Množiny a zobrazení

Množina je soubor určitých navzájem různých prvků (předmětů našeho myšlení).

Russelův paradox – nechť M je množina všech m, že $m \notin M$. Taková množina „neexistuje" ($\forall m \in M : m \notin M$, $\forall m \notin M : m \in M$), ale je v souladu s def. množiny

$\Rightarrow$ formalizace, zavedení axiomů

Zermelo-Fraenkelova teorie množin obsahuje symboly:

- $a, b, \ldots x, y, z$ proměnné pro množiny
- $=, \in$ bin. predikátový symboly
- $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ logické spojky
- $\exists, \forall$ kvantifikátory
- $(), \{,\}, [,], \ldots$ závorky

Formule definujeme rekurzivním° větším pravidel

- $(x = y)$, $(x \in y)$ jsou atomické formule pro x, y proměnné pro množiny
- $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jsou formule pro φ, ψ formule (°konečným)
- $(\exists x)\varphi$, $(\forall x)\varphi$ je formule pro x proměnnou pro množinu, φ formuli

Axiomy ZFC

- axiom existence $(\exists x)(x = x)$
- axiom extensionality $(\forall u)(u \in x \Leftrightarrow u \in y) \Rightarrow x = y$
- schéma axiomů vydělení (∞ mnoho)

$(\forall a)(\exists z)(\forall x)\ (x \in z \Leftrightarrow ((x \in a) \wedge \varphi(x)))$

(pokud $\varphi(x)$ neobsahuje volně z)

- axiom dvojice $(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)$

$(x \in z \Leftrightarrow ((x = a) \vee (x = b)))$

- axiom sumy

$(\forall a)(\exists z)(\forall x)\ (x \in z \Leftrightarrow (\exists y)((x \in y) \wedge (y \in a)))$

- axiom potence $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow x \subseteq a)$
- axiom nahrazení (schéma)

$(\forall u)(\forall v)(\forall w)(((\psi(u,v) \wedge \psi(u,w)) \Rightarrow v = w)$

$\Rightarrow (\forall a)(\exists z)(\forall v)\ (v \in z \Leftrightarrow (\exists u)(u \in a \wedge \psi(u,v)))$

(pokud $\psi(u,v)$ neobsahuje volně w a z)

- axiom nekonečna

$(\exists z)\ (\emptyset \in z \wedge (\forall x)\ (x \in z \Rightarrow (x \cup \{x\} \in z)))$

- axiom fundovanosti (regularity)

$(\forall a)\ (a \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x)(x \in a \wedge x \cap a = \emptyset))$

Vázaný/volný výskyt proměnné – proměnná má vázaný výskyt ve formuli φ, pokud je součástí podformule $(\exists x)\varphi$ nebo $(\forall x)\varphi$. Jinak má volný výskyt.

Vázaná proměnná ve φ má ve φ vázaný výskyt

Uzavřená formule neobsahuje volné proměnné

$\varphi(x_1 \ldots x_n)$ značí formuli φ a $x_1 \ldots x_n$ některé volné proměnné (mohou míti vázaný výskyt!)

Substituce $\varphi(x_1 \ldots x_i \ldots x_n) \Rightarrow \varphi(x_1 \ldots u \ldots x_n)$:

- volné výskyty x_i nahradíme u
- vázané výskyty x_i nahradíme novou proměnnou, která se ve φ nevyskytuje

Podmnožina $x \subseteq y$ pokud $(\forall t)\ ((t \in x) \Rightarrow (t \in y))$

Vlastní podmnožina $x \subset y$ pokud $(x \subseteq y) \wedge (x \neq y)$

Průnik $x \cap y = \{t \mid t \in x \wedge t \in y\}$

Sjednocení $a \cup b$ je $\bigcup c$ podle a. sumy pro $c = \{a, b\}$

$\bigcup c = \{x \mid x \in a \vee x \in b\}$

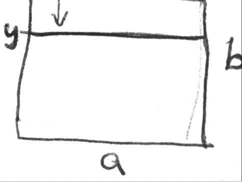
(c $\exists$ podle axiomu dvojice)

Uspořádaná dvojice $\langle x, y \rangle$ je množina $\{\{x\}, \{x, y\}\}$

Kartézský součin $A \times B$ je množina všech $\langle a, b \rangle$ pro $a \in A$, $b \in B$.

Důkaz, že jde o množinu pomocí axiomu nahrazení pro $\psi(x, v) \Leftrightarrow v = \langle x, y \rangle$

pro pevné $y \in B$. Získáme množinu, nazveme ji $prod(a, y) = \{x \mid (\exists x)(x \in a \wedge v = \langle x, y \rangle\}$. Zopakujeme pro $\psi(y, v) \Leftrightarrow v = prod(a, y)$ čímž získáme celou množinu.



Binární relace je množina R, jejíž prvky tvoří uspořádané dvojice

$dom(R) = \{x \mid (\exists y)\ \langle x, y \rangle \in R\}$ definiční obor

$rng(R) = \{y \mid (\exists x)\ \langle x, y \rangle \in R\}$ obor hodnot

Inverzní relace $R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R\}$

Funkce je relace, pro kterou $(\forall x \in dom(R))$ $(\forall y \in rng(R))(\forall y' \in rng(R))\ (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y' \rangle \in R) \Rightarrow y = y'$

Značíme $f : A \to B \Leftrightarrow f$ je funkce $\wedge A = dom(f) \wedge rng(f) \subseteq B$.

$f(x)$ je to jediné $y : \langle x, y \rangle \in f$.

prostá pokud f^{-1} je funkce

na pokud $rng(f) = B$

bijekce pokud je prostá i na

zúžení $f \restriction C \Leftrightarrow f \cap (C \times B)$

Dobré uspořádání

- Ostře uspořádaná množina je uspořádaná dvojice $\langle a,r\rangle$, kde a je množina, r relace, $r \subseteq a \times a$: $\forall x,y,z \in a$: $\langle x,y\rangle \in r \wedge \langle y,z\rangle \in r \Rightarrow \langle r,z\rangle \in r$ tranzitivita
  - $\neg \langle x,x\rangle \in r$ antireflexivita — z toho plyne antisymetrie $xRy \wedge yRx \Rightarrow xRx$. Spor.
- Lineární ostré uspořádání pokud platí $(\forall x,y \in a)(x=y \vee \langle x,y\rangle \in r \vee \langle y,x\rangle \in r)$ (všechny prvky porovnatelné)

  Pro R uspořádání množiny A píšeme xRy místo $\langle x,y\rangle \in R$.
- $\langle a,R\rangle, \langle b,S\rangle$ pro a,b množiny a R,S relace jsou isomorfní pokud $\exists$ bijekce $f: a \to b$: $(\forall x,y \in a)(xRy \Leftrightarrow f(x) S f(y))$. Zobrazení f je isomorfismus.
- $x \in m$ je R-nejmenší prvek m pokud $(\forall y \in m)(xRy \vee y=x)$ pro R uspořádání na a, $m \subseteq a$.
- $x \in m$ je R-minimální prvek m pokud platí $(\forall y \in m)(\neg yRx)$

neexistuje nejmenší, x, y jsou minimální

- Uspořádání R na a je dobré ($\Leftrightarrow \langle a,R\rangle$ je dobře uspořádaná), jestliže je R lineární uspořádání a každá neprázdná $b \subseteq a$ má R-nejmenší prvek.
- Množina předchůdců je $\langle (\leftarrow, x), R\rangle = \{y \in a, yRx\}$ ~~pro~~ $\langle a,R\rangle$ dobře uspořádanou množinu a $x \in a$.
  - Je-li $\langle a,R\rangle$ dobře uspořádaná, pak $\langle a,R\rangle \ncong \langle(\leftarrow,x),R\rangle$ $\forall x \in R$.
    Důkaz sporem přes $m = \{y \in a : f(y) \neq y\}$, využití R-nejmenšího prvku y_0 (alespoň $x \in m$ pro f isomorfismus $\langle a,R\rangle \to \langle(\leftarrow,x),R\rangle$. Rozbor $f(y_0) R y_0$; $y_0 R f(y_0)$.
  - $\langle a,R\rangle$ a $\langle b,S\rangle$ jsou isomorfní, dobře uspořádané $\Rightarrow \exists!$ isomorfismus $f: \langle a,R\rangle \to \langle b,S\rangle$
  - Pro $\langle a,R\rangle$ a $\langle b,S\rangle$ dobře uspořádané platí právě jedna z možností:
    - $\langle a,R\rangle \cong \langle b,S\rangle$
    - $(\exists y \in b)\ \langle a,R\rangle \cong \langle(\leftarrow,y),S\rangle$
    - $(\exists x \in a)\ \langle(\leftarrow,x),R\rangle \cong \langle b,S\rangle$
- Množina X je transitivní pokud $(\forall V)(V \in X \Rightarrow V \subseteq X)$ $(\Leftrightarrow (\forall y)(\forall z)(z \in y \wedge y \in X \Rightarrow z \in X))$
- Ordinál je tranzitivní množina dobře uspořádaná operací $\in$
- Vlastnosti ordinálů:
  - x ordinál, $y \in x \Rightarrow y$ je ordinál, $y = \langle(\leftarrow,y),\in\rangle$
  - x,y ordinály, $x \cong y \Rightarrow x = y$
  - x,y ordinály, platí $1!$ z $x \in y$, $x = y$, $y \in x$
  - x,y,z ordinály, $x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z$
  - $C \neq \emptyset$ množina ordinálů $(\exists x \in C)(\forall y \in C)(x \in y \vee x = y)$
- $\langle a,r\rangle$ dobře uspořádaná $\Rightarrow \exists!$ ordinál $\langle c,\in\rangle$, že $\langle a,r\rangle \cong \langle c,\in\rangle$, nazveme jej typ.

Burali-Forti paradox

$\neg(\exists z)(\forall x)(x$ je ordinál $\Rightarrow x \in z)$ – neexistuje množina $\forall$ ordinálů

Dk. ~~z transitivity by pak~~
z def. by pak byla z transitivní a dobře uspořádaná, tj. ordinál. Tedy by muselo $z \in z$, spor s ordinálem (nejsou reflexivní)

- X množina ordinálů, $\sup X = \bigcup X$, $\min X = \bigcap X$ pro $X \neq \emptyset$.
- X množina ordinálů, $(\forall x \in a)(\forall y \in x)(y \in a) \Rightarrow a$ je ordinál.
- Ordinální následník ordinálu α je ordinál $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$
  - α ordinál $\Rightarrow S(\alpha)$ ordinál; $(\forall \beta)(\beta < S(\alpha) \Leftrightarrow \beta \leq \alpha)$

Ordinál α je izolovaný pokud $\exists\ \beta: \alpha = S(\beta)$.

Pokud $\alpha \neq 0$ není izolovaný, pak je limitní

Přirozené číslo je ordinál α: $(\forall \beta)(\beta \leq \alpha \Rightarrow \beta$ je izolovaný$)$

z axiomu nekonečna $\exists\ \omega$ limitní ordinál : $(\emptyset \in \omega) \wedge (\forall y)(y \in \omega \Rightarrow S(y) \in \omega)$

ω je nejmenší limitní ordinál.

Peanovy axiomy teorie přirozených čísel

- $\emptyset \in \omega$
- $(\forall n,m \in \omega)(n \neq m \Rightarrow S(n) \neq S(m))$
- $(\forall n \in \omega)(S(n) \in \omega)$
- Axiom indukce:
  $(\forall x \in \omega)(\emptyset \in x \wedge (\forall n)(n \in x \Rightarrow S(n) \in x))$
  $\Rightarrow x = \omega$

Subvalence a ekvivalence množin

Množina a je subvalentní množině b ($a \preccurlyeq b$), pokud existuje prosté zobrazení $a \to b$. Říkáme také, že mohutnost množiny a je menší rovna mohutnosti b.

$a \approx b$, a má stejnou mohutnost jako b, pokud mezi nimi $\exists$ bijekce.

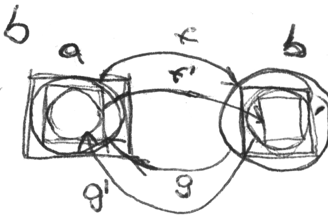
$a \prec b$ pokud $a \preccurlyeq b$ a zároveň $a \not\approx b$.

- Platí:
  - $x \approx x$, $x \preccurlyeq x$
  - $x \approx y \Rightarrow y \approx x$
  - $((x \approx y) \wedge (y \approx z)) \Rightarrow (x \approx z)$
  - $(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z) \Rightarrow (x \preccurlyeq z)$

Cantor-Bernstein

$(a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a) \Rightarrow a \approx b$

Důkaz je složitý a využívá toho, že obě prostá zobrazení nejsou na $\rightarrow$ posl. $a_n = g(b_n)$, $b_n = f(a_n)$ se zmenšuje.



Mohutnost množiny $|A|$ je nejmenší ordinál α, pro který $A \approx \alpha$ pokud je A dobře uspořádaná.

Ordinál α je kardinál, pokud $\alpha = |\alpha|$

α je kardinál $\Leftrightarrow (\forall \beta)(\beta < \alpha \Rightarrow \beta \not\approx \alpha)$

α, β ordinály, $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha \Rightarrow |\beta| = |\alpha|$

Důkaz: $\beta \subseteq \alpha \Rightarrow \beta \preccurlyeq \alpha$ (z def.)

$\alpha \approx |\alpha|$, $|\alpha| \subseteq \beta \Rightarrow |\alpha| \preccurlyeq \beta$ } Cantor-Bernstein $\Rightarrow \beta \approx \alpha$

$n \in \omega \Rightarrow (n \not\approx n+1) \wedge (\forall \alpha)(\alpha \approx n \Rightarrow \alpha = n)$

$\Rightarrow \omega$ je kardinál, $\forall n \in \omega$ je kardinál

Množina A je: konečná, pokud $|A| < \omega$
spočetná: pokud $|A| \leq \omega$
nespočetná, pokud není spočetná

Každý nekonečný kardinál je limitní ordinál.

Je-li κ nekonečný kardinál, pak $\kappa \otimes \kappa = \kappa$

Buď κ, λ nekonečné kardinály. Pak $\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa = \max\{\kappa, \lambda\}$.

Potenční množina množiny a $P(a)$

$P(a) = \{x \mid x \subseteq a\}$.

Cantorova věta $(\forall x)(x \prec P(x))$

Důkaz: Neexistuje bijekce g přes axiom vydělení a množinu $y = \{t \mid t \in x \wedge t \notin g(t)\}$ $\rightarrow$ zjevně $y \subseteq x \wedge y \notin g(x)$ □

$(\forall \alpha)(\alpha$ je ordinál $\Rightarrow (\exists \kappa)(\kappa$ kardinál $\wedge\ \kappa > \alpha))$

Pro α ordinál, α^+ je nejmenší kardinál větší než α.

Kardinál κ je následník pokud $\exists \alpha : \kappa = \alpha^+$. Jinak je κ limitní kardinál.

Třída je každý soubor tvaru $\{x \mid \varphi(x)\}$.

Vlastní třída je třída, která není množinou.

On třída všech ordinálů

V univerzální třída

Cn třída všech kardinálů

Buďte $X = \{x \mid \phi(x)\}$, $Y = \{y \mid \psi(y)\}$ třídy:

$X = Y \Leftrightarrow (\forall x)(\phi(x) \Leftrightarrow \psi(x))$

$z = X \Leftrightarrow (\forall x)(x \in z \Leftrightarrow \phi(x))$

$z \in X \Leftrightarrow \phi(z)$

$X \in y \Leftrightarrow (\exists x)((x \in y) \wedge (\forall u)(u \in x \Leftrightarrow \phi(x)))$

$X \in Y \Leftrightarrow (\exists x)(\psi(x) \wedge (\forall u)(u \in x \Leftrightarrow \phi(x)))$

Je-li $C \subseteq On$, $C \neq \emptyset$ pak C má nejmenší prvek. Věta o transfinitní rekurzi:

Je-li $F: V \to V$, pak existuje jediné $G: On \to V$, že $(\forall \alpha)(G(\alpha) = F(G \restriction \alpha))$.

Význam: F dostane f z ordinálu α do množin. Pro cokoli jiného nám F vrátí něco nezajímavého. Pro f zná F funkční hodnoty ve všech ordinálech $\beta < \alpha$. Je-li α následník, vrátí $f((\alpha-1)^+)$. Pro α limitní ordinál vrátí F supremum z $f(\beta)$.

Tím F definuje rekurzi, jejímž řešením je G.

$\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ je pro ordinály α definováno

$\aleph_0 = \omega_0 = \omega$

$\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha^+$

Pro $\gamma \in On$, γ limitní, je

$\aleph_\gamma = \omega_\gamma = \sup\{\omega_\beta \mid \beta < \gamma\}$

- pro $\alpha < \beta$ je $\omega_\alpha < \omega_\beta$
- $\forall \alpha \in On$: ω_α je kardinál
- každý nekonečný kardinál je roven nějakému ω_α.
- ω_α je limitní kardinál $\Leftrightarrow$ (α je limitní kardinál $\vee$ $\alpha = \emptyset$)
- ω_α je kardinální následník $\Leftrightarrow$ α je ordinální následník

Axiom výběru

Kartézský součin je množina $\prod_{t\in a} x_t = \{f \mid f$ je funkce, $dom(f) = a \wedge (\forall t)((t\in a) \Rightarrow (f(t) \in x_t)\}$ pro množinu a a $\langle x_t \mid t\in a\rangle$ soubor množin.

Množina r je rozkladem množiny x, pokud $x = \bigcup r$, $\emptyset \notin r$, $(\forall u,v)((u\in r \wedge v\in r) \Rightarrow (u\cap v = \emptyset \vee u=v))$.

Princip výběru: Pro $\forall r$ rozklad x $\exists y \subseteq x: (\forall u\in r)(\exists t\in x)(y\cap u = \{t\})$

Selektor na mn. x je funkce $f: x \to \bigcup x: (y\in x \wedge y\neq\emptyset) \Rightarrow f(y)\in y$

Axiom výběru: Na každé neprázdné množině existuje selektor.

---

axiom výběru $\Leftrightarrow$ princip výběru $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\forall$ relaci s $\exists$ funkce f: $f \subseteq s \wedge dom(f) = dom(s)$
$\Leftrightarrow$ Je-li $x\neq\emptyset$ a $\forall t\in x: y_t \neq \emptyset$, pak $\prod_{t\in x} y_t \neq \emptyset$

Důkaz:
- axiom výběru $\Rightarrow$ princip výběru
Vezmu r rozklad, z a. výběru $\exists$ selektor f, $rng(f)$ je výběrová množina pro r.
- princip výběru $\Rightarrow \forall s\, \exists f: f\subseteq s \wedge dom(f) = dom(s)$
$s=\emptyset \Rightarrow f=\emptyset$. Jinak $r = \{\{\langle u,v\rangle \mid \langle u,v\rangle \in s\} \mid u\in dom(s)\}$ je rozkladem s. Z principu výběru $\exists$ f výběrová množina = fce
- $\forall s \exists f: f\subseteq s \wedge dom(f) = dom(s) \Rightarrow (x\neq\emptyset, \forall t\in x: y_t\neq\emptyset \Rightarrow \prod_{t\in x} y_t \neq \emptyset)$
Nechť $\exists$ kart. souč, $x\neq\emptyset$, $\forall t\in x: y_t\neq\emptyset$. Definujeme $s\subseteq x\times \bigcup y_t$ předpisem $s = \{\langle t,v\rangle \mid t\in x, v\in y_t\}$. Pak $\exists f\subseteq s$, f funkce, $dom(s) = dom(f) = x$. $\forall t\in x: \langle t, f(t)\rangle \in s$, $f(t)\in y_t$, $f\in \prod_{t\in x} y_t$
- $(x\neq\emptyset, \forall t\in x: y_t\neq\emptyset \Rightarrow \prod_{t\in x} y_t \neq\emptyset) \Rightarrow$ axiom výběru
$x\neq\emptyset$, $\prod_{z\in x} z \neq \emptyset$. Nechť $f \in \prod_{z\in x} z$, $f\in y$. z def. kart. souč.
$\forall z\in x: f(z)\in z \Rightarrow f$ je selektor. □

$\langle a,\leq\rangle$ uspořádaná množina, $c\subseteq a$. c je řetězec, pokud je podle $\leq$ uspořádána lin.

$\langle a,\leq\rangle$ usp. množina, $d\subseteq a$. $x\in a$ je horní mez množiny d, pokud $(\forall y\in d)(y\leq x)$.

$x\in a$ je maximálním prvkem množiny d, pokud $(\forall y\in d)\neg(y>x) \wedge x\in d$.

Princip maximality (Zornovo lemma): $\langle a,\leq\rangle$ dobře uspořádaná, každý řetězec v a má horní mez. Pak $(\forall x\in a)(\exists m\in a)(m$ je maximálním prvkem $a \wedge x\leq m)$

Platí princip maximality $\Rightarrow \forall M,N: M\preceq N$ nebo $N\preceq M$.

Důkaz: Položíme $\{f \mid f$ prosté zobrazení, $dom(f)\subseteq M$, $rng(f)\subseteq N\} = a$. Uspořádáme a podle $\subseteq$. $\forall c\subseteq a$ řetězec $\exists$ horní mez – sjednocení. Podle principu maximality $\exists$ maximální prvek $g\in a$.

Ukážeme, že nemůže nastat $M\setminus dom(g)\neq\emptyset \wedge N\setminus rng(g)\neq\emptyset$. Pro spor $\exists x\in M\setminus dom(g)$ a $\exists y\in N\setminus rng(g)$. Pak $g' = g\cup\{\langle x,y\rangle\}$, $g'\supsetneq g$, spor s maximalitou g.

Pak nutně $\{M = dom(g) \Rightarrow (M\preceq N)$ nebo $N = rng(g) \Rightarrow N\preceq M$.

Princip dobrého uspořádání: Na $\forall$ množině m $\exists$ relace r, že $\langle m,r\rangle$ je dobře uspořádaná

Následující tvrzení jsou $\Leftrightarrow$:
- axiom výběru (1)
- princip maximality (2)
- princip dobrého uspořádání (3)

$(1) \leftarrow (2)$, $(1) \to (3)$, $(3) \to (2)$

Důkaz: $(1)\Rightarrow(3)$ Pro $a=\emptyset$ položíme $R=\emptyset$, a je dobře uspořádaná R. Pokud je $a\neq\emptyset$, položíme $b = \mathcal{P}(a)\setminus\{\emptyset\}$. Z axiomu výběru $\exists$ selektor f na b: $(\forall z)((z\subseteq a \wedge z\neq\emptyset) \Rightarrow f(z)\in z)$
Hledáme prosté zobrazení z ordinálů na množinu a.
Buď $g(0) = f(a)$, α ordinál, $\forall\beta<\alpha: g(\beta)$ definované, $a\setminus g[\alpha]\neq\emptyset$. Pak definujeme $g(\alpha) = f(a\setminus g[\alpha])$.
$\exists\alpha: \forall\beta<\alpha$, $g(\beta)$ definováno, ale $g(\alpha)$ nedefinováno, protože $m\setminus g[\alpha]=\emptyset$.
(Jinak je g def. pro $\forall$ ordinály, $rng(g) = a$, $g^{-1}: a\to On$ je bijekce $\Rightarrow On$ je množina. Spor.)
Pro toto α je $g:\alpha\to a$ bijekce. Pro $x = g(\beta)$, $y = g(\gamma)$: $\langle x,y\rangle\in R \Leftrightarrow \beta<\gamma$.
R je dobré uspořádání ~~a $\Rightarrow$ $\forall$ podmnožina obsahuje maximální prvek $\Rightarrow$ platí (2)~~

$(3)\Rightarrow(2)$ Platí předpoklady (2), hledáme max prvek $a: x\leq a$. Z (3) $\exists R$ dobré uspořádání a
$c\subseteq a$ splňuje $(\forall y)(y\in c \wedge x<y) \Rightarrow (y$ je R-minimální prvek horních mezí řetězce $\{t\in c \mid x\leq t \wedge t<y\}$ (*)
c $\exists$, např. $c = \{x\}$. Nechť $b = \bigcup\{c \mid c$ je řetězec splňující $*\}$, pak b je řetězec (přes množiny neporovnatelných prvů, sporem).
Pro m horní mez b je m hledaný prvek a, $m\geq x$. Jinak $\{y \mid (\forall t\in b)(m<y \wedge t<y)\}\neq\emptyset$ a obsahuje R-~~nejmenší~~ prvek y'. $b\cup\{y'\}$ splňuje (*), spor – $y'\in b$ a přitom pro $c = b\cup\{y\}$ je $c\subseteq b$.

Axiom výběru II

(2) $\Rightarrow$ (1) Hledáme selektor f. Pro $x = \emptyset$ je $f = \emptyset$. Pro $x \neq \emptyset$ položíme $a = \{f \mid f \text{ je funkce} \wedge dom(f) \subseteq x \wedge (\forall x \in dom(f))(y \neq \emptyset \Rightarrow f(y) \in y\}$ a uspořádáme operací $\subseteq$. Vezmeme nějaké neprázdné $y \in x$ a zvolíme $f(y)$ libovolné pro $f \in a$.

Vezmeme $h = \bigcup c$ pro c řetězce v $(a, \subseteq)$. Ze (2) $\exists$ ~~maj~~ maximální prvek $(a, \subseteq)$, označme jej f_0. $f_0 \in a$ a je to hledaný selektor.

Že je selektor ukážeme pomocí $dom(f_0) = x \setminus \{\emptyset\}$. Pro spor: $\exists y \in x$, $y \neq \emptyset$ a $y \notin dom(f_0)$. Protože $y \neq \emptyset$, $\exists t \in y$. $f_0 \cup \{\langle y, t\rangle\} \supset f_0$.

$\Rightarrow$ spor s maximalitou f_0.

Důsledky axiomu výběru:

- pro $\forall$ množinu A $\exists$ $|A|$ (z axiomu výběru je možné ji uspořádat dobře)
- je-li A nekonečná $A \approx A \times A \approx A \times \{0,1\}$ (stačí $|A| = \kappa \geq \omega$).
- každou nekonečnou množinu můžeme rozdělit na ∞ mnoho ∞ částí
- $\kappa \geq \omega$, X_α množina pro $\forall \alpha < \kappa \Rightarrow |\bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}| = \kappa$
- X, Y množiny, $f: X \to Y$ surjektivní (na), pak $|X| \geq |Y|$. f definuje rozklad X.