Základy lin. programování, věty o dualitě, metody řešení

Úloha lineárního programování je optimalizační úloha s cílem maximalizovat c^Tx za podmínek $Ax \le b$ přes $x, c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

n počet podmínek
m počet proměnných

účelová funkce c^Tx
přípustné řešení $x : Ax \le b$

optimum přípustné x s max. c^Tx
nepřípustná úloha $\nexists$ přípustné řeš.
neomezená úloha c^Tx není omezené
($\exists$ přípustné x pro lib. velké c^Tx)

Úloha LP v rovnicovém tvaru je opt. úloha s cílem minimalizovat c^Tx za podm. $Ax = b$ pro $x \ge 0$

Celočíselné programování (IP) jako LP, jen $x \in \mathbb{Z}^n$.
Smíšené celočíselné programování (MIP) $x \in \mathbb{Z}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$
Možné problémy: nejkratší cesta v grafu, maximální nezávislá množina, ~~perf~~ perfektní párování v bip. G

Bázické přípustné řešení LP je přípustné řešení n lineárně nezávislých podmínek s rovností. (podm. je LNZ $\Leftrightarrow$ vektor koef. je LNZ.

Pro simplexovou metodu chceme maximalizační LP, soustava rovnic má řešení a rank $(A) = m$, máme poč. řešení.

x přípustné řešení, $K = \{i \mid x_i \ne 0\}$. x je bázické $\Leftrightarrow A_{*K}$ má lineárně nezávislé sloupce.
Přípustná bázická řešení jsou právě vrcholy mnohostěnu přípustných řešení.

Simplexová tabulka určená bází B je soustava $m+1$ lin. rovnic pro proměnné $x_1 \dots x_n, z$, která má stejné řešení jako soustava $Ax = b$, $z = c^Tx$ a navíc splňuje $A_{*B} = I_m$.
$x_B = p + Qx_N$ pro N nebázické proměnné, $p \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$
$z = z_0 + r^Tx_N$, $z_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^{n-m}$ + matice koef. u x_B je I_m.

$Ax = b \rightarrow A_B^{-1}Ax = A_B^{-1}b = p$;

Pokud je úloha v rovnicovém tvaru omezená a přípustná, pak má optimální bázické řešení.

V pivotovacím kroku nahrazujeme bázické proměnné $B = \{j_1, \dots j_m\}$ novou bází $B' = B \cup \{l_t\} \setminus \{j_s\}$ pro $N = \{l_1 \dots l_{n-m}\}$ nebázické proměnné.
Vstupní proměnná l_t : $r_{l_t} > 0$ (výběr pomocí pivot. pravidla)
Výstupní proměnná $q_{st} < 0$; $\frac{-p_s}{q_{st}} = \min\{\frac{-p_i}{q_{it}} \mid i \in B\}$
Úprava tabulky: x_{l_t} doleva + dosadit
Pivotovací pravidla: max. r_{l_t}; max. výsledné z_0; nejmenší index (Blandovo); lexikograficky nejmenší $\left(\frac{q_{i1}}{q_{it}}, \dots, \frac{q_{i(n-m)}}{q_{it}}\right)$ pro i kandidáta na vstup; náhodné

Hledání počátečního řešení přidám nezáporné proměnné tak, aby rovnosti byly splněny a minimalizuju je simplexem.

Věta o komplementaritě
x, y přípustné řešení P, D.
x, y jsou optimální $\Leftrightarrow (\forall j \in \{1..m\})$
($y_j = 0 \vee a^{(j)}x = b_j$ (kde $a^{(j)}$ je j-tý řádek A)
Nechť x^*, y^* jsou přípustná řešení $\overline{P}, \overline{D}$:
x^* a y^* optimální $\Leftrightarrow (\forall_i \in \{1..n\})$ ($x_i = 0 \vee \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j = c_j$)

Převody: • rovnice $\Rightarrow$ nerovnice
nahradím $Ax = b$ za $Ax \le b, Ax \ge b$
• nerovnice $\rightarrow$ rovnice
$Ax \le b \rightarrow Ax + z = b,\ z \ge 0$
• proměnné $\rightarrow$ nezáporné proměnné
$x \rightarrow x^+ - x^-,\ x^+, x^- \ge 0$

Maximalizační úloha LP v rovnicovém tvaru maximalizuj c^Tx pro $x \ge 0$ za podmínek $Ax = b$. (pro $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$)

Báze je množina indexů $B \subseteq \{1..n\}$, že A_{*B} je regulární.
Bázické řešení odpovídající bázi B je řešení soustavy $Ax = b$: $x_i = 0$ pro $i \notin B$.
Přípustná báze - její bázické řeš. je přípustné
Báze B je přípustná $\Leftrightarrow p \ge 0$
Řešení odpovídající bázi B je ~~přípustné~~ optimální $\Leftarrow r \ge 0$.
Pokud je úloha v rovnicovém tvaru omezená a přípustná, má optimální řešení.

Dualita LP Každou podmínku nahradím novou proměnnou: v podmínce =, $\forall$ proměnná pro maximalizaci ≥ 0, minimalizaci ≤ 0.
Nové podmínky pro x_i - nerovnosti stejné.
Účelová funkce $\sum b_iy_i$: max $c^Tx \Rightarrow$ min a nap.
Duál duálu je původní LP.

Nechť x a y jsou přípustná řešení primálu a duálu. Pak $c^Tx \le b^Ty$.
Dk. $y^TAx \le y^Tb$ z primálu, $y^TAx = c^Tx$ z duálu

$P(\overline{P}) = \max c^Tx$, $x \in \mathbb{R}^n (x \ge 0)$, $Ax \le b$
$D(\overline{D}) = \min b^Ty$, $y \ge 0$, $A^Ty = c$ ($A^Ty \ge c$)
Věta o dualitě: Pro P, D a $\overline{P}, \overline{D}$ nastává:
• Ani D nemá přípustné řešení
• jedna je neomezená, druhá nepřípustná
• P i D mají přípustné řešení a $\exists x^*, y^*$: $c^Tx^* = b^Ty^*$, pro x^*, y^* optimální řeš.
Důkaz: Nechť P má řešení,
$\delta = \sup\{c^Tx \mid Ax \le b, x \in \mathbb{R}^n\}$

$\delta < b^Ty$ (slabá věta o dualitě) $\forall$ příp. řešení D
Pokud $\delta < \infty$, pak $\exists y \ge 0$: $A^Ty = c$, $b^Ty \le \delta$
$\Rightarrow y$ je optimální řešení D (z Farkasova lemmatu)

Farkasovo lemma pro nerovnice
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. $Ax \le b$ má řešení právě tehdy, když $\nexists y$: $y \ge 0$, $A^Ty = 0$, $b^Ty < 0$

Farkasovo lemma (pro rovnice)
Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Soustava $Ax = b$ má nezáporné řešení, právě tehdy, když $\nexists y$: $A^Ty \ge 0$ a zároveň $y^Tb < 0$.

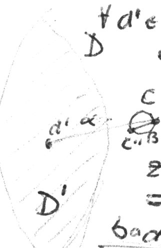
Nechť $Ax \le b$ má řešení. Pak řešení $Ax \le b$ splňuje $c^Tx \le \delta$, pokud $\exists y$: $A^Ty = c$, $b^Ty \le \delta$, $y \ge 0$.

Mnohostěny, Minkowského-Weylova věta

Množina X je konvexní pokud pro $\forall x, y \in X$ a $t \in [0,1]$: $x \cdot t + y \cdot (1-t) \in X$.
Konvexní obal množiny X je průnik všech konvexních množin obsahujících X:
$\mathrm{conv}(X) = \bigcap \{C \mid C \text{ je konvexní} \wedge X \subseteq C\}$
Konvexní kombinace bodů z X je $\forall$ bod daný výrazem $\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$ pro $k \in \mathbb{N}$, $a_i \in X$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum a_i = 1$ (s vynecháním $\alpha_i \geq 0$ jde o afinní kombinaci).
Pokud $\forall x \in X$ splňují $Ax \leq b$ ($Ax < b$), pak stejnou nerovnost splňují i jejich konvexní kombinace.
Nadrovina v R^n je množina $\{x \in R^n \mid a^T x = b\}$ pro $a \in R^n$, $a \neq 0$, $b \in R$.
Poloprostor v R^n je množina $\{x \in R^n \mid a^T x \leq b\}$ pro $a \in R^n$, $a \neq 0$, $b \in R$.
Konvexní mnohostěn je průnik konečně mnoha poloprostorů. omezený = polytop

- Věta o oddělování: Nechť $C, D \in R^n$ neprázdné, konvexní, disjunktní, uzavřené, C omezená. Pak $\exists$ nadrovina $\{x \mid a^T x = b\}$: $C \subset \{x \mid a^T x < b\} \wedge D \subset \{x \mid a^T x > b\}$.

Důkaz: Potřebujeme omezit D



$\forall d' \in D, c' \in C: \|d' - c'\|$ je max. (C omezená)
$\alpha := \|d' - c'\|$, $\beta := \max_{c'' \in C} \|c'' - c'\|$
Pro $d'' \in D \setminus D'$:
$\|c'' - d''\| \geq \|c' - d''\| - \|c'' - c'\| > (\alpha + \beta) - \beta = \|c' - d'\|$
z Δ-nerovnosti $\|c' - c''\| + \|c'' - d''\| \geq \|c' - d''\|$
$\Rightarrow$ omezením na D' nepřijdeme o dvojici blízkých bodů

Pro 2 omezené množiny vezmeme $\|c - d\|$ minimální. $a = d - c$, $b = a^T \cdot \left(\frac{c+d}{2}\right)$
$a^T d - a^T c = \|a^2\| > 0 \Rightarrow a^T c < b < a^T d$
$a^T c'' \leq a^T c$ z Δ $c''cd$ → spor s min. $\|c - d\|$
$c'' \in C$, $x = c + \varepsilon \cdot (c'' - c) \in C$ z konvexity, ale je blíž d než c.
Podobně $a^T d'' \geq a^T d$. Celkem
$a^T c'' \leq a^T c < b < a^T d \leq a^T d''$ □

Minkowski-Weyl Nechť $X \subseteq R^n$. X je ~~omezený~~ konvexní mnohostěn $\Leftrightarrow \exists V \subseteq R^n$ konečná: $X = \mathrm{conv}(V)$

Důkaz: Mnohostěn $X \Rightarrow$ množina bodů V
MI podle $\dim(X)$. Pro $\dim(X) \leq 0$, $X = V$.
Pro $\dim(X) \geq 1$: $\dim(X) = d$. L je konv. obal X, $P_i = \{a^T x \leq b\}$ oddělujících X, $R_i = \{a^T x = b\}$ hraniční podprostory. Vezmeme $M = \{i \mid X \cap R_i \neq X\}$, tedy pro $i \in M$: L neleží v R_i. Pak $\forall i \in M$
$\dim(X_i) \leq \dim(L \cap R_i) \leq d - 1$ pro $X_i = \{X \cap R_i\}$.
z IP máme $X_i = \mathrm{conv}(V_i)$. Nechť $V = \bigcup_{i \in M} V_i$.
Ukážeme, že $X = \mathrm{conv}(V)$. Vezmeme $\forall x \in X$ a p: $x \in p$, $p \subseteq L$ (lze díky $\dim(L) \geq 1$).
$p \cap X = p \cap (\bigcap_{i \in M} P_i) = \bigcap_{i \in M} (p \cap P_i)$ a X omezený, takže průnik je úsečka s koncovými body $y \in X_i$ a $z \in X_j$. Pak $x \in \mathrm{conv}\{y, z\}$,
$y \in \mathrm{conv}(V_i) \subseteq \mathrm{conv}(V)$, $z \in \mathrm{conv}(V_j) \subseteq \mathrm{conv}(V)$
$\Rightarrow x \in \mathrm{conv}(V)$.
Dále $V_i \subseteq X_i \subseteq X \Rightarrow V \subseteq X \Rightarrow \mathrm{conv}(V) \subseteq X$ □

Množina bodů $V \Rightarrow$ mnohostěn X
Vezmeme si množinu nerovností, které jsou splněné pro $\forall v \in V$, jako body v R^{n+1}:
$Q = \{\binom{a}{b} \in R^{n+1} \mid a \in [-1,1]^n \wedge b \in [-1,1] \wedge (\forall v \in V)(a^T v \leq b)\}$
Q omezená, dána konečně mnoha nerovnostmi (V konečná)
$\Rightarrow Q$ omezený konvexní mnohostěn.
Podle implikace opačným směrem $\exists W \subseteq Q$: $Q = \mathrm{conv}(W)$
Chceme $\mathrm{conv}(V) = Y = \{x \mid \forall \binom{a}{b} \in W: a^T x \leq b\}$. Y je dán $\cap$ konečně mnoha poloprostorů $\Rightarrow \mathrm{conv}(V)$ je pak konvexní mnohostěn. Zároveň $\mathrm{conv}(V)$ omezený, protože V konečná.
$\mathrm{conv}(V) \subseteq Y$: $V \subseteq Y$ z def. Q; $\mathrm{conv}(V) \subseteq Y$ díky Y konvexní.
$\mathrm{conv}(V) \supseteq Y$: Nechť $x \notin \mathrm{conv}(V)$. Pak podle věty o oddělování $\exists a^T x \leq b$ oddělující x a $\forall v \in V$ pro $a \in R^n$, $b \in R$.
Pro $a^T x > b$ můžeme přeškálovat koeficienty tak, aby $|\cdot| \leq 1$. Pak $\binom{a}{b} \in Q$ z def. $\Rightarrow \binom{a}{b} \in W \Rightarrow x$ nesplňuje některou z nerovnic v $Q \Rightarrow$ -//- ve $W \Rightarrow x \notin Y$. □

Minimální popis mnohostěnu P je $\{x \in R \mid A' x = b' \wedge A'' x \leq b''\}$ pomocí m' rovnic a m'' nerovnic pokud
i) nemůžeme vynechat žádnou rovnost nebo nerovnost beze změny P
ii) nemůžeme změnit žádnou nerovnost na rovnost beze změny P
V minimálním popisu $m' = \mathrm{rank}(A')$.

Nechť $z \in P$: $A'' z < b''$. Pak $\dim(P) = n - \mathrm{rank}(A')$ a z neleží v žádné vlastní stěně P. Pro minimální popis P takové z existuje, pokud $P \neq \emptyset$.

V minimálním popisu nerovnosti odpovídají vzájemně jednoznačně fasetám. Každá vlastní stěna je stěnou některé fasety.

Pokud $\dim(P) = n$, tak $\exists$ jediný minimální popis mnohostěnu P až na násobky nerovnic.

Každá vlastní stěna mnohostěnu je průnikem jeho faset.
Důkaz (Idea): každá vlastní stěna je v nějaké fasetě → nahradím nerovnici za rovnici, „minimálním" popisa iteruji. □

P konvexní mnohostěn, $c \in R^n$. Jestliže $(\forall x \in P)(c^T x \leq t)$ a $(\exists x \in P)(c^T x = t)$, pak $\{x \in R^n \mid c^T x = t\}$ je tečná nadrovina a $\{x \in P \mid c^T x = t\}$ je stěna P (vlastní stěna je F: $F \neq P$, $F \neq \emptyset$). Stěna konvexního mnohostěnu je také konv. mnohostěn.
Vrchol je stěna dimenze 0. Hrana je stěna dimenze 1. Faceta je stěna dimenze $\dim(P) - 1$. Fasety jsou vlastní stěny max. dimenze.

- Nechť P je konvexní mnohostěn, V množina všech vrcholů, $V_{ext} = \{x \in P \mid x \notin \mathrm{conv}(P \setminus x)\}$. Pak $V = V_{ext}$. (Vrcholy jsou právě všechny body, které nejsou afinní kombinací ostatních bodů.) Pokud je mnohostěn omezený, $P = \mathrm{conv}(V)$.
- Průnik stěn je stěna.
- Stěna stěny je stěna: $E \subseteq F$, F stěna P. E je stěna $F \Leftrightarrow F$ je stěna P.

Edmondsův algoritmus

Perfektní párování minimální ceny pro graf $G=(V,E)$ je $M \subseteq E$: $(\forall v \in V) \deg_M v = 1$ pro $\deg_M$ stupeň vrcholu v M. Pokud $\exists\, c_e \geq 0$ pro $\forall e \in E$, hledáme M: $\sum_{e \in M} c_e$ = je minimální možná. $V' \subseteq V$

Řez je počet hran jdoucích z dané množiny vrcholů. Značíme $\delta(V')$.
Lichý řez je $D = \delta(S)$ pro $|S|$ liché, $S \subseteq V$, $D \subseteq E$.

Optimalizačně:

Primární LP: $\min. \sum c_e x_e$
pro $x_e \geq 0$
za podm. $(\forall v \in V) \sum_{e: v \in e} x_e = 1$
$(\forall S \subseteq E \text{ lichá}) \sum_{e: e \in S} x_e \geq 1$

Duální LP: $\max. \sum y_v + \sum Y_D$
pro $Y_D \geq 0$
za podm. $(\forall e = uv \in E)$
$\bar{c}_e = c_e - y_u + y_v + \sum_{uv \in D} Y_D \geq 0$
Redukovaná cena

komplementarita: $c \in M \Rightarrow \bar{c}_e = 0$
$Y_D > 0 \Rightarrow |M \cap D| = 1$

Algoritmus:

1. $y = 0$, $M = \emptyset$, $G' = G$
2. r (kořen stromu) nespárovaný v M, $T = \{\{r\}, \emptyset\}$, $T, M \subseteq E_=$
   r neexistuje $\Rightarrow$ M perfektní $\Rightarrow$ nalezeno opt.
3. $\exists e = \{v, w\} \in E_=$, $v \in B(T)$, $w \notin T \rightarrow$ buduji M, T
4. $\{u, v\} \in E_=$: $u, v \in B(T)$, $C = P_u \cup P_v \cup \{u, v\}$
   $G' = G / C$ nový pseudovrchol $z \in B(T)$
   přidám $y_z \geq 0$, $y_z := 0$
   $(\forall e)$ $e = \{a, b\}$, $a \in C$, $b \notin C$: $c_e := c_e - y_a$
5. $z \in A(T)$ pseudovrchol, $y_z = 0$
   expanduji z na cyklus C
   do T a M přidáme sudou cestu z C
   $(\forall e)$ $e = \{a, b\}$, $a \in C$, $b \notin C$, $c_{ab} := c_{ab} + y_a$
6. Změníme duál:

$$y_v := \begin{cases} y_v + \varepsilon & v \in B(T) \\ y_v - \varepsilon & v \in A(T) \\ y_v & v \notin T \end{cases}$$

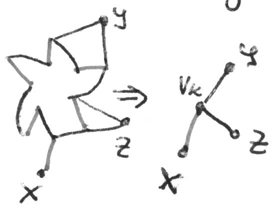
kde $\varepsilon := \min.$
$$\begin{cases} \bar{c}_{uv} & u \in B(T),\ v \notin T,\ uv \in E \\ \frac{\bar{c}_{uv}}{2} & u, v \in B(T),\ uv \in E \\ y_v & v \in A(T) \text{ je pseudovrchol} \end{cases}$$

Kombinatoricky:

Volná střídavá cesta (VSC) je cesta začínající a končící nepárovou hranou, sudé délky, střídají se na ní hrany párovací a nepárovací.
Kytka je lichá kružnice (= květ) se střídavými hranami a stonkem = cesta sudé délky napojená na květ.

Párování M je největší $\Leftrightarrow$ G nemá VSC.

Kontrakce květu K: zahodím vrcholy a hrany K, nahradím je v_K.
Značím $G.K$ pro graf G a květ.
$G.K$ má VSC $\Leftrightarrow$ G má VSC.



Algoritmus:

Pomocí BFS si značím úrovně nepárové-párové.
• párová hrana mezi stromy $\Rightarrow$ VSC $\Rightarrow$ zlepším M
• párová hrana ~~mezi~~ stromě $\Rightarrow$ kytka $\Rightarrow$ kontrahuji $\Rightarrow$ spustím se znovu

Strom T je $\{V(T), E(T), r\}$ s vrcholy, hranami a kořenem.
$A(T)$ množina vrcholů na lichých hladinách
$B(T)$ množina vrcholů na sudých hladinách (včetně r).
$E_=$ je pro dané $\vec{y}$ $\{uv \in E \mid y_u + y_v = c_{uv}\}$
$M \subseteq E_=$.

Algoritmus nalezne perfektní párování minimální ceny v obecném grafu v polynomiálním čase.