



**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

**Fakulta elektrotechnická**

**Katedra elektrických pohonů a trakce**

## **Technická zpráva**

1. úloha předmětu XP14DES

**Petr Zakopal**  
**Praha 2023**



## OBSAH

<b>1</b>	<b>Rovnice asynchronního motoru - využíváné pro řízení.....</b>	<b>1</b>
1.1	Rovnice pro soustavu spojenou se statorovým vinutím .....	1
1.2	Rovnice pro soustavu spojenou s rotorovým vinutím .....	2
1.3	Rovnice pro soustavu spojenou s točivým magnetickým polem .....	2
<b>2</b>	<b>Rovnice asynchronního motoru - využíváné pro modelování .....</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Simulované závislosti elektromagnetického momentu na otáčkách stroje .....</b>	<b>4</b>
3.1	Změna rezistivity rotorového vinutí .....	4
3.2	Změna rezistivity statorového vinutí .....	5
3.3	Změna magnetizační indukčnosti stroje .....	5
3.4	Změna rozptylové indukčnosti statorového vinutí stroje .....	6
3.5	Změna rozptylové indukčnosti rotorového vinutí stroje .....	6
	<b>Conclusion .....</b>	<b>8</b>
	<b>References .....</b>	<b>9</b>
<b>Příloha A</b>	<b>Seznam symbolů a zkratk .....</b>	<b>10</b>
A.1	Seznam zkratk .....	10
A.2	Seznam symbolů .....	11

## SEZNAM OBRÁZKŮ

3 - 1	Závislost elektromagnetického hnacího momentu $M$ na otáčkách stroje, vynesena při změně rezistivity rotorového viutí o $\pm 10\%$ . ....	5
3 - 2	Závislost elektromagnetického hnacího momentu $M$ na otáčkách stroje, vynesena při změně rezistivity statorového viutí o $\pm 10\%$ . ....	5
3 - 3	Závislost elektromagnetického hnacího momentu $M$ na otáčkách stroje, vynesena při změně magnetizační indukčnosti o $\pm 10\%$ . ....	6
3 - 4	Závislost elektromagnetického hnacího momentu $M$ na otáčkách stroje, vynesena při změně rozptylové indukčnosti statorového vinutí o $\pm 10\%$ . ....	6
3 - 5	Závislost elektromagnetického hnacího momentu $M$ na otáčkách stroje, vynesena při změně rozptylové indukčnosti rotorového vinutí o $\pm 10\%$ . ....	7

## SEZNAM TABULEK

3 - 1	Štítkové údaje stroje. ....	4
3 - 2	Změřené parametry stroje. ....	4



# 1 Rovnice asynchronního motoru - využíváné pro řízení

Rovnice pro ASM je možné odvodit při uvažování následujících zjednodušení:

- tloušťka vzduchové mezery je po celém obvodu mezi rotorem a statorem konstantní,
- satorová a rotorová vinutí jsou rozložena podél obvodu vzduchové mezery sinusově, vinutí jednotlivých fází jsou proti vůči sobě natočeny o 120 °,
- ztráty v železe jsou zanedbány,
- není uvažováno sycení magnetického obvodu,
- aktivní železo stroje má nekonečnou relativní permeabilitu,
- satorová a rotorová vinutí jsou souměrná, tj. činné odpory, indukčnosti a vzájemné indukčnosti jednotlivých fází jsou identické.

Při uvažování uvedených zjednodušení je poté možné psát rovnice v obecném souřadnicovém systému  $k$

$$\underline{u}_1^k = R_1 \underline{i}_1^k + \frac{d\underline{\psi}_1^k}{dt} + j\omega_k \underline{\psi}_1^k, \quad (1 - 1)$$

$$\underline{u}_2^k = R_2 \underline{i}_2^k + \frac{d\underline{\psi}_2^k}{dt} + j(\omega_k - \omega) \underline{\psi}_2^k, \quad (1 - 2)$$

$$\underline{\psi}_1^k = L_1 \underline{i}_1^k + L_m \underline{i}_2^k, \quad (1 - 3)$$

$$\underline{\psi}_2^k = L_2 \underline{i}_2^k + L_m \underline{i}_1^k. \quad (1 - 4)$$

Kde  $k$  v horním indexu značí obecný souřadnicový systém,  $\underline{u}_1^k$  (V) značí prostorový vektor napětí satorového vinutí,  $\underline{u}_2^k$  (V) prostorový vektor napětí rotorového vinutí,  $\underline{\psi}_1^k$  (Wb) prostorový vektor spřaženého magnetického toku satorového vinutí,  $\underline{\psi}_2^k$  (Wb) prostorový vektor spřaženého magnetického toku rotorového vinutí,  $R_1$  ( $\Omega$ ) rezistivita satorového vinutí,  $R_2$  ( $\Omega$ ) rezistivita rotorového vinutí,  $\underline{i}_1^k$  (A) prostorový vektor proudu satorového vinutí,  $\underline{i}_2^k$  (A) prostorový vektor proudu rotorového vinutí,  $\omega$  ( $s^{-1}$ ) elektrická úhlová rychlost rotoru,  $\omega_s$  ( $s^{-1}$ ) skluzová rychlost,  $\omega_k$  ( $s^{-1}$ ) obecná úhlová rychlost,  $L_1$  (H) indukčnost satorového vinutí,  $L_2$  (H) indukčnost rotorového vinutí.

V tomto textu jsou rovnice uvedeny obecně. Ovšem velmi často bývá uvažován ASM s kotvou nakrátko. Pro jeho model je možné uvažovat  $\underline{u}_{2k} = 0$ .

## 1.1 Rovnice pro soustavu spojenou se satorovým vinutím

V případě uvažování souřadné soustavy spojené se satorovým vinutím stroje, je možné upravit a zjednodušit rovnice popisující systém dle následujících vztahů. Souřadnicový systém spojený se satorovým vinutím se v literatuře často označuje jako systém  $\alpha\beta$ . Pro obecnou otáčivou rychlost  $\omega_k$  soustavy platí  $\omega_k = 0$ .

$$\underline{u}_1^{\alpha\beta} = R_1 \underline{i}_1^{\alpha\beta} + \frac{d\underline{\psi}_1^{\alpha\beta}}{dt}, \quad (1 - 5)$$

$$\underline{u}_2^{\alpha\beta} = R_2 \underline{i}_2^{\alpha\beta} + \frac{d\underline{\psi}_2^{\alpha\beta}}{dt} - j\omega \underline{\psi}_2^{\alpha\beta}, \quad (1 - 6)$$

$$\underline{\psi}_1^{\alpha\beta} = L_1 \underline{i}_1^{\alpha\beta} + L_m \underline{i}_2^{\alpha\beta}, \quad (1 - 7)$$

$$\underline{\psi}_2^{\alpha\beta} = L_2 \underline{i}_2^{\alpha\beta} + L_m \underline{i}_1^{\alpha\beta}. \quad (1 - 8)$$

## 1.2 Rovnice pro soustavu spojenou s rotorovým vinutím

V případě uvažování modelu ASM v souřadnicovém systému spojeném s rotorovým vinutím platí pro obecnou otáčivou rychlost obecných rovnic  $\omega_k = \omega$ , kde  $\omega$  ( $s^{-1}$ ) je elektrická úhlová rychlost otáčení rotoru (rotorového vinutí). Souřadnicový systém je možné označit jako  $kl$ .

$$\underline{u}_1^{kl} = R_1 \underline{i}_1^{kl} + \frac{d\underline{\psi}_1^{kl}}{dt} + j\omega \underline{\psi}_1^{kl}, \quad (1 - 9)$$

$$\underline{u}_2^{kl} = R_2 \underline{i}_2^{kl} + \frac{d\underline{\psi}_2^{kl}}{dt}, \quad (1 - 10)$$

$$\underline{\psi}_1^{kl} = L_1 \underline{i}_1^{kl} + L_m \underline{i}_2^{kl}, \quad (1 - 11)$$

$$\underline{\psi}_2^{kl} = L_2 \underline{i}_2^{kl} + L_m \underline{i}_1^{kl}. \quad (1 - 12)$$

## 1.3 Rovnice pro soustavu spojenou s točivým magnetickým polem

Souřadnicový systém spojený s točivým magnetickým polem je velmi často označován jako systém  $dq$ . Pro obecnou úhlovou rychlost platí  $\omega_k = \omega_1$ , kde  $\omega_1$  ( $s^{-1}$ ) je elektrická úhlová rychlost točivého magnetického pole statoru, resp. rotoru.

$$\underline{u}_1^{dq} = R_1 \underline{i}_1^{dq} + \frac{d\underline{\psi}_1^{dq}}{dt} + j\omega_1 \underline{\psi}_1^{dq}, \quad (1 - 13)$$

$$\underline{u}_2^{dq} = R_2 \underline{i}_2^{dq} + \frac{d\underline{\psi}_2^{dq}}{dt} + j(\omega_1 - \omega) \underline{\psi}_2^{dq}, \quad (1 - 14)$$

$$\underline{\psi}_1^{dq} = L_1 \underline{i}_1^{dq} + L_m \underline{i}_2^{dq}, \quad (1 - 15)$$

$$\underline{\psi}_2^{dq} = L_2 \underline{i}_2^{dq} + L_m \underline{i}_1^{dq}. \quad (1 - 16)$$

Velmi často se rozdíl  $\omega_1 - \omega$  označuje jako skluzová rychlost  $\omega_s$  ( $s^{-1}$ ).



## 2 Rovnice asynchronního motoru - využíváné pro modelování

Představené rovnice jsou např. vhodné pro modelování stroje při využívání FOC. Existuje mnoho dalších vyjádření představených rovnic podle toho, co je od modelu očekáváno a jaké veličiny je snadné měřit a které dopočítávat pomocí modelu.

Velmi často se v literatuře objevuje stavový popis modelu stroje s různými stavovými veličinami. V případě již zmiňovaného FOC se jako stavových proměnných využívá prostorových vektorů proudu statorového vinutí  $\underline{i}_1$  např. v souřadnicové soustavě spojené se statorovým vinutím ( $\underline{i}_1^{\alpha\beta}$ ) a spřažených magnetických toků rotorového vinutí  $\underline{\psi}_2^k$  (opět např. vyjádřených v systému spojeném se statorovým vinutím  $\underline{\psi}_2^{\alpha\beta}$ ).

V [1] jsou uvedeny stavové popisy pro uvedený systém v poměrných jednotkách. Pokud poměrné jednotky nejsou využívány, je možné modely převést na zjednodušené popisy v absolutních jednotkách, jako je tomu např. v [2].

Model implementovaný v prostředí MATLAB je převzat ze stavového popisu uvedeném v [2]. Tento stavový popis je uveden v rovnici 2 - 1.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{1\alpha} \\ i_{1\beta} \\ \psi_{2\alpha} \\ \psi_{2\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2 L_m^2 + L_2^2 R_1}{\sigma L_1 L_2^2} & 0 & \frac{L_m R_2}{\sigma L_1 L_2^2} & \frac{L_m}{\sigma L_1 L_2} \omega \\ 0 & -\frac{R_2 L_m^2 + L_2^2 R_1}{\sigma L_1 L_2^2} & -\frac{L_m}{\sigma L_1 L_2} \omega & \frac{L_m R_2}{\sigma L_1 L_2^2} \\ \frac{L_m R_2}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} & -\omega \\ 0 & \frac{L_m R_2}{L_2} & \omega - \frac{R_2}{L_2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1\alpha} \\ i_{1\beta} \\ \psi_{2\alpha} \\ \psi_{2\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1\alpha} \\ u_{1\beta} \end{bmatrix}. \quad (2 - 1)$$

Stavový popis je vhodné doplnit o další rovnice, jež budou v simulaci využity.

$$M = \frac{3}{2} p_p \frac{L_m}{L_2} (\psi_{2\alpha} i_{1\beta} - \psi_{2\beta} i_{1\alpha}), \quad (2 - 2)$$

$$M - M_z = J \frac{d\Omega}{dt}, \quad (2 - 3)$$

$$\omega = p_p \Omega, \quad (2 - 4)$$

kde  $\sigma = 1 - L_m^2 / (L_1 L_2)$  (-) je tzv. rozptyl,  $i_{1\alpha}$  (A) a  $i_{1\beta}$  (A) jsou složky vektoru statorového proudu  $\underline{i}_1$  (A),  $\psi_{2\alpha}$  (Wb) a  $\psi_{2\beta}$  (Wb) jsou složky vektoru rotorového magnetického toku  $\underline{\psi}_2$  (Wb),  $u_{1\alpha}$  (V) a  $u_{1\beta}$  (V) jsou složky statorového napětí  $\underline{u}_1$  (V),  $p_p$  (-) je počet polpárů stroje,  $\omega$  ( $s^{-1}$ ) je elektrická úhlová rychlost hřídele,  $\Omega$  ( $s^{-1}$ ) je mechanická úhlová rychlost hřídele,  $M$  je vnitřní elektromechanický moment stroje a  $M$  (Nm) je moment zátěžný.

Velmi často dochází k porovnání dynamické a statické charakteristiky elektromagnetického momentu stroje. Závislost hnacího momentu na skluzu, resp. úhlové rychlosti točivého magnetického pole je uvedena v rovnici 2 - 5.

$$M_h = \frac{3 p_p U_1^2}{s \omega_1} \frac{1}{(R_1 + \frac{R_2}{s})^2 + (\omega_1 L_{1\sigma} + s \omega_1 L_{2\sigma})^2}, \quad (2 - 5)$$

kde  $s$  (-) je skluz,  $\omega_1$  ( $s^{-1}$ ) je úhlová rychlost točivého magnetického pole,  $U_1$  (V) efektivní hodnota fázového napájecího napětí, v tomto případě je využito jmenovitého napětí motoru  $380 / \sqrt{3}$  V.

### 3 Simulované závislosti elektromagnetického momentu na otáčkách stroje

Díky matematickému modelu stroje, vytvořeném v prostředí MATLAB Simulink, je možné vynést charakteristik veličin, které jsou v reálném prostředí neměřitelné. V případě této práce je vynesena závislost elektromagnetického (hnacího) momentu stroje na otáčkách stroje při změně vybraných veličin.

Vybrané veličiny jsou následující:

velikost rezistivity rotorového vinutí/kotvy stroje  $R_2$  (např. při změně oteplení stroje), velikost rezistivity statorového vinutí  $R_1$  (např. při změně oteplení stroje), velikost magnetizační indukčnosti stroje  $L_m$ , velikost rozptylové indukčnosti statorového vinutí  $L_{1\sigma}$ , velikost rozptylové indukčnosti rotorového vinutí  $L_{2\sigma}$ .

Model stroje byl vytvořen na základě reálného stroje, umístěného v laboratoři H-26. Vinutí stroje je spojeno do hvězdy.

Tab. 3 - 1 Štítkové údaje stroje.

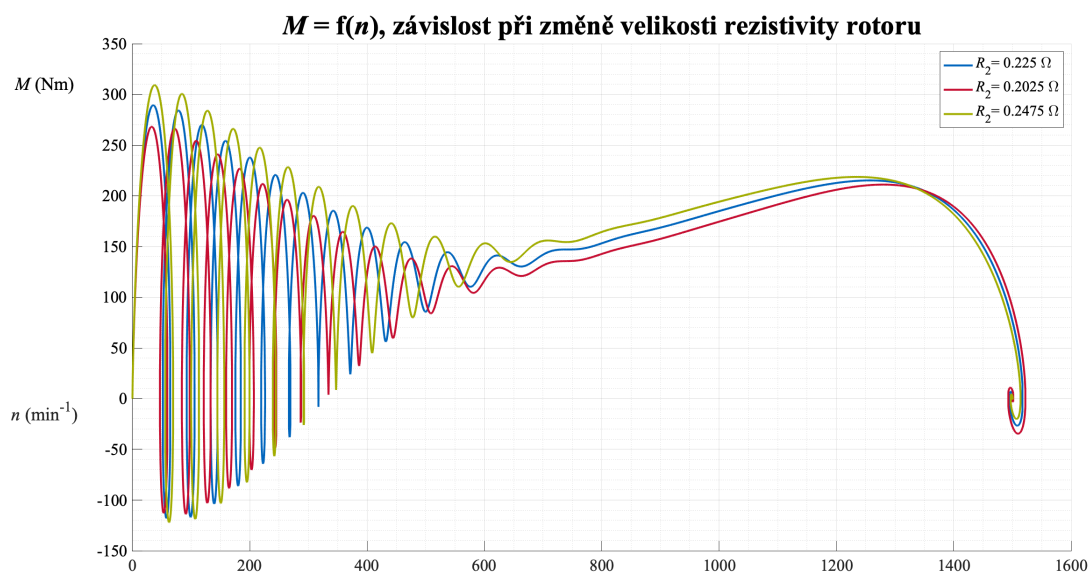
$P_n$	12 kW
$U_n$	380 V
$I_n$	22 A
$n_n$	1460 min <sup>-1</sup>
$f_n$	50 Hz
$\cos(\varphi_n)$	0.8
$p_p$	2

Tab. 3 - 2 Změřené parametry stroje.

$R_1$	370 mΩ
$R_2$	225 mΩ
$L_{1\sigma}$	2,27 mH
$L_{2\sigma}$	2,27 mH
$L_m$	82,5 mH
$L_1$	84,77 mH
$L_2$	84,77 mH
$J$	0,4 kg·m <sup>2</sup>

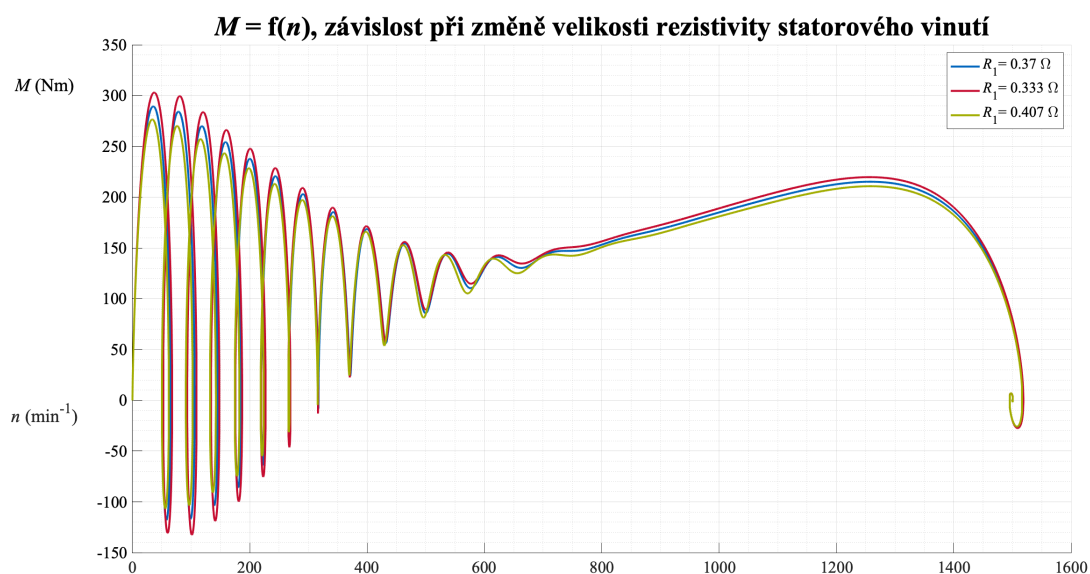
Kde  $P_n$  (W) je jmenovitý výkon stroje,  $I_n$  (A) je jmenovitý fázový proud stroje (efektivní hodnota),  $U_n$  (V) je jmenovité sdružené napájecí napětí stroje,  $f_n$  (Hz) je jmenovitá napájecí frekvence stroje,  $\cos(\varphi_n)$  (-) je jmenovitý účinník stroje,  $n_n$  (min<sup>-1</sup>) jsou jmenovité otáčky stroje,  $p_p$  (-) je počet polpárů stroje,  $R_1$  (Ω), resp.  $R_2$  (Ω) je statorový, resp. rotorový odpor,  $L_{1\sigma}$  (H), resp.  $L_{2\sigma}$  (H) je statorová, resp. rotorová rozptylová indukčnost stroje,  $L_m$  (H) je magnetizační indukčnost stroje,  $L_1$  (H), resp.  $L_2$  (H) je statorová, resp. rotorová indukčnost,  $J$  (kg·m<sup>2</sup>) je moment setrvačnosti hřídele.

#### 3.1 Změna rezistivity rotorového vinutí



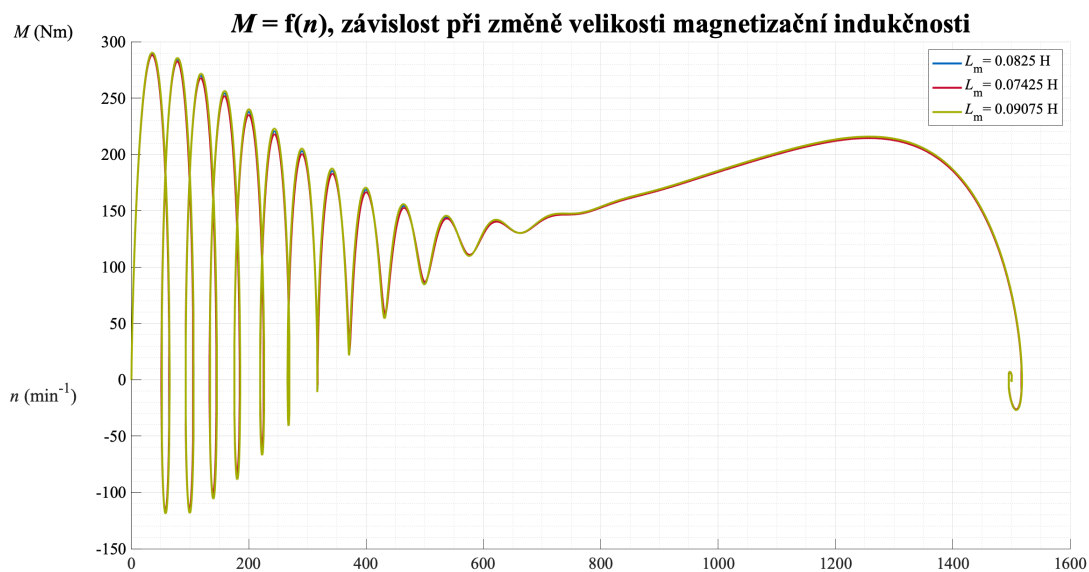
Obr. 3 - 1 Závislost elektromagnetického hnacího momentu  $M$  na otáčkách stroje, vynesená při změně rezistivity rotorového viutí o  $\pm 10\%$ .

### 3.2 Změna rezistivity statorového vinutí



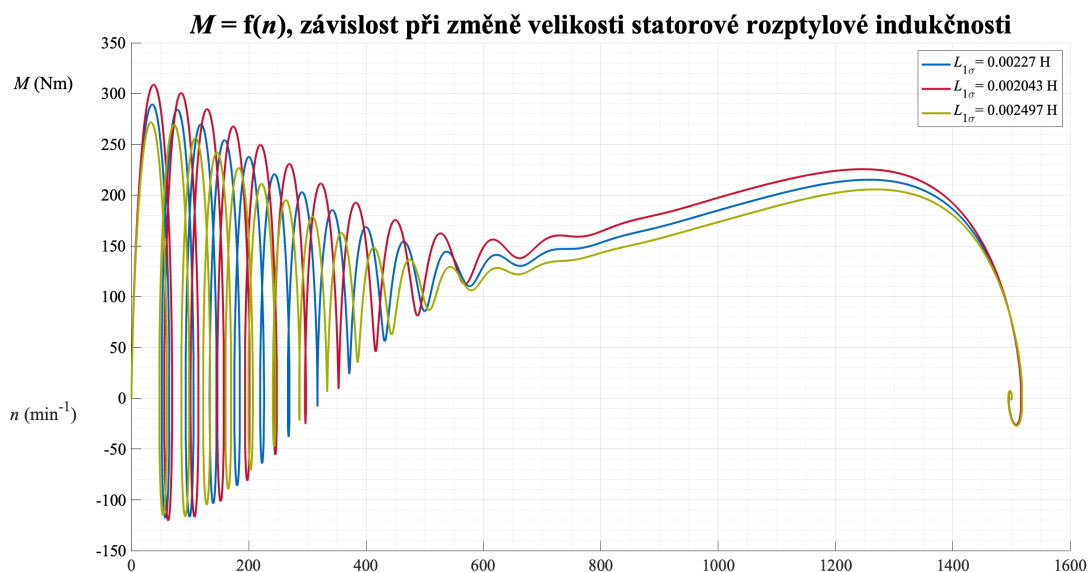
Obr. 3 - 2 Závislost elektromagnetického hnacího momentu  $M$  na otáčkách stroje, vynesená při změně rezistivity statorového viutí o  $\pm 10\%$ .

### 3.3 Změna magnetizační indukčnosti stroje



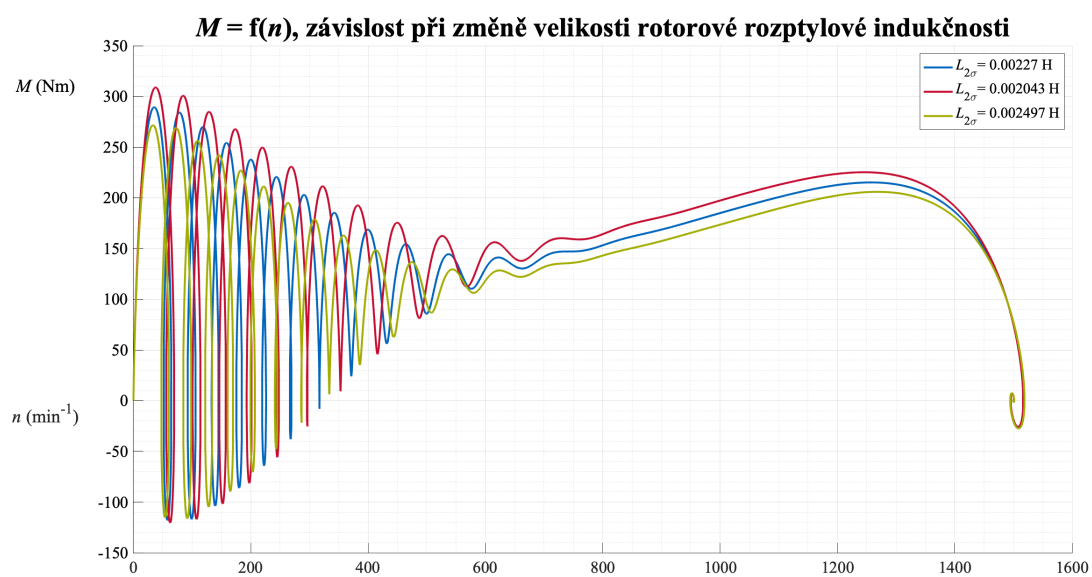
Obr. 3 - 3 Závislost elektromagnetického hnacího momentu  $M$  na otáčkách stroje, vynesená při změně magnetizační indukčnosti o  $\pm 10\%$ .

### 3.4 Změna rozptylové indukčnosti statorového vinutí stroje



Obr. 3 - 4 Závislost elektromagnetického hnacího momentu  $M$  na otáčkách stroje, vynesená při změně rozptylové indukčnosti statorového vinutí o  $\pm 10\%$ .

### 3.5 Změna rozptylové indukčnosti rotorového vinutí stroje



Obr. 3 - 5 Závislost elektromagnetického hnacího momentu  $M$  na otáčkách stroje, vynesená při změně rozptylové indukčnosti rotorového vinutí o  $\pm 10\%$ .

## Zhodnocení

Z představených průběhů závislosti elektromagnetického momentu stroje  $M$  na otáčkách  $n$  je možné vypořádat, že největší vliv na změnu průběhu má změna rezistivity rotoru  $R_2$  a změna rozptylové indukčnosti statorového vinutí  $L_{1\sigma}$  a rotoru  $L_{2\sigma}$ .

Při zvýšení rezistivity rotoru je dochází dle teorie k „pokládání“ charakteristiky a zvýšení záběrného momentu stroje. Proto jeden z možných způsobů rozběhu stroje s vinutou kotvou je rozběh se zvýšením rotorových odporů. Zvýšení rezistivity může být také zapříčiněno ohřevem stroje.

Změna velikosti rezistivity statorového vinutí se projevuje opačným způsobem, než změna rezistivity rotoru. Při snížení rezistivity vinutí dochází ke zvýšení velikosti elektromagnetického momentu stroje nad hodnotu, než která je pozorována při zadané hodnotě rezistivity. Naopak při zvýšení rezistivity vinutí dochází ke snížení vnitřního elektromagnetického momentu.

Zvýšení rozptylové indukčnosti statorového vinutí a rotoru se opět projevuje opačným způsobem, než změna rezistivity rotoru. Při snížení indukčnosti dochází ke zvýšení hodnoty elektromagnetického momentu při určitých otáčkách stroje. Při zvýšení rozptylové indukčnosti poté ke snížení momentu. Z teoretických předpokladů je zřejmé, že je vyžadována co nejmenší hodnota rozptylového magnetického toku, který se uzavírá cestami, které jsou odlišné od cesty hlavního magnetizačního toku. Simulace tento předpoklad potvrzuje.

Změna magnetizační indukčnosti  $L_m$  prakticky nemá vliv na představenou závislost elektromagnetického momentu.

Pozorované změny odpovídají teoretickým předpokladům o změně statické charakteristiky vnitřního elektromagnetického stroje na otáčkách a je je tudíž možné aplikovat i na dynamickou závislost elektromagnetického momentu stroje.

## Literatura

- [1] M., Popescu. Induction Motor Modelling for Vector Control Purposes. In: *Helsinki University of Technology, Laboratory of Electromechanics* [online]. 2000 [cit. 2023-10-14]. Dostupné z: [https://avys.omu.edu.tr/storage/app/public/mustafa.aktas/110896/induction\\_motor\\_modelling.pdf](https://avys.omu.edu.tr/storage/app/public/mustafa.aktas/110896/induction_motor_modelling.pdf).
- [2] LIPČÁK, Ondřej; BAUER, Jan. Doprovodný materiál k přednáškám. In: *Materiál k přednáškám a cvičení v předmětu BIM14EPT* [online]. [B.r.] [cit. 2023-02-28]. Dostupné z: <https://moodle.cvut.cz>.

## **Appendix A:      Seznam symbolů a zkratek**

### **A.1      Seznam zkratek**

**ASM**    Asynchronní Motor

**FOC**    Field Oriented Control



## A.2 Seznam symbolů

$f_n$	(Hz)	jmenovitá napájecí frekvence
$I_n$	(A)	jmenovitý fázový proud stroje
$\underline{i}_1^k$	(A)	prostorový vektor proudu statorového vinutí
$\underline{i}_2^k$	(A)	prostorový vektor proudu rotorového vinutí
$J$	(kg·m <sup>2</sup> )	moment setrvačnosti
$L_{1\sigma}$	(H)	rozyptylová indukčnost statorového vinutí
$L_1$	(H)	indukčnost statorového vinutí
$L_{2\sigma}$	(H)	rozyptylová indukčnost rotorového vinutí
$L_2$	(H)	indukčnost rotorového vinutí
$L_m$	(H)	magnetizační indukčnost
$\omega_1$	(s <sup>-1</sup> )	elektrická úhlová rychlost točivého magnetického pole
$\omega_k$	(s <sup>-1</sup> )	obecná elektrická úhlová rychlost
$\Omega$	(s <sup>-1</sup> )	mechanická úhlová rychlost
$\omega_s$	(s <sup>-1</sup> )	skluzová elektrická úhlová rychlost
$\omega$	(s <sup>-1</sup> )	elektrická úhlová rychlost rotoru
$P_n$	(W)	jmenovitý výkon
$\cos(\varphi_n)$	(-)	jmenovitý účinník
$M$	(Nm)	zátěžný moment
$M$	(Nm)	vnitřní elektromechanický moment stroje
$n_n$	(min <sup>-1</sup> )	jmenovité otáčky
$p_p$	(-)	počet polpárů stroje
$\underline{\psi}_1^k$	(Wb)	prostorový vektor spřaženého magnetického toku statorového vinutí
$\underline{\psi}_2^k$	(Wb)	prostorový vektor spřaženého magnetického toku rotorového vinutí
$R_1$	(Ω)	rezistivita statorového vinutí
$R_2$	(Ω)	rezistivita rotorového vinutí
$s$	(-)	skluz
$U_n$	(V)	jmenovité sdružené napětí
$U_1$	(V)	efektivní hodnota fázového napájecího napětí
$\underline{u}_1^k$	(V)	prostorový vektor napětí statorového vinutí
$\underline{u}_2^k$	(V)	prostorový vektor napětí rotorového vinutí