x^2 - 5x + 6/ \\ y = 6 \end{cases} \\
36) \begin{cases} y = 2x^2 \\ y = x^2 - 2x - 1 \\ y = 2 \end{cases} & 37) \begin{cases} y = /x^2 - 3x + 2/ \\ y = 2 \end{cases} & \\
38) \begin{cases} y = /x^2 - 5x + 6/ \\ y = x + 1 \end{cases} & 39) \begin{cases} y = /x^2 - 3x + 2/ \\ y = -x^2 \end{cases} & 40) \begin{cases} y = /x^2 - 4x + 3/ \\ y = 3 \end{cases} \\
41) \begin{cases} y = e^x \\ y = e^{-x} \\ x = 1 \end{cases} & 42) \begin{cases} y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x^6}} \\ x = 0; x = 1 \end{cases} & 43) \begin{cases} y = \sin /x/ \\ y = /x/ - \pi \end{cases}
\end{array}$$

$$44) \begin{cases} y = 2x^2 \\ y = x^2 - 4x - 4 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$45) \begin{cases} y^2 = 2x \\ 2x + 2y + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$46) \begin{cases} y^2 = x^2(a^2 - x^2) \\ a > 0 \end{cases}$$

$$47) \begin{cases} y = (x+1)^2 \\ x = \sin \pi y \end{cases}$$

$$48) \begin{cases} y^2 = |x-1| \\ x = 2 \end{cases}$$

$$49) \begin{cases} x = |y^2 - 1| \\ x = 2 \end{cases} \quad 32)$$

$$\begin{cases} x = (y+1)^2 \\ y = \sin x \\ x = 0 \end{cases} \quad 33) \quad \begin{cases} y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \\ y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \end{cases} \quad 34) \quad \begin{cases} x = 0; \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}; y = 0 \end{cases}$$

$$35) \begin{cases} y = 5^{x-2} \\ y = 0 \\ x = 0; y = 3-x \end{cases} \quad 36) \begin{cases} y^2 = 6x \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \quad 37) \begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{x^2}{27} \\ y = \frac{27}{x} \end{cases} \quad 38)$$

$$\begin{cases} y^2 = (4-x)^3 \\ y^2 = 4x \end{cases} \quad 39) \quad \begin{cases} y = |\log x| \\ y = 0 \\ x = \frac{1}{10}, x = 10 \end{cases}$$

$$40) \begin{cases} ax = y^2 \\ ay = x^2 \end{cases} \quad (a > 0) \quad 41) \begin{cases} y = x \\ y = \sin^2 x + x \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad 42) \begin{cases} y^2 = 2x \\ 27y^2 = 8(x-1)^2 \end{cases} \quad 43) x^2/25 + y^2/9 = 1 \text{ và hai}$$

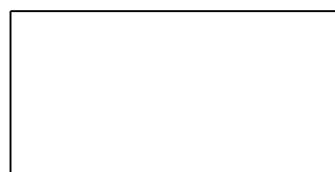
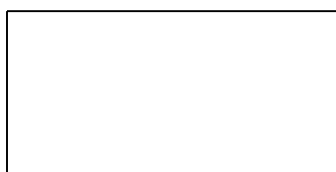
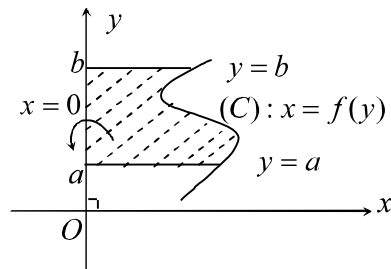
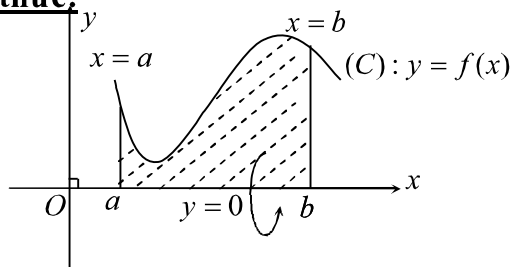
tiếp tuyến đi qua A(0;15/4)

44) Cho (p): $y = x^2$ và điểm A(2;5) đường thẳng (d) đi qua A có hệ số góc k. Xác định k để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (p) và (d) nhỏ nhất

$$45) \begin{cases} y = x^3 - 2x^2 + 4x - 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

Công thức:



$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy$$

Bài 1: Cho miền D giới hạn bởi hai đường : $x^2 + x - 5 = 0$; $x + y - 3 = 0$
 Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

Bài 2: Cho miền D giới hạn bởi các đường : $y = \sqrt{x}$; $y = 2 - x$; $y = 0$
 Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Oy

Bài 3: Cho miền D giới hạn bởi hai đường : $y = (x - 2)^2$ và $y = 4$
 Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh:

a) Trục Ox

b) Trục Oy

Bài 4: Cho miền D giới hạn bởi hai đường : $y = 4 - x^2$; $y = x^2 + 2$.
 Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

Bài 5: Cho miền D giới hạn bởi các đường : $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; $y = \frac{x^2}{2}$
 Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

Bài 6: Cho miền D giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$ và $y = 2x + 4$
 Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

Bài 7: Cho miền D giới hạn bởi các đường $y = y^2 = 4x$ và $y = x$
 Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

Bài 8: Cho miền D giới hạn bởi các đường $y = x^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}}$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$
 Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

Bài 9: Cho miền D giới hạn bởi các đường $y = x \ln x$; $y = 0$; $x = 1$; $x = e$
 Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

Bài 10: Cho miền D giới hạn bởi các đường $y = x \sqrt{\ln(1 + x^3)}$; $y = 0$; $x = 1$
 Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

1) $\begin{cases} y = (x - 2)^2 \\ y = 4 \end{cases}$ quay quanh trục a) Ox; b) Oy

2) $\begin{cases} y = x^2, y = 4x^2 \\ y = 4 \end{cases}$ quay quanh trục a) Ox; b) Oy

3) $\begin{cases} y = \frac{1}{x^2 + 1} \\ y = 0, x = 0, x = 1 \end{cases}$ quay quanh trục a) Ox; b) Oy

4) $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ quay quanh trục a) Ox; b) Oy

5) $\begin{cases} y = x \cdot \ln x \\ y = 0 \\ x = 1; x = e \end{cases}$ quay quanh trục a) Ox;

$$6) \text{ (D) } \begin{cases} y = x^2 (x > 0) \\ y = -3x + 10 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{quay quanh trục a) } 0x; \quad (H) \text{ nằm ngoài } y = x^2$$

$$7) \begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{quay quanh trục a) } 0x;$$

$$8) \text{ Miền trong hình tròn } (x - 4)^2 + y^2 = 1 \quad \text{quay quanh trục a) } 0x; \text{ b) } 0y$$

$$9) \text{ Miền trong (E): } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{quay quanh trục a) } 0x; \text{ b) } 0y$$

$$10) \begin{cases} y = xe^x \\ y = 0 \\ x = 1; 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{quay quanh trục } 0x;$$

$$11) \begin{cases} y = \sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x} \\ y = 0 \\ x = \frac{\pi}{2}; x = \pi \end{cases} \quad \text{quay quanh trục } 0x;$$

$$12) \begin{cases} y = x^2 \\ y = 10 - 3x \end{cases} \quad \text{quay quanh trục } 0x;$$

$$13) \text{ Hình tròn tâm } I(2;0) \text{ bán kính } R = 1 \quad \text{quay quanh trục a) } 0x; \text{ b) } 0y$$

$$14) \begin{cases} y = \frac{4}{x-4} \\ x = 0; x = 2 \end{cases} \quad \text{quay quanh trục } 0x;$$

$$15) \begin{cases} y = \sqrt{x-1} \\ y = 2 \\ x = 0; y = 0 \end{cases} \quad \text{quay quanh trục a) } 0x; \text{ b) } 0y$$