



**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

**Fakulta elektrotechnická**

**Katedra elektrických pohonů a trakce**

## **Tvorba modelu asynchronního motoru**

1. úloha předmětu XP14DES

**Petr Zakopal**  
**Praha 2023**



## OBSAH

<b>1</b>	<b>Rovnice asynchronního motoru - využíváné pro řízení.....</b>	<b>1</b>
1.1	Rovnice pro soustavu spojenou se statorovým vinutím .....	1
1.2	Rovnice pro soustavu spojenou s rotorovým vinutím .....	2
1.3	Rovnice pro soustavu spojenou s točivým magnetickým polem .....	2
<b>2</b>	<b>Rovnice asynchronního motoru - využíváné pro modelování .....</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Simulované závislosti elektromagnetického momentu na otáčkách stroje .....</b>	<b>4</b>
3.1	Změna rezistivity rotorového vinutí .....	5
3.2	Změna rezistivity statorového vinutí .....	5
3.3	Změna magnetizační indukčnosti stroje .....	6
3.4	Změna rozptylové indukčnosti statorového vinutí stroje .....	6
3.5	Změna rozptylové indukčnosti rotorového vinutí stroje .....	7
	<b>Zhodnocení .....</b>	<b>8</b>
	<b>Literatura .....</b>	<b>9</b>
<b>Příloha A</b>	<b>Seznam symbolů a zkratk .....</b>	<b>10</b>
A.1	Seznam zkratk .....	10
A.2	Seznam symbolů .....	10

## SEZNAM OBRÁZKŮ

3 - 1	Závislost elektromagnetického hnacího momentu $M$ na otáčkách stroje, vynesena při změně rezistivity rotorového viutí o $\pm 10\%$ . ....	5
3 - 2	Závislost elektromagnetického hnacího momentu $M$ na otáčkách stroje, vynesena při změně rezistivity statorového viutí o $\pm 10\%$ . ....	5
3 - 3	Závislost elektromagnetického hnacího momentu $M$ na otáčkách stroje, vynesena při změně magnetizační indukčnosti o $\pm 10\%$ . ....	6
3 - 4	Závislost elektromagnetického hnacího momentu $M$ na otáčkách stroje, vynesena při změně rozptylové indukčnosti statorového vinutí o $\pm 10\%$ . ....	6
3 - 5	Závislost elektromagnetického hnacího momentu $M$ na otáčkách stroje, vynesena při změně rozptylové indukčnosti rotorového vinutí o $\pm 10\%$ . ....	7

## SEZNAM TABULEK

3 - 1	Štítkové údaje stroje. ....	4
3 - 2	Změřené parametry stroje. ....	4



# 1 Rovnice asynchronního motoru - využívané pro řízení

Rovnice pro ASM je možné odvodit při uvažování následujících zjednodušení:

- tloušťka vzduchové mezery je po celém obvodu mezi rotorem a statorem konstantní,
- satorová a rotorová vinutí jsou rozložena podél obvodu vzduchové mezery sinusově, vinutí jednotlivých fází jsou proti vůči sobě natočeny o 120 °,
- ztráty v železe jsou zanedbány,
- není uvažováno syčení magnetického obvodu,
- aktivní železo stroje má nekonečnou relativní permeabilitu,
- satorová a rotorová vinutí jsou souměrná, tj. činné odpory, indukčnosti a vzájemné indukčnosti jednotlivých fází jsou identické.

Při uvažování uvedených zjednodušení je poté možné vyjádřit rovnice matematického modelu stroje v obecném souřadnicovém systému  $k$  (s využitím prostorových vektorů).

$$\underline{u}_1^k = R_1 \underline{i}_1^k + \frac{d\underline{\psi}_1^k}{dt} + j\omega_k \underline{\psi}_1^k, \quad (1 - 1)$$

$$\underline{u}_2^k = R_2 \underline{i}_2^k + \frac{d\underline{\psi}_2^k}{dt} + j(\omega_k - \omega) \underline{\psi}_2^k, \quad (1 - 2)$$

$$\underline{\psi}_1^k = L_1 \underline{i}_1^k + L_m \underline{i}_2^k, \quad (1 - 3)$$

$$\underline{\psi}_2^k = L_2 \underline{i}_2^k + L_m \underline{i}_1^k. \quad (1 - 4)$$

Kde  $k$  v horním indexu značí obecný souřadnicový systém,  $\underline{u}_1^k$  (V) značí prostorový vektor napětí satorového vinutí,  $\underline{u}_2^k$  (V) prostorový vektor napětí rotorového vinutí,  $\underline{\psi}_1^k$  (Wb) prostorový vektor spřaženého magnetického toku satorového vinutí,  $\underline{\psi}_2^k$  (Wb) prostorový vektor spřaženého magnetického toku rotorového vinutí,  $R_1$  ( $\Omega$ ) rezistivita satorového vinutí,  $R_2$  ( $\Omega$ ) rezistivita rotorového vinutí,  $\underline{i}_1^k$  (A) prostorový vektor proudu satorového vinutí,  $\underline{i}_2^k$  (A) prostorový vektor proudu rotorového vinutí,  $\omega$  ( $s^{-1}$ ) elektrická úhlová rychlost rotoru,  $\omega_s$  ( $s^{-1}$ ) elektrická skluzová rychlost,  $\omega_k$  ( $s^{-1}$ ) obecná elektrická úhlová rychlost,  $L_1$  (H) indukčnost satorového vinutí,  $L_2$  (H) indukčnost rotorového vinutí.

V tomto textu jsou rovnice uvedeny obecně. Ovšem velmi často bývá uvažován ASM s kotvou nakrátko. Pro jeho model je možné uvažovat  $\underline{u}_2^k = 0$ .

## 1.1 Rovnice pro soustavu spojenou se satorovým vinutím

V případě uvažování souřadné soustavy spojené se satorovým vinutím stroje, je možné upravit a zjednodušit rovnice popisující systém dle následujících vztahů. Souřadnicový systém spojený se satorovým vinutím se v literatuře často označuje jako systém  $\alpha\beta$ . Pro obecnou otáčivou rychlost  $\omega_k$  soustavy platí  $\omega_k = 0$ . Rovnice popisující model v uvedeném souřadnicovém systému jsou označeny 1 - 5 až 1 - 8.

$$\underline{u}_1^{\alpha\beta} = R_1 \underline{i}_1^{\alpha\beta} + \frac{d\underline{\psi}_1^{\alpha\beta}}{dt}, \quad (1 - 5)$$

$$\underline{u}_2^{\alpha\beta} = R_2 \underline{i}_2^{\alpha\beta} + \frac{d\underline{\psi}_2^{\alpha\beta}}{dt} - j\omega \underline{\psi}_2^{\alpha\beta}, \quad (1 - 6)$$

$$\underline{\psi}_1^{\alpha\beta} = L_1 \underline{i}_1^{\alpha\beta} + L_m \underline{i}_2^{\alpha\beta}, \quad (1 - 7)$$

$$\underline{\psi}_2^{\alpha\beta} = L_2 \underline{i}_2^{\alpha\beta} + L_m \underline{i}_1^{\alpha\beta}. \quad (1 - 8)$$

## 1.2 Rovnice pro soustavu spojenou s rotorovým vinutím

V případě uvažování modelu ASM v souřadnicovém systému spojeném s rotorovým vinutím platí pro obecnou otáčivou rychlost  $\omega_k = \omega$ , kde  $\omega$  ( $s^{-1}$ ) je elektrická úhlová rychlost otáčení rotoru. Souřadnicový systém je možné označit jako  $kl$ . Rovnice popisující model v uvedeném souřadnicovém systému jsou označeny 1 - 9 až 1 - 12.

$$\underline{u}_1^{kl} = R_1 \underline{i}_1^{kl} + \frac{d\underline{\psi}_1^{kl}}{dt} + j\omega \underline{\psi}_1^{kl}, \quad (1 - 9)$$

$$\underline{u}_2^{kl} = R_2 \underline{i}_2^{kl} + \frac{d\underline{\psi}_2^{kl}}{dt}, \quad (1 - 10)$$

$$\underline{\psi}_1^{kl} = L_1 \underline{i}_1^{kl} + L_m \underline{i}_2^{kl}, \quad (1 - 11)$$

$$\underline{\psi}_2^{kl} = L_2 \underline{i}_2^{kl} + L_m \underline{i}_1^{kl}. \quad (1 - 12)$$

## 1.3 Rovnice pro soustavu spojenou s točivým magnetickým polem

Souřadnicový systém spojený s točivým magnetickým polem je velmi často označován jako systém  $dq$ . Pro obecnou úhlovou rychlost platí  $\omega_k = \omega_1$ , kde  $\omega_1$  ( $s^{-1}$ ) je elektrická úhlová rychlost točivého magnetického pole statoru, resp. rotoru. Rovnice popisující model v uvedeném souřadnicovém systému jsou označeny 1 - 13 až 1 - 16.

$$\underline{u}_1^{dq} = R_1 \underline{i}_1^{dq} + \frac{d\underline{\psi}_1^{dq}}{dt} + j\omega_1 \underline{\psi}_1^{dq}, \quad (1 - 13)$$

$$\underline{u}_2^{dq} = R_2 \underline{i}_2^{dq} + \frac{d\underline{\psi}_2^{dq}}{dt} + j(\omega_1 - \omega) \underline{\psi}_2^{dq}, \quad (1 - 14)$$

$$\underline{\psi}_1^{dq} = L_1 \underline{i}_1^{dq} + L_m \underline{i}_2^{dq}, \quad (1 - 15)$$

$$\underline{\psi}_2^{dq} = L_2 \underline{i}_2^{dq} + L_m \underline{i}_1^{dq}. \quad (1 - 16)$$

Velmi často se rozdíl  $\omega_1 - \omega$  označuje jako skluzová rychlost  $\omega_s$  ( $s^{-1}$ ).



## 2 Rovnice asynchronního motoru - využíváné pro modelování

Představené rovnice jsou vhodné např. pro modelování stroje při využívání vektorového řízení, orientovaného na rotorový tok (Field Oriented Control, FOC). Existuje mnoho dalších vyjádření představených rovnic podle toho, co je od modelu očekáváno a jaké veličiny je snadné měřit a které je snadnější dopočítávat pomocí modelu.

Velmi často se v literatuře objevuje stavový popis modelu stroje s různými stavovými veličinami. V případě již zmiňovaného FOC se jako stavových proměnných využívá prostorových vektorů proudu statorového vinutí  $\underline{i}_1^k$  např. v souřadnicové soustavě spojené se statorovým vinutím ( $\underline{i}_1^{\alpha\beta}$ ) a sprážených magnetických toků rotorového vinutí  $\underline{\psi}_2^k$  (opět např. vyjádřených v systému spojeném se statorovým vinutím  $\underline{\psi}_2^{\alpha\beta}$ ).

V [1] jsou uvedeny stavové popisy pro představený systém v souřadnicích  $\alpha\beta$  v poměrných jednotkách. Pokud poměrné jednotky nejsou využívány, je možné modely převést na zjednodušené popisy v absolutních jednotkách, jako je tomu např. v [2].

Model implementovaný v prostředí MATLAB je převzat ze stavového popisu uvedeného v [2]. Tento stavový popis je uveden v rovnici 2 - 1.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{1\alpha} \\ i_{1\beta} \\ \psi_{2\alpha} \\ \psi_{2\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2 L_m^2 + L_2^2 R_1}{\sigma L_1 L_2^2} & 0 & \frac{L_m R_2}{\sigma L_1 L_2^2} & \frac{L_m}{\sigma L_1 L_2} \omega \\ 0 & -\frac{R_2 L_m^2 + L_2^2 R_1}{\sigma L_1 L_2^2} & -\frac{L_m}{\sigma L_1 L_2} \omega & \frac{L_m R_2}{\sigma L_1 L_2^2} \\ \frac{L_m R_2}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} & -\omega \\ 0 & \frac{L_m R_2}{L_2} & \omega - \frac{R_2}{L_2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1\alpha} \\ i_{1\beta} \\ \psi_{2\alpha} \\ \psi_{2\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1\alpha} \\ u_{1\beta} \end{bmatrix}. \quad (2 - 1)$$

Stavový popis je vhodné doplnit o další rovnice, jež budou v simulaci využity.

$$M = \frac{3}{2} p_p \frac{L_m}{L_2} (\psi_{2\alpha} i_{1\beta} - \psi_{2\beta} i_{1\alpha}), \quad (2 - 2)$$

$$M - M_z = J \frac{d\Omega}{dt}, \quad (2 - 3)$$

$$\omega = p_p \Omega, \quad (2 - 4)$$

kde  $\sigma = 1 - L_m^2 / (L_1 L_2)$  (-) je tzv. rozptyl,  $i_{1\alpha}$  (A) a  $i_{1\beta}$  (A) jsou složky vektoru statorového proudu  $\underline{i}_1$  (A),  $\psi_{2\alpha}$  (Wb) a  $\psi_{2\beta}$  (Wb) jsou složky vektoru rotorového magnetického toku  $\underline{\psi}_2$  (Wb),  $u_{1\alpha}$  (V) a  $u_{1\beta}$  (V) jsou složky statorového napětí  $\underline{u}_1$  (V),  $p_p$  (-) je počet polpárů stroje,  $\omega$  ( $s^{-1}$ ) je elektrická úhlová rychlost hřídele,  $\Omega$  ( $s^{-1}$ ) je mechanická úhlová rychlost hřídele,  $M$  je vnitřní elektromagnetický moment stroje a  $M_z$  (Nm) je moment zátěžný.

Velmi často dochází k porovnání dynamické a statické charakteristiky elektromagnetického momentu stroje. Závislost hnacího momentu na skluzu, resp. úhlové rychlosti točivého magnetického pole je uvedena v rovnici 2 - 5.

$$M = \frac{3 p_p R_2 U_1^2}{s \omega_1} \frac{1}{(R_1 + \frac{R_2}{s})^2 + (\omega_1 L_{1\sigma} + s \omega_1 L_{2\sigma})^2}, \quad (2 - 5)$$

kde  $s$  (-) je skluz,  $\omega_1$  ( $s^{-1}$ ) je úhlová rychlost točivého magnetického pole,  $U_1$  (V) efektivní hodnota fázového napájecího napětí, v tomto případě je využito jmenovitého napětí motoru  $380/\sqrt{3}$  V.

### 3 Simulované závislosti elektromagnetického momentu na otáčkách stroje

Díky matematickému modelu stroje, vytvořeném v prostředí MATLAB Simulink, je možné vynést charakteristiky určitých veličin, které jsou v reálném prostředí neměřitelné. V případě této práce je vynesena závislost elektromagnetického (hnacího) momentu stroje na otáčkách stroje při změně vybraných veličin.

Vybrané veličiny jsou následující:

- velikost rezistivity rotorového vinutí/kotvy stroje  $R_2$  (např. při změně oteplení stroje), v popisících grafů pro jednoduchost označováno jako „rezistivita rotoru“ (při využití motoru s kotvou nakrátko je myšlena rezistivita rotorových tyčí)
- velikost rezistivity statorového vinutí  $R_1$  (např. při změně oteplení stroje),
- velikost magnetizační indukčnosti stroje  $L_m$ ,
- velikost rozptylové indukčnosti statorového vinutí  $L_{1\sigma}$ ,
- velikost rozptylové indukčnosti rotorového vinutí  $L_{2\sigma}$ .

Model stroje byl vytvořen na základě reálného stroje, umístěného v laboratoři H-26. Vinutí stroje je spojeno do hvězdy.

Tab. 3 - 1 Štítkové údaje stroje.

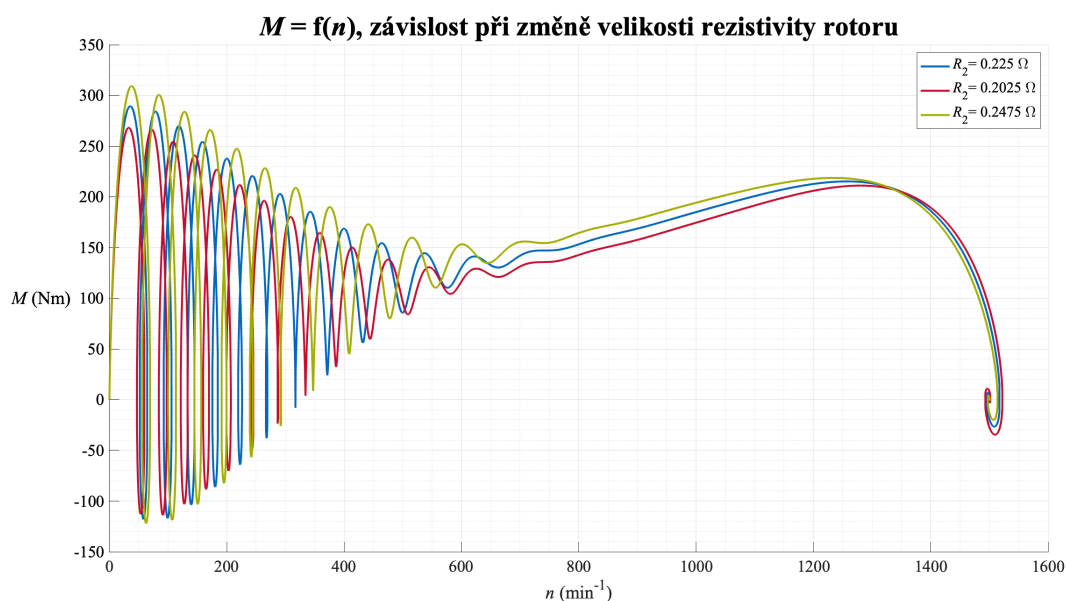
$P_n$	12 kW
$U_n$	380 V
$I_n$	22 A
$n_n$	1460 min <sup>-1</sup>
$f_n$	50 Hz
$\cos(\varphi_n)$	0.8
$p_p$	2

Tab. 3 - 2 Změřené parametry stroje.

$R_1$	370 mΩ
$R_2$	225 mΩ
$L_{1\sigma}$	2,27 mH
$L_{2\sigma}$	2,27 mH
$L_m$	82,5 mH
$L_1$	84,77 mH
$L_2$	84,77 mH
$J$	0,4 kg·m <sup>2</sup>

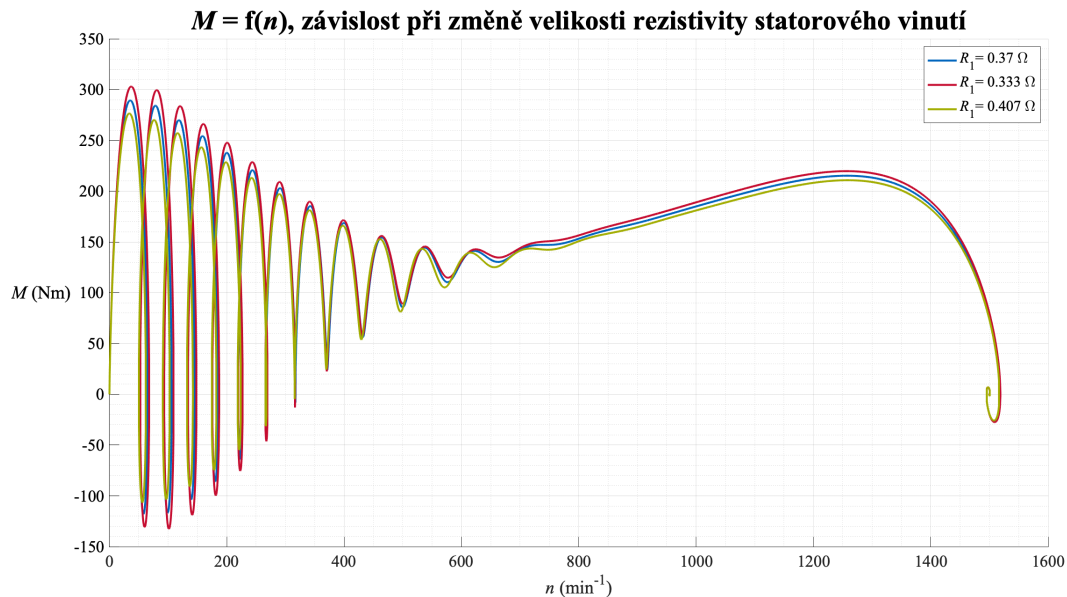
Kde  $P_n$  (W) je jmenovitý výkon stroje,  $I_n$  (A) je jmenovitý fázový proud stroje (efektivní hodnota),  $U_n$  (V) je jmenovité sdružené napájecí napětí stroje (efektivní hodnota),  $f_n$  (Hz) je jmenovitá napájecí frekvence stroje,  $\cos(\varphi_n)$  (–) je jmenovitý účinník stroje,  $n_n$  (min<sup>-1</sup>) jsou jmenovité otáčky stroje,  $p_p$  (–) je počet polpárů stroje,  $R_1$  (Ω), resp.  $R_2$  (Ω) je statorový, resp. rotorový odpor,  $L_{1\sigma}$  (H), resp.  $L_{2\sigma}$  (H) je statorová, resp. rotorová rozptylová indukčnost stroje,  $L_m$  (H) je magnetizační indukčnost stroje,  $L_1$  (H), resp.  $L_2$  (H) je statorová, resp. rotorová indukčnost,  $J$  (kg·m<sup>2</sup>) je moment setrvačnosti hřídele.

### 3.1 Změna rezistivity rotorového vinutí



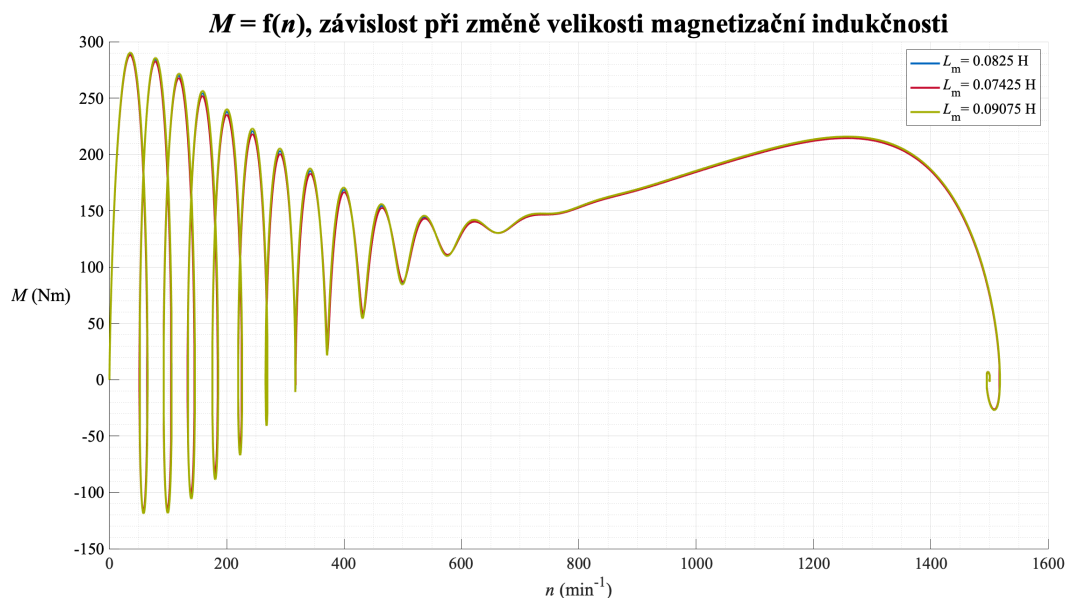
Obr. 3 - 1 Závislost elektromagnetického hnacího momentu  $M$  na otáčkách stroje, vynesená při změně rezistivity rotorového vinutí o  $\pm 10\%$ .

### 3.2 Změna rezistivity statorového vinutí



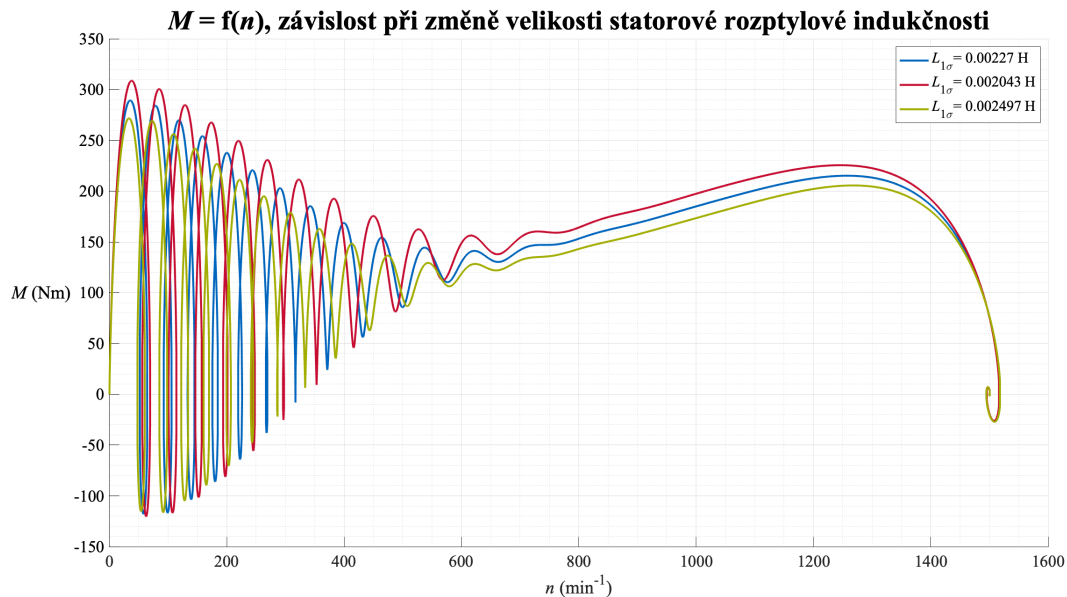
Obr. 3 - 2 Závislost elektromagnetického hnacího momentu  $M$  na otáčkách stroje, vynesená při změně rezistivity statorového vinutí o  $\pm 10\%$ .

### 3.3 Změna magnetizační indukčnosti stroje



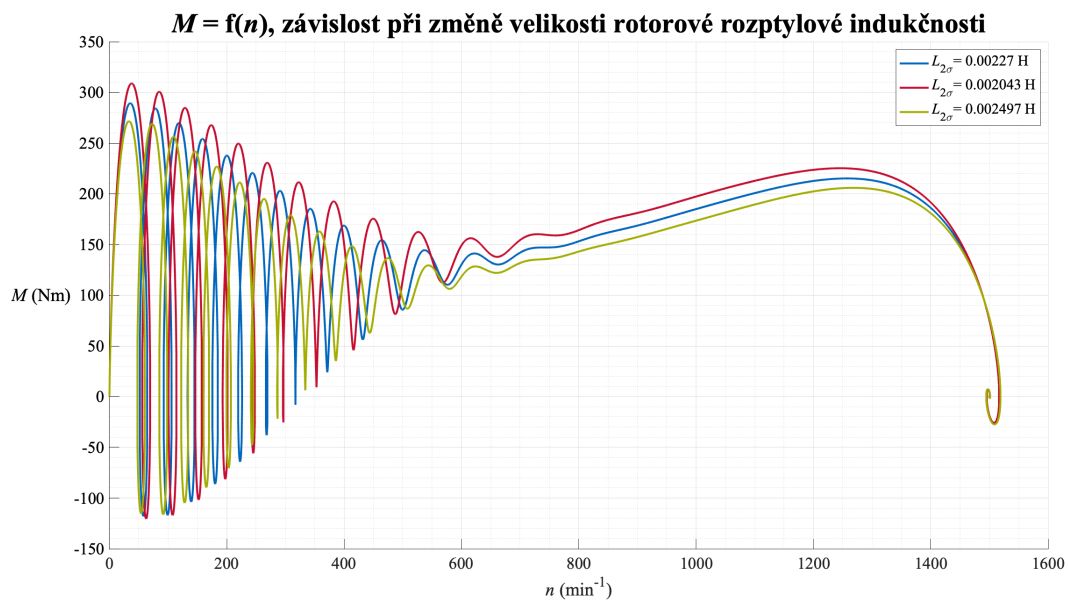
Obr. 3 - 3 Závislost elektromagnetického hnacího momentu  $M$  na otáčkách stroje, vynesená při změně magnetizační indukčnosti o  $\pm 10\%$ .

### 3.4 Změna rozptylové indukčnosti statorového vinutí stroje



Obr. 3 - 4 Závislost elektromagnetického hnacího momentu  $M$  na otáčkách stroje, vynesená při změně rozptylové indukčnosti statorového vinutí o  $\pm 10\%$ .

### 3.5 Změna rozptylové indukčnosti rotorového vinutí stroje



Obr. 3 - 5 Závislost elektromagnetického hnacího momentu  $M$  na otáčkách stroje, vynesená při změně rozptylové indukčnosti rotorového vinutí o  $\pm 10\%$ .

## Zhodnocení

Z představených průběhů závislosti elektromagnetického momentu stroje  $M$  na otáčkách  $n$  je možné vypožorovat, že největší vliv na změnu průběhu má změna rezistivity rotoru  $R_2$  a změna rozptylové indukčnosti statorového vinutí  $L_{1\sigma}$  a rotoru  $L_{2\sigma}$ .

Při zvýšení rezistivity rotoru dochází dle teorie k „pokládání“ statické charakteristiky a zvýšení zá-  
běrného momentu stroje. Proto jeden z možných způsobů rozběhu stroje s vinutou kotvou je rozběh se  
zvýšením rotorového odporu. Zvýšení rezistivity může být v reálném stroji zapříčiněno ohřevem rotoru  
stroje.

Změna velikosti rezistivity statorového vinutí se projevuje opačným způsobem, než změna rezistivity  
rotoru. Při snížení rezistivity vinutí dochází ke zvýšení velikosti elektromagnetického momentu stroje nad  
hodnotu, než která je pozorována při původní měřené hodnotě rezistivity. Naopak při zvýšení rezistivity  
vinutí dochází ke snížení elektromagnetického momentu.

Zvýšení rozptylové indukčnosti statorového vinutí a rotoru se také projevuje opačným způsobem,  
než změna rezistivity rotoru. Při snížení indukčnosti dochází ke zvýšení hodnoty elektromagnetického  
momentu při určitých otáčkách stroje. Při zvýšení rozptylové indukčnosti naopak dochází ke snížení  
momentu. Z teoretických předpokladů je zřejmé, že je vyžadována co nejmenší hodnota rozptylového  
magnetického toku, který se uzavírá cestami, které jsou odlišné od cesty hlavního magnetizačního toku.  
Simulace tento předpoklad potvrzuje.

Změna magnetizační indukčnosti  $L_m$  v daném rozsahu  $\pm 10\%$  změřené hodnotu prakticky nemá vliv  
na představenou závislost elektromagnetického momentu.

Pozorované změny odpovídají teoretickým předpokladům o změně statické charakteristiky elektro-  
magnetického momentu stroje na otáčkách a je možné tyto předpolady o chování aplikovat i na předsta-  
vený průběh dynamické charakteristiky elektromagnetického momentu při rozběhu stroje.

## Literatura

- [1] M., Popescu. Induction Motor Modelling for Vector Control Purposes. In: *Helsinki University of Technology, Laboratory of Electromechanics* [online]. 2000 [cit. 2023-10-14]. Dostupné z: [https://avys.omu.edu.tr/storage/app/public/mustafa.aktas/110896/induction\\_motor\\_modelling.pdf](https://avys.omu.edu.tr/storage/app/public/mustafa.aktas/110896/induction_motor_modelling.pdf).
- [2] LIPČÁK, Ondřej; BAUER, Jan. Doprovodný materiál k přednáškám. In: *Materiál k přednáškám a cvičení v předmětu BIM14EPT* [online]. [B.r.] [cit. 2023-02-28]. Dostupné z: <https://moodle.cvut.cz>.

## Appendix A: Seznam symbolů a zkratk

### A.1 Seznam zkratk

**ASM** Asynchronní Motor

**FOC** Field Oriented Control

### A.2 Seznam symbolů

$f_n$	(Hz)	jmenovitá napájecí frekvence
$I_n$	(A)	jmenovitý fázový proud stroje
$\underline{i}_1^k$	(A)	prostorový vektor proudu statorového vinutí
$\underline{i}_2^k$	(A)	prostorový vektor proudu rotorového vinutí
$J$	(kg·m <sup>2</sup> )	moment setrvačnosti
$L_{1\sigma}$	(H)	rozyptylová indukčnost statorového vinutí
$L_1$	(H)	indukčnost statorového vinutí
$L_{2\sigma}$	(H)	rozyptylová indukčnost rotorového vinutí
$L_2$	(H)	indukčnost rotorového vinutí
$L_m$	(H)	magnetizační indukčnost
$\omega_1$	(s <sup>-1</sup> )	elektrická úhlová rychlost točivého magnetického pole
$\omega_k$	(s <sup>-1</sup> )	obecná elektrická úhlová rychlost
$\Omega$	(s <sup>-1</sup> )	mechanická úhlová rychlost
$\omega_s$	(s <sup>-1</sup> )	skluzová elektrická úhlová rychlost
$\omega$	(s <sup>-1</sup> )	elektrická úhlová rychlost rotoru
$P_n$	(W)	jmenovitý výkon
$\cos(\varphi_n)$	(-)	jmenovitý účinník
$M_z$	(Nm)	zátěžný moment
$M$	(Nm)	vnitřní elektromagnetický moment stroje
$n_n$	(min <sup>-1</sup> )	jmenovité otáčky
$p_p$	(-)	počet polpárů stroje
$\underline{\psi}_1^k$	(Wb)	prostorový vektor spřaženého magnetického toku statorového vinutí
$\underline{\psi}_2^k$	(Wb)	prostorový vektor spřaženého magnetického toku rotorového vinutí
$R_1$	(Ω)	rezistivita statorového vinutí
$R_2$	(Ω)	rezistivita rotorového vinutí
$s$	(-)	skluz
$U_n$	(V)	jmenovité sdružené napětí
$U_1$	(V)	efektivní hodnota fázového napájecího napětí
$\underline{u}_1^k$	(V)	prostorový vektor napětí statorového vinutí
$\underline{u}_2^k$	(V)	prostorový vektor napětí rotorového vinutí