Конспект по матанализу за II семестр бакалавриата Чебышёва СПбГУ (лекции Кислякова Сергея Витальевича)

25 декабря 2016 г.

Оглавление

Глава 1

Длина (Вариация)

Rem. Это нам нужно например затем, чтобы узнать наконец всякую тригонометрию.

1.1 Функции ограниченной вариации

Def. Путь — непрерывное отображение $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Носитель пути - $f([a,b])$ (бывает очень разным: от точки до квадрата).

Терминология: путь = движение, носитель = траектория пути.

Def (Длина пути)**.** Путь задан на $[a,b]; x_0 < x_1 < \dots < x_n, x_j \in [a,b]$.

$$\sup_{x_0 < \dots x_n} \sum_{j=0}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| = l(f;[a,b])$$

.

Sup может быть и бесконечным; путь f спрямляемый, если $l(f;[a,b]) < +\infty$.

//это действительно пройденное расстояние, а не носитель пути, например

Def. $S(x_0, \dots x_n) = S_f(x_0, \dots x_n) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$

Супремум таких штук нам ничего не мешает считать, если функция f не является непрерывной.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ - произвольное отображение;

$$V(f,[a,b]) = \sup_{x_0, \dots x_n} S_f(x_0, \dots x_n)$$

— вариация отобаржения f на $[a,b]$; если она меньше $+\infty$, то f — отображение ограниченной вариации.

Некоторое время теперь будем говорить про них.

Note (1). От добавления точки к набору $x_0, \dots x_n$ число $S_f(x_0, \dots x_n)$ не уменьшается.

Пусть мы добавили точку y так, что порядок снова правильный. Если $y < x_0 || y > x_n$, то у нас на положительное слагаемое больше; если между какими-то иксами, то это так по неравенству треугольника.

Note (2).

$$V(f;[a,b]) = 0 \;\Leftrightarrow f \equiv const \text{ на } [a,b]$$

Обратно очевидно, туда $|f(y) - f(x)| \leq V_f[a,b] = 0 \; \forall x, y \in [a,b], x < y$

Note (3). f - ограниченной вариации, $\alpha \in \mathbb{R} \;\Rightarrow V(\alpha f;[a,b]) = |\alpha| V(f;[a,b])$

Lemma. *$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ (векторнозначные)*

$$V(f+g;[a,b]) \leq V(f,[a,b]) + V(g,[a,b])$$

В частности, если f, g ограниченной фариации, то сумма функций — тоже.

Proof.

$$|(f+g)(x_{j+1}) - (f+g)(x_j)| \leq |f(x_{j+1}) - f(x_j)| + |g(x_{j+1}) - g(x_j)|$$

Ну и надо сложить это все, чтобы получить S, а потом перейдем к супремуму. $\square$

Rem. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m; f(x) = (f_1(x), \ldots f_m(x)) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x) e_i, e_i$ — стандартные базисные.

Lemma (2). *f — ограниченной вариации на $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ все координатные функции — тоже ограниченной вариации.*

//вообще одно через другое явно посчитать сложно

Proof. $\Leftarrow$ От того, что мы умножили функцию ограниченной вариации на вектор, ограниченность вариации не испортилась, а значит f ограниченной вариации по лемме 1, поскольку это сумма координатных функций, умноженных на единичные базисные вектора.

$\Rightarrow$

$$|f(x_{j+1}) - f(x_j)| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |f_k(x_{j+1}) - f_k(x_j)|^2} \geq |f_k(x_{j+1}) - f_k(x_j)|$$

Ну и из этого неравенства следует все, что надо. $\square$

Lemma (3). *$f : [a,b] \to R^m; u < v < w \in [a,b]$. Тогда $V(f,[u,w]) = V(f;[u,v]) + V(f;[v,w])$*

//если вариации ограничены, то это еще одна аддитивная функция промежутка.

Proof. $x_0, \ldots x_n \in [u,w]; S_f(x_0, \ldots x_n) \leq S_f(x_0, \ldots v, \ldots x_n)$, то есть распадется на две суммы:

$$S_f(x_0, \ldots x_n) \leq S_f(x_0, \ldots x_j, v) + S_f(v, x_{j+1}, \ldots x_n) \leq V(f;[u,v]) + V(f;[v,w])$$

Перейдем к супремуму и получим неравенство

$$V(f,[u,w]) \leq V(f;[u,v]) + V(f;[v,w])$$

//если v попала не в отрезок между иксами, а с краю, то тоже все понятно.

Теперь покажем, что $V(f,[u,w]) \geq V(f;[u,v]) + V(f;[v,w])$.

Если $V(f,[u,w])$ бесконечна, то доказывать нечего, считаем, что конечна. Пусть $x_0,\dots x_k \in [u,v]; y_0,\dots y_l \in [v,w]$.

$$S_f(x_0,\dots x_k) + S_f(y_0,\dots y_l) \leq S_f(x_0,\dots x_k, y_0,\dots y_l) \leq V(f;[u,w])$$

$S_f(x_0,\dots x_k) \leq V(f;[u,w]) - S_f(y_0,\dots y_l)$, значит $V(f;[u,v]) \leq V(f;[u,w]) - S_f(y_0,\dots y_l) \Leftrightarrow S_f(y_0,\dots y_l) \leq V(f,[u,w]) - V(f,[u,v])$, перейдем к супремуму и получим что надо. $\square$

Theorem 1.1.1. *$h:[a,b]\to\mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации $\Leftrightarrow$ она является разностью двух возрастающих функций.*

//сама может вести себя как-то непросто

Proof. 1. Скалярная возрастающая функция ϕ на $[a,b]$ — функция ограниченной вариации.

$\lessdot x_0 < \dots < x_n \in [a,b]$;

$$\sum_{j=0}^{n} |\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)| = \sum_{j=0}^{n} \phi(x_{j+1}) - \phi(x_j) = \phi(x_n) - \phi(x_0) \leq \phi(b) - \phi(a)$$

Кстати, если ϕ возрастает, что $V(\phi,[a,b]) \equiv \phi(b) - \phi(a)$.

2. Значит мы доказали теорему в сторону $\Leftarrow$.

3. Надо сказать, что $h = \phi - \psi, \phi, \psi$ возрастают на $[a,b]$.

Положим $\phi(x) = V(h,[a,x]), x\in[a,b]$. $y \geq x; \phi(y) - \phi(x) = V(h,[x,y]) \geq 0$. То есть эта штука действительно возрастающая.

Остается доказать, что $\psi(x) = \phi(x) - h(x)$ тоже возрастает.

$x < y \in [a,b]; h(y) - h(x) \leq |h(y) - h(x)| \leq V(h;[x,y]) = \phi(y) - \phi(x)$. Значит $\phi(x) - h(x) \leq \phi(y) - h(y)$, чтд.

$\square$

Statement. *$f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ — векторнозначная функция ограниченной вариации. $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}; \phi(x) = V(f,[a,x]), x\in[a,b]$ - возрастающая скалярная функция.*

Если f непрерывна в точке $u\in[a,b] \Rightarrow \phi$ тоже непрерывна в этой точке.

Proof. Проверим например, что ϕ непрерывна слева.

$a \leq y < u \Rightarrow \phi(y) \leq \phi(u)$; $\lessdot\ \epsilon > 0$; $\exists\ \delta > 0 : |y-u| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(u)| < \epsilon$.

$\exists\ x_0,\dots x_k \in [a,u] : V(f,[a,u]) \leq S_f(x_0,\dots,x_k) + \epsilon$. Можно считать, что $x_k = u, x_k - x_{k-1} < \delta$ (ведь от добавления точки справа и подразбиения S_f не уменьшается).

$S_f(x_0,\dots x_k) = |f(x_1) - f(x_0)| + \dots + |f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})| + |f(u) - f(x_{k-1})| \leq V(f,[a,x_{k-1}]) + \epsilon$

$$\phi(u) \leq \phi(x_{k-1}) + 2\epsilon$$

Итак, мы нашли точку $x_{k-1} < u : \phi(u) - \phi(x_{k-1}) \leq 2\epsilon$. Поэтому в u у функции есть предел и он равен как раз $\phi(u)$. □

Corollary. Скалярная непрерывная функция h имеет ограниченную вариацию $\Leftrightarrow$ h можно представить как разность двух непрерывных возрастающих функций.

Посмотрим на то, какие две функции преъявили в теореме, и поймем.

Theorem 1.1.2 (О замене переменной)**.** *$f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ ограниченной вариации, $[c, d]$ — другой отрезок, $\alpha : [c, d] \to [a, b]$ — непрерывная строго монотонная биекция, $g := f \circ \alpha$. Тогда $V(g, [c, d]) = V(f, [a, b])$.*

//там какие-то условия лишние, мы даже знаем какие

Proof.

1. α строго возрастает

$$\sup_{t_0 \leq \dots \leq t_k} \sum_{j=0}^{k-1} |g(t_{j+1}) - g(t_j)| = \sup_{\dots} \sum_{j=0}^{k-1} |f(\alpha(t_{j+1})) - f(\alpha(t_j))|,$$

$\alpha(t_0) < \alpha(t_1) < \dots < \alpha(t_k)$, и все наборы точек разбиения на новом отрезке, которые есть, так получаются, так что справа написана как раз вариация на новом отрезке.

2. α строго убывает; там будет все то же самое, только $\alpha(t_0) > \alpha(t_1) > \dots > \alpha(t_k)$, но нам не важно, в каком порядке суммировать.

□

Corollary. Длина пути не зависит от параметризации.

Corollary (2)**.** В теореме ничего не сказано про конечность вариаций, и это там не нужно.

Путь спрямляем при одной параметризации $\Leftrightarrow$ он спрямляем при любой другой.

Def. Множество $C \subset \mathbb{R}^n$ — простая дуга, если $\exists$ непрерывное отображение $f : [a, b] \to C$ и f инъективна (непрерывная биекция между отрезком и подмножеством $\mathbb{R}^n$).

Rem. Раз отрезок компакт, то C компактно и f — гомеомерфизм между отрезком и C.

Def. Путь $g : I \to \mathbb{R}^n, (I$ замкнут$)$ — простой, если g инъекция.

Простая дуга — это носитель простого пути.

g — параметризация простой дуги.

Lemma. *C — простая дуга, f — ее параметризация. Длина пути f не зависит от выбора f.*

Proof. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n, g : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ — две параметризации, тогда $\alpha(t) = f^{-1}(g(t))$ — гомеоморфизм между $[c,d]$ и $[a,b], t \in [c,d]$. Значит α строго монотонна (в этом месте пропущена соответствующая несложная задача по топологии об этом), значит теорема о замене переменной применима и действительно $l(f,[a,b]) = l(g,[c,d])$. □

Def. Длина простой дуги — длина любой ее параметризации (раз мы доказали, что от параметризации не зависит, то корректно ввести понятие).

Ex. $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\Gamma_f = \{(x,u(x)) | x \in [a,b]\}$ — простая дуга. $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^2; \phi(x) = (x,u(x))$.

Она спрямляема ⇔ координатные спрямлемы, а это когда они — разности двух монотонных функций.

$$h(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, 0 \le x \le 1 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

— не функция ограниченной вариации (не спрямляемый график :( )

Если u кусочно монотонна, тогда график — спрямляемая простая дуга (ведь вариация на каждом отрезке, где она монотонна, просто разность значений на концах, а таких отрезков конечное число).

$C = \{x^2 + y^2 = 1, y \ge 0\}$ — спрямляемая простая дуга: $C = \{(x, \sqrt{1-x^2}), x \in [-1,1]\}$ — верхняя полуокружность, и длину этой штуки и называют число π.

Ну у нижней полуокружности такая же длина:

Lemma. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — путь, $\mathbb{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — изометрия $\Rightarrow$ $\mathbb{T} \circ f$ и f имеют одну длину.*

1.2 Естественная параметризация спрямляемого пути

= "параметризация длиной дуги", натуральная параметризация

Пусть есть спрямляемый путь $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n, L$ — его длина, $x_0 \in [a,b]$ назовем началом отсчета

$$\phi(x) = \begin{cases} V(f;[x_0,x]), x \ge x_0 \\ -V(f,[x,x_0]), x \le x_0 \end{cases}; \ \phi(x) = V(f,[a,x]) - V(f,[a,x_0])$$

ϕ непрерывна на $[a,b]$ (доказывали ровно это в прошлий раз) и возрастает. $\phi : [a,b] \to [\alpha,\beta], \phi(x) - \phi(y), x > y = V(f,[y,x])$

Def. f нзывается движением без задержки, если f не постоянна ни на каком нетривиальном замкнутом отрезке. Тогда ϕ строго возрастает.

$\phi(x_0) = 0$, а еще $\beta - \alpha = \phi(b) - \phi(a) = V(f, [a, b]) = L$.

И раз ϕ непрерывная и строго монотонная, значит у нее есть обратная. $\psi = \phi^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$. Новый путь $g = f \circ \psi; [c, d] \subset [\alpha, \beta]$. По теореме о независимости вариации от параметризации

$$V(g; [c, d]) = V(f, [\psi(c), \psi(d)]) = \phi(\psi(d)) - \phi(\psi(c)) = d - c$$

то есть

$$l(g; [c, d]) = d - c$$

У любого движения без задержки можно придумать хорошую параметризацию, где длина пути считается совсем просто.

1.3 Длина гладкого пути

Def. Путь $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ называется гладким, если он непрерывно дифференцируем.

Rem. То есть производные координатных функций непрерывны: $f' = (f_1', \dots f_n')$

Theorem 1.3.1. *Пусть f — гладкий спрямляемый путь на $[a, b]$, $\forall\ [c, d] \subset [a, b]$*

$$l(f, [c, d]) = \int\limits_c^d |f'(x)| dx = \int\limits_c^d \sqrt{(f_1')^2 + \dots + (f_n')^2} dx$$

Перепишем условие на языке аддитивных функций промежутка: $\Phi([c, d]) = l(f, [c, d])$, надо доказать, что $\alpha(x) = \sqrt{(f_1')^2 + \dots + (f_n')^2}$ — ее плотность.

Rem (Теорема о согласованной системе оценок). Напоминание в части достаточности:

ψ — аддитивная функция промежута на $[a, b], p$ — непрерывная функция там же. Предположим, что $\exists$ две функции M, m на $[a, b]$:

1. $\forall$ замкнутого отрезка $I \subset [a, b]$ $\forall\ x \in I$ $m(I) \le p(x) \le M(I)$
2. $\forall$ замкнутого отрезка $I \subset [a, b]$ $\forall\ x \in I$ $m(I)|I| \le \psi(I) \le M(I)|I|$
3. $M(I) - m(I) \to 0, |I| \to 0$

Тогда p — плотность для ψ.

Proof. $\lambda_j(I) = \min_{x \in |I|} |f_j'(x)|, \mu_j(I) = \max_{x \in |I|} |f_j'(x)|$. Определим нужные нам функции так:

$$M(I) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i(I)^2}, m(I) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i(I)^2}$$

Проверим три условия:

Третье:

$$M(I)-m(I)=|(\mu_1(I),\dots\mu_n(I))|-|(\lambda_1(I),\dots\lambda_n(I))|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_i(I)-\lambda_i(I))^2}$$

$\forall\ \epsilon>0\ \exists\delta:|I|<\delta\Rightarrow\mu_i(I)-\lambda_i(I)<\epsilon$ по равномерной непрервыности, квадрат из суммы $\leq\sqrt{n}\epsilon$, когда $|I|<\delta$.

Первое очевидно по определению m, M.

Вторoe:

Пусть $x, y\in I; |f_j(x)-f_j(y)|=|f_j'(\xi_j)||(x-y)|, \xi_j\in(x,y)$.

$$\lambda_j(I)|x-y|\leq|f_j(x)-f_j(y)|\leq\mu_j(I)|x-y|$$

$x_0<x_1<\dots<x_k, x_i\in I$. Наша ψ — это вариация $\sum\limits_{l=0}^{k-1}|f(x_{l+1})-f(x_l)|$, мы хотим это как-нибудь оценить.

Посмотрим на

$$|(f_1(x_{l+1})-f_1(x_l),\dots,f_n(x_{l+1})-f_n(x_l))|=\left(\sum_{j=1}^{n}|f_j(x_{l+1})-f_j(x_l)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сверху это можно оценить как $\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j(I)^2\right)^{\frac{1}{2}}|x_{l+1}-x_l|=M(I)(x_{l+1}-x_l)$, снизу как $\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j(I)^2\right)^{\frac{1}{2}}|x_{l+1}-x_l|=m(I)(x_{l+1}-x_l)$.

Значит

$$m(I)|I|\leq m(I)(x_k-x_0)=m(I)\sum_{l=0}^{k-1}(x_{l-1}-x_l)\leq\sum_{l=0}^{k-1}|f(x_{l+1})-f(x_l)|\leq$$

$$\leq M(I)\sum_{l=0}^{k-1}(x_{l+1}-x_l)\leq M(I)(x_k-x_0)\leq M(I)|I|$$

□

Note. Если $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ непрерывно-дифференц., то f — спрямляемый.

Почему:

$t_0<t_1<\dots<t_k\in[a,b]$, тогда $|f(t_{j+1})-f(t_j)|\leq|f'(\xi_j)|(t_{j+1}-t_j), \xi_j\in(t_j,t_{j+1})$ — доказывали в прошлом семестре. $c=\max_{t\in[a,b]}|f'(t)|\ \Rightarrow$ (а непрервыная производная достигает его на компакте)

$$\sum_{j=0}^{k-1}|f(t_{j+1})-f(t_j)|\leq c(t_k-t_0)\leq c(b-a)$$

Ну то есть спрямляемость пути в теореме наверху можно не требовать.

Ex. 1. Прямой путь

$x, y \in \mathbb{R}^n, f : [0,1] \to \mathbb{R}^n, f(t) = x + t(y-x), f'(t) = y - x$

$$l(t) = \int\limits_0^1 |x-y| dt = |x-y|$$

Ага, получили, что длина отрезка равна длине отрезка.

Забыли в опрелении длины пути про ломанные, рассматривали формальные суммы. А сейчас мы поняли, что если приближать ломанной, получится то же самое (чего и ожидали).

2.

$$n = 1, \phi : [a,b] \to \mathbb{R}; l(\phi, [c,d]) = \int\limits_c^d |\phi'(t)| dt = V(\phi, [c,d])$$

$\phi : [0,1] \to \mathbb{R}, \phi(t) = \sqrt{t}; V(\phi, [0,1]) = \phi(1) - \phi(0) = 1$, а формулу с интегралом на $[0,1]$ применить не удастся: не гладкая в 0. А $V(\phi, [\epsilon, 1]) = \int\limits_\epsilon^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}}$. Можно посчитать, а можно сразу сказать, что при $\epsilon \to 0$ $V(\phi, [\epsilon, 1]) \to 1$.

Def. Пусть (u, v) — открытый (возможно бесконечный) отрезок; пусть $f : [u, v]$ интегрируема по Риману $\forall [a,b] \subset (u, v)$. Если $\exists \lim_{a \to u, b \to v} \int\limits_a^b f(t) dt$, то говорят, что f интегрируема по Риману на (u, v) в несобственном смысле.
//сначала одну точку устремляем, а потом другую

$\gamma(t, \sqrt{t})$; $l(\gamma, [0,1]) = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_\epsilon^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4t}} dt$

Понятно, что можно посчитать путь у графика функции с конечным числом особенностей такого вида.

1.4 Естественная параметризация гладкого пути

$\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, гладкий (класса C^1). ϕ описывает безостановочное движение, если $\phi'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$. $\phi'(t)$ отделена от нуля, $[c,d] \subset [a,b], l(\phi, [c,d]) = \int\limits_c^d |\phi'(t)| dt > 0$ — безостановочное движение яляется движением без задержек (обратное конечно неверно).

НУО движение без задержек.

$$x_0 \in [a,b], \alpha(t) = \begin{cases} l(\phi, [x_0, t]), t > x_0 \\ -l(\phi, [t, x_0]), t \leq x_0 \end{cases}, t \in [a,b]$$

Теперь $\alpha(t) = \int\limits_{x_0}^{t} |\phi'(s)|ds$. $\alpha[a,b] \to [u,v], v-u$ — длина пути ϕ, $\beta = \alpha^{-1} : [u,v] \to [a,b]$, непрерывная, $\alpha'(t) = |\phi'(t)|$, нигде не обращается в 0, β дифференцируема тогда и $\beta'(s) = \frac{1}{\alpha'(\beta(s))}$.

Естественная параметризация: $\psi(s) = \phi(\beta(s)), s \in [u,v]$, это снова гладкая функция как композиция гладких.

$$\psi'(s) = \phi'(\beta(s))\beta'(s) = \frac{\phi'(\beta(s))}{|\phi'(\beta(s))|}$$

— сразу бросается в глаза то, что модуль у скорости естественной параметризации $= 1$.

$$l(\psi, [c,d]) = \int\limits_{c}^{d} |\psi'(t)|dt = d - c$$

сразу получилось.

Note. Почти все остается верным, если (например) предположить существование, непрерывность ϕ' на (a,b) + надо предположить, что путь спрямляем.

$$x_0 \in (a,b), \alpha(t) = \begin{cases} l(\phi, [x_0, t]), t > x_0 \\ -l(\phi, [t, x_0]), t \le x_0 \end{cases}, t \in (a,b), \alpha(t) = \int\limits_{x_0}^{t} |\phi'(s)ds|$$

$\exists\ u = \lim_{t\to a} \alpha(t), v = \lim_{t \to b} \alpha(t)$. Доопределим α на концах, дальше делаем все то же самое, β будет дифференцируема везде, кроме концов отрезка.

Там написано например, что можно не концы, а какие-то еще точки исключить.

Глава 2

Движение по окружности, простое вращение, тригонометрические функции

Def.

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

— группа по умножению, и обратные элементы — это сопряженные.

$\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ называется простым вращением, если

1. Γ — функция класса C^1
2. $\Gamma(0) = 1, \Gamma'(0) = i$
3. $|\Gamma(t)| = 1$

//вечное, безостановочное, равномерное, с единичной скоростью и подчинено нормировочному условию 2 (а оно означает движение по окружности начиная с 1 против часовой стрелки).

Результат, который мы хотим получить:

Theorem 2.0.1. $\exists\,!$ *простое вращение.*

Proof. **Подготовка**

Rem (Про комплексную арифметику). $z = a + bi, w = c + di, z\bar{w} = ac + bd + (bc - ad)i$ и $Re(z\bar{w}) = \langle z, w \rangle$, если смотреть на эти числа как на вектора.

$$z \perp w \iff z\bar{w} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

(u, v) — возможно бесконечный отрезок (открытый или замкнутый). $\lambda : (u, v) \to \mathbb{T}$, пусть она непрерывно-дифференцируемая. $\lambda(t)\overline{\lambda(t)} = 1$, продифференцировав это, получим

$$0 = \lambda'(t)\overline{\lambda(t)} + \overline{\left(\overline{\lambda(t)}\lambda'(t)\right)} = 2Re(\lambda'(t)\overline{\lambda(t)})\ (\overline{\lambda}' = \overline{\lambda'})$$

Вывод: если λ — движение по окружности, $\forall t \in (u, v) \lambda'(t)\overline{\lambda(t)} = iw(t), w(t) \in \mathbb{R}$.

Функция $t \to w(t)(t \in \langle u, v\rangle)$ непрерывна. Предположим еще, что движение безостановочно, т.е. $\lambda'(t) \neq 0\ \forall\ t$.

Если λ — гладкое безостановочное движение по окружности, то $\lambda'(t) = iw(t)\lambda(t), w(t) \in \mathbb{R}$, непрерывна, сохраняет знак. Говорят, что движение происходит в положительном направлении, если $w(t) > 0$, в отрицательном иначе $(w(t) < 0)$.

Note. Если простое вращение $\gamma\ \exists$, то $\forall\ t \in \mathbb{R}\ \gamma'(t) = c\gamma(t)$ Посмотрим на первое условие: $\gamma(0) = 1, \gamma'(0) = i$. $\gamma'(t) = iw(t)\gamma(t), w(t) > 0$ всюду $(w(0) = 1)$, $1 = |\gamma'(t)| = w(t)|\gamma(t)| \Rightarrow w \equiv 1$.

Statement. *Простое вращение единственно, если существует.*

Proof. Пусть γ_1, γ_2 — два простых вращения, пусть $\Delta(t) = \gamma_1(t)\overline{\gamma_2(t)}, \Delta(t) = \gamma_1'(t)\overline{\gamma_2(t)} + \gamma_1(t)\overline{\gamma_2('t)} = i\gamma_1(t)\overline{\gamma_2(t)} + \gamma_1(t)\overline{i\gamma_2(t)} = 0$.

Значит $\gamma_1(t)\overline{\gamma_2(t)} \equiv c, \gamma_1(0)\overline{\gamma_2(0)} = 1 \Rightarrow c = 1$ и $\gamma_1 = \gamma_2$. □

Построение простого вращения

Для начала найдем какую-нибудь удобную параметризацию α окружности. Сразу будем заботиться о равенстве $\alpha(0) = 1$.

Параметризация верхней полуокружности: $\psi(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}) = t + i\sqrt{1 - t^2}, t \in [-1, 1]$. Но условие, которое мы хотим, не выполняется, плюс, движение тут по часовой стрелке, а не против.

Поэтому возьмем новое $\psi_1(s) = \psi(1 - s), s \in [0, 2]$. $\psi_1 = 1 - s + i\sqrt{1 - (1 - s)^2} = 1 - s + i\sqrt{s}\sqrt{2 - s}, \psi_1(0) = 1, \psi_1(2) = -1$.

Хорошо бы построить биекцию отрезка с окружностью.

$\lessdot\ \Delta : [-2, 2] \to \mathbb{C}, \Delta(u) = (1 - |u| + isign(u)\sqrt{|u|}\sqrt{|2 - |u||})$. Δ переводит биективно $[0, 2]$ в верхнюю единичную полуокружнось, $[-2, 0]$ в нижнюю - почти биекция, точка -1 получается на обоих концах (биекция при $\Delta|_{(-2,2)}$ с $\mathbb{T} \setminus \{-1\}$), непрерывна.

Захотим дифференцировать, на концах отрезка будет плохо, но мы поняли, что это не важно; хуже, что плохо будет в 0 (из-за модуля).

Подправим: $\gamma : [\sqrt{2}, -\sqrt{2}] \to [-2, 2]; \gamma(v) = sign(v)|v|^2$. Тогда $sign(\gamma(v)) = sign(v)$.

$$\Delta_1(v) = (1 - v^2 + isign(v)\sqrt{v^2}\sqrt{2 - v^2}) = 1 - v^2 + iv\sqrt{2 - v^2}$$

— конечная параметризация окружности. $\Delta_1(0) = 1, \Delta_1(\sqrt{2}) = \Delta_1(-\sqrt{2}) = -1; (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \to \mathbb{T} \setminus \{-1\}$ - биекция, непрерывное.

Заметим, что построенная нами параметризация — движение без задержки. Значит можем сказать что-то про длину:

$$\phi : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to I, \phi(t) = \begin{cases} l(\Delta_1, [0,t]), t \geq 0 \\ -l(\Delta_1, [-t, 0]), t \leq 0 \end{cases}$$

$\phi(\sqrt{2}) = \pi, \phi(-\sqrt{2}) = -\pi; \alpha = \phi^{-1} : [-\pi, \pi] \to [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (это потому что мы определили так число π в предыдущей главе).

Зададим наконец $\Gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{T};\ \Gamma(x) = \Delta_1(\alpha(x))$. Поскольку это параметризация длиной дуги понятно, что $\Gamma(\frac{\pi}{2}) = i, \Gamma(\frac{-\pi}{2}) = -i$ (естественная параметризация спрямляемого пути).

Посмотрим на $\Delta_1'(v) = -2v + i(\sqrt{2 - v^2} + \frac{2v^2}{2\sqrt{1-v^2}})$, т.е. Δ_1 непрерывно-дифференцируема на $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $\Delta_1' \neq 0\ \forall\ v \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, т.е. на этом открытом отрезке это безостановочное движение. Значит $\exists$ непрерывная ξ, сохраняющая знак: $\Delta_1'(v) = i\xi(v)\Delta_1(v)\ \forall\ v \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Какой знак? $\Delta_1'(0) = 2i = \xi(0)i\Delta_1(0) = \xi(0)i \Rightarrow \xi(0) = 2 > 0$. То есть суженное Δ_1 — безостановочное движение в положительном направлении.

После получения этого результата все эти формулы, которым мы тут написали, нам не нужны.

$$\Gamma(x) = (\Delta_1 \circ \alpha)(x) = (\Delta_1 \circ \phi^{-1})(x), \phi(t) = \int\limits_0^t |\Delta_1'(\tau)| d\tau, \tau \in (-\pi, \pi)$$

— монотонно возрастающая функция, $\phi^{-1} = \alpha$ тоже монотонно возрастает, α — положительная функция.

$$\Gamma'(x) = \xi(\alpha(x))i\Gamma(x)\alpha'(x),$$

α возрастает, так что Γ — тоже движение в положительном направлении.

Corollary (Summary)**.** Построили функцию $\Gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{T} : \Gamma|_{(-\pi,\pi)}$ — движение в положительном направлении, гладкое и безостановочное, $|\Gamma'(x)| = 1\ \forall x \in (-\pi, \pi), \Gamma(0) = 1$.

Поскольку Γ — движение по окружности, то $\Gamma'(x) = i\eta(x)\Gamma(x), \eta(x) > 0, |\Gamma'(x)| = \eta(x)|\Gamma(x)| \Rightarrow \eta(x) = 1 \Rightarrow \Gamma'(x) = i\Gamma(x)\ \forall\ x \in (-\pi, \pi), \Gamma'(0) = i$.

Осталось выяснить, что с дифференцируемостью на концах отрезка.

Rem (Одномерная теорема, которая у нас была)*.* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, дифф. на (a, b), $\exists\ \lim_{x \to a+0} h'(x) = c$. Тогда h дифференцируема справа в a и $h'(a) = c$.

То же самое верно для векторнозначной функции, потому что просто разберем ее покоординатно.

$\lim_{x \to \pi+0} \Gamma(x) = -1, \lim_{x \to \pm\pi} \Gamma'(x) = \lim_{\dots} i\Gamma(x) = -i$

То есть Γ дифференцируема на замкнутом отрезке $[-\pi, \pi]$ и $\Gamma'(x) = i\Gamma(x)\ \forall\ x \in [-\pi, \pi]$.

Осталось продолжить это 2π периодически

$$\Gamma(x+2\pi k)=\Gamma(x), x\in[-\pi,\pi], k\in\mathbb{Z}$$

Гладкость сохранится. $\square$

Мы построили единственное простое вращение.

Note. $\Gamma(x)$, а также ее компоненты бесконечно дифференцируемы.

Def (Ура, наконец-то)**.**

$$\cos x = Re(\Gamma(x)), \sin x = Im(\Gamma(x))$$

Corollary. А еще из формулы для производной Γ мы знаем, что

$$(\cos x' + i\sin x') = i(\cos x + i\sin x) \Rightarrow \cos x' = -\sin x, \sin x' = \cos x$$

А еще теперь просто посчитать $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (посчитаем производную Γ в точке ноль), и уже знаем значения функций в каких-то точках: $\Gamma(\frac{\pi}{2}) = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

Формула и ряд Тейлора:

$$\Gamma^{(n)}(0) = i^n, \Gamma(x)? = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}x^n$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots \pm \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos^{(2k+1)}\xi, \xi\in(0,x),$$

так что ряд сходится к функци, аналогично ряд Тейлора синуса в 0 сходится к функции (уже успели изучить эти ряды).

Так что $\Gamma(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}$, это очень напоминает экспоненту.

Def. Простое вращение называют еще мнимой экспонентой и пишут $e^{ix} := \exp ix := \Gamma(x)$.

Rem (Причины определять так).
1. естественное соображение, когда видим ряд Тейлора
2. $\phi'(x) = c\phi(x)$ при вещественных константах имеет решения Ae^{cx}, с другой стороны, $\Gamma'(x) = i\Gamma(x)$
3. Следующая теорема

Theorem 2.0.2.

$$\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$$

Proof. $|\Gamma(y)| = 1, \Gamma(y)^{-1} = \overline{\Gamma(y)}$. Пусть $\Phi(x) = \Gamma(x+y)\overline{\Gamma(y)}$, докажем тогда, что это простое вращение. Посмотрим на $\Phi(0), \Phi'(x) = \dots = i\Phi(x)$, ну значит действительно оно. А оно единственно. □

Corollary (Разная тригонометрия)**.** $\Gamma(x+y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y); \Gamma(x)\Gamma(y) = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i \sin y)$, раскрыть скобки, сказать, что совпадают, значит

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

А еще $\Gamma(-x) = \Gamma(x)^{-1} = \overline{\Gamma(x)} = \overline{\cos x + i \sin x} = \cos(-x) + i\sin(-x); \Gamma(x)\Gamma(-x) = \Gamma(0)$.

Выведутся все формулки приведения ($\cos(\frac{\pi}{2} - x) = ?$) из той информации, которую мы уже знаем.

? $\sin\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{3}$

$$\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \Gamma(\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \Gamma(\frac{\pi}{3})^3 = \Gamma(\pi) = -1$$

$$(a+ib)^3 = -1 \Leftrightarrow a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - ib^3 = -1$$

$$3a^2b - b^3 = 0 \Rightarrow 3a^2 - b^2 = 0, a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4}, a = \frac{1}{2}$$

потому что в этой точке синус положительный.

А так посчитается $\sin\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}$:

$$(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^2 = \Gamma(\frac{\pi}{4})^2 = \Gamma(\frac{\pi}{2}) = i$$

Короче, все, что знали из школы, быстренько вывели.

Corollary (Формула Эйлера)**.**

$$\Gamma(x) = e^{ix} = \cos x + i\sin x;\ \Gamma(-x) = e^{-ix} = \overline{\Gamma(x)} = \cos x - i \sin x \Rightarrow$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

- вот это чаще всего называют формулами Эйлера.

А еще есть замечательное соотношение между замечательными числами: $e^{-i\pi} = -1$

Экспонента произвольного комплексного числа $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

$$e^z := e^a e^{ib}, \text{выполняется} e^{z+w} = e^z e^w$$

Синус и косинус в комплексной области определены так:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin x = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}$$

Def. Теперь мы можем определить $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, внимательно посмотреть на него, сказать, что период у него π, посчитать производную, сказать, что он возрастает на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, выпуклый и тд

А еще синус монотонный, биективный, есть обратная функция:

$$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1};\ \arcsin x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

.

$$\arctan x = (\operatorname{tg} x|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}, \arctan x' = \frac{1}{\cos \arctan x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Для обратных функций можно написать ряды

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \dots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}, x := t^2$$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2(n+2)}}{1+t^2}$$

Пусть пока $|s| \leq 1 \Rightarrow$

$$\arctan s = s - \frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{s^{2n+1}}{2n+1} + \int\limits_0^s \frac{(-1)^{n+1}t^{2(n+1)}dt}{1+t^2}$$

И остаток $\to 0, |s| < 1$, и даже когда равенство, тоже стремится.

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Ну а для арксинуса придется поработать с рядом Ньютона :)

Theorem 2.0.3. *Число π иррационально*

Proof.

$$\lessdot\ H_n = \frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2)^n \cos t dt > 0$$

$q > 0 \Rightarrow q^n H_n \to 0 : q^n H_n \leq \frac{1}{n!}(q\frac{\pi^2}{4})^n \pi \to 0$ А еще заметим, что $H_n = P_n(\pi^2), P_n$ — многочлен степени $\leq n$ с целыми коэффициентами.

Пусть $\pi^2 = \frac{p}{q}$.

$$q^n P_n(\frac{p}{q}) = q^n H_n \geq 1,$$

ведь слева написано положительное целое число, а оно же стремится к нулю, странно.

Поймем, что это действительно такой как заявлено полином: докажем это по индукции, $H_0 = 2$.

$$H_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n+1} d\sin t = \frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n}(2t)\sin t dt$$

$$H_1 = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\sin t dt = 4$$

Теперь считаем, что $n \geq 1$.

$$H_{n+1} = -\frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n}(2t) d\cos t = \frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1}(-4t^2)n + 2(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n} \right) \cos t dt =$$

$$= 2H_n + \frac{4}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1}(\frac{\pi^2}{4} - t^2) n \cos t dt - \frac{4}{(n-1)!}\frac{\pi^2}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1}\cos t dt$$

Посмотрим на это внимательно и поймем, что

$$H_{n+1} = (4n+2)H_n - \pi^2 H_{n-1}$$

$\square$

Глава 3

Дифференцирование отображений между евклидовыми пространствами

Def. Есть открытое $G \subset \mathbb{R}^n$; $f : G \to \mathbb{R}^m$. Когда эта штука дифференцируема?

Ну уже исследователи случай $n = 1$, поскольку все открытые множества на прямой - это дизъюнктные объединения отрезков, то достаточно посмотреть все на одном отрезке. А на нем достаточно, чтобы $f(x) - f(x_0)$ хорошо приближались линейными отображениями.

Пусть $x_0 \in G, f$ называется дифференцируемым в точке x_0, если $\exists\ L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(|x - x_0|)$ в G при $x \to x_0$

3.1 Свойства и норма линейного оператора

Rem. Каждому линейному отображению однозначно соответствует матрица в фиксированных базисах $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m : e_1, \dots e_n; g_1, \dots g_m$

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i, L(x) = \sum_{1}^{n} L(e_i) x_i, L(e_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} g_k$$

$$L(x) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \right) g_k$$

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Corollary. Всякое линейно отображение непрерывно (посмотрим на матрицы, посмотрим на определение, увидим), но это сейчас нам не нужно будет, ведь липшицевы непрерывны.

Lemma (Линейное отображение липшицево)**.** $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *линейно, значит* $\exists A : \forall x, y \in \mathbb{R}^n\ |Lx - Ly| \le A|x - y|$

Proof. Достаточно проверить, что $|Lu| \le A|u|$

$$|L(x)| = \left(\sum_{k=1}^{m} |\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(|\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j| \le \sqrt{\sum_{1}^{n} a_{kj}^2}\sqrt{\sum_{1}^{n} x_j^2}\right) \le |x| \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

То есть в качестве константы можно взять корень из суммы квадратов всех ашек. Наверное это не самая хорошая константа. □

Def. Нормой линейного отображения L называется наименьшее из чисел A, подходящих под определение липшицевости. Обозначается $||L||$

$//$если есть последовательность подходящих А-шек, то их inf тоже будет подходящий, так что это будет их минимум.

Statement. *Пусть* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *линейное* $\Rightarrow ||L|| = a = \sup\{|Lx| : |x| < 1\} = b = \sup\{|Lx| : |x| \le 1\} = c = \sup\{|Lx|, |x| = 1\} = d = \sup\{\frac{|Lx|}{|x|}, |x| \neq 0\}$

Proof.

1. $||L|| = d$

   $||L||$ - наименьшее из $A : |Lx| \le A|x| \Rightarrow |Lx| \le ||L|||x|\ \forall x \Rightarrow$ при $x \neq 0\ \frac{|Lx|}{|x|} \le ||L|| : d \le ||L||$ (переход к sup).

2. $d = c$, ведь $\frac{|Lx|}{|x|} = |L(\frac{x}{|x|})|, x \neq 0$, и аргумент правой части пробегает все вектора на единичной сфере, когда аргумент левой — все вектора (супремумы одинаковые).

3. $b = c$

   Ясно, что $b \ge c$. Но если $|x| \le 1, |x| \neq 0$, то $\frac{x}{|x|}$ лежит на единичной сфере, так что $|L(\frac{x}{|x|})| \le c \Rightarrow |Lx| \le c|x| \le c$

4. $a = b$

   Очевидно $a \le b$, обратно $<\!x : |x| \le 1, \epsilon > 0\ \Rightarrow |\frac{x}{1+\epsilon}| < 1 \Rightarrow |L(\frac{x}{|1+\epsilon|})| \le a \Rightarrow |Lx| \le a(1+\epsilon)\ \forall\ \epsilon \Rightarrow |Lx| \le a\ \forall x : |x| \le 1$

□

Statement (2)**.**

1. $$\alpha \in \mathbb{R}; ||\alpha L|| = |\alpha|||L||$$

2. L_1, L_2 *линейные откуда-куда как обычно,* $\Rightarrow ||L_1 + L_2|| \le ||L_1|| + ||L_2||$

Proof.

1. Модуль константы выносится за sup: написать по любой из четырех переформулировок.

2. $|L_1(x) + L_2(x)| \le |L_1(x)| + |L_2(x)| \le ||L_1|||x| + ||L_2|||x|$

□

Def. Метрика в пространстве линейных отображений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : d(L_1, L_2) = ||L_1 - L_2||$.

Симметричность и неравенства треугольника очевидны, ну третье свойство тоже.

Statement (3). *Сходимость в этой метрике = поэлементная сходимость матриц.*

Proof. $a_{kj} = \langle Le_j, g_k \rangle$

$$|a_{kj}| \le |Le_j||g_k| \le ||L|||e_j||g_k| = ||L||$$

L_1, L_2 с матрицами a_{kj}, b_{kj}, матрица разности

$$|a_{kj} - b_{kj}| \le ||L_1 - L_2||$$

Обратно, $||L_1 - L_2|| \le \sqrt{\sum\limits_{k,j} (a_{kj} - b_{kj})^2} \le n^2 \max_{k,j} (a_{kj} - b_{kj})$ □

Theorem 3.1.1. *Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — линейное отображение. Следующие условия эквивалентны:*

1. $KerA = 0$
2. $\exists\ m > 0 : |Ax| \ge |m||x| \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$

Proof. $2 \Rightarrow 1$ очевидно

$1 \Rightarrow 2$ можно понять следующими двумя способами:

Первый. Заметим, что пространство ImA тоже евклидово, и $A : \mathbb{R}^n \to ImA$ — линейная сюрьекция, значит $\exists\ A^{-1} : ImA \to \mathbb{R}^n$. У этого отображения тоже есть норма, и $|x| = |A^{-1}Ax| \le ||A^{-1}|||Ax|$

Второй. Сфера в $\mathbb{R}^n$ — комакт. $x \mapsto |Ax|$ — непрерывная функция на сфере, не обращается в 0 $\Rightarrow$ отделена от нуля. □

Lemma. *Если $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ линейное, то следующее эквивалентно:*

1. $A = 0$
2. $|Ax| = o(|x|), |x| \to 0$

Proof. Из первого второе очевидно, будем доказывать в другую сторону. Пусть $A \ne 0 \Rightarrow\ \exists\ u : Au \ne 0$. Тогда $A(tu) = tAu \Rightarrow |A(tu)| = |t||Au| \ne o(|t|)$. □

Corollary. В частности линейное отображение L в определении дифференцируемости единственно.

3.2 Свойства дифференцируемых функций

Theorem 3.2.1. *$f, g : G$ (открытое) $\to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в x_0, A, B — их дифференциалы в этой точке, тогда $\alpha f + \beta g$ тоже дифференцируема и ее дифференциал равен $\alpha A + \beta B$.*

Proof. проверка по определению □

Theorem 3.2.2. *f дифференцируема в $x_0 \Rightarrow f$ непрерывна в этой точке и выполнено условие Липшицевости в x_0:*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (||A|| + \epsilon)|x - x_0|$$

Statement. *$f : G \to \mathbb{R}^m$ (G, как обычно, открытое), $f_1, \dots f_m$ — координатные функции f. f дифференцируема в $x_0 \Leftrightarrow f_i$ дифференцируемы в x_0.*

Proof. $\Rightarrow$

$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \phi(x), |\phi(x)| = o(|x|)$; пусть $v_1, \dots v_m$ — стандартный базис, тогда

$$f_j(x) - f_j(x_0) = \langle A(x - x_0), v_j\rangle + \langle\phi(x), v_j\rangle$$

Первое слагаемое — это $A_j(x_j - x_{0j})$, посмотрим на второе: $|\langle\phi(x), v_j\rangle| \leq |\phi(x)||v_j| = |\phi(x)| = o(|x - x_0|)$, и оно же $o(|x_j - x_{0j}|)$. Доказали.

$$df(x_0, u) = \begin{pmatrix} df_1(x_0, u) \\ \vdots \\ df_n(x_0, u) \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$

f дифференцируема как сумма дифференцируемых функций, ведь $f = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i v_i$. □

Theorem 3.2.3 (О суперпозиции дифференцируемых функций)**.** *$G \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m; U \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n; x_0 \in G, y_0 = f(x_0)$. f дифференцируема в x_0 (дифференциал равен A), g дифференцируема в y_0 (дифференциал равен B)$\Rightarrow$ $g \circ f$ дифференцируема в x_0 и ее дифференциал равен BA*

Proof.

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = B(f(x) - f(x_0)) + \psi(f(x)), |\psi(y)| = o(|y - y_0|)$$

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \phi(x), |\phi(x)| = o(x - x_0)$$

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = BA(x - x_0) + B\phi(x) + \psi(f(x))$$

Надо доказать, что $B\phi(x) + \psi(f(x)) = o(|x - x_0|)$:

$$|B\phi(x)| \leq ||B|||\phi(x)| = 0(|x - x_0|)$$

$$|\psi(f(x))| = 0(|f(x)|) = \text{ (липшицевость)} o(O(|x - x_0|)) = o(|x - x_0|)$$

□

Def (Производная по направлению)**.** G — открытое подмножество $\mathbb{R}^n, f : G \to \mathbb{R}^m, x_0 \in G, e \in \mathbb{R}^n, |e| = 1, t \in \mathbb{R}, |t| < \delta; \phi_e : t \mapsto x + te$ — дифференцируемое линейное отображение $(-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$.

Пусть f дифференцируема в x_0, тогда $f \circ \phi_e$ дифференцируемо в точке 0; пусть $b \in \mathbb{R}^n$ — производная этой функции в точке 0, т.е.

$$\lim_{t\to 0} \frac{(f \circ \phi_e)(t) - (f \circ \phi_e)(0)}{t} = b$$

.

Вектор b называется производной по направлению e в данной точке. В частности, если f дифференцируема в точке, то f дифференцируема по любому направлению (причем они все равны).

Def (Частные производные)**.** Пусть $e_1, \dots e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

Производная f по направлению e_j называется jй частной производной f и обозначается $\frac{\delta f}{\delta x_j} = \delta_j f$

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0, x - x_0) + \phi(x), df(x_0, x - x_0) = L(x - x_0), L : \mathbb{R}^n \to R,$$

то есть матрица этого оператора — одна строка.

$$\delta_j f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_{01}, \dots, x_{0j} + t, \dots, x_{0n}) - f(x_{01}, \dots, x_{0n})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t} =$$

$$= lim_{t\to 0} \frac{L(te_j) + \phi(te_j)}{t} = L(e_j)$$

Поняли, что $f : G$ открытое $\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ дифференцируема в точке $x_0 \in G$, то $\exists$ частные производные $\frac{\delta f_k(x_0)}{\delta x_j} = \delta_j f_k(x_0)$, и матрица дифференциала есть

$$\begin{pmatrix} \delta_1 f_1(x_0) & \dots & \delta_1 f_n(x_0) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_n f_1(x_0) & \dots & \delta_n f_n(x_0) \end{pmatrix}$$

— матрица Якоби.

Если $k = 1$, то матрица выраждается в вектор $(\delta_1 g(x_0), \dots, \delta_n g(x_0)) = gradg(x_0)$ — градиент функции g в точке x_0.

$e \in R^n, |e| = 1;\ g(x_0 + te) - g(x_0) = \langle gradg(x_0), te\rangle + o(|t|) = t \langle gradg(x_0), e\rangle + o(|t|)$, а по неравенству Коши $\langle gradg(x_0), e\rangle \le |gradg(x_0)|$, так что если $gradg(x_0) \ne 0$, то при $e = \pm \frac{gradg(x_0)}{|gradg(x_0)|}$, это это единственные случаи, когда достигается равенство по свойствами неравенства Коши.

Сделаем такие же предположения, как в теореме о суперпозиции:

$$(a, b) \xrightarrow{h} G \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

$t_0 \in (a,b), x_0 = h(t_0), h$ дифференцируема в t_0, f дифф в x_0.

Матрица Якоби — матрица 1×1 : $\phi'(t_0) = \langle gradf(x_0), h'(t) \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} \delta_j f(x_0) h'_j(t_0) = \sum\limits_{j=1}^{n} \delta_j f(h(t_0)) h'_j(t_0)$

Пусть теперь G — открытое в $\mathbb{R}^n, F : G\ to \mathbb{R}^n$ дифференцируема во всех точках множества. Хотим получить оценку вида $|f(x) - f(y)| \le C'|x-y|$, знаем$||df(x,*)|| \le C$.

В прошлый раз получали какую-то оценку, пользуясь малостью остатка. Но мы-то не знаем, с какого места наступает эта малость: это место зависит от точки x_0.

Предположим, что отрезок, соединяющий x и y целиком лежит в G. $\gamma : [0,1] \to G,\ \gamma(t) = x + t(y-x)$. $\phi := f \circ \gamma$ — векторно-значная функция на $[0,1]$, она дифференцируема на открытом отрезке. Неравенство Лагранжа говорит, что

$$\exists\ \theta \in (0,1) : |\phi(1) - \phi(0)| (= |f(y) - f(x)|) \le |\phi'(\theta)| = |df(x + \theta(y-x), y - x)| \le$$
$$\le ||df(x + \theta(y-x); *)|| |y - x| \le C|y-x|$$

Lemma. *При сделанных предположениях,*

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|$$

всякий раз, когда отрезок с концами x, y лежит в G.

Note. Ну еще бывает полезен аналоги неравенства Лагранжа для отображений:

$$\exists\ \theta \in (0,1) : |f(y) - f(x)| \le ||df(x + \theta(y-x))|| |y - x|$$

Частный случай: $n = 1, f : G \to \mathbb{R}, \phi$ — скалярная функция, поэтому $\exists\ \theta \in (0,1)$: $f(y) - f(x) = \langle gradf(x + \theta(y-x), x), y - x \rangle$ — совсем аналог формулы Лагранжа.

Rem. Вот мы знаем, что если функция дифференцируема, то у нее существуют все частные производные.

Было бы здорово доказать обратную теорему. Но это неверно.

Ex.

$$f(x,y) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{xy}{x^2+y^2}, (x,y) \ne (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{pmatrix} \right.$$

$y \ne 0; \frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2 y}{x^2+y^2}; y = 0 f(x,0) \equiv 0$, аналогично с частной производной по y.

Но она не дифференцируема в 0: если бы была, то была бы там непрерывна, но если пойдем по прямой $x = y$, то предел будет $\frac{1}{2}$, а если по вещественной прямой, то 0.

Еще веселый примерчик

$$h(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, h(0,0) = 0$$

Если по всем прямым $x = ty$, то предел 0, если по параболе, то вроде $\frac{1}{2}$

Теорема-заменитель желаемого утверждения.

Theorem 3.2.4. *$f : G \to \mathbb{R}^k, x_0 \in G, G$ открытое. Если все частные производные $\delta_k f_j(x)$ существуют при x из некоторой открестности x_0 и непрерывны в x_0, то f дифференцируема в x_0.*

//условия можно ослабить, но на практике эти мелкие усиления применить обычно не удается.

Proof. Во-первых поймем, что достаточно доказать следующее: каждая из координатных функций f дифференцируема в x_0. То есть НУО $k = 1, f$ — скалярная функция от n переменных.

Для простоты будем считать, что $n = 3$, будет видно, что в общем случае доказательство проделывается аналогично (вообще очень часто будем так делать потом).

Пусть $x_0 = (u, v, w)$.

$$f(x,y,z)-f(u,v,w) = f(x,y,z)-f(u,y,z)+f(u,y,z)-f(u,v,z)+f(u,v,z)-f(u,v,w) =$$

$$\text{(Лагранж) } \delta_1 f(\eta,y,z)(x-u) + \delta_2 f(u,\theta,z)(y-v) + \delta_3 f(u,v,\zeta)(z-w),$$

понятно какие точки понятно где лежат,

$$= \delta_1 f(u,v,w)(x-u)+\delta_2 f(u,v,w)(y-v)+\delta_3 f(u,v,w)(z-w)+(\delta_1 f(\eta,y,z)-\delta_1 f(u,v,w))(x-u)+$$

$$(\delta_2 f(u,\theta,z) - \delta_2 f(u,v,w))(y-v) + (\delta_3 f(u,v,\zeta) - \delta_3 f(u,v,w))(z-w)$$

Воспользуемся непрерывностью частных производных в точке. Пусть $|x-u| < \delta, |y-v| < \delta, |z-w| < \delta$, тогда и $|\eta-u| < \delta, |\theta-v| < \delta, |\zeta-w| < \delta$; пусть $X = (x,y,z), U = (u,v,w)$, значит вот та здоровая колабса равна

$$\langle gradf(U), X-U\rangle + \phi(X), |\phi(X)| \le \epsilon(|x-u|+|y-v|+|z-w|) \le \sqrt{3}\epsilon|X-U|$$

То есть $\phi(X) = o(|X-U|)$ □

3.3 Необходимое условие локального экстремума

Def. Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n$ открытое $\to \mathbb{R}, x \in U$. Говорят, что f имеет локальный максимум в x, если есть окрестность $V(x) : \forall\, y \in V\ f(y) \le f(x)\ \forall\, y \in V$

Локальный минимум определяется аналогично, ну или сказать, что $-f$ в этом месте имеет локальный максимум.

Theorem 3.3.1. *Если f дифференцируема в x и имеет там локальный экстремум, то $gradf(x) = 0 \ \Leftrightarrow \delta_j f(x) = 0\ \forall\ j = 1\dots n$*

Proof. Пусть $gradf(x) = a \neq 0 \Rightarrow \; \exists b : \langle a, b\rangle \neq 0$. t меняется в мелкой окрестности 0 на $\mathbb{R}$,

$$f(x+tb) - f(x) = \langle a, tb\rangle + \phi(t)\,(\phi(t) = o(|t|)) = t\,\langle a, b\rangle + \phi(t), \phi(0) = 0$$

$$f(x+tb) = f(x) + t\,\langle a, b\rangle + \phi(t)$$

Пусть $\langle a, b\rangle > 0$; $\exists\, \delta > 0 : |t| < \delta \Rightarrow |\phi(t)| \leq |t|\frac{<a,b>}{10}$

$$f(x+tb) \geq f(x) + t\,\langle a, b\rangle - |\phi(t)| \geq f(x) + t\frac{9}{10}\,\langle a, b\rangle$$

при $|t| < \delta$, при положительных $t < \delta$ $f(x+tb) > f(x)$, чтобы доказать, что там не минимум, надо посмотреть на отрицательные t. □

3.4 Обратное отображение

Пусть $F : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ из открытого множества, $x_0 \in G, F$ дифф. в окрестности этой точки и непрерывно-дифференцируема в x_0.

Lemma (о билипшицевости)**.** *1. $\exists\, U(x_0) : F$ удовлетворяет условию Липшица в $\overline{U}$*

2. *Предположим, что $Ker(A) = 0$ (тогда $n \leq m$). Тогда $\exists\, U_1 \subset U : \; |F(x) - F(y)| \geq c|x-y| \;\forall x, y \in \overline{U_1}$.*

   Иными словами, на U_1 отображение F билипшицево: $\exists\; c, C : \;\forall\; x, y \in \overline{U_1}\; c|x-y| \leq |F(x) - F(y)| \leq C|x-y|$.

Proof. 1. Пусть $A = dF(x_0;*)$; $\exists\; \delta > 0 : |x_0 - x| \leq \delta \Rightarrow ||A - dF(x;*)|| \leq 1$ (покомпонентная сходимость). Отсюда $||dF(x_0;*)|| \leq ||A|| + 1$, если $|x_0 - x| \leq \delta$. $U = \{|x - x_0| < \delta\} \;\Rightarrow\; |F(x) - F(y)| \leq (||A|| + 1)|x-y| \;\forall\; x, y \in \overline{U}$.

   //o-шка нас не беспокоит: можем сказать, что $||A - dF(x;*)|| \leq 1+$ что-то маленькое, и при тех же ограничениях на расстояние $|x - x_0|$ остаточный член будет $\pm$что-то маленькое на $|x - x_0|$.

2. Мы как-то выясняли, что раз ядро отображения нулевое, то $\;\exists\; m > 0 : \; |Az| \geq m|z| \;\forall\; z \in \mathbb{R}^n$. Еще знаем, что $\;\forall\; \epsilon > 0\; \exists\; \delta > 0 : \;\forall |x - x_0| \leq \delta\; ||A - dF(x_0;*)|| \leq \epsilon$. $G(x) = F(x) - Ax$; $dG(x;*) = dF(x;*) - A \;\Rightarrow ||dG(x;*)|| \leq \epsilon$ при $|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; \forall\; x, y : |x - x_0| \leq \delta, |y - x_0| \leq \delta\; |G(x) - G(y)| \leq \epsilon|x-y|$. Тогда

$$G(x) - G(y) = F(x) - F(y) - A(x-y); |G(x) - G(y)| = |F(x) - F(y) - A(x-y) + A(x-y)| =$$

$$= |G(x) - G(y) + A(x-y)| \geq |A(x-y)| - |G(x) - G(y)| \geq$$

$$\geq m|x-y| - \epsilon|x-y| = (m-\epsilon)|x-y| = \frac{m}{2}|x-y|$$

□

Corollary. Теперь мы доказали кусок теоремы об обратном отображении при более слабых условиях, докажем то, что еще не доказали.

Theorem 3.4.1 (Об обратном отображении)**.** *$f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \in G, G$ открытое, f непрерывно-дифференцируема в точке x (есть все частные производные и они непрерывны в точке). $A = df(x; *)$ — обратимый линейный оператор. Тогда*

1. *$\exists$ окрестность $U(x)$: отображение f — биекция на U*

2. *$y = f(x) \Rightarrow$ $f(U)$ содержит некоторую окрестность $V(y)$.*

3. *$f^{-1}|_V$ дифференцируемо в y и его дифференциал есть A^{-1}*

Proof. 1. Доказали, в частности, что F — инъекция в некоторую замкнутую окрестность $\overline{U}(x_0)$ (в лемме о билипшицевости).

2. Пусть $y_0 = F(x_0)$. Докажем, что $F(U)$ сорержит некоторый шар с центром в точке x_0.

   Можно считать, что $\overline{U} = \overline{B}_r(x_0)$. Считаем, что F билипшицева в окрестност. Пусть ρ маленькое. Докажем, что если оно достаточно мало, то $B_\rho(y_0) \subset F(\overline{B}_r(x_0))$. $y \in B_\rho(y_0) : |y - y_0| < \rho; \Phi(x) = |F(x) - y|^2, x \in \overline{B}_r(x_0)$. Хотим найти $x : \Phi(x) = 0$.

   Lemma. *Пусть C — линейный оператор $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с нулевым ядром. $\exists\ \delta$: $||C - C_1|| < \delta \Rightarrow C_1$ тоже имеет нулевое ядро.*

   Proof. $\exists\ d > 0 : |Cx| \geq d|x|\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$.

   $$|C_1x| \geq |Cx| - |(C_1 - C)x| \geq d|x| - ||C_1 - C|||x| \geq (d - \delta)|x|$$

   □

   Мы можем считать, что $dF(x, *)$ обратимы при всех $x \in \overline{B}_r(x_0)$. $\exists\ w \in \overline{B}_r(x_0)$: $\Phi(w) = \min_{x \in \overline{B}_r(x_0)} \Phi(x)$. Если w не лежит на границе ($|w - x_0| < r$), то в w — локальный экстремум, значит $grad\Phi(x) = 0$.

   $$|F(w) - y|^2 \leq |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 \leq \rho^2$$

   А если точка на границе: $x \in \overline{B}_r(x_0) : |x - x_0| = r$

   $$|F(x)-y| = |F(x)-F(x_0)+F(x_0)-y| \geq |F(x)-F(x_0)|-|y_0-y| \geq c|x-x_0|-\rho = cr-\rho,$$

   значит $\Phi(x) \geq (cr - \rho)^2$. Значит при $\rho : cr - \rho > \rho \ \Leftrightarrow\ \rho < \frac{cr}{2}$ минимум у нас заведомо во внутренней точке.

Ну посчитаем градиент. $f_1, \dots f_n$ — координатные функции отображения $F, y = (y_1, \dots y_n)$

$$\Phi(x) = |F(x) - y|^2 = \sum_{k=1}^{n} (f_k(x) - y_k)^2$$

$$\frac{\Phi(x)}{\delta x_j} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta f_k}{\delta x_j}(x)(f_k(x) - y_k)$$

Ну и $\forall j$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta f_k(w)}{\delta x_j}(f_k(w) - y_k) = 0$$

— транспонированная матрица Якоби отображения f в точке w, она невырожденная, значит есть только тривиальное решение: $f_k(w) = y_k \ \forall k = 1 \dots n, F(w) = y$.

3. У нас задано отображение $G = F^{-1} : B_\rho(y_0) \to \overline{B}_r(x_0)$. $A^{-1} := B$.

   Пусть $|y - y_0| < \rho; x = (def)G(y), x_0 = G(y_0)$.

   $$F(x) - F(x_0) = A(x - x_0) + \phi(x), \phi(w) = o(|w - x_0|)$$

   $$y - y_0 = A(G(y) - G(y_0)) + \phi(G(y)),$$

   применим A^{-1}:

   $$G(y) - G(y_0) = B(y - y_0) - B\phi(G(y))$$

   Надо доказать, что $\psi(y) = B\phi(G(y)) = o(|y - y_0|)$.

   Заметим, что G липшицево, поскольку F билипшицево:

   $$c|x - x_0| \le |F(x) - F(x_0)| \Leftrightarrow c|G(y) - G(y_0)| \le |y - y_0|$$

   $\lessdot\ \epsilon > 0;\ \exists\ \delta : |w - x_0| < \delta \ \Rightarrow |\phi(w)| \le \epsilon |w - x_0|$. Будем считать, что $|y - y_0| < \delta; |G(y) - G(y_1)| \le \frac{1}{c}\delta_1$. δ_1 выберем так, чтобы $\frac{1}{c}\delta_1 < \delta$. Тогда

   $$|\phi(G(y))| \le |G(y) - x_0|\epsilon = |G(y) - G(y_0)|\epsilon \le \frac{1}{c}\epsilon|y - y_0|$$

   $$B\phi(G(y)) \le ||B||\frac{1}{c}\epsilon|y - y_0|$$

$\square$

Lemma (Подлемма).

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m stackrel B \longrightarrow\to \mathbb{R}^s$$

$$||BA|| \le ||A||||B||$$

Proof.
$$|BAx| \leq ||B|||Ax| \leq ||B||||A|||x|$$
□

Lemma. *Пуссть* $A, A_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— линейные операторы,* A *обратим,* $||A_k - A|| \to 0$. *Тогда* $A_k^{-1} \to A^{-1}$ *по норме.*

//понятно, что дело происходит на некоторой окрестности A*, где все* A_k *обратимы*

Proof. НУО A_k обратимы.
$$A_k^{-1}(A_k - A)A^{-1} = A^{-1} - A_k^{-1}$$
$$\Rightarrow \ ||A^{-1} - A_k^{-1}|| \leq ||A^{-1}||||A_k^{-1}||||A_k - A||$$
Первые два числа ограничены, а третье стремится к 0 (равномерно). □

Corollary (из теоремы об обратном отображении)**.** Предположим в дополнение к условиям теоремы, что F непрерывно-дифференцируема в окрестности x_0. Тогда оператор $dF(x;*)$ обратим при всех x достаточно близких к x_0, то есть F^{-1} дифференцируем вблизи точки y_0.

Ясно даже, что F^{-1} даже непр-дифф вблизи $y_0 : x_n \to x; dF(x_n;*) \to dF(x;*)$, по лемме $dF(x_n;*)^{-1}(= dF^{-1}(y_n;*)) \to dF(x;*)^{-1}(= dF^{-1}(y;*))$

Глава 4

Касательные векторы

4.1 Определение и простейшие теоремы

Def. $F \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in F$. Вектор a — касательный к F в точке x_0, если расстояние от F до $x_0 + at, t \in \mathbb{R}$ при $t \to 0 = o(|t|)$

Theorem 4.1.1. *Если функция h задана и дифференцируема в окрестности $x_0, h|_F$ имеет локальный экстремум в x_0, то $\forall$ a — касательного к F в x_0*

$$\langle grad(h), a\rangle = 0$$

Proof. Пусть a — касательный вектор, $\exists\ x_t \in F : |x_0 + at - x_t| \leq 2dist(x_0 + ta, F)$.

$h(x_t) - h(x_0) = \langle grad(h(x_0)), x_t - x_0\rangle + \phi(x_t) = \langle grad(h(x_0)), x_t - x_0 - ta\rangle + t\langle grad(h(x_0)), a\rangle + \phi(x_t)$

Предположим, что $\langle grad(h(x_0)), a\rangle \neq 0$. $\phi(x_t) = o(|x_t - x_0|) = o(|t|)(|x_t - x_0| \leq |ta| + |x_t - x_0 - ta| = o(|t|))$. $\langle grad(h(x_0)), x_t - x_0 - ta\rangle = o(|t|)$, ну значит можем подогнать так, чтобы это был не локальный экстремум. □

$F : G$ открытое $\subset R^n \to R^m, m \geq n; u_0 \in G; F$ дифференцируема на G, непрерывно-дифференцируема в u_0. Пусть $A = dF(u_0; *)$ имеет нулевое ядро.

Мы поняли тогда, что $\exists\ \overline{U}(u_0) : F$ билипшицево на этой окрестности. $X = F(\overline{U}); x_0 = F(u_0)$.

Хотим понять, как выглядят касательные векторы к X в x_0?

Theorem 4.1.2. *Множество этих касательных векторов — $A(\mathbb{R}^n) = L$*

Note. L — линейное пространство, $dimL = n$.

Proof. 1. $L \subset$ касательные вектора:

$a \in L; \lessdot x_0 + ta, a = Ax$ для некоторого $x \in \mathbb{R}^n$. Хотим проверить, что $dist(X, x_0 + ta) = o(|t|)$. При малых t $F(u_0 + tx) \in X$,

$$dist(X, x_0 + ta) \leq |F(u_0 + tx) - x_0 - ta| = |F(u_0 + tx) - F(u_0) - ta| = |A(tx) - ta + \phi(u_0 + tx)|,$$

$$\phi(w) = o(|w - u_0|) = |\phi(u_0 + tx)| = o(|t|)$$

2. любой касательный вектор содержится в L

   Пусть a — касательные вектор: $dist(x_0+ta, X) = o(|t|)$. $\exists\, x_t \in X : |x_0+ta-x_t| \leq 2dist(x_0+ta, X) \Rightarrow |x_0+ta-x_t| = o(|t|)$.

   $x_t = F(u_t), u_t \in \overline{U}$, вспомним, что у нас билипшицево отображение:

   $$c|u_0 - u_t| \leq |F(u_0) - F(u_t)| = |x_0 - x_t| \leq C|t|$$

   $$|x_0 - x_t| \leq |x_0 + ta - x_t| + |t||a| = |a||t| + o(|t|)$$

   $$x_t - x_0 = F(u_t) - F(u_0) = A(u_t - u_0) + \phi(u_t)$$

   С другой стороны, $x_t - x_0 = (x_t-(x_0+ta))+ta = ta+\psi(t), |\psi(t)| = o(|t|)$ Поделим на t:

   $$a = A(\frac{u_t - u_0}{t}) + \frac{\phi(u_t)}{t} + \frac{\psi(t)}{t}$$

   По некоторой последовательности векторов, стремящихся к 0, $A(\frac{u_t-u_0}{t})$ куда-то сходится, ну значит при $t \to 0$ получается $a = A(w)$, чтд.

□

Corollary. Пусть в условии теоремы функция h задана и дифференцируемы в окрестности $x_0, h|_X$ имеет локальный экстремум в x_0. Тогда $grad(h(x_0)) \perp A(\mathbb{R}^n)$ — ортогонален касательному подпространству.

Rem. X — это образ какого-то куска (плоскости), хочется назвать это поверхность. Но вместо этого оперируют с понятием многообразие.

4.2 Карта, атлас, гладкое многообразие

Def. Хаусдорфово с 1АС топологическое пространство — многообразие размерности n, если у каждой точки пространства X $\exists$ окрестность, гомеоморфная n-мерному шару $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.

Ну вот $\mathbb{R}^n$, окружность, сфера — многообразия.

Пусть U — открытое множество в многообразии X, гомеоморфное шару B_n $f_U : B_n \to U$ — гомеоморфизм — локальная карта. Совокупность карт $\{f_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — атлас, если $\cup_\alpha U_\alpha = X$.

//Ну вот есть у нас Земля, целиком карту нарисовать сложно, там все исказится, но по кускам можно. А коллекция карт — это атлас.

Понятно, что карты перекрываются. $\mathbb{U} = \{f_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha\in A}; U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset; \phi_{\alpha\beta} = f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ — отображение перехода.

Говорят, что атлас $\mathbb{U}$ задает на X гладкую структуру класса C^k, если отображение перехода — отображение класса C^k (//k раз непрерывно-дифференцируемо).

Два атласа $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$, задающие гладкую структуру класса C^k называются эквивалентными, если $\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2$ тоже задает гладкую структуру класса C^k.

Так что гладкое многообразие класса C^k — это многообразие X + какой-нибудь атлас, задающий на нем гладкую структуру класса C^k.

Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m \geq n$ — локальный гомеоморфизм. $X = f(G)$ — многообразие. Гладкое ли оно?

Ну сначала надо понять, какой атлас. f — локальный гомеоморфизм. $\forall\ x \in G\ \exists\ B_x : f|_{B_x}$ — гомеоморфизм на свой образ U_x. $U_x = f(B_x)$. Все отображения перехода у этого атласа — тождественные, и значит у нас бесконечно гладкое многообразие.

Это контринтуитивно, ведь мы будем тогда называть график модуля гладким многообразием. Это показывает лишь то, что многообразие — довольно абстрактное понятние и не слишком связано с R^m.

Гладкость в привычном смысле будет показывать то, как гладко многообразие вложено в наше пространство.

Типичная ситуация ("простое многообразие"в $\mathbb{R}^n$): $G \subset \mathbb{R}^n, f : G \to \mathbb{R}^m, n \leq m$ непрерывно-дифференцируема и $df(x, *)$ — оператор с нулевым ядром $\ \forall x \in G$.

Note. Пусть многообразие $X \subset \mathbb{R}^m$ nмерное. Пусть $f, g : B \to X$ — две локальные карты, причем f, g — гладкие невырожденные. Если $f(B) \cap g(B) \neq \emptyset$, то можно доказать, что отображение перехода $g^{-1}f$ тоже будет гладким и невырожденным.

Не будем это доказывать, потому что столь общий случай нам нигде не пригодится.

4.3 Локальная карта, связанная с касательной плоскостью

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ (шар), $F : U \to \mathbb{R}^m$, непр.-дифф. в $U, dF(u; *)$ невырожден $\ \forall\ u \in U$. Пусть $f(U) = X, u_0 \in U, F(u_0) = x_0$; $A = dF(u_0, *)$; $L = A(\mathbb{R}^n)$ — касательное пространство в x_0, $P : \mathbb{R}^m \to L$ — ортогональный проектор. Зададим $\Phi : U \to L : \Phi(u) = PF(u), u \in U$. Знаем, что $dimL = n$. То есть Φ — отображение между двумя евклидовыми пространствами одной размерности. Оно дифференцируемо, ведь это композиция линейного и дифференцируемого. $dPhi(u_0; *) = PdF(u_0; *)$, т.к. P там тождественный. От такого сужения образа A не перестанет быть невырожденным, ну значит он там изоморфизм. Значит если $z_0 = Px_0 = PF(u_0)$, то в окрестности z_0 у Φ есть обратное отображение Ψ: задано, непрерывно при $z \in L, |z - z_0| < \rho$.

$$\Psi : B_\rho(z_0) \to U_{\phi \circ \Psi = id}$$

Отображение Ψ тоже класса C^1 и невырожденное (посмотреть на тождество $\phi \circ \Psi = id$ и продифференцировать).

Пусть $\Xi(z) = F(\psi(z)), z \in B_\rho(z_0)$.

$$P\Xi(z) = PF(\Psi(z)) = \Phi(\Psi(z)) = z$$

Тогда $\Xi(z)$ — локальная карта, покрывающая окрестность x_0 на X (ведь это обратное к линейному отображению P отображение). Ξ — система координат, связанная с касательной плоскостью (так это называют).

Пусть $Q = id - P$ — проектор на ортогональное дополнение к L. Тогда $\Xi(z) = Q\Xi(z) + P\Xi(z)$ (если интерпретировать как пару $\mathbb{R}^m = L^\perp \oplus L$) $= (Q\Xi(z), P\Xi(z)) = (\xi(z), z), \xi(z) = Q\Xi(z)$. Окрестность x_0 на X представляется в виде графика отображения ξ, заданного на L в окрестности $z_0 : \xi : B_\rho(z_0) \to L^\perp$.

$d\xi(z_0; *) = Qd\Xi(z) = Qd(F \circ \Psi(z_0; *)) = QdF(u_0; *)d\Psi(z_0; *) = 0$.

Итого мы доказали, что если у нас есть гладкое многообразие, связанное с одной картой, то у нас есть другая карта, связанная с касательным пространством, причем такая карта — это обратное отображение к проектору.

Statement (Еще раз сформулируем то, что только что доказали)**.** *$f : U \subset \mathbb{R}^m, n \leq m; f$ непрерывно-дифференц., невырождена на U. $u_0 \in U; L$ — касательная плоскость к $f(U)$ в u_0, тогда вблизи u_0 $f(U)$ можно записать в виде $(w, \xi(w))$, w пробегает некое открытое множество W в $L, \xi : W \to L^\perp$. ξ непрерывно-дифференцируемо, $D\xi(w_0; *) = 0, w_0 = P_L(x_0), P_L$ — ортогоальная проекция на L.*

4.4 Теорема о неявной функции

f : открытое $U \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m = X \oplus Y \to \mathbb{R}^n$

$z \in \mathbb{R}^{n+m} \leftrightarrow z = (x, y), x \in \mathbb{R}^n, y \in R^m$

$z = (x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_m); (a, b) \in X \oplus Y, f(a, b) = c \in \mathbb{R}^n$.

Задача: решить уравнение $f(x, y) = c$ вблизи (a, b); хочется найти функцию $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, заданную в окрестности $b : f(h(y), y) \equiv c$.

Такую функцию h называют неявной (она неявно задает некоторое соотношение между x, y).

Путь f непр-дифф на U, пусть D — дифференциал f в (a, b);

$$D : X \oplus Y \to \mathbb{R}^n; D = (A, B)A : X \to \mathbb{R}^n; B : Y \to \mathbb{R}^m$$

У него конечно обязательно будет ненулевое ядро; ну вот мы выделили A и предположим, что A — биекция.

Theorem 4.4.1. *При сделанных выше предположениях в окрестности $V(b)$ задано единственное непрерывное отображение $h : V \to \mathbb{R}^n = X$ такое, что*

$$f(h(y), y) \equiv c \ \forall \ y \in V$$

Proof. Зададим $F : U \to \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ (а U у нас $\subset \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$, и сможем к нему что-то нормальное применить):

$$F(x, y) = (f(x, y), y)$$

Захотим применить к ней теорему об обратном отображении, докажем, что дифференциал невырожденный:

$$F(x, y) - F(a, b) = (f(x, y) - f(a, b), y - b) = (D(x - a, y - b), y - b) + \phi(x, y), \phi(x, y) = o(|x - a| + |y - b|)$$

$$= (A(x-a) + B(y-b), y-b) + \phi(x,y)$$

Пусть $(A(x-a)+B(y-b), y-b) = L(x-a, y-b); L(u,v) = (Au+Bv, v) = 0 \Rightarrow v = 0; (Au, 0) = 0 \Rightarrow Au = 0 \Rightarrow u = 0$, вывод: дифференциал $DF((a,b),*)$ — обратимый линейный оператор, значит и F обратима в окрестности (a,b).

$F(a,b) = (f(a,b),b) = (c,b)$ по условию задачи; $\exists\, V(c,b)$ в $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$: на V определено $G = F^{-1}$

Вспомним, как определена $F : F(x,y) = (f(x,y),y)$ — такая же вторая координата у векторов $\Rightarrow$ вторые координаты у $(u,v) \in V$ и $G(u,v)$ тоже одинаковые, значит $G(u,v) = (\phi(u,v),v), \phi : V \to \mathbb{R}^n$, тоже непрерывно-дифференцируема.

$$F(\phi(u,v),v) = (u,v)\ \forall (u,v) \in V$$

Нам подходит $h(v) = \phi(c,v), h$ задана в некоторой окрестности b. $(c,v) = F(h(v),v) = (f(h(v),v),v) \Leftrightarrow f(h(v),v) = c$, что и надо было.

Единственность h следует из простроения отображения F в окрестности точки. □

Corollary (Как дифференцировать неявную функцию h)**.** Пусть C — дифференциал отображения h в b, у нас вблизи этой точки выполняется равенство $f(h(v),v) = c$. Продифференцируем его: $AC + B = 0 \Rightarrow C = A^{-1}B$

Ex (Чем на практике будем развлекаться)**.** $f(x,y) = c$ на плоскости. $x = h(y); \frac{\delta f}{\delta x}(a) \neq 0; h'(b) = -\frac{\frac{\delta f}{\delta y}(b)}{\frac{\delta f}{\delta x}(a)}$

Посмотрим на то же самое под другим углом: пусть $k > n, k = n+m, m \in \mathbb{N}, f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируема. Пусть $w \in U : D = Df(w;*)$ — невырожденный оператор (теперь в том смысле, что $D : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ — отображение на).

Хотим попасть в условия теоремы о неявной функции, хотим явно выделить пространства X, Y. Это можно сделать. Посмотрим на матрицу Якоби отображения $f(x) = f(x_1, \dots x_n)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta f_1(w)}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_1(w)}{\delta x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta f_n(w)}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_n(w)}{\delta x_k} \end{pmatrix}$$

Это невырожденное отображение, значит у этой штуки ранг n, то есть можно выделить ненулевой минор. Пусть мы как-то перенумеровали столбцы, и у нас матрица разбилась на две части: сначала наш минор, а потом все остальное. Вот мы и разбили пространство $\mathbb{R}^k = X \oplus Y, X$ — линейная оболочка столбцов, образующих ненулевой минор порядка n.

$D = (A,B), A : X \to \mathbb{R}^n$ обратим, $: Y \to \mathbb{R}^n$, мы сделали что хотели.

Corollary. Пусть $f(w) = c$, тогда при сделанных предположениях можно выделить $k - n$ координат так, что вблизи w уравнение $f(z) = c$ позволяет выразить остальные координаты через выбранные, при этом с помощью непрерывно-дифференцируемого отображения.

$f(z)=c, z=(x,y), x\in X, y\in Y \Leftrightarrow x=h(y)$ — непрерывно-дифференц. отображение, заданное в окрестности $b=Qw$ (ортогональная проекция).

$f(z)=c$ невырождено всюду, где задано, т.е. дифференциал — отображение на в любой точке; $x\mapsto (h(x),x)$ — локальная карта на множесттве $\{z : f(z)=c\}$ вблизи точки w.

Def. $\{z : f(z)=c\}$ — множество уровня отображения f; если f всюду невырождено, то множество уровня есть m-мерное многообразие класса C^1, гладкое в $\mathbb{R}^k$.

Почему так: мы могли выбирать разные миноры в разных местах, и почему они хорошо склеиваются?

$\mathbb{R}^k = X\oplus Y = X'\oplus Y', x\mapsto (h_1(x),x)=\phi(x); u\mapsto (h_2(u),u)=\psi(u), Q$ — орт. проекция на Y_1, тогда $\psi^{-1}(\phi(x))=Q(\phi(x))$.

$f : U\subset \mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n, k>n; f$ непрерывно-дифф. и его дифференциал невырожден в каждой точке (матрица якоби имеет ранг n в каждой точке). $F:=\{z\in U : f(z)=c\}$, пусть непусто, F — mмерное гладкое многообразие, локально его можно параметризовать невырожденным отображением вида $x\mapsto (h(x),x) x\in V\subset\mathbb{R}^n, h$ — непр. дифф отображение $V\to\mathbb{R}^n$(посмотрим на матрицу якоби, последние n столбцов единичные).

Значит если $w\in X$, то множество касательных векторов к X в w есть m-мерное линейное пространство.

Theorem 4.4.2. *Множество касательных векторов к X в w — в точности $KerDf(w,*)$.*

Proof. Докажем, что если e — касательный вектор к X в w, то $Df(w,e)=0$, и этого будет достаточно, потому что размерность обоих подпространств m ($D : \mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^n$).

e — касательный вектор, значит $dist(w+te,F)=o(|t|)$. $\forall\, t\ \exists\, w_t\in F : |w+te-w_t|\le 2dist(w+te,F)\Rightarrow |w+te-w_t|=o(|t|)$.

У нас на $X=F$ эта штука постояннна, значит

$$0=f(w_t)-f(w)=Df(w,w_t-w)+\phi(w_t-w), |\phi(u)|=o(|u|)$$

$$=Df(w,w_t-w-te)+tDf(w,e)+\phi(w_t-w)$$

$|Df(w,w_t-w-te)|\le ||Df(w;*)|||w_t-w-te|=o(|t|); |w_t-w|\le |w_t-w-te|+|t||e|=O(t)$

Значит $\phi(w_t-w)=o(|t|), |t||Df(w,e)|=o(|t|)\Rightarrow Df(w,e)=0$ ∎

Corollary. Умеем описывать пространство касательных векторов в точке.

$f : U\subset\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n; f(x)=(f_1(x),\dots f_n(x)), f_j$ — скалярные. $c=(c_1,\dots c_n), X$ задается системой уравнений $f_i(z)=c_i$. Матрица Якоби будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} grad(f_1(w)) \\ \vdots \\ grad(f_n(w)) \end{pmatrix}$$

Множество касательных векторов — в точности множество всех векторов, которые при умножении на данную матрицу превратятся в нулевой. То есть касательное пространство в w — это ортогональное дополнение линейной оболочки градиентов $gradf_j(w)$. При это градиенты линейно независимы.

Глава 5

Дифференцирование высших порядков. Формула Тейлора

f : открытое $G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; f непр-дифф. на области, $Df(x,h) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_j}(x)h_j$. Фиксируем h; предположим, что $x \mapsto Df(x,h)(Df(x,h) = g_h)$ дифференцируема. Ее дифференциал

$$Dg_h(x;k) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\delta g_h}{\delta x_l} k_l = D^2 f(x;h,k) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_l \delta x_j}(x) k_l h_j$$

mй дифференциал от f в точке x — m-линейная функция $D^{(m)}f(x;h^1,\dots h^m)$

m-форма, соответствующая $D^{(m)}f(x;*)$ — $d^{(m)}f(x;h) = D^{(m)}f(x;h,\dots h)$.

Если хочется считать mй дифференциал для f, будем предполагать, что все частные производные $\delta_{j_1}\dots\delta_{j_m}f$ существуют и непрерывны в нашей рабочей окрестности (это условие эквивалентно дифференцируемости дифференциала предыдущего порядка).

Note (m-линейные функции). $\Phi : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — m-линейная функция, если она линейна по каждому аргументу при фиксированных остальных.

$\Phi(h^{(1)},\dots h^{(m)})$; $e_1,\dots e_n$ — стнадартый базис $\mathbb{R}^n$; $h^{(s)} = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j^{(s)} e_j$

$$\Phi(h^{(1)},\dots h^{(m)}) = \Phi(\sum_{j_1=1}^{n} h_{j_1}^{(1)} e_{j_1},\dots,\sum_{j_n=1}^{n} h_{j_m}^{(m)} e_{j_m}) = \sum_{j_1,\dots j_m} h_{j_1}^{(1)}\dots h_{j_m}^{(m)} \Phi(e_{j_1},\dots e_{j_m})$$

Эти фишки обозначим $a_{j_1,\dots j_m}$, они называются коэффициентами mлинейной функции Φ, и по линейности очевидно, что функция определяется набором этих коэффициентов.

Φ называется симметричной, если ее значения не меняются при перестановке аргументов $\Leftrightarrow$ коэффициенты не меняются при перестановке номеров.

m-форма Φ, соотв. m-линейная функции Φ — это $\phi(h) = \Phi(h,h,\dots h)$

Факт: если Φ симметрична, то она определяется однозначно ϕ, и формулы, по которым одно выражается через другое, называются поляризационными.

Вот пусть $m = 2$ и функция симметрична. $\Phi(h^{(1)}, h^{(2)})$

$$\phi(h^{(1)} + h^{(2)}, h^{(1)} + h^{(2)}) = \phi(h^{(1)}, h^{(1)}) + \phi(h^{(2)}, h^{(2)}) + 2\Phi(h^{(1)}, h^{(2)})$$

$$\phi(h^{(1)} - h^{(2)}, h^{(1)} - h^{(2)}) = \phi(h^{(1)}, h^{(1)}) + \phi(h^{(2)}, h^{(2)}) - 2\Phi(h^{(1)}, h^{(2)})$$

$$\Rightarrow \Phi(h^{(1)}, h^{(2)}) = \frac{1}{4}\left(\phi(h^{(1)} + h^{(2)}) - \phi(h^{(1)} - h^{(2)})\right)$$

Общая поляризационная формула для симметричных m-линейных функций

$$\Phi(h^{(1)}, \dots h^{(m)}) = \frac{1}{2^m m} \sum_{\epsilon_1, \dots \epsilon_m = \pm 1} \phi(\epsilon_1 h^{(1)} + \dots + \epsilon_m h^{(m)}) \epsilon_1 \dots \epsilon_m$$

Вернемся к нащим баранам.

При сделанных предположениях mй дифференциал функции f $D^{(m)} f(x; h^{(1)}, \dots h^{(m)})$ — m-линейная функция, коэффицинеты которой — это $\delta_{j_m} \dots \delta_{j_1} f(x)$

Theorem 5.0.3. *При сделанных предположениях (непрерывность всех производных)частные производных порядка m не зависят от того, в каком поряде их брали.*

Proof. Потом в серии общих теорем о перестановке всяких действий схожей загадочности, которые мы проворачиваем на практике. $\square$

Пусть f m раз непрерывно-дифф. Пусть $x_0 \in G; p \in \mathbb{R}^n; \lessdot\ g(t) = f(x_0 + tp)$ (задана по крайней мере в окрестности x_0). Посчитаем первые m производных:

$$g'(t) = Df(x_0 + tp, p) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j f(x_0 + tp) p_j$$

$$g''(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_k \delta_j f(x_0 + tp) p_j p_k = D^2 f(x_0 + tp, p, p)$$

$$g^{(s)}(t) = d^{(s)}(x_0 + tp, p)$$

Будем теперь считать, что $\overline{B_r}(x_0) \subseteq G$ и $|p| < r$, тогда наша функция задача хотя бы на отверзке $[0, 1]$, и пусть f непрерывно-диффенецнируема до порядка $m + 1$ включительно.

Мы умеем писать формулу Тейлора для g в окрестности 0:

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \dots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}, \xi \in (0, 1)$$

Перепишем то же самое:

$$f(x_0+p) = f(x_0) + \frac{df(x_0,p)}{1!} + \frac{d^2f(x_0,p)}{2!} + \cdots + \frac{d^{(m)}f(x_0,p)}{m!} + \frac{d^{(m+1)}f(\bar{x},p)}{(m+1)!},$$

$\bar{x}$ — точка на отрезке с концами x_0 и $x_0+p, \bar{x} = x_0 + \xi p$

Lemma. *Если ϕ — m-линейная функция, $|a_{j_1,\dots j_m}| \le A$,*
то $|\phi(h^{(1)},\dots h^{(m)})| \le c_n A |h^{(1)}| \dots |h^{(m)}|$

Proof. Вспомним, как записывается ϕ через свои коэффициенты, это большая сумма, оценим ее сверху по неравенству треугольника. Сначала все коэффициент оценим сверху A, вынесем. Теперь у нас сумма всевозможных произведений модулей, это произведение $(|h_1^{(1)}| + \cdots + |h_n^{(1)}|) \dots (|h_1^{(m)}| + \cdots + |h_n^{(m)}|)$. Раскрыли скобки, все модули производных координатных функций оценятся всерху как модули соответствующих производных-векторов, а $c_n = \sqrt{n}^m$. □

Все производные порядка $m+1$ у f в замкнутом шаре вокруг точки ограничены по модулю одной и той же константой A, значит вот тот остаток в формуле Тейлора $r_{m+1}(p)$:

$$|r_{m+1}(p)| \le CA|p|^{m+1} = o(|p|^m)$$

Statement (Единственность формулы Тейлора)**.** *Пусть $f(x_0+p) = f(x_0) + \phi_1(p) + \cdots + \phi_m(p) + o(|p|^m)$, $\forall j$ ϕ_j — j-форма. Тогда такое представление единственно.*

Proof. Ну оно на самом деле такое же, как и в одномерном случае:

Ну вот пусть если два разложения, вычтем одно из другого, получим $\alpha_1(p) + \cdots + \alpha_m(p) = o(|p|^m), \alpha_j = \phi_j - \psi_j$ — j-форма.

Пусть не все $\alpha_j = 0$, тогда фозьмем такую альфу с наименьшим номером, то есть существует вектор $q : \alpha_j(q) \ne 0; p = \tau q$.

$$\tau^j \alpha_j(q) + \cdots + \tau^m \alpha_m(q) = o(|\tau|^m)$$

Поделим на τ^j, получим $\alpha_j(q) + O(|\tau|) = o(|\tau|^{m-j})$, ну значит $\alpha_j = 0$ □

Глава 6

Достаточные условия для существования локального экстремума в стационарной точке

Как обычно, задана функция из открытого множества $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 3 раза непрерывно-дифференцируема (для начала хватит). $x_0 \in G$; необходимое условие для существования локального экстремума в этой точке — это $gradf(x_0) = 0$. Точки, удовлетворяющие этому условия, называются стационарными.

Напишем для таких точек формулу Тейлора:

$$f(x_0 + p) = f(x_0) + \frac{d^2 f(x_0, p)}{2!} + o(|p|^2)$$

ну или там можно написать $O(|p|^3)$.

Def. Квадратичная форма ϕ на $\mathbb{R}^n$

1. положительной, если $\phi(h) > 0 \ \forall h \neq 0$
2. отрицательной, если $\phi(h) < 0 \ \forall h \neq 0$
3. неопределенной, если есть два вектора, на одном из которых принимается положительное значение, а на другом отрицательное

Theorem 6.0.4. *f имеет локальный максимум в x_0, если ϕ отрцательная, минимум — если положительна, и не имеет локального экстремума в точке, если неопределенная.*

Lemma. *Если ϕ — положительная, то* $\exists\ \delta > 0 : \ \phi(h) \geq \delta |h|^2 \ \forall h \in \mathbb{R}^2$

Rem. Это называется положительной определенностью, и на бесконечномерных пространствах это не одно и то же.

А еще понятно, как получается аналогичное неравенство для отрицательной кв. формы: пишется это для $-\phi$

Proof. ϕ непрерывная на $\mathbb{R}^n$, на единичной сфере, поскольку последняя компакт, достигаем минимума $\delta > 0$

$|u| = 1 \Rightarrow \phi(u) \geq \delta; h \neq 0$, и понятно, что $\forall\ h$ аналогичное неравенство выглядит как $\phi(h) \geq \delta |h|^2$ $\square$

Усиление сфомулированного:

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n, f$ — как обычно, $x_0 \in G$ — стационарная точка f. g : шарик U в $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, m \leq n, g$ — непр-дифф., дифференциал всюду в $B_r(y)$ отличен от $0, g$ — инъекция, $g(y_0) = x_0, g(B_r(y) = U) = X$ — кусок гладкого многообразия.

Пусть L — касательное m-мерное пространство в x_0 к X; $\Phi = d^2 f(x_0; *), \phi = \Phi|_L, gradf(x_0) = 0$

Theorem 6.0.5. *f имеет локальный максимум на X в x_0, если ϕ отрицательна, минимум — если положительная, и ничего нет, если неопределена.*

Подставим $m = n$ и действительно получим предыдущую теорему.

Proof. 1. Если ϕ отрицательна, то $f|_{g(U)}$ имеет локальный максимум в x_0.

$$f(x) = f(x_0) + \langle gradf(x_0), x - x_0 \rangle + \Phi(x - x_0) + o(|x - x_0|^2)$$

— верно на всем G, посмотрим на $x = g(y), y \in U$

$$f(g(y)) = f(g(y)) + \Phi(g(y) - g(y_0)) + o(|y - y_0|^2)$$

Надо понять, что $\Phi(g(y) - g(y_0))$ отрицательна; пусть A — дифференциал функции g в y_0

$$g(y) - g(y_0) = A(y - y_0) + \alpha(y), \alpha(y) = o(|y - y_0|)$$

$A(y - y_0)$ лежит в образе дифференциала, то есть это касательный вектор к $g(U)$ в x_0. Длины $A|y - y_0|$ и $|y - y_0|$ сравнимы вблизи y_0, потому что билипшицевость.

$\Phi(x) = B(x, x), B$ — билинайная форма. $B(w + a, w + a) = B(w, w) + 2B(w, a) + B(a, a)$

$$\Phi(g(y) - g(y_0)) = \Phi(A(y - y_0)) + 2B(A(y - y_0), \alpha(y)) + B(\alpha(y), \alpha(y))$$

Хочется сказать, что последние два члена маленькие:

$$|B(A(y - y_0), \alpha(y))| \leq C|A(y - y_0)||\alpha(y)| = o(|y - y_0|^2)$$

$$B(\alpha(y), \alpha(y)) \leq C|\alpha(y), \alpha(y)| = o(|y - y_0|^2)$$

даже с большим запасом.

Получили

$$f(g(y)) = f(g(y)) + \Phi(A(y - y_0)) + o(|y - y_0|^2)$$

$-\Phi(w) \geq c|w|^2$ по лемме, которую доказали в начале параграфа, так что

$$f(g(y)) \leq f(g(y)) - c|A(y-y_0)|^2 + o(|y-y_0|^2) \leq f(g(y)) - c'|y-y_0|^2 + o(|y-y_0|^2), c' > 0$$

— ну видно, что в точке $g(y_0) = x_0$ максимум, потому что o маленькое и не перебивает $-c'|y-y_0|^2$, если y достаточно близко к y_0.

2. Если ϕ положительна, то ϕ имеет локальный минимум на $g(U)$ в x_0.

   Применим п.1 к $-f$.

   Rem. В обоих разобранных случаях экстремум получается строгим.

3. Если ϕ неопределенная, то f не имеет локального экстремума в x_0.

   Схема доказательства: $\exists\ \xi_1, \xi_2 \in L : \Phi(\xi_1) > 0, \Phi(\xi_2) < 0$. Значит $\exists\ y_1, y_2 : \xi_i = A(y_i)$.

   $u(t) = f(g(y_0 + ty_1)), v(t) = f(g(y_0 + ty_2))$ — определены в нашей окрестности при достаточно малых t. Аналогичные проделанным выше вычисления показывают (упражнение), что u имеет локальный минимум в $t = 0$, а v — максимум. То есть сколь угодно близко к точке есть точки, где значение у одной больше, у другой меньше.

$\square$

Note. Если $m < n$, то условие $gradf(x_0) = 0$ необходимое только при равенстве размерностей, при неравенстве нужно, чтобы градиенты был перпендикулярен всем векторам. А это условие, что он равен нулю, странное и стеснительное.

Если мы попробуем проделать такую же выкладку, как в теореме, у нас получится $o(|y - y_0|)$, а нам надо второго порядка малости. Ничего не получится.

Но есть одна ситуация, про которую что-то еще можем понять.

$h_1, \dots h_k : U(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, k < n$

$c_1, \dots c_k$ — константы; $f : U \to \mathbb{R}$. Говорят, что f имеет локальный экстремум в x_0 при условии $h_i(x) = c_i$, если $x_0 \in F = \{x : h_i(x) = c_i\}; f|_F$ имеет локальный экстремум в x_0.

Theorem 6.0.6 (О множителях Лагранжа). *Пусть h_i и f непрерывно-дифференцируемы на U.*

1. *Если f имеет локальный экстремум на F в $x_0 \in F$ и матрица Якоби отображения с коэффициентам функциями $(f_1, \dots f_k)$ имеет в x_0 ранг k, то $\exists\ \lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$:*

$$gradf(x_0) = \sum \lambda_j gradf_j(x_0)\ *$$

   λ_i называются множителями Лагранжа

2. *Если выполнено условие* $*$ *и* f, f_i *трижды непрерывно-дифференцируемы, то о наличии/отсутствии локального экстремума* f *на* F *в* x_0 *можно судить по второму дифференциалу* Φ *отображения*

$$f = \sum \lambda_i f_i,$$

   а именно: L *— касательное пространство к* F *в* x_0*, тогда в точке локальный минимум, если* $\Phi|_L$ *положительно, максимум, если отрицательно, не имеет экстремума, если сужение — неопределенная форма.*

Глава 7

Перестановка предельных переходов

X, Y хаусдорфовы топ. пространства, Z полное метрическое, $A \subset X, B \subset Y; a \in X, b \in Y$ — предельные точки для A, B соответственно, $a \notin A, b \notin B, F : A\ times B \to Z$ — отображение. Если F задана где-нибудь еще, посмотрим на сужение.

Theorem 7.0.7. *1. Предел $\lim_{x\to a} F(x,y) = \psi(y)$ существует, равномерен по y, т.е. $\forall\ \epsilon > 0\ \exists U(a) : \rho(F(x,y), \psi(y)) < \epsilon\ \forall x \in U \cap A\ \forall Y \in B$*

2. $\forall x \in A\ \exists\ \lim_{y\in b} F(x,y) = \phi(x)$

Тогда существуют пределы $\lim_{y\to b} \phi(y), \lim_{x\to a} \phi(x)$ и они равны. Кроме того, существует двойной предел и он совпадает в обоими повторными пределами.

Rem. Полное метрическое пространство — это когда всякая последовательность Коши сходится.

Proof.

Lemma. *Пусть Z — полное метрическое, W — хаусдорфово топ.пр-во, $C \subset W; h : C \to Z, c$ — предельная точка для C. Если $\forall \epsilon$ есть окрестность точки c : $\rho(h(w_1), h(w_2)) < \epsilon\ \forall w_i \in W \cap C$, то h имеет предел в c.*

Proof. Пусть $\epsilon = \frac{1}{n}, U_n$ — нужная в условии окрестность. Можем считать, что у нас есть последовательность вложенных окрестностей U_1 содержит U_2 и тд. Выберем $w_n \in U_n \cap U$, $\{h(w_n)\}$ — последовательность Коши в Z, пусть z — предел последовательности.

Тогда $\forall\ k\ \exists\ N :\ \forall\ n > N\ \rho(h(w_n), z) < \frac{1}{k}$. Возьмем $m \geq M + 1$. Пусть $u \in U_m \cap C$, тогда $\rho(h(u), z) \leq \rho(h(u), h(w_n)) + \rho(h(w_n), z) < \frac{1}{m} + \frac{1}{k}$. Доказали, что надо. □

Как всегда при доказательстве чего-то про перестановку предельных переходов, стоит сначааа воспользоваться условием равномерности:

$$\epsilon > 0;\ \exists\ U(a) :\ \rho(F(x,y), \psi(y)) < \epsilon\ \forall\ x \in U \cap A,\ \forall\ y \in B$$

Зафиксируем $x_0 \in U \cap A$, тогда $\rho(F(x_0, y), \psi(y)) < \epsilon\ \forall\ y \in B$. А еще $\exists\ V(b)$ в $Y :\ \rho(F(x_0, y), \phi(x_0)) < \epsilon\ \forall\ y \in V \cap B$.

Пусть $y, y' \in V \cap B'$.

$$\rho(\psi(y), \psi(y')) \leq \rho(\psi(y), F(x_0, y)) + \rho(F(x_0, y), F(x_0, y')) + \rho(F(x_0, y'), \psi(y')) <$$

$$< 2\epsilon + \rho(F(x_0, y), \phi(x_0)) + \rho(\phi(x_0), F(x_0, y')) < 4\epsilon$$

То есть ψ по лемме удовлетворяет условию Коши, т.е. $\exists\ u = \lim_{y \to b} \psi(y)$.

Теперь в неравенстве $\rho(F(x_0, y), \psi(y)) < \epsilon\ \forall\ y \in B$ перейдем в пределу при $y \to b$, получим $\rho(\phi(x_0), u) < \epsilon$. $\forall\ x_0 \in V \cap A$ это правда, значит $\exists\ \lim_{x \to a} \phi(x) = u$.

Итого мы доказали, что оба повторных предела есть и равны между собой.

Осталось разобраться с двойным пределом. Пусть $\epsilon > 0$; находим $U(a) : \rho(F(x, y), \psi(y)) < \epsilon$, находим окрестность $V(b) : \rho(\psi(y), u) < \epsilon\ \forall\ y \in V \cap B$. Если $(x, y) \in (U \times V) \cap (A \times B)$, то

$$\rho(F(x, y), u) \leq \rho(F(x, y), \psi(y)) + \rho(\psi(y), u) < 2\epsilon$$

□

Это была большая общая теорема. Мы говорили, что некоторые теоремы о смене предельных переходов — это частные случаи чего-то большого. Сейчас напишем более общие формулировки обсуждавшихся теорем и покажем, как отсюда следуют формулировки дял последовательностьей, которые были.

Theorem 7.0.8 (Общая теорема Стокса - Зайделя)**.** *Условия такие же, как в предыдущей теореме. X, Y —хаусдорфовы топологические, Z — полное метрическое, $F : X \times Y \to Z$*

1. *$x_0 \in X$, $\forall\ y \in B \subset Y$ $F(*, y)$ непрерывна в точке x_0*
2. *b — предельная точка для B; $\lim_{y \to b} F(x, y) = \phi(x)$ существует, равномерный по $x \in A$*

Тогда ϕ непрерывна в x_0.

Rem. Теорема из первого семестра получается, если $Z = \mathbb{R}, Y = \mathbb{N} \cup \{\infty\}, B = \mathbb{N}, b = \infty$

Proof. Утверждается, что доказывать нечего.

Мы хотим доказать, что $\phi(x_0) = \lim_{x \to x_0} \phi(x)$. Знаем, что $\lim_{x \to x_0} F(x, y) = F(x_0, y)$. $\lim_{x \to x_0} \phi(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to b} F(x, y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to x_0} F(x, y) = \lim_{y \to b} F(x_0, y) = \phi(x_0)$

□

Theorem 7.0.9 (Общая теорема о дифференцировании предельной функции)**.** *X — хаусдорфово топ. пр-во, $Y = (\alpha, \beta), H : X \times Y \to \mathbb{R}; a \in X$. Все функции $H(x; *)$ дифференцируемы на (α, β) кроме точки a. Пусть $\lim_{x \to a} H(x, y) \to u(y)\ \forall y \in (\alpha, \beta), H'(x, y)$ равномерно сходитсся к $v(y)$ при $x\ toa$. Тогда u дифференцируема на $(\alpha, \beta), u' = v$ всюду.*

Rem. Чтобы получить соответствующую теорему из первого семестра, надо вместо X взять натуральные числа с бесконечностью

Proof. Посмотрим на $y_0 \in (\alpha, \beta), W(x,y) = \frac{H(x,y)-H(x,y_0)}{y-y_0}$. Хотим для этой функции проверить условия общей теоремы, то есть что есть предел по каждой из переменных и одна из сходимостей равномерная.

$\lim_{y\to y_0} W(x,y) = H'(x,y_0)$

Интересуемся сходимостью при $x \to a$. Пусть $x, x_1 \in X$. $W(x,y) - W(x_1,y) = \frac{(H(x,y)-H(x_1,y))-(H(x,y_0)-H(x_1,y_0))}{y-y_0} =$ (можем применить формулу Коши) $H'(x,\theta) - H'(x_1,\theta)$ для некоторой точки между y, y_0.

Равномерная сходимость производной: $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ V(a) : |H'(x,w) - H'(x_1,w)| < \epsilon\ \forall\ x, x_1 \in V$без a, $\forall w$. Если $x, x_1 \in V$, то $|W(x,y) - W(x,y_0)| < \epsilon\ \Rightarrow W(x,y)$ равномерное сходится куда-то при $x\ toa$, $\lim_{x\to a} W(x,y) = \frac{u(y)-u(y_0)}{y-y_0}$.

Итого мы поняли, что

$$\exists\ lim_{y\to y_0} \frac{u(y)-u(y_0)}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to a} \frac{H(x,y)-H(x,y_0)}{y-y_0} =$$

$$= \lim_{x\to a}\lim_{y\to y_0} \frac{H(x,y)-H(x,y_0)}{y-y_0} = \lim_{x\to a} H'(y_0) = v(y)$$

□

Независимость частной производной от порядка дифференцирования:

Theorem 7.0.10. *Пусть $F : (\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta) \to \mathbb{R}$. Предположим, что $\delta_1\delta_2 F = w$ существует и непрерывна, т.е. $\forall\ x \in (\alpha,\beta)\ \exists\ \frac{\delta}{\delta y}F(x,*)$; эта функция, в свою очередь, дифференцируема по x и $\frac{\delta}{\delta x}\frac{\delta}{\delta y}F(*,*)$ непрерывна на прямом произведении. $\delta_1 F, \delta_2 F$ существуют, непрерывны. Тогда $\exists\ \delta_2\delta_1 F = w$*

Proof. Пусть $\phi(x,y) = \delta_2 F(x,y); x_0 \in (\alpha,\beta)$ фиксируем. После этого можно считать, что F задана на произведении замкнутых интервалов $I \times J$ (интересует конкретная точка, для нее всегда существует такая пара отрезков).

$$\frac{\phi(x,y)-\phi(x_0,y)}{x-x_0} = \delta_2 \frac{F(x,y)-F(x_0,y)}{x-x_0}$$

$fracF(x,y) - F(x_0,y)x - x_0 \to \delta_1 F(x_0,y)$ при $x \to x_0$. Покажем, что $\frac{\phi(x,y)-\phi(x_0,y)}{x-x_0} \to w(x_0,y), x \to x_0$ равномерно по y.

Применим к этому как всегда формулу Коши: $\exists\ \theta \in (x,x_0) : \frac{\phi(x,y)-\phi(x_0,y)}{x-x_0} = w(\theta,y), \theta = \theta(y)$. Воспользуемся тем, что w непрерывно и дело происходит на компакте, так что w равномерно непрерывна:

$$\epsilon > 0\ \exists\ \delta : |u-u_1| < \delta, |v-v_1| < \delta\ \Rightarrow |w(u,v) - w(u,v_1)| < \epsilon$$

Пусть $|x-x_0| < \delta$, тогда $|w(\theta(y),y) - w(x_0,y)| < \epsilon$.

$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta : |x-x_0| < \delta, x \neq x_0$, то для всех y сразу

$$\left|\frac{\phi(x,y)-\phi(x_0,y)}{x-x_0} - w(x_0,y)\right| < \epsilon$$

По теореме $\delta_1 F(x_0,y)$ дифференцируема по y и ее производная как раз w. □

Однородные функции и теорема Эйлера

Def. f задана на открытом подмножестве $G \subset \mathbb{R}^n, 0 \notin G$; $\forall\, x \in G \,\forall\, t > 0\; tx \in G$ (такой странный конус). f называется однородной порядка α (степени α), если $\forall\, x \in G, t > 0$

$$f(tx) = t^\alpha f(x)$$

Theorem 7.0.11 (Эйлера)**.** *Пусть $f : G \to \mathbb{R}, G$ как в определении, f непрервыно дифференц. на G. Тогда f однородная степени $\alpha \Leftrightarrow \langle gradf(x), x\rangle = \alpha f(x)$*

Proof. $\Rightarrow$

Продифференцируем $f(tx) = t^\alpha f(x)$ по t:

$$\langle gradf(tx), x\rangle = \alpha t^{\alpha-1} f(x), t := 1$$

и получили.

$\Leftarrow$

$\lessdot\; g(t) = t^{-\alpha} f(tx)$, продифференцируем ее: $g'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx) + t^{-\alpha} \langle gradf(tx), x\rangle = -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx) + t^{-\alpha-1} \langle gradf(tx), tx\rangle = 0$, то есть $t^{-\alpha} f(tx)$ постоянна на t при фиксированном x, при $t = 1$ получили что надо. $\square$

Note. $f, f_n : G \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m, G$ открыто. Пусть все f_n непр.-дифф в G и f_n сходится к f поточечно, $\frac{\delta}{\delta_k} f_n^{(j)}$ равномерно сходятся к $\phi_k^{(j)}$ при $n \to \infty$. Тогда f дифференци. в G, матрица Якоби состоит из $\phi_k^{(j)}$ и

$$||Df_n(x;*) = Df(x;*)|| \to 0, n \to \infty$$

Глава 8

Голоморфные функции

Хотим уметь дифференцировать по комплексному переменному.

Def. $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Можем написать $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Если эти отношения при $z \to z_0$ стремятся в c, то говорят, что f дифференцируема по комплексной переменной в z_0 или голоморфна в этой точке.

Как это согласуется с уже известными нам дифференцированиями?

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = c + o(1) \Leftrightarrow f(z) - f(z_0) = c(z - z_0) + \phi(z), \phi(z) = o(|z - z_0|)$$

Пусть $f(z) = f(x+iy) = u(z)+iv(z), u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Возникает отображение $\phi : G \to \mathbb{R}^2 : \phi(x, y) = (u(x + iy), v(x + iy))$.

Значит все голоморфные функции в z_0 дифференцируемы как отображения множества G в $\mathbb{R}^2$ ($z - z_0$ — линейный оператор). $D\phi(z_0, h) = f'(z_0)h$.

Смотря на наши формулы, понимаем, что это не просто линейный оператор в обычном смысле, он еще и комплексно-линейный, т.е. хорошо умножается на комплексную константу.

$L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — комплексно-линейная функция. $L(z) = zL(1) = cz, c \in \mathbb{C}, c = a + bi; z = x + iy$

$$L(z) = cz = (a + bi)(x + iy) = ax - by + i(ay + bx)$$

$$L(x + iy) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Corollary. Линейный оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

комплексно-линеен тогда и только тогда, когда $a_{11} = a_{22}, a_{21} = -a_{12}$.

Пусть $\psi = (u, v) : G \to \mathbb{R}^2$, пусть ψ дифференцируема в z_0. Матрица Якоби ψ в этой точке как обычно выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta u}{\delta x}(z_0) & \frac{\delta u}{\delta y}(z_0) \\ \frac{\delta v}{\delta x}(z_0) & \frac{\delta v}{\delta y}(z_0) \end{pmatrix}$$

Голоморфность $\Leftrightarrow$ дифференцируемости в веществеңом смысле + выполнение условий

$$\frac{\delta u}{\delta x}(z_0) = \frac{\delta v}{\delta y}(z_0); \ \frac{\delta v}{\delta x}(z_0) = -\frac{\delta u}{\delta y}(z_0),$$

которые называются уравнениями Коши-Римана (система уравнений в частных производных).

Немедленно понимаем, что голоморфность — редкое свойство. Какие-то самые простые функции неголоморфны: $z \mapsto \bar{z} : (x, y) \mapsto (x, -y)$, матрица Якоби выглядит плохо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

А еще предела в 0 нету:

$$\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{\bar{w}}{w} = \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

Функция $f(z) \equiv z$ голоморфна.

Пусть $G \subset \mathbb{C} \to^f U \subset \mathbb{C} \to^h \mathbb{C}, G, U$ открытые. $z_0 \in G, f$ голоморфна в точке, $w_0 = f(z_0), h$ голоморфна в этой точке, тогда $h \circ f$ голоморфна в $z_)$ и $(h \circ f)'(z_0) = h'(w_0)$

Это очень понятный факт:

f, h дифференцируемы в вещественном смысле, их дифференциалы — умножение на $f'(z_0), h'(w_0)$ соответственно, значит композиция дифференцируема в вещественном смысле, дифференциал — умножение на $f'(z_0)h'(w_0)$.

Еще если f_1, f_2 голоморфны, то их произведение тоже и $(f_1 f_2)'(z_0) = f_1'(z_0)f_2(z_0) + f_1(z_0)f_2'(z_0)$

Proof.

$$\frac{f_1(z)f_2(z) - f_1(z_0)f_2(z_0)}{z - z_0} = \frac{f_1(z) - f_1(z_0)}{z - z_0} f_2(z) + \frac{f_2(z) - f_2(z_0)}{z - z_0} f_1(z_0)$$

Ну и примерно как в доказательстве существования производной произведения, т.к. $f_2(z) \to f_2(z_0)$, то получаем что надо. □

z^n всюду голоморфна: $(z^n)' = nz^{n-1} \ \Rightarrow$ полиномы от z тоже везде голоморфны.

А что хорошего голоморфно кроме них? Степенные ряды, говорят, хорошие.

8.1 Степенные ряды

Def. Степенной ряд — это $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$; $z_0 \in \mathbb{C}$ — центр ряда, $z \in \mathbb{C}, c_n \in \mathbb{C}$. Неплохо бы посмотреть на это как на функцию от z. Может не сходиться нигде кроме центра, но если где-то еще это делает в разумных множествах, его рассматривают как функцию от z.

Чтобы понять, где эти ребята сходятся, докажем общий признак для рядов с комплексными коэффициентами.

Theorem 8.1.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{C}$

1. *Если* $\overline{\lim}|a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$, *ряд абсолютно сходится*
2. *Если* $\overline{\lim}|a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$, *то расходится*

Proof. П.2 понятный: $\forall\ n\ \exists\ k > n : |a_k|^{\frac{1}{k}} > 1 \Leftrightarrow |a_k| > 1$, так что за каждым следующим таким найдется член, который по модулю тоже больше единицы, ну плохо.

П.1: $\exists\ \delta \overline{\lim}|a_n|^{\frac{1}{n}} < \delta < 1$; $\exists N: \ \forall n > N |a_n|^{\frac{1}{n}} < \delta \ \Leftrightarrow |a_n| < \delta^n$, мажорируется геомпрогрессией. □

Corollary. Применим это к степенному ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Надо посмотреть на $\overline{\lim}(|c_n||z-z_0|)^{\frac{1}{n}} = |z-z_0|\overline{\lim}|c_n|^{\frac{1}{n}}$. Ряд сходится, если это произведение < 1, если > 1, то расходится. Число $r = \frac{1}{\overline{\lim}}|c_n|^{\frac{1}{n}}$ — радиус сходимости ряда. Если $|z-z_0| < r$, то ряд сходится, если $> r$, то расходится, ну на границе непонятно что происходит, но z_0 по делу называют центром: ряд сходится на шарике с этим центром.

Rem. Вот $\sum\limits_{\frac{1}{n}z^n}$ сходится везде кроме 1 (написать преобразование Абеля для него).

Note. Если $0 < \rho < r$, то в круге $|z-z_0| \le \rho$ степенной ряд сходится равномерно. Это может быть видно и из доказательства, но посмотрим на это просто так:

Пусть $w : \rho < |w-z_0| < r$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(w-z_0)^n$ сходится, значит $\exists\ A: \ \forall n\ |c_n||w-z_0|^n \le A$. Пусть $z : |z-z_0| \le \rho$, тогда

$$|c_n(z-z_0)^n| = \frac{|z-z_0|^n}{|w-z_0|^n}|c_n||w-z_0|^n \le A\left(\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|}\right)^n \le \left(\frac{\rho}{|w-z_0|}\right)^n$$

То есть вне зависимости от точки внутри окрестности наш ряд мажорируется одним и тем же числовым.

Corollary. Если ряд сходится, радиус сходимости не равен нулю, то внутри круга сходимости он — голоморфная функция:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$$

Посчитаем радиус сходимости нового ряда: это $\frac{1}{\overline{\lim}}((k+1)|c_{k+1}|)^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim}\left(|c_{k+1}|^{\frac{1}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{k}} = \overline{\lim}|c_n|^{\frac{1}{n}}$, то есть радиус сходимости такой же, как и у исходного ряда.

Пусть $z : |z-z_0| < r$, $\exists\ \rho : |z-z_0| < \rho < r$, частичные суммы $\phi_l(z) = \sum\limits_{n=1}^{l} nc_n(w-z_0)^{n-1}$ сходятся в круге $|w-z_0| < \rho$ равномерно, $\psi_l'(w) = \phi_l(w), \psi_l(w) = \sum\limits_{n=0}^{l} c_n(w-w_n)^n$.

Theorem 8.1.2 (Коши *)**.** *Пусть открытое $G \subset \mathbb{C}, f : G \to \mathbb{C}$, следующее эквивалентно:*

1. *f голоморфна во всех точках множества*
2. *$\forall\ z_0 \in G\ \exists\ r > 0 :\ f(z) = slim_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ при $|z-z_0| < r$*

//даже можно доказать, что $r \geq dist(z_0, \mathbb{C} \setminus G)$
(функция локально раскладывается в степенной ряд)

Proof. В конце предыдущего следствия доказали стрелочку из 2 в 1, обратно будем доказывать гораздо позже (не то чтобы очень сложно, просто пока не надо). □

По модулю этого тайного знания посмотрим на локальный степенной ряд функции f в $z_0 : f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, f(z_0) = c_0$. $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}, f'(z_0) = c_1.f''(z) = 2c_2 + \dots$, ну и понимаем, что $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ (что-то вроде формулы Тейлора).

Def. Функции $G \to \mathbb{C}$, которые в окрестности любой точки совей области определения раскладываются в степенной ряд, называются аналитическими.

Теорему, которую мы не доказали, можно формулировать так: голоморфность $\Leftrightarrow$ аналитичность.

Мораль локальных степенных рядов в том, что если знаем маленький кусок функции, то знаем всю функцию.

Theorem 8.1.3 (единственности для аналитических функций)**.** *Пусть f — аналитическая функция в области (связность!) $G \subset \mathbb{C}$, пусть $E \subset G$ имеет предельную точку, G принадлежащую. Если $f|_E = 0\ \Rightarrow f \equiv 0$ в G.*

//могут быть только изолированные нули

Proof. Для налача, общее замечание о степенных рядах:

$\phi(z) = \sum\limits_{n>0} a_n(z - w_0)^n$ радиус сходимости rho. $\phi(w_0) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$. Если $a_n = 0 \; \forall \; n$ там, где ряд сходится, то $\phi \equiv 0$, иначе $\lessdot \; mink : a_k \neq 0$ — наш ряд начинается с kго члена и записывается в виде $\phi(z) = (z - w_0)^k(a_k + a_{k+1}(z - w_0)\dots)$. При этом ряд, который стоит в скобках, сходится в том же самом круге, т.е. он непрерывная функция там. Если выкинуть a_k, то тоже получится непрерывная функция. $\psi(z) = a_k + \psi_1(z), \psi$ — непрерывная вблизи w_0, причем $\psi_1(w_0) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \exists$ окрестность точки, где ψ не обращается в ноль, а ϕ не имеет других нулей, кроме w_0.

То есть либо $\phi \equiv 0$, либо ноль в точке w_0 — изолированный и конечной кратности (то k называется кратностью нуля: $\exists$ аналитическая ф-ция $\psi \neq 0$ вблизи w_0 и $k \in \mathbb{N}$: $f(z) = (z - w_0)^k\psi(z)$).

Теперь несложно доказать теорему.

Пусть $z_0 \in G$ — предельная точка E, вблизи нее $f(z) = \sum\limits_{n>0} c_n(z - z_0)^n$; если не все коэффициенты ряда нули, то z_0 — изолированный ноль для f, ну так не может быть, значит $f(z) \equiv 0$ в окрестности z_0.

Теперь воспользуемся связностью. Пусть E_1 — множество точке $w \in E : \;\; f \equiv 0$ в некотором открытом круге с центром в w. Очевидно, это открытое множество. С другой строны, оно замкнуто, ведь если $w \in \bar{E}_1 \cap G \;\; \Rightarrow f(z) \equiv 0$ вблизи w. Значит, т.к. $E_1 \neq \emptyset$ по условию $\Rightarrow \;\; E_1 = G$. $\square$

Rem. Восстановить функцию конечно бывает очень тяжело, бывают интегральные формулы, много чего бывает.

Глава 9

Суммирование семейства

Rem. Абсолютно сходящиеся ряды, в том числе степенные в круге своей сходимости, обладают очень хорошими свойствами: можно слагаемые переставлять, много чего можно. Все этим хорошие свойства рассматривают в рамках более общей теории, хотя после знакомства с ней видно, что ничего, кроме абсолютно сходящихся рядов там нет.

Def. $\{a_\chi\}_{\chi\in A}, a_\chi \in \mathbb{C}$ — числовое семейство, занумерованное не обязательно счетным множеством индексов.

//Хотим понять, что такое $\sum\limits_{\chi\in A} a_\chi$

Говорят, что оно суммируемо и его сумма есть s, если $\forall\ \epsilon > 0\ \exists$ конечное множество $e \subset A:\ \forall$ конечного множества $E : e \subset E \subset A$ верно

$$|\sum_{\chi\in E} a_\chi - s| < \epsilon$$

s_F — частичная сумма нашего семейства по конечному $F \subset A$.

Понятно, что это какой-то предел, но другой.

Note. Мы знаем еще что такое предел в топологическом смысле. Попробуем осмыслить эту конструкцию как топологический предел.

Пусть Σ — частично упорядоченное множество, $a \succ b$ — "строгое неравенство". Σ направленно, если $\forall\ a_1, \dots a_n \in \Sigma\ \exists\ b : b \succ a_1, \dots a_n$.

Наше Σ направленно, добавим к нему точку ∞, назовем $\overline{\Sigma}$, введем на нем топологию: все точки множества Σ изолированные, а база окрестностей ∞ состоит из множеств вида $\{\infty\} \cup \{b \in \Sigma : b \succ a, a \in \Sigma\}$.

Проверка того, что это база — ровно условие направленности.

Пусть $f : \Sigma \to \mathbb{C}$; $\lim_{\chi\to\infty} f(\chi)$ — топологический предел. Кстати, такая функция называется "обобщенной последовательностью "направлением". Пусть это число c, написанное тут означает, что $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ U(\infty)$ НУО базовая: $|f(\chi) - c| < \epsilon\ \forall\ \chi \in U, \chi \neq \infty$.

На нормальном языке это означает, что $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \chi_0 \in \Sigma:\ \forall\ \chi > \chi_0\ |f(\chi) - c| < \epsilon$, и это совсем похоже на предел в нашем самом обычном понимании.

Пусть $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — комплексное семейство, $\Sigma =$ множество совокупностей всех конечных подмножеств множества A. Введем частичный порядок: $e_1, e_2 \in \Sigma e_1 \succ e_2$ означает, что $e_1 \subset \neq e_2$. Это направленное семейство. $S_e = \sum\limits_{\alpha\in e} a_\alpha$; тогда сумма суммируемного семейсвтва $\{a_\alpha\}$ — это предел обобщенной последовательности $\{S_e\}_{e\in\Sigma}$

Theorem 9.0.4. *Следующее эквивалентно:*

1. *Семейство $\{a_\alpha\}$ суммируемо*
2. *Его частичные суммы ограничены в совокупности: $\exists\ D:\ \forall$ конечного $e \subset A$ $|S_e| \leq D$*
3. *Семейство $\{|a_\alpha|\}$ суммируемо*

Statement (Образец рассужения)**.** *Пусть Σ — направленное, $\{x_\chi\}_{\chi\in\Sigma}, \{y_\chi\}_{\chi\in\Sigma}$ — числовые семейства. Если $\exists\ \lim_{\chi\to\infty} x_\chi = x,\ \lim_{\chi\to\infty} y_\chi = y$, то семейство $\{y_\chi + x_\chi\}_{\chi\in\Sigma}$ тоже имеет предел и он равен $x + y$*

Proof. $\epsilon > 0$; $\exists\ \chi_1:\ \forall\ \chi \succ \chi_1 |x_\chi - x| < \frac{\epsilon}{2}$

$\exists\ \chi_2:\ \forall\ \chi \succ \chi_2 |y_\chi - x| < \frac{\epsilon}{2}$

Выберем $\chi_3 \succ \chi_1, \chi_2, \chi > \chi_3 \Rightarrow$

$$|x_\chi + y_chi - x - y| \leq |x_\chi - x| + |y_chi - y| < \epsilon$$

□

Corollary. Если $a_\alpha, \{b_\alpha\}$ — суммируемые семейства, и их суммы — это a, b, то $\{a_\alpha + b_\alpha\}$ тоже суммируемое с суммой $a + b$.

доказываем теорему. $1 \Rightarrow 2$. $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ e \subset A:\ \forall\ e \subset E \subset A\ |s_E - s| < \epsilon$

Пусть $\epsilon = 1$; $\exists\, e$ конечное: $\forall$ конечного E содержащего $e|s_E - s| \leq 1 \Rightarrow\ |s_E| \leq |s| + 1$.

Пусть $F \subset A$ — произвольное конечное множество. $E = F \cup e; \bar{e} = e \setminus F; s_E = s_F + s_{\bar{e}}$

$$|s_E| \leq |s| + 1 \Rightarrow\ |s_F| \leq |s| + 1 + |s_{\bar{e}}| \leq |s| + 1 + \sum_{\alpha\in e} |a_\alpha|$$

$2 \Rightarrow 1$. Хотим сказать, что семейство можно считать чисто вещественным. $a_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha$. Семейство $\{a_\alpha\}$ имеет ограниченные частичные суммы $\Leftrightarrow\ \{u_\alpha\}, \{v_\alpha\}$ имеют ограниченные частичные суммы. Чтобы понять обратно, ну надо понять, что при умножении на число суммируемость не портится. Считае, что вещественное.

Пусть $a_\alpha^+ = max(a_\alpha, 0), a_\alpha^- = max(-a_\alpha, 0)$ — два новых семейства, причем $a_\alpha = a_\alpha^+ - a_\alpha^-$. Заметим, что если частичные суммы семейства $\{a_\alpha\}$ ограничены, то и частичные суммы новых семейств ограничены (верно и обратное): $\sum\limits_{\alpha\in e} a_\alpha^+ = \sum\limits_{\alpha\in e_1} a_\alpha, e1 = \{\alpha \in e : a_\alpha \geq 0\}$, то есть любая частичная сумма семейства $\{a_\alpha^+\}$ — это некоторая частичная сумма семейства $\{a_\alpha\}$.

Новые семейства неортицательны, значит нам осталось доказать стрелочку только в случае необрицательности семейства.

Докажем следующее: пусть $\{u_\alpha\}, u_\alpha \geq 0$. Это семейство суммируемо $\Leftrightarrow \sum\limits_{\alpha \in e} u_\alpha$ ограничены равномерно по конечным $e \subset A$; его сумма есть $\sup \sum\limits_{\alpha \in e} u_\alpha : e \subset A, e$ конечно.

Note. Написанный выше супремум считается суммой неотрицательного семейства все зависимости от того, коненеч он или нет.

Доказываем. Пусть $b = \sup \ldots; \epsilon > 0;\ \exists\ e_0$ конечное $\subset A:\ b \geq \sum\limits_{\alpha \in e_0} u_\alpha > b - \epsilon; e_0 \subset e \Rightarrow\ b \geq \sum\limits_{\alpha \in e} u_\alpha \geq \sum\limits_{\alpha \in e_0} u_\alpha > b - \epsilon$.

Про $1 \Leftrightarrow 3$.

Пусть $\{a_\alpha\}$ произвольное комплексное семейство, пусть суммируемо. В процессе доказательства мы видели, что

$$\{u_\alpha^+\}, \{u_\alpha^-\}, \{v_\alpha^+\}, \{v_\alpha^-\}$$

— тоже суммируемые семейства. $|a_\alpha| \leq |u_\alpha^+ + u_\alpha^- + v_\alpha^+ + v_\alpha^-$. Этим ребята суммируемы, значит и модуль тоже.

Как 1 следует из 3, понятно. □

Corollary. Если $\{a_\alpha\}$ суммируемое, то множество ненулей ($D = \{\alpha : a_\alpha \neq 0\}$) НБЧС.

Proof. Семейство модулей тоже суммируемо, т.е. его частичные суммы ограничены. Пусть $D_n = \{\alpha \in D : |a_\alpha| > \frac{1}{n}\}; D = \cup_{n \in D_n}$. Все D_n конечны: пусть $e \subset D_n, |e| = k; B \geq \sum\limits_{\alpha \in e} |a_\alpha| \geq \frac{k}{n} \Rightarrow k \leq nB$. □

То есть из индексации можно все выкинуть кроме счетного множества, в качестве нумерации можем взять $\mathbb{N}$.

Statement. *Пусть $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность комплексных чисел. Семейство $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ суммируемо $\Leftrightarrow \sum\limits_n |a_n|$ сходится и сумма семейства совпадает с суммой ряда.*

//то есть суммируемое семейство — это абсолютно сходящийся ряд

Proof. $\Rightarrow$

$\sum\limits_{j=1}^{n} |a_j| \leq C$ равномерно по $n \in \mathbb{N}; e \subset \mathbb{N}, |e| < \infty \Rightarrow\ \exists\ n : e \subset [1 \ldots n]$ и $\sum\limits_{j \in e} |a_j| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |a_j| \leq C$

$\Leftarrow$

$\exists\ D :\ \forall\ e \subset \mathbb{N}$ (конечного) $\sum\limits_{j \in e} |a_j| \leq D; e := \{1, \ldots n\}$

Теперь докажем, что суммы совпадают; пусть S — сумма семейства $\{a_n\};\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ e \subset\ \mathbb{N}$(конечное) $\ \forall\ b : e \subset b\ |\sum\limits_{j \in b} a_j - s| < \epsilon; N :=$ максимальный индекс, который есть в e, $n > \mathbb{N}, e \subset \{1, \ldots n\} \Rightarrow |\sum\limits_{a_j} - s| < \epsilon$ □

Пусть $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}, a_\gamma \in \mathbb{C}; \phi : \Gamma \to \Gamma$ — биекция.

Theorem 9.0.5. *$\{a_\gamma\}$ и $\{a_{\phi(\gamma)}\}$ суммируемы лишь одновременно, и причем сумма одна и та же.*

Proof. $\{a_\gamma\}$ суммируема с суммой $s \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, e \subset \Gamma\ \forall\, e_1 : e \subset e_1\ |\sum\limits_{j\in e_1} a_\gamma - s| < \epsilon$.

Пусть $\bar{e} = \phi(e), e \subset \bar{e_1}$;

$$|\sum_{\delta\in\bar{e_1}} a_\delta - s| = |\sum_{\gamma\in\phi^{-1}(\bar{e_1})} a_\gamma - s| < \epsilon$$

□

Corollary. Если ряд абсолютно сходится, то он сходится абсолютно к той же сумме после любой перестановки.

$\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — числовое семейство, пусть Γ разбито на подмножества: $\Gamma = \cap_{\delta\in\Delta} A_\delta; A_\delta$ попарно непересекаются.

Будем обозначать сумму суммируемного семейства $u_{\beta_{\beta\in B}}$ $\sum\limits_{\beta\in B} u_\beta$. Если $u_\beta > 0$, то под этим символом будет понимать $+\infty$, если семейство не суммируемо.

Theorem 9.0.6 (Можно произвольным способом скобки переставлять). *1. Если $a_\gamma \geq 0 \Rightarrow \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sum\limits_{\delta\in\Delta}\sum\limits_{\gamma\in A_\delta} a_\gamma$*

2. В общем случае вышенаписанная формула сохраняет силу, если $\{a_\gamma\}$ суммируемое семейство, т.е. тогда все семейства $a_{\gamma_{\gamma\in A_\delta}}$ тоже суммируемы, если S_δ — их суммы, то семейство $\{S_\delta\}$ тоже суммируемо и $\sum s_\delta = \sum a_\gamma$

Proof. Сначала докажем 1. Пусть $S = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$, докажем, что $\sigma = \sum\limits_{\delta\in\Delta}\sum\limits_{\gamma\in A_\delta} a_\gamma \leq S$. Про $S = +\infty$ понятно, пусть нет; тем более S_δ конечны; $\rho > 0 : \rho < \sigma$ (можно считать, что все $a_\gamma \neq 0$, тогда точно найдется). Существует конечное множество $d \subset \Delta :\ \rho \sum\limits_{\delta\in d} S_\delta$; пусть $\epsilon > 0, |d| = N\ \delta \in d;\ \exists e_\delta$ конечное $\subset\ A_\delta :\ \sum\limits_{\gamma\in e_\delta} a_\gamma < s_\delta - \frac{\epsilon}{N}$. $e = \cap_{\delta\in d} e_\delta \Rightarrow\ s \geq \sum\limits_{\gamma\in e} a_\gamma > \sum\limits_{\delta\in d} s_\delta - \epsilon \geq \rho - \epsilon$. $S \geq \rho - \epsilon\ \forall\ \epsilon > 0\ \forall\ \rho < \sigma\ \Rightarrow\ S \geq \sigma$.

Докажем обратное неравенство $\sigma \geq S; e \subset \Gamma$ конечное, $\sum\limits_{\gamma\in e\cap A_\delta} a_\gamma \leq S_\delta$; просуммируем по δ таким, что $A_\delta \cap e \neq \emptyset$, это будет конечная сумма; справа можем написать сумму во всем дельтам:

$$\sum_{\delta\in\Delta}\sum_{\gamma\in e\cap A_\delta} a_\gamma \leq \sum_\delta S_\delta \Leftrightarrow \sum_{\gamma\in e} a_\gamma \leq \sum_\delta s_\delta = \sigma \Rightarrow S \leq \sigma$$

Выведем из доказанного второе утверждение. Пусть $a_\gamma = (b_\gamma^+ - b_\gamma^-) + i(c_\gamma^+ - c_\gamma^-)$. Раз оно суммируемо, то все четыре семейства суммируемы, для каждого верна формула из первой части и все конечно, ну значит можем скобки расставлять произвольным образом тоже. □

Note. Что делать, если хотим посчитать сумму, группируя члены как-то хитро? Ну надо доказать хоть как-нибудь, что $\sum\limits_{\delta\in\Delta}\sum\limits_{\gamma\in A_\delta}|a_\gamma| < \infty$, тогда непременно $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sum\limits_{\delta\in\Delta}\sum\limits_{\gamma\in A_\delta} a_\gamma$

9.1 Аналитичность суммы степенного ряда (переразложение с другим центром)

Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, ряд сходится в круге $|z-z_0| < r$. Даже в пределах этого круга непонятно, почему $\forall\ w_0$ вблизи z_0 $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} b_n(z-w_0)$. Это конечно можно было сделать через теорему Коши, которая гласит, что всякая голоморфная функция аналитична, но мы ее не доказали.

Statement. *Пусть $|w_0 - z_0| < r$; $\rho := r - |w_0 - z_0|$ — расстояние от w_0 до границы круга сходимости (если радиус сходимости бесконечность, то и это бесконечность). Тогда f представляется рядом $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-w_0)$, который сходится по крайней мере при $|z-w_0| < \rho$.*

Proof.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n((z-w_0)+(w_0-z_0))^n = \sum_{n=0}\infty c_n \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(z-w_0)^j(w_0-z_0)^{n-j}$$

Хочется переставлять скобки. Посмотрим на сумму $\sum\limits_{n=0}\infty|c_n|\sum\limits_{j=0}^{n}\binom{n}{j}|z-w_0|^j|w_0-z_0|^{n-j}$, можем с ней свободно работать, свернем обратно:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|(|z-w_0|+|w_0-z_0|)^n$$

Штука в скобках меньше r, так что это дело сходится (потому что ряд абсолютно сходится в круге сходимости). Итого, ниже написана сумма суммируемого семейства:

$$\sum_{n=0}\infty c_n \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(z-w_0)^j(w_0-z_0)^{n-j}$$

Если это расписать по степеням $z - w_0$, то коэффициенты будут абсолютно сходящимися рядами, и все сумма — все тот же абс. сходящийся степенной ряд, он же $f(z)$. □

Rem. Естественне должна восприниматься теорема о единственности и факт о том, что ноль в центре круга сходимости изолированный.

9.2 Произведение рядов

e_1, e_2 — конечные множества индексов. $\left(\sum\limits_{j\in e_1} a_j\right)\left(\sum\limits_{j\in e_2} b_j\right) = \sum\limits_{(k,j)\in e_1\times e_2} a_j b_k$ наверное.

Но вообще $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum\limits_{n,m\in\mathbb{N}} a_n b_m$ неясно как интерпретировать; если как ряды, то хочется как-то упорядочить пары в одну последовательность (m_k, n_k), чтобы сказать, что произведение слева — это $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{m_k} a_{n_k}$.

Упражнение если занумеровать пары хорошо, как показано ниже на картинке, то написанная сумма будет сходиться, если сходятся две изначальные.

Statement. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся абсолютно, то семейство* $\{a_n b_m\}_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ *суммируемо*

Proof.

$$\sum_{(n,m)} |a_n||b_m| = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} |a_n||b_m| = \sum_n |a_n| \sum_m |b_m| = \left(\sum |a_n|\right)\left(\sum |b_m|\right) < \infty$$

□

Пусть теперь у нас есть два ряда $f(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,\ g(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} b_n (z-z_0)^k$ сходятся с радиусом сходимости r, они оба сходятся абсолютно, тогда

$$f(z)g(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n+k=m} a_n b_k\right)(z-z_0)^m$$

сходится абсолютно и равномерно при $|z-z_0| \le \rho < r$.

Вспомним про простое вращение и экспоненту. $z = u + iv; \exp z = e^u e^{iv}; e^{iv} = \Gamma(v)$ — простое вращение. $e^u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}; e^{iv} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(iv)^k}{k!}$ сходятся оба абсолютно.

$e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(iv)^k}{k!} = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k+n=m} u^n (iv)^k \frac{m!}{n!k!}\right)\frac{1}{m!} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(u+iz)^m = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$

То есть получили такой же ряд везде сходящийся уже не только для чисто вещественных или комплексных.

Def. Аналитическая функция на всей комплексной плоскости называется целой.

Вот exp — целая функция.

Statement. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ — *единственная целая функция, совпадающая с* e^x *на вещественной оси.*

Proof. $f(z)$ на вещественной оси совпадает с чем надо, ну а если есть две такие функции, то они равны везде по теореме о единственности. $\square$

Другой подход к построению простого вращения

Представим, что всей возни с построением не было и что такое комплексная экспонента мы пока тоже не знаем.

Знаем, что есть $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$. Определим экспоненту от $z \in \mathbb{C}$ как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; этот ряд сходится равномерно в любом круге, все корректно.

$\overline{e^z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = e^{\bar{z}}$

Хотим доказать основное свойство $\exp z_1 + z_2 = \exp z_1 \exp z_2$.

Пусть $x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}; \phi(z) = e^{x+z}e^{-x}$ аналитическая в $\mathbb{C}$, совпадает с e^z при вещественных z, значит совпадает всюду: $\phi(z) = e^z$.

$\phi(w) = e^{z+w}e^{-w}, z \in \mathbb{C}$ при вещественных w это $e^z \Rightarrow \phi(w) = e^w$.

Пусть $\Gamma(y) = e^{iy}, y \in \mathbb{R}; \overline{\Gamma(y)} = e^{-iy}; |\Gamma(y)|^2 = \Gamma(y)\overline{\Gamma(y)} = 1$, ну дифференцировать легко: $\Gamma'(y) = i\Gamma(y), \Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, удовлетворяет всем свойствам простого вращения, надо поговорить про периодичность, но в конце концов получится.

Так что можно и так сделать.

9.3 Условно сходящиеся ряды

Def. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, но не сходится абсолютно.

Вот один такой знаем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

Theorem 9.3.1 (Лейбница). *Если ряд сходится условно, $x \in \mathbb{R}$, то его слагаемые можно переставить так, чтобы он сходился к x, а еще можно переставить так, чтобы он разошелся.*

Rem. Наметки к доказательству.

Заметим, что $a_n \to 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ оба расходятся.

Можем с самого начала переставить ряд так, как нам удобно, все равно же будет переставлять. Переставим a_n так, чтобы $|a_n|$ монотонно стремится к 0. Ну вот $\{n : |a_n| \geq 1\}$ конечное, переставлю их монотонно, так же с $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$.

Theorem 9.3.2. *Пусть a_n монотонно убывает, стремится к $0; x, y \in [-\infty, +\infty]$, тогда существует перестановка $\{a_{n_k}\}$ нашей последовательности такая, что*

$$\limsup_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} a_{n_k} = y; \liminf_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} a_{n_k} = x$$

Proof. В доказательтве будет считать, что верхний и нижний пределы конечные, с бесконечностями там даже проще.

Пусть $y_n = y - \frac{1}{n}; x_n = x + \frac{1}{n}$. Будем набирать себе из a_1 что-то большее y_1: наберем себе $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots > 0$, остановились, когда $a_{n_1} + \dots + a_{n_k} > y_1$ в первый раз. Назовем эту сумму S_1. Теперь прибавляем в порядке возрастания отрицательные члены последовательности, пока новая сумма S_2 не окажется меньше x_1 в первый раз, и тд, S_{2k-1} у нас будет больше y_k, S_{2k} будет меньше x_k.

Вспомним характеризации верхнего и нижнего пределов:

b — верхний предел $\{u_n\} \Leftrightarrow$

1. $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N:\ \forall\ n > N\ u_n < b = \epsilon$

2. $\forall\ \epsilon > 0\ \forall\ N\ \exists\ n > N : u_n > b - \epsilon$

Ну надо подумать и понять, что для построенной суммы выполнены оба условия (второе совсем очевидно, первое тоже понятно). □

Преобразование Абеля (суммирование по частям)

Аналог формулы интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b f'g = fg|_a^b - \int\limits_a^b g'f$$

$\int\limits_a^b fg = \int\limits_a^b fdG, G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt = Gf|_a^b = \int\limits_a^b Gf'$

Есть $\sum\limits_{n=1}^k a_n b_n; s_i := \sum\limits_{j=1}^i a_k; a_j = s_j - s_{j-1}\ \forall j \geq 2, a_1 = s_1$

$$\sum_{n=1}^k a_n b_n = a_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + \dots + (s_k - s_{k-1}) b_k = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \dots + s_{k-1}(b_{k-1} - b_k) + s_k b_k$$

Еще одно утверждение, которым любили пользоваться на практике, следует из вышенаписанной формулы:

Statement. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n, b_k$ *убывает, стремится к* 0, $\sum\limits_{i=1}^k a_i$ *равномерно ограничены, тогда ряд сходится*

Proof.

$$|\sum_{n=1}^k a_n b_n| \leq |s_1(b_1 - b_2)| + \dots + |s_{k-1}(b_{k-1} - b_k)| \leq A(b_1 - b_k) \leq Ab_1$$

□

Theorem 9.3.3 (Лейбница)**.** *Пусть* b_n*, убывая, стремится к* 0*, тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ *сходится*

Proof. $a_n = (-1)^{n+1}$ и применим предыдущее утверждение ☐

Rem. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = log(2)$

Вот поняли, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ в -1 сходится, а вообще говорили, что непонятно, что происходит на границе круга сходимости. Применим к этой штуке преобразование Абеля: $a_n = z^n, b_n = \frac{1}{n}; s_k = z + \dots + z^k = z\frac{z^k-1}{z-1}$ — ограничены равномерно по k при $|z| = 1, z \neq 1$.

Так что наш ряд сходится везде на границе круга сходимости, кроме одной точки $z = 1$.

Глава 10

Несобственные интегралы

Пусть $I = \langle c, d\rangle$ — конечный или бесконечный интервал, содержащий свои небесконечные концы. Пусть f задана на I и интегрируема по Риману на каждом интервале $(a, b) \subset I$ (интересен конечно случай, когда не интегрируема по каким-то причинам на все интервале).

Def. Пусть $\lim_{a\to c+0, b\to d-0} \int\limits_a^b f(x)dx$ существует, тогда f интегрируема по Риману в несобственном смысле.

Будем считать, что хотя бы на одном из концов интервала у интеграла какая-то особенность: $c \in \mathbb{R}, d$ — единственная особая точка для f, т.е. $\int\limits_c^s f(x)dx \ \exists \ \forall \ s < d$. Интересуемся пределом $\lim_{s\to d} \int\limits_c^s f(x)dx$

1. Можем применить критерий Коши:

$$f\text{интегрируема в несобственном смысле} \Leftrightarrow \forall \, \epsilon > 0 \, \exists \, R : \, \forall \, s_2 > s_1 > R \, \left| \int\limits_{s_1}^{s_2} f(x)dx \right| < \epsilon$$

2. Если f, g — функции, $g \geq 0, |f| < g, g$ интегрируема в несобственном смысле, то и f тоже:

$$\left| \int\limits_{s_1}^{s_2} f(x)dx \right| \leq \int\limits_{s_1}^{s_2} |f(x)dx| \leq \int\limits_{s_1}^{s_2} g(x)dx$$

3. Если $|f|$ интегрируема в несобственном смысле, то и f тоже (про это говорят, что интеграл абсолютно сходится); обратно конечно неверно.

Ex. 1. $\int\limits_1^\infty x^{-a}dx$ сходится, когда $a > 1$

2. $\int\limits_0^1 y^{-t}dy, t > 0; \int\limits_\epsilon^1 y^{-t}dy = \frac{1}{-t+1}y^{-t+1}|_\epsilon^1, t \neq -1||log(y)|_\epsilon^1, t = -1$; сходится при $t < 1$

Пусть $[c, d\langle, d$ — особая точка. $\int\limits_c^d f(x)g(x)dx$ — несобственный интеграл, f непр.-дифф, $G(x) = \int\limits_c^x g(t)dt$

$$\lim_{s\to d-}\int\limits_c^d f(x)g(x)dx = \lim\int\limits_c^s f(x)dG(x) = \lim fG(x)|_c^s - \int\limits_c^s G(x)f'(x)dx$$

Пусть f убывает на $[c, d)$ и $f(x) \to 0, x \to d, G(x)$ ограничена на $[c, d)$.

$$\lim fG(x)|_c^s - \int\limits_c^s G(x)f'(x)dx = (G(s)f(s) \to 0) - G(c)f(c) - \lim\int\limits_c^s G(x)f'(x)dx$$

Заметим, что $|G(x)f'(x)| \leq Af'; -\int\limits_c^s f'(x) = -f(x)|_c^s = f(c) - f(s) \to f(c)$.

Ex.

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

Особенность в ∞ (в нуле нет).

Сходится ли абсолютно? Посмотрим на какой-нибудь интервал вида $[n\pi, (n+1)\pi]$, ну и на половине длины синус (модуль) больше $\frac{1}{10}$, так что $\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|sinx|}{x}dx \geq \frac{c}{n}$, так что $\int\limits_0^R \frac{|\sin x|}{x}$ оценивается снизу куском гармонического ряда, так что расходится.

Достаточно доказывать, что сходится $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. Возьмем $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \sin x; G(x) = \cos x - \cos 1$ — ограничена равномерно по x, так что рассуждение выше говорит нам, что интеграл сходится.

Хотим сказать, что он равен $\frac{\pi}{2}$

Одна из возможных схем вычисления:

$$F(a) = \int\limits_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx, a > 0$$

Надо доказать следующие вещи:

1. $F(a) \to 0, a \to +\infty$

2. $F(a) \to \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx, a \to 0$

3. F дифференцируема при $a > 0; F'(a) = -\frac{1}{1+a^2}$ Как делать это:

   (a) $F'(a) = \int\limits_0^\infty (-x)e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$ — проверить, что можно дифференцировать под интегралом, тогда $F'(a) = -\int\limits_0^\infty e^{-ax} sinx dx = -\frac{1}{a^2+1}$

   (b) $-\frac{1}{a^2+1}$ непрерывна в нуле, так что $F(a) = -\operatorname{arctg} a + C$, константа вычисляется из соображений при $a \to \infty : C = \frac{\pi}{2}$

4. ну дальше $F(a) = -\operatorname{arctg} a + \frac{\pi}{2}$, смотрим на $a \to 0$.

$$|F(a)| \le \int\limits_0^\infty e^{-ax}|\frac{\sin x}{x}|dx \le \int\limits_0^\infty e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}|)^\infty = \frac{1}{a} \to 0, a \to \infty$$

$$\int\limits_c^d e^{-at}\sin t dt = \frac{e^{-ac}\cos c - e^{-ad}\cos d - ae^{-ad}\sin d + ae^{-ac}\sin c}{1+a^2}$$

— ограничен равномерно по $a, c, d; c, d > 0$ (а нам важна ограниченность вблизи $a = 0$).

$$\Phi(a, R) = \int\limits_0^R e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$$

$\lim_{a\to 0}\Phi(a, R) = \int\limits_0^R \frac{\sin x}{x}dx\ \forall\ R; \lim_{R\to\infty}\Phi(a, R) = F(a)\ \forall a > 0$

Достаточно доказать, что предел при $R \to \infty$ достигается равномерно по $a > 0$, тогда применима будет теорема о перестановке предельных переходов и все будет понятно. Ну как это доказать?

Theorem 10.0.4. *$G(u, x), u \in A, x \in [\alpha, \beta)$ — функция. Пусть $\forall\ u \in A\ G(u, \cdot)$ интегрируема по Риману на каждом инвервале $[\alpha, \beta'), \beta' < \beta$. Пусть $g : [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}_+, g|_{[\alpha,\beta']}$ интегрируема по Риману $\forall\ \beta' < \beta$, несобственный интеграл $\int\limits_\alpha^\beta g(x)dx$ существует. Пусть $|G(u, x)| \le g(x)\ \forall\ u \in A, x \in [\alpha, \beta)$. Тогда*

$$\lim_{\gamma\to\beta}\int\limits_\alpha^\gamma G(u, x)dx\ \exists \textit{равномерно по } u$$

Proof. Проверка признака Коши: $\alpha < \gamma_1 < \gamma_2 < \beta$

$$|\int\limits_{\alpha}^{\gamma_1} G(u,x)dx - \int\limits_{\alpha}^{\gamma_2} G(u,x)dx| = |\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} G(u,x)dx| \le \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} g(x)dx$$

Значит $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \beta_1 < \beta : \gamma_1, \gamma_2 > \beta_1 \Rightarrow \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} g(x)dx < \epsilon$ и малость наступает одновременно по u. □

$$\int\limits_0^R e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^1 e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx + \int\limits_1^R e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$$

$h(a,x) := \int\limits_1^x e^{-at}\sin t dt$ — равномерно ограничена по всем значениям x

$$\int\limits_1^R e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_1^R \frac{1}{x}dh(a,x) = \left.\frac{h(a,x)}{x}\right|_{x=1}^{x=R} - \int\limits_1^R h(a,x)\frac{dx}{x^2}$$

— равномерно сходится по R.

Так что нам осталось доказать дифференцируемость под интегралом.

Theorem 10.0.5. $[\alpha, \beta]$ *— конечный отрезок,* $G : [\alpha,\beta]\times(c,d); G(x,u)$*. Пусть* $\frac{\delta}{\delta u}G(x,u)$ *существует и непрерывна на* $[\alpha,\beta]\times(c,d)$

$$\psi(u) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} G(x,u)dx$$

Тогда ψ *дифференцируема на* (c,d) *и* $\psi'(u) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\delta}{\delta\tau}G(x,\tau)dx$

Proof. НУО вместо открытого (c,d) рассмотрим замкнутый. Значит $\frac{\delta}{\delta u}G(x,u)$ равномерно непрерывна там.

$$\frac{G(x,u) - G(x,u_0)}{u-u_0} = \delta_2 G(x,\theta_x), \theta_x \in (u,u_0)$$

$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta |u-u_0| < \delta \Rightarrow\ \forall\ \xi \in (u,u_0)\ \forall\ x\ |\delta_2 G(x,\xi) - \delta_2 G(x,u_0)| < \epsilon$ Ну значит если $|u-u_0| < \delta \Rightarrow\ \left|\frac{G(x,u)-G(x,u_0)}{u-u_0} - \delta_2 G(x,u_0)\right| < \epsilon$.

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{G(x,u)-G(x,u_0)}{u-u_0}dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} \delta_2 G(x,u_0)dx\right| \le \epsilon(\beta-\alpha), |u-u_0| < \delta$$

□

Но у нас не совсем эта ситуация. Зато мы теперь знаем, что

$$a, a_0 > 0 \Rightarrow \lim_{a \to a_0} \int\limits_0^R \frac{e^{-ax} - e^{-a_0 x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} dx = -\int\limits_0^R e^{-ax} \sin x dx$$

Тогда

$$\forall a \neq a_0 \lim_{R \to \infty} \int\limits_0^R \frac{e^{-ax} - e^{-a_0 x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^R \frac{e^{-ax} - e^{-a_0 x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} dx = *$$

Факт: предел в $*$ достигается равномерно по a из малой окрестности a_0. Для этого нужно у всех функций

$$\left| \frac{e^{-ax} - e^{-a_0 x}}{a - a_0} \frac{\sin x}{x} \right| < g(x), \int\limits_0^\infty g(x) dx \text{ сходится}$$

Пусть $a > a_0$

$$\frac{e^{-ax} - e^{-a_0 x}}{a - a_0} = e^{-a_0 x} \frac{e^{-(a - a_0)x} - 1}{(a - a_0)}$$

$$|e^{-(a-a_0)x} - 1| \leq c|a - a_0|x; g := ce^{-a_0 x}$$

Если $a < a_0$, то $e^{-ax} \frac{1 - e^{-(a_0 - a)x}}{a - a_0}$ и $e^{-ax} \leq e^{-cx} (a \in [c, d])$.

Rem. Предельные переходы по параметру, дифференцирование и интегрирование — основные инструменты работы с несобственными интегралами.

10.1 Сравнение сумм и интегралов

f — неотрицательная монотонная функция на $\mathbb{R}_+$, НУО убывает. $0 < A_0 < A_1 < \cdots < A_n$. Хотим оценить $\int\limits_{A_0}^{A_n} f(x)dx$. Пусть $h(x) = f(A_j), x \in [A_j, A_{j+1}), j = 0, \ldots n-1; g(x) = f(A_{j+1}), x \in [A_j, A_{j+1})$

$$\int\limits_{A_0}^{A_n} h(x)dx \leq \int\limits_{A_0}^{A_n} f(x)dx \leq \int\limits_{A_0}^{A_n} h(x)dx$$

$$\int\limits_{A_0}^{A_n} h(x)dx = (A_1 - A_0)f(A_0) + \cdots + (A_n - A_{n-1})f(A_{n-1})$$

$$\int\limits_{A_0}^{A_n} g(x)dx = (A_1 - A_0)f(A_1) + \dots + (A_n - A_{n-1})f(A_n)$$

Понятно, что надо написать для возрастающей функции.

Если $A_0 = 1, \dots A_n = n+1$, то получается оценка

$$f(2) + \dots + f(n+1) \leq \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leq f(1) + \dots + f(n)$$

Здорово, что если например $f(x) \to 0, x \to \infty$, то отличаются две сумму не очень сильно.

Corollary. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, тогда $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится.

Пусть $f(x) = x^{-\alpha}, \alpha > 0$. Получается, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ сходится $\Leftrightarrow$ $\int\limits_1^{\infty} x^{-\alpha}dx < \infty \Leftrightarrow \alpha > 1$.

При $\alpha = 1$

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \leq \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq 1 + \dots + \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \leq \log(n+1), 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geq \log(n+1), 1 + \dots + \frac{1}{n} \sim log(n+1)$: частичные суммы гармонического ряда растут в точности как логарифм.

Еще полезно, что $1^a + \dots + n^a \sim \frac{1}{a+1}n^{a+1}, a > 0 (\int\limits_a^n x^a dx)$.

Пусть у нас есть $a_n \to 0$, монотонно убывающую, $a_n \geq 0; \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n; f(x) = a_n, x \in [n, n+1)$ — заведем себе ступенчатую функцию. Возьмем $A_n = 2^n; A_{n+1} - A_n = 2^n$.

Corollary. Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} < \infty \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k 2^{-k\alpha} < \infty$ — при $\alpha > 1$

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log{(1+n)^{\alpha}}} < \infty$ можно и интегральный признак написать, сделав замену, но можно и по нашему следствию: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k k^{\alpha}} < \infty \Leftrightarrow \alpha > 1$

Rem. Мораль: не всегда в сравнении суммы и интеграла выгодно брать равноотстоящие друг от друга точки.

Theorem 10.1.1. $\exists \lim_{n\to\infty} 1 + \dots + \frac{1}{n} - \log n + 1 = \gamma > 0$, *постоянная Эйлера.*

Proof. //вчера оценили очень грубо, а так получится, если оценить поточнее

$$\log(n+1) = \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{d} = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_j^{j=1} \frac{dx}{x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_j^{j+1} (\frac{1}{x} - \frac{1}{j})dx$$

$b_j = \int\limits_j^{j+1} (\frac{1}{x} - \frac{1}{j})dx < 0$

$|b_j| \le \int\limits_j^{j+1} \frac{|x-j|}{xj} dx \le \frac{1}{j}; \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ сходится абсолютно.

$-\sum\limits_{j=1}^{n} b_j = 1 + \cdots + \frac{1}{n} - \log n + 1 \to \gamma$ □

Формула Стирлинга

$$n! \sim n^n$$

в том смысле, что это все растет очень быстро, а примерно — с точностью до геометрической прогрессии (она-то пренебрежива мала по сравнению с этим).

$\log n! = \sum\limits_{i=1}^{n} \log i$

$\int\limits_1^{n+1} \log x dx = (n+1)\log n + 1 - n$

Перед тем, как оценить, скажем еще вот что: $0 \le x \le 1; \log 1 + x = x - \frac{1}{(1+\xi)^2}x^2 - \exists\, \xi \in (1, 1+x)$

$\log 1 + x = x + \phi(x), |\phi(x)| \le x^2$

А теперь вернемся к интегралу:

$$(n+1)\log n + 1 - n = \int\limits_1^{n+1} \log x dx = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_1^{j+1} \log x dx = \sum_{j=1}^{n} \log j + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_j^{j+1} (\log x - \log j)dx,$$

второе слагаемо не сходится так хорошо, как в предыдущем вычислении, пишем ряд Тейлора:

$$\log x - \log j = \log \frac{x}{j} = \log 1 + (\frac{x}{j} - 1) = \frac{x-j}{j} + O(\frac{|x-j|^2}{j^2}); \phi_j(x) := O(\frac{|x-j|^2}{j^2})$$

$$(n+1)\log n + 1 - n = \log 1 + \cdots + \log n + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \int\limits_j^{j+1} (x-j)dx + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_j^{j+1} \phi_j(x)dx$$

$b_j := \int\limits_j^{j+1} \phi_j(x)dx; |b_j| \le \int\limits_j^{j+1} \frac{|x-j|^2}{j^2} dx \le \frac{1}{j^2}$, значит последний член в сумме стремится к некоторой константе b.

$\int\limits_j^{j+1} (x-j)dx = \frac{(x-j)^2}{2}\Big|_{x=j}^{x=j+1} = \frac{1}{2}$

$$(n+1)\log n + 1 - n = \log 1 + \dots + \log n + \frac{1}{2}(1 + \dots + \frac{1}{n}) + \sum_{j=1}^{n} b_j =$$

$$= \log 1 + \dots + \log n + \frac{1}{2}\log n + 1 + d_n, d_n \to d$$

$$(n + \frac{1}{2})\log n + 1 - n = \log 1 + \dots + \log n + d_n$$

Пропотенциируем:

$$(n+1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} = n! e^{d_n}$$

$$n^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} = n! e^{d_n}$$

$$n! \sim c\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

А еще $c = \sqrt{2\pi}$ на самом деле, вроде на тервере что-то такое посчитали.

Rem. Представленная стратегия — общая и хорошо работающая, так пишется много разных ассимптотических оценок.

Сама общая — формула Маклорена-Эйлера, лучше всего эти исследования изложены в книге Бурбаки "Функции действительного переменного"(одна из немногих книг группы, которая хорошо написана и можно читать).

10.2 Суммирование последовательностей и рядов

Пусть есть расходящаяся $\{x_n\}$; хочется осмыслить, что естественно считать ее пределом.

Def. План: построить отображение = <u>метод суммирования</u> $\{x_n\} \mapsto \{y_n\}$; если y_n сходится к y, то говорят, что $\{x_n\}$ суммируема к y этим методом.

Метод называется регулярным, если все сходящиеся последовательности суммируемы к своим пределам.

1. Метод Чезаро(метод средних арифметических)

   $x_n; y_n := \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$; если $y_n \to y$, то говорят, что x_n суммируется (сходится) по Чезаро.

Ex.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

$S_1 = 1; S_2 = 0, S_2 = 1, \dots$

Theorem 10.2.1. *Метод Чезаро регулярен.*

Proof. $x_n \to x; \lessdot y_n - x = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - x = \frac{x_1 - x + \dots + x_n - x}{n}$

$\epsilon > 0;\ \exists\ N : n > N \Rightarrow |x - x_n| < \epsilon$ и $|x_n| \leq A, |x| \leq A \Rightarrow |x_n - x| \leq 2A$

$|y_n - x| \leq \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} |x_j - x| + (n-N)\epsilon}{n} \leq \frac{2AN}{n} + (1 - \frac{N}{n})\epsilon < \epsilon$, если $n > \frac{2AN}{\epsilon}$ □

Результат, связанный с этим методом суммирования, который докажем очень потом:

Пусть f непрерывна на $[-\pi, pi], f(-\pi) = f(\pi)$, тогда ее можно продолжить периодично на вещественную ось; $f \sim \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}; c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$. $S_N(t) = \sum\limits_{|n| \leq N} c_n e^{int}$.

$\lim_{N \to \infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 dt = 0$, а как на счет поточечной или равномерной сходимости S_N к f? Все плохо.

Но вот в начале XX века Фейер показал, что $S_N(t)$ сходится к $f(t)$ равномерно по Чезаро, если f непрерывна.

2. Матричные методы суммирования и теорема Тёплица.

   Def. $t_{ij} \geq 0, i, j \in \mathbb{N}$ — бесконечная матрица. $\{x_j\} \mapsto y_i = \sum\limits_{j=1}^{\infty} t_{ij} x_j$ (не слишком понятно пока, как понимать, но если ненулевых элементов в каждой строке конечное число, то ок). x_j суммируема к y методом $\mathbb{T}$, если $y_j \to y$.

   Предполагаем, что

   (a) Все ряды $\sum\limits_{j=1}^{\infty} t_{ij}$ сходятся

   (b) Нас интересуют только ограниченные последовательности x_j.

   так что вопроса об осмысленности большой суммы нет.

   Когда такой метод регулярен?

   Theorem 10.2.2 (Тёплица)**.** $\mathbb{T}$*-метод регулярен тогдаи только тогда, когда выполнено* *(a)* $\lim_{i\to\infty} t_{ij} = 0$

(b) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} t_{ij} \to 1, i \to \infty$

Rem. Регулярность метода Чезаро следует из теоремы Тёплица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Proof. Необходимость:

Пусть $x_j = 1\ \forall\ j; y_i = \sum\limits_{j=1}^{\infty} t_{ij}$ должно стремиться к единице (условие b).

Пусть $x_j = \delta_{ij}, x_j \to 0$; переходит в последовательность $\{t_{ki}\}_{i=1}^{\infty}$, и она должна стремиться к нулю. Это ровно условие a.

Достаточность.

$$x_j \to; y_i = \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij}x_j; y_i - x = \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij}(x_j - x) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} - 1\right) x$$

Второе слагаемое стремится к 0 по b; оценим первое слагаемое: $\epsilon > 0;\ \exists\ N :$ $|x_j - x| < \epsilon\ \forall\ j > N$

$$|\sum_{j=1}^{\infty} t_{ij}(x_i - x_j)| \le \sum_{j=1}^{N} t_{ij}|x - x_j| + \sum_{j=N+1}^{\infty} t_{ij}\epsilon \le (\ \exists\ C : |x - x_j| \le C\ \forall\ j)$$

$$\epsilon \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} + C \sum_{j=1}^{N} t_{ij} < D\epsilon$$

в силу a. □

Забавно, что условие положительности матрицы никак не используется, так что вообще-то есть следующее утверждение:

Theorem 10.2.3. *Матрица t_{ij} произвольная; посмотрим на метод $\{x_j\} \mapsto \sum\limits_{j=1}^{\infty} t_{ij}x_j$*

(a) Для того, чтобы определение было осмысленно для любой ограниченной последовательности x_j необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |t_{ij}| < \infty\ \forall\ i$.

(b) *$\mathbb{T}$-метод регулярен тогда и только тогда, когда выполнены условия a, b предыдущей теоремы и еще следующее условие:* $\sup_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} |t_{ij}| < \infty$.

Достаточность ничуть не сложнее, а в необходимости придется повозиться ("метод скользящего горба").

3. Метод Абеля-Пуассона

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Потребуем, чтобы частичные суммы были ограничены. Пусть $r \in [0,1)$; $f(r) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ абсолютно сходится, ведь мажорируется геомпрогрессией (если частичные суммы ограничены, то и a_i ограничены).

Def. Исходный ряд суммируем методом Абеля-Пуассона к числу σ, если $\exists \lim_{r \to 1-0} f(r) = \sigma$.

Мы конечно хотим доказать, что это регулярный метод суммирования, так что будем проверять для него теорему Тёплица; сначала обсудим, как это делать с суммами:

$a_0 = s_0; a_n = s_n - s_{n-1}, n \geq 1$

$f(r) = s_0 + r(s_1 - s_0) + r^2(s_2 - s_1) + \dots$; эта штука абсолютно сходится: $|s_0| + r|s_1| + r|s_0| + r^2|s_2| + r^2|s_1| + \dots$ — тоже мажорируется геомпрогрессией, так что это суммируемое семейство, $f(r) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} (r^j - r^{j+1}) s_j = \sum\limits_{j=0}^{\infty} r^j (1-r) s_j$.

Для последовательностей метод Абеля Пуассона применяется так:

$\{s_n\}$ — ограниченная последовательность, ей сопоставляется $\{\sum\limits_{j=0}^{\infty} r^j (1-r) s_j\}_{r \in [0,1)}$

Theorem 10.2.4. *Если $s_j \to s \Rightarrow\ f(r) \to s, r \to 1-0$ (то есть метод Абеля-Пуассона регулярен).*

Proof. Достаточно проверить, что $\forall\, r_k < 1 r_k \to 1\ f(r_k) \to s$. Зафиксируем такую последовательность; $t_{jk} = r_k^j (1 - r_k); T = \{t_{jk}\}$ — матрица. Проверим, что метод суммирования с этой матрицей регулярен, тогда то, что надо, будет следовать из теоремы Тёплица. $\lim_{k \to \infty} r_k^j (1 - r_k) = 0; \sum\limits_j r_k^j (1 - r_k) = 1$. □

Ex.

$$1 - 1 + 1 - \dots$$

$$1 - r + r^2 - r^3 + \dots$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-r)^j = \frac{1}{1+r} \to \frac{1}{2}, r \to 1-0$$

Rem. Этот метод сильнее метода Чезаро, суммирует некоторые штуки, которые тот не может.

Есть например теорема о том, что все, что суммируется по Чезаро, суммируется по А-П к тому же, но обратное неверно.

А еще есть наука о том, что можно суммировать по Чезаро, а потом еще раз, и это метод Чезаро второго порядка. А еще можно k раз так делать, и это соответствует матрице с коэффициентами, от k зависящими. Можно сделать его нецелым, получится метод Чезаро порядка α

Самовольное дополнение программы. Решая задачи на методы суммирования, мы увидели, что чаще всего нам вовсе не хочется понимать, что ряд суммируем по АП после того, как мы поняли, что он суммируем по Ч. Поэтому все-таки докажем теорему о том, что сходимость по Абелю-Пуассону сильнее, чем сходимость по Чезаро.

Theorem 10.2.5 (Фробениус)**.** *Если ряд $\{a_k\}$ суммируем к S по Чезаро, то он суммируем и по Абелю-Пуассону, причем тоже к S.*

Proof. $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k, S_{-1} = 0$, применим преобразование Абеля:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i t^i = S_n t^n + \sum_{i=0}^{n-1} S_i(t^i - t^{i+1})$$

$S_n t^n = \frac{S_n}{n} n t^n; \frac{S_n}{n} \to 0$, значит $S_n t^n < n t^n$ с какого-то места, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k t^k$ сходится по признаку Даламбера, например, поэтому $n t^n \to 0$.

Значит суммируемость к чему-то ряда $\{a_i\}$ равносильна суммируемости к этому же ряда $\{S_i(t^i - t^{i+1})\}$.

Заметим следующее ($\sigma_k = \frac{\sum\limits_{j=0}^{k} S_j}{k+1}$):

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i(t^i - t^{i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} ((i+1)\sigma_i - i\sigma_{i-1})(t^i - t^{i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\sigma_i(t^i - t^{i+1}) -$$

$$- \sum_{i=0}^{\infty} i\sigma_{i-1}(t^i - t^{i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\sigma_i(t^i - t^{i+1}) - \sum_{i=-1}^{\infty} (i+1)\sigma_i(t^{i+1} - t^{i+2}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\sigma_i(t^{i+2} - 2t^{i+1} + t^i)$$

Если мы проверим, что метод суммирования $(i+1)(t^{i+2}-2t^{i+1}+t^i)=(i+1)t^i(1-t)^2$ регулярный, то мы докажем что нужно. Проверять регулярность и проверять теорему Теплица мы будем в следующем смысле: пусть $r_k, r_k \to 1, k \to \infty$. Заведем матрицу $\gamma_{ki}=(i+1)r_k^i(1-r_k)^2$, регулярность этого метода и будем проверять.

(a) $\lim_{k\to\infty}\gamma_{ki}\to 0$ очевидно

(b) $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\gamma_{ki}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}(i+1)r_k^i(1-r_k)^2$. Хотим просуммировать понятно какой ряд, сделаем такой финт: пусть $\sum\limits_{i=0}^{n}(i+1)x^i=f_n(x)$ — непрерывная функция. $\int\limits_0^r f_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\int\limits_0^r(i+1)x^i dx=\sum\limits_{i=0}^{n}r^{i+1}=r\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$. $f_n(r)=\left(\int\limits_0^r f_n(x)\right)'=\left(r\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\right)'\to\frac{1}{(1-r)^2}, n\to\infty$.

Значит $(1-r_k)^2\sum\limits_{i=0}^{\infty}(i+1)r_k^i=1$, что и хотелось.

$\square$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n; \sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$; перемножим их, получим табличку, где в строке i стоят штуки вида a_ib_j, и в зависимости от порядка суммирования по табличке можем получать разные результаты. Попробуем по диагональкам:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k+n=j}a_kb_n$$

Вообще говоря, может не сойтись даже если оба начальных ряда сходятся к a, b соответственно.

Statement. *Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ суммируем методом Абеля-Пуассона к a, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ — к b, то ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}c_j$ суммируем методом Абеля-Пуассона к ab.*

В частности, если известно, что все три ряда сходятся, то предел третьего — непреренно произведение первых двух.

Proof. Посмотрим на $\sum\limits_{j=0}^{\infty}r^j\sum\limits_{k+n=j}a_kb_n=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{k+n}(r^ka_k)(r^nb_n)=(\sum\limits_{k=0}^{\infty}r^ka_k)(\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^nb_n)\to ab, r\to 1-0$ $\square$

10.3 Тауберова теоремя Харди

Есть последовательность, мы знаем, что она суммируема по какому-нибудь методу. Хочется понять, какое дополнительное условие на нее надо наложить, чтобы была сходящейся. Все теоремы такого типа называются тауберовыми, и условие, которое надо наложить, называется тауберовым.

Theorem 10.3.1. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ *суммируем методом Чезаро к u. Если* $|u_n| = O(\frac{1}{n})$*, то ряд сходится к u.*

Это не слишком простое утверждение, так что мы сначала порассуждаем.

$s_i = \sum\limits_{k=0}^{i} u_k$

$$\sigma_n = \frac{s_n}{n+1} = u_0 + \frac{n}{n+1}u_1 + \frac{n-1}{n+1}u_2 + \cdots + \frac{1}{n+1}u_n = \frac{n+1}{n+1}u_0 + \cdots + \frac{1}{n+1}u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}u_k$$

Посмотрим на $s_n - \sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(1 - \frac{n+1-k}{n+1})u_k = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k}{n+1}u_k$. Хотелось бы, чтобы это стремилось к нулю. Если потребовать $u_k = o(\frac{1}{k})$, то будет классно.

$\epsilon > 0$; $\exists\ N\ \forall k > N\ |u_k| \le \frac{\epsilon}{k}$

$$s_n - \sigma_n = \sum_{k=0}^{N}\frac{ku_k}{n+1} + \sum_{k=N+1}^{n}\frac{ku_k}{n+1},$$

первая сумма стремится к нулю, а вторая $\le \sum\limits_{k=N+1}^{n}\frac{\epsilon}{n+1} \le \epsilon$.

С большой ошкой так не получается: если σ_n ограничена и $u_n = O(\frac{1}{n})$, то s_n ограничено.

И тут не слишком понятно, что можно усилить, поэтому до Харди ничего не получалось.

Proof. Пусть $\in \mathbb{Z}_+, \sigma_{n,l} = \frac{s_n + s_{n+1} + \cdots + s_{n+l}}{l+1}$ — будем смотреть на "запаздывающие"средние, есть $n = 0$, то получаются чезаровские средние.

$$\sigma_{n,l} = \frac{s_0 + \cdots + s_{n+l}}{n+l+1}\frac{n+l+1}{l+1} - \frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n}\frac{n}{l+1} = \sigma_{n+l}(1 + \frac{n}{l+1}) - \sigma_{n-1}\frac{n}{l+1} =$$

$$= \sigma_{n+l} + \frac{n}{l+1}(\sigma_{n+l} - \sigma_{n-1})$$

Сигмы куда-то сходятся. Если n, l оба стремятся к бесконечности, то так, что $\frac{n}{l+1}$ остается ограниченным, то $\sigma_{n,l} \to \sigma$.

$$\sigma_{n,l} = u_0 + \dots + u_n + u_{n+1}\frac{(l+1)-1}{l+1} + u_{n+2}\frac{(l+1)-2}{l+1} + \dots + u_{n+l}\frac{1}{l+1}$$

$$s_{n+l} - \sigma_{n,l} = \sum_{j=1}^{l} \frac{j}{l+1} u_{n+j}$$

Применим тауберово условие:

$$|s_{n+l} - \sigma_{n,l}| \le c \sum_{j=1}^{l} \frac{j}{(l+1)(n+j)}$$

$0 < \epsilon < 1; l \sim \epsilon (l = [\epsilon n])$, так что

$$|s_{n+l} - \sigma_{n,l}| \le c\frac{l}{n} \le \epsilon$$

То есть $\limsup_{n\to\infty, l=[\epsilon n]} |s_{n+l} - \sigma_{n,l}| \le \epsilon$

Возьмем $n \le k \le n+l; |s_k - s_{n+1}| \le |u_{k+1}| + \dots + |u_{n+l}| \le c\frac{l}{n} \le c'\epsilon$, используем это при $n = k$:

Если n большое, мы получили, что $|\sigma_{n,l} - \sigma| < \epsilon$ и $|s_n - \sigma_{n,l}| \le c\epsilon$, так что $|s_n - \sigma| \le \epsilon$ при достаточно больших n. $\square$

Глава 11

Не вошедшее в программу

11.1 Теорема Вейерштрасса об аппроксимации

Это утверждение о том, что на отрезке всякая непрерывная функция равномерно приближается полиномами, то есть $\exists\, p_n$ — последовательность полиномов такая, что $p_n \to f$ равномерно; равносильно, $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, p$ — полином: $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.

$//$график полинома хотим загнать между двумя графиками $f + \epsilon$ и $f - \epsilon$

Хочется рассказать более общую теорему, потому что возникают аналогичные утверждения в немного других ситуациях. Например, есть 2π периодическая функция, на концах совпадающая, тогда она хорошо приближается тригоннометрическими полиномами. Это можно было бы доказывать так: доказали теорему Вейерштрасса, потом приблизили хорошо тригполиномы, ну и получили. Но лучше доказывать это как-то единообразно.

K — компакт (компактное хаусдорфово), $C(K)$ — метрическое пространство всех непрерывных функций на K с $d(f, g) = \sup_{t\in K} |f(t) - g(t)| = \max_{t\in K} |f(t) - g(t)|$.

$A \subset C(K)$; при каких условиях любая непрерывная функция из $C(K)$ может быть приближена с любой точностью в данной метрике функцией из $A(f \in C(K),\ \forall\, \epsilon > 0?g \in A : d(f, g) < \epsilon)$.

При каких условиях A плотно в $C(K)(\overline{A} = C(K))$?

Будем рассматривать случай, когда A — алгебра относительно обычных операций (домножения на константы, у нас из $\mathbb{R}$, сложение и умножение). Это достаточно общий случай, например, он описывает две известные нам постановки задачи.

Условия, необходимые для $\overline{A} = C(K)$

1. Если $\exists\, t : g(t) = 0\ \forall\, g \in A$, то $\overline{A} \neq C(K)$

   Потому что если $f \in C(K)$ и $\exists\, g_n \in A : g_n \to f$ равномерно, то $g_n(t) \to f(t) \Rightarrow f(t) = 0$

2. Пусть есть две точки такие, что $t_1, t_2 : g(t_1) = g(t_2)\ \forall\, g \in A \Rightarrow f(t_1) = f(t_2)\ \forall\, f \in C(K)$

То есть надо, чтобы для любых двух точек была функция в $A : g(t_1) \neq g(t_2)$ (говорят, что A разделяет точки компакта K).

Магия в том, что для алгебр их достаточно

Theorem 11.1.1 (Стоуна-Вейерштрасса)**.** *Пусть A — подалгебра в $C(K)$ удовлетворяет двум условиям выше, тогда $\overline{A} = C(K)$*

Rem. Если A содержит постоянные функции, то A отделяет точки нашего компакта от нуля.

Часто формулируют теорему так: если алгебра содержит константы и разделяет точки компакта, то она плотна.

Proof.

Lemma. *$\exists\ p_n$ последовательность полиномов с вещественными коэффициентами без свободного члена такая, что $p_n(x)$ равномерно сходится к $|x|$ на $[-1,1] \Leftrightarrow$ $\max_{t\in[-1,1]} p_n(x) - |x|| \to 0, n \to \infty$.*

Proof.

1. Пусть есть последовательность вещественных функций $g_n : B \to [-M, M], g$ такая же и g_n равномерно сходится к g. $F : [-M, M] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, тогда $F \circ g_n$ равномерно сходится к $F \circ g$.

   //если бы было задано на открытом отрезке, так бы не получилось.

   F равномерно непрерывна, раз непрерывна на компакте: $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta : |x_1 - x_2| < \delta, x_i \in [-M, M] \Rightarrow\ |F(x_1) - F(x_2)| < \epsilon$.

   Для всех $t \in B\ \exists\ N :\ \forall n > N\ |g_n(t) - g(t)| < \delta$

   $$|F(g_n(t)) - F(g(t))| < \epsilon\ \forall\ n > N\ \forall\ t \in B$$

2. Пусть $0 < \lambda_n < 1, \lambda_n \to 1$. Тогда $\sqrt{1 - \lambda_n t} \to \sqrt{1-t}$ равномерно при $t \in [0, 1]$

3. Начинаем доказывать лемму. Приблизим сначала как получится, а потом обеспечим отсутствие свободного члена.

   $|x| = \sqrt{1 - (1 - x^2)}; t = 1 - x^2 \Rightarrow \sqrt{1 - \lambda)n(1 - x^2)} \to |x|$ равномерно на $[-1, 1]$. $\forall\ \epsilon\ \exists\ \lambda \in (0, 1) : ||x| - \sqrt{1 - \lambda(1 - x^2)}| \leq \epsilon\ \forall\ x \in [-1, 1]$. Разложим в ряд Ньютона как $\sqrt{1-s}$. "Я даже не хочу выписывать, как выглядят его коэффициенты"(c): $\exists\ a_k : \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sqrt{1-s}, s \in [0, 1)$, причем ряд сходится равномерно на $[0, \lambda]$, то есть $\ \exists\ m : |\sum\limits_{k=0}^{m} a_k s^k - \sqrt{1-s}| < \epsilon, s \in [0, \lambda]$. Если подставим $s = \lambda(1 - x^2), x \in [-1, 1]$, то получим $|\sqrt{1 - \lambda(1-x)^2} - p(x)| \leq \epsilon, x \in [-1, 1], p$ — полином; $\Rightarrow ||x| - p(x)| \leq 2\epsilon\ \forall x \in [-1, 1]$

4. Теперь избавимся от свободного члена. $\epsilon = \frac{1}{n}$; находим последовательность полиномов p_n, равномерно сходящихся к модулю. Их свободные члены — это $p_n(0)$, а это стремится к нулю, потому что $|x| \to 0$, значит если их вычесть, то ничего не испортится.

$\square$

Пусть A — подалгебра в $C(K)$, удовлетворяющая условию 2; будем рассматривать его замыкание $\bar{A} = \mathcal{A}$, оно тоже удовлетворяет условию 2

Lemma (2)**.** *$\mathcal{A}$ — тоже подалгебра в $C(K)$*

Proof. 1. $f, g \in \mathcal{A}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\exists\ f_n, g_n \in A : f_n \to t, g_n \to g$ равномерно, тогда $\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g$ равномерно

2. $f, g \in \mathcal{A} \Rightarrow\ fg \in \mathcal{A}:$

   $f_n, g_n \in A, f_n \to f, g_n \to g$ равномерно.

$$|f)n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|||g_n(x)| + |f(x)||g_n(x) - g(x)| \leq$$

$\exists\ C :\ \forall\ x \in K\ |g_n(x)|, |g(x)| \leq C; |f(x)| \leq C$

$$\leq (|f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|)C \to 0, n \to \infty \text{ равномерно}$$

$\square$

Statement. *Пусть $\mathcal{A}$ — замкнутая алгебра в $C(K)$ удовлетворяет условию 2, тогда $\mathcal{A} = C(K)$*

Proof. 1. Если $f \in \mathcal{A}$, то $|f| \in \mathcal{A}$: можно считать, что $|f(x)| \leq 1$(поделим на большую константу). Берем последовательность полиномов без свободного члена такую, что $p_n(x) \to |x|$ равномерно при $|x| < 1$. $p_n \circ f \to |f|$ равномерно на $K, p_n \circ f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f| \in \mathcal{A}$ (потому что свободного члена не появилось, а значит $bf(t) + cf^2(t) + \ldots$ понятно что в алгебре лежит).

2. $f_1, f_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow\ g(x) = max(f_1, f_2), h(x) = min(f_1, f_2) \in \mathcal{A}$. Аналогично для n функций.

   Это потому что $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$, и там все лежит в алгебре, а минимум — это максимум из минус функций.

3. $t_1 \neq t_2 \in K, u_1, u_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow\ \exists\ f \in \mathcal{A} : f(t_1) = u_1, f(t_2) = u_2$

   Используем условие $2 :\ \exists\ g \in \mathcal{A} : g(t_1) = g(t_2)$, нужную нам функцию будем искать в виде $f = \alpha g + \beta g^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Хотим решить систему уравнений относительно α, β $\alpha g(t_1) + \beta g(t_1)^2 = u_1, \alpha g(t_2) + \beta g(t_2)^2 = u_2$; посчитаем определитель, чтобы понять, что система разрешима:

$$\begin{vmatrix} g(t_1) & g(t_1)^2 \\ g(t_2) & g(t_2)^2 \end{vmatrix} = g(t_1)g(t_2)(g(t_2) - g(t_1))$$

Третья скобка точно не ноль, НУО $g(t_2) \neq 0$, пусть $g(t_1) = 0$. Тогда $\exists\ h \in \mathcal{A}$: $h(t_1) \neq 0$, заменим g на $g + \delta h$, и если дельта очень маленькая положительная, то все свойства сохранятся, а определитель с ней не ноль.

4. Пусть $h \in C(K), t \in K, \epsilon > 0$. Собрались приближать произвольную непрерывную функцию. Тогда $\exists\ f \in \mathcal{A} : f(t) = h(t); f(s) \leq h(x) + \epsilon\ \forall\ s \in K$.

   $s \in K$; выберем $f_s \in \mathcal{A}$; если $s = t$, выберем f_t произвольно, то так, чтобы $f_t(t) = h(t)$: это можно, потому что $f_t \equiv 0$, если $h(t) = 0$, если не равна нулю, то $\exists\ \phi \in \mathcal{A} : \phi(t) \neq 0; \alpha\phi$ годится с константой $\alpha = \frac{h(t)}{\phi(t)}$. Если $s\ neqt$, то находим f_s — произвольную функцию в $\mathcal{A}$, интерполирующую h в точках s, t.

   Итого, имеется семейство непрерывных функций $\{f_s\}_{s \in K} \in \mathcal{A}$: $f_s(t) = h(t), f_s(s) = h(s)\ \forall\ s$. Заметим, что $f_s - h$ — непрерывная функций на K, обращающаяся в ноль в точке s. Посмотрим на ϵ, есть окрестность $U(s) : |f_s - h| < \epsilon$ на ней. В частности, $\forall\ x \in U_s\ f_s(x) < h(x) + \epsilon$.

   Такие окрестности $U(s)$ покрывают наш компакт, можем выбрать конечное подпокрытие: $U(s_1) \cup \ldots U(s_l) = K$. $f(x) := \min f_{s_1}(x), \ldots, f_{s_l}(x), x \in K$. Это ровно та функция, которую мы искали. В точке t это опять $h(t)$, и она $< h(x) + \epsilon$ всюду, и $f \in \mathcal{A}$.

5. Проделаем такую конструкцию еще раз с максимумом. Пусть $h \in C(K), \epsilon > 0$. Тогда $\exists\ f \in \mathcal{A} : h(x) - \epsilon < f(x) < h(x) + \epsilon\ \forall\ x \in K$.

   $s \in K$; по предыдущему пункту $\exists\ \phi_s \in \mathcal{A} : \phi_s(s) = h(s) : \phi_s(x) < h(x) + \epsilon\ \forall\ x \in K$. Есть окрестность $V(s)$: $|\phi_s(x) - h(x)| < \epsilon\ \forall\ x \in V(s)$. В частности, $\phi_s(x) > h(x) - \epsilon\ \forall\ x \in V(s)$. Окрестности — это покрытие, выбираем конечное подпокрытие, и выбираем $f(x) = \max \phi_{s_1}(x), \ldots \phi_{s_n}(x) \in \mathcal{A}$, она искомая.

$\square$

$\square$

Комплексный случай

$C(K)$ теперь пространство комплекснозначных непрерывных функций на K. $A \subset C(K)$ — подалгебра, разделяющая две точки и отделяющая компакт от нуля (с теми же свойствами $1, 2$). Верно ли, что $\bar{A} = C(K)$? Ну нет.

$K = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$. A — множество полиномов с комплексными коэффициентами, это какая нужно алгебра, $\bar{A} \neq C(\mathbb{T})$. Например комплексное сопряжение не лежит в замыкании A. Докажем это.

Пусть $p_n \in A$ и $\max_{\chi \in \mathbb{T}} |\bar{\chi} - p_n(\chi)| \to 0$, тогда $\max_{\chi \in \mathbb{T}} |1 - \chi p_n(\chi)| \to 0$. То есть существуют полиномы q_n без свободного члена такие, что $\max_{|\chi|=1} |1 - q_n(\chi)| \to 0$. Пусть $\chi = e^{i\theta}, \theta \in [-\pi\pi]$. Тогда полином q без свободного члена выгляти так:

$$q(e^{i\theta}) = a_1 e^{i\theta} + \cdots + a_k e^{ik\theta}$$

Если проинтегрировать это от $-\pi$ до π, то интеграл равен нулю, ну странно.

Можно еще доказать, что $\bar{z}^l, l > 0$ не лежит в замыкании A.

Как исправить теорему?

Def. Алгебра называется самосопряженной, если из того, что функция в ней лежит, следует, что и ее комплексное сопряжение в ней лежит.

Theorem 11.1.2. *Самосопряженная подалгебра в $C(K)$, отедляющая точки от нуля и разделяющая точки, плотна в $C(K)$*

//

тут будет пара от 27.04//

Общий случай, когда K не обязательно метрезуемо. $A \subset C(K); \epsilon > 0; f_1, \dots f_n$ — ϵ-сеть для A.

$x \in K,\ \exists\, U(x) :\ \forall\, y \in U(x) :\ |f_j(x) - f_j(y)| < \epsilon\ \forall\, j = 1, \dots n$

$\{U(x)\}$ покрывают K, $\exists\, x_1, \dots x_m$: объединение их окрестностей покрывает K.

$l \in [1, m]; u, v \in U(x_l), f \in A;\ \exists\, j : \sup_{x \in K} |f(x) - f_j(x)| < \epsilon$

$$|f(u) - f(v)| \leq |f(u) - f_j(u)| + |f_j(u) - f_j(v)| + |f_j(v) - f(v)|$$
$$< 2\epsilon + |f_j(u) - f_j(v)| \leq 2\epsilon + |f_j(u) - f_j(x_l)| + |f_j(v) - f_j(x_l)| < 4\epsilon$$

//

Обратно. Если A равномерно ограничено и раностепенно непрерывно, то A относительно компактно (конечную ϵ-сеть будем строить).

$C(K) \subset m(K)$; по замечанию со вчера, нам достаточно построить сеть для A в пространстве $m(K)$.

Воспользуемся равностепенной непрерывностью: $\exists\ U_1, \dots u)N$ — открытые подмножества в компакте: $\forall\ j\ \forall\ x, y \in U_j\ \forall\ f \in A\ |f(x) - f(y)| < \epsilon;\ \cup_{j=1}^{N} U_j = K$

Сделаем $e_1 = U_1; e_2 = U_2/e_1, \dots e_k = U_k/(U_1 \cap \dots \cap U_{k-1}), k > 1$, перестали быть открытыми, но нам вроде неважно, по-прежднему дают в объединении компакт и теперь не пересекаются; если хотим можем выкинуть пустые.

Будем сейчас считать, что $C(K)$ — пространство комплексных непрерывных функций. $\exists\ M :\ \forall\ x \in K\ \forall\ f \in A\ |f(x)| \leq M$ — значения всех функций из A лежат в круге $\overline{D}$ радиуса M с центром в нуле. $C = \{z_1, \dots z_s\}$ — конечная ϵ сеть для $\overline{D}$. 2ϵ-сеть для A — множество всех функций вида $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k \chi_{e_k}, c_k \in C$. Оно очевидно конечно и лежит в $m(K)$ (все ограниченные).

//если функции были бы вещественные, был бы не круг, а отрезок, и делали бы примерно то же самое.

Покажем, что это действительно сеть нужного радиуса. $f \in K; x_k \in e_k$; найдем $c_k \in C : |f(x_k) - c| < \epsilon$ (в этом месте пользуемся непустотой, ну если пусто, это небольшое препятствие :)). Возьмем $g = \sum\limits_{k=1}^{N} \chi_{e_k} c_k$

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{e_k}(x)| = |\sum_{k=1}^{N}(f(x) -_k)\chi_{e_k}(x)| \le \sum_{k=1}^{N}|f(x) - c_k|\chi_{e_k}$$

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - c_k| \le |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - c_k| < 2\epsilon$$

Доказали.

Ex. 1. Пусть $\{f_j\}$ — последовательность дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ (ну на концах односторонние производные). Если $\exists\ M : |f'(x)| \le M\ \forall\ x \in [a, b]$ и сами функции ограничены, то можно выбрать раномерно сходящуюся подпоследовательность: $f_{j_n} \to f \in C([a, b])$ равномерно.

   По теореме Лагранжа $|f_j(x) - f_j(y)| \le M|x - y|$, значит функции равностепенно непрерывны, применяем теорему Арцела-Асколи.

2. Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ открыто, f_n заданы и дифференцируемы там, модули градиентов равномерно ограничены ($|gradf_n(x)| \le M\ \forall\ x \in G\ \forall\ n$). Пусть K — компактное подмножество G; если f_n равномерно ограничена на компакте, то $\exists$ возрастающая подпоследовательность $n_s : f_{n_s}$ равномерно сходится к $f \in C(K)$.

   Проверим, что f_n равностепенно непрерывны, в форме неравенства Лагранжа это теперь делать не удобно. $\forall\ x \in K\ \exists\ U(x) : U(x) \subset G \Rightarrow$ существует покрытие компакта такими шариками. Если $x, y \in U(x_j) \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \le |grad(f(z))||x - y|, x \in [x, y]$, то есть на каждом шарике отдельно функции липшицевы ($|f_n(x) - f_n(y)| \le M|x - y| \le M diam U_{x_j}$), и с самого начала мы могли взять шарики настолько маленькими, насколько захотим.

   //рассуждение такого типа называется доказательством равностепенной непрерывности в форме покрытий

11.2 Теорема о сжимающих отображениях

Def. $T : X \to X; x_0 \in X$ неподвижная, если $T(x) = x$.

Пусть X метрическое с метрикой $\rho; T$ сжимающее, если $\exists\ \alpha < 1 :\ \forall\ x, y \in X\ \rho(T(x), T(y)) \le \rho(x, y)$.

Theorem 11.2.1. *Сжимающее отображение полного метрического простарнства в себя имеет единственную неподвижную точку.*

Rem (Теорема Браудера). B — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n, f : B \to B$, то f имеет неподвижную точку.

Она не выводится из того, что мы докажем, просто еще один пример теоремы о неподвижной точке, и то, о чем говорим, наверное самая прострая.

Proof. $x_0; x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \ldots$ $\rho(x_{n+1}, x_n) \le \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \le \cdots \le \alpha^n \rho(x_1, x_0), c := \rho(x_1, x_0)$.

$m \ge n; \rho(x_{m=1}, x_n) \le \rho(x_{m+1}, x_m) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) = c\alpha^n \frac{\alpha^m - 1}{\alpha - 1} \le c\alpha^n \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha^j \le \frac{c\alpha^n}{1-\alpha}$, так что $\{x_n\}$ — последовательность Коши, и она сходится, раз просранство полное. Заметим, что T непрерывное. $x_n \to x, x_{n+1} = Tx_n$, перейдя к пределу, поймем, что предел и есть неподвижная точка: $x = Tx$.

Единственность: пусть $x = Tx, y = Ty; \rho(x, y) \le \alpha\rho(x, y)$, что бывает только когда расстояние ноль.

//дойдем до этой точки, откуда бы ни начинали. □

<u>Приложение к дифференциальным уравнениям</u>//

$$F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$$

— дифференциальное уравнение, F функция, ищем y. Решение — функция $y(x)$ такая, что от то равенство выполняется тождественно ну где-то, где нам надо, пусть на отрезке.

По теореме о неявной функции, если F приличная, можно выразить старшую производную y, и такой вид называется разрешенным.

$[a, b]; K$ — непрерывная функция на $[a, b] \times \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнения вида $y' = K(x, y)$, то есть его решение — $y(x)$ на $[a, b] : y' = K(x, y(x)), x \in [a, b]$. Простейшие штуки такого вида — это ровно поиск первообразной, она определена с точностью до константы, так что добавим условий. Начальная задача — это диффур плюс y_0 — число, и будем искать решение диффура такое, что $y(a) = y_0$.

Theorem 11.2.2. *Пусть* $\exists\ A : |K(x, u) - K(x, v)| \le A|u - v|\ \forall\ x \in [a, b]\ \forall\ u, v$. *Если рассматриваемый отрезок достаточно короткий, то любая начальная задача имеет на нем единственное решение.*

Proof. Перепишем уравнение в виде

$$y(x) = y_0 + \int\limits_a^x K(t, y(t))dt$$

понятно, что они эквивалентны.

Применим теорему о неподвижной точке к $X = C[a, b]; T : X \to X, Ty = y_0 + \int\limits_a^x K(t, y(t))dt$. Решение нашей начальной задачи — это искомая неподвижная точка T; надо доказать, что оно сжимающее, если отрезок короткий. Метрика на нашем пространстве — это $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = \max$ по непрерывности.

$$Tf(x) - Tg(x) = \int\limits_a^x (K(t, f(t)) - K(t, g(t)))dt$$

$$d(Tf,Tg) \le \sup_{x\in[a,b]} \int\limits_a^x |K(t,f(t)) - K(t,g(t))|dt \le \sup_{x\in[a,b]} \int\limits_a^x A|f(t)-g(t)|dt \le A|b-a|d(f,g)$$

То есть отображение действительно сжимающее, если $|b-a| < \frac{1}{A}$. $\square$

Rem. Функцию на отрезке пожирнее можно получить, склеив куски.

11.3 Факт

Совершенное полное метрическое пространство имеет мощность не ниже мощности континуума (а если оно сепарабельно, то его мощность — в точности мощность континуума).

Rem. Пространство совершенно, если в нем нет изолированных точек.

Proof. X — наше пространство, B_1 — замкнутый шар с радиусом r_1. Там есть хотя бы пара точек, раз одна неизолирована, так что $B_{11}, B_{12} \subset B_1$ не пересекаются, радиусы поменьше. Можем продолжить конструкцию и делаем радиусы шариков $\to 0$. Посмотрим на какую-нибудь последовательностей из нулей и единиц. Выберем последовательность из центром шаров по поколениям: если единичка, то выбираем первый шар (центр), иначе второй. Эта последовательность куда-то сходится; повыбираем разные последовательности нулей и единиц, пределы будут разные, получим инъекцию из последовательностей нулей и единиц в наше пространство. $\square$

Corollary. Вот $C[0,1]$ имеет мощность континуум.

11.4 Сходимость бесконечно дифференцируемых функций и диагональный процесс

Смысл слова "сходимость"здесь:

$G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое. f_m, f — бесконечно дифференцируемые функции на $G(f_m, t \in C^\infty(G))$.

Говорят, что $f_n \to f$ (в классе C^∞), если для любого компактного множества в G $\forall\ \alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$ $D^\alpha f_m$ сходится равномерно на компакте к $D^\alpha f$.

Когда такое бывает?

Theorem 11.4.1. *$\{f_m\}$ — последовательность в $C^\infty(G)$: $\forall\ \alpha\ \forall\ K \subset G\ \exists\ C = C_{\alpha,K}\ \forall\ j |D^\alpha f_j(x)| \le C_{\alpha,K}\ \forall\ x \in K$. Тогда $\{f_m\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Докажем, сделав подготовку, что это необходимое и достаточное условие.

Понятно, что компактов бывает очень много, и проверять на каждом не хочется. Вот как с этим можно побороться:

Исчерпывающая последовательность компактов

Theorem 11.4.2. *G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$; существует последовательность $\{K_l\}$ его компактных подмножеств такая, что $K_l \subset Int(K_{l+1})$ и $\cap K_l = G$*

Rem. $K \subset G$, и раз объединение исчерпывающей последовательности компактов — все наше множество, то $\exists\ N$: объединение первых N членов последовательности поглотит наш компакт.

То есть сходимость достаточно проверять на исчерпывающей последовательности.

Proof.

1. $F = \mathbb{R}^n \setminus G = \emptyset \Rightarrow K_l :=$ шарик радиуса l.

2. $F \neq \emptyset; F$ замкнуто в $\mathbb{R}^n$; $d(x) = dist(x, F)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$ и $G = \{x | d(x) > 0\}$

   $\tilde{K_l} = \{x | d(x) \geq \frac{1}{l}\}$ — замкнутые подмножества $G, \tilde{K_l} \subset Int\tilde{K_{l+1}}$. $\cap \tilde{K_l} = G$, и единственное, чего нам не хватает, так это ограниченности. $K_l = \tilde{K_l} \cap \{x || x| \leq l\}$ — теперь все ок.

□

Lemma. *$\{x_m\}^k$ — счетный набор последовательностей произвольной природы. Пусть $\forall\ j \{x^{(j+1)}\}$ — подпоследовательность $\{x^{(j)}\}$. Тогда последовательность $\{x_k\}^{(k)}$ (диагональная последовательность) такая, что ее хвост начиная с номера k — подпоследовательность $\{x\}^{(k)}$*

Proof. 11.4.1 Пусть $\{K_l\}$ — исчерпывающая последовательность компактов. $K_1 \subset IntK_2, |D^\alpha f_m| \leq C$ на K_2 при $|\alpha| = 1$. По теореме Арцела-Асколи (разбирали пример в прошлый раз) $\exists$ подпоследовательность $\{f_m\}^{(1)}$ последовательности $\{f_m\}$ равномерно сходящаяся на K_1. Аналогично, существует подпоследовательность $\{f_m\}^{(2)}$ последовательности $\{f_m\}^{(1)}$, сходящаяся равномерно на K_2. Индукция.

Получили счетное число последовательностей функций, где каждая следующая — подпоследовательность предыдущей, и $\{f_m\}^{(l)}$ равномерно сходится на K_l. А диагональная последовательность этих последовательностей сходится на любом компакте и является подпоследовательностью $\{f_m\}$.

Как обеспечить равномерную сходимость остальных производных? Посмотрим на диагональную последовательность, которую мы назвали $\{g_m\}$. Есть ее подпоследовательность такая, что $\delta_1 g_m$ равномерно сходятся на любом K_l; беря разнообразные производные, получитм счетные набор, провернем еще раз диагонализацию.

Получили куда-то сходящуюся $\{h_m\}$ — подпоследовательность исходной последовательности т.ч. $\forall\ l\ \forall\ \alpha\ D^\alpha h_m$ равномерно сходится к $H_{\alpha,l}$ при $m \to \infty$. $h_m \to H$, и $D^\alpha h_m \to H_\alpha$ в классе $C^\infty, D^\alpha = H_\alpha$ (из-за равномерной сходимости мы получили нужную функцию) □

Как осмыслить это в более общих топологических терминах?

Statement. *В $C^\infty(G)$ есть метрика, сходимость в которой совпадает с описанной сходимостью в $C^\infty(G)$.*

Lemma. $\phi(x) = \frac{x}{1+x}, x \geq 0$. *Тогда* $\phi(x)$ *возрастает,* $\phi(x+y) \leq phi(x) + \phi(y)$

Proof. Возрастание (даже строгое) получается из положительности производной, проверим неравенство. $fixy$; при $x = 0$ неравенство верно;

$$(\phi(x+y) - \phi(x))' = \frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{x^2} \leq 0$$

$\psi(x) = \phi(x+y) - \phi(x) - \phi(y)$ убывает, $\psi(x) \leq \phi(x) = 0$. □

Proof. $\{K_l\}$ — исчерпывающая последовательность компактов в G; $p_l(f) := \max_{x \in K_l, |\alpha| \leq l} |D^\alpha f(x)|$

$f_m \to f$ в $C^\infty \iff \forall\ l\ \lim_{m\to\infty} p_l(f_m - f) = 0$

$\lim_{m,k\to\infty; m>k} f_m - f_k = 0 \iff \forall\ l\ \lim_{m,k\to\infty, m>k} p_l(f_m - f_k) = 0$

Введем метрику: $f, g \in C^\infty(G)$

$$\rho(f,g) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \frac{p_l(f-g)}{1 + p_l(f-g)}$$

1. Корректно определено
2. Симметричность очевидна
3. $\rho(f,g) = 0 \Leftrightarrow\ p_l(f-g) = 0\ \forall\ l \Rightarrow f = g$ на G
4. Неравенство треугольника:

   $f, g, h \in C^\infty(G)$
   $$p_l(f-h) \leq p_k(f-g) + p_l(g-h)$$
   $$\rho(f,h) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l}\phi(p_l(f-h)) \leq \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l}\phi(p_l(f-g) + p_l(g-h)) \leq \rho(f,g) + \rho(g,h)$$

Проверим, что сходимость по этой метрике совпадает с введенной.

1. Пусть $f_m \to f$ в $C^\infty(G)$, тогда $p_l(f_m - f) \to 0 (m \to \infty)\ \forall\ l$

   $$\rho(f_m, f) \leq \sum_{l=1}^{N} 2^{-l}\phi(p_l(f_m - f)) + \sum_{l=N+1}^{\infty} 2^{-l} \Rightarrow\ rho(f_m, f) \to 0$$

   То есть $\limsup_{m\to\infty} \rho(f_m, f) \leq \frac{1}{2^N}$, то есть из нашей сходимости следует сходимость по метрике.

2. Пусть $\rho(f_m, f) \to 0$; $fix\ l$. $2^{-l}\phi(p_l(f_m - f)) \leq \rho(f_m, f)$, $\phi(p_l(f_m - f)) \leq 2^l \rho(f_m, f) \to 0\ \forall\ l$.

НУО $\epsilon < \frac{1}{2}$; $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N:\ \forall\ m < N$

$$\frac{p_l(f_m - f)}{1 + p_l(f_m - f)} < \epsilon$$

$$\frac{1}{2}p_l(f_m - f) \leq (1-\epsilon)p_l(f_m - f) < \epsilon$$

$\Rightarrow \phi(p_l(f_m - f)) \to 0\ \forall\ l$

□

Rem. Все расстояния меньше единицы.

Note. Это полное пространство по признаку Коши.

Каждая последовательность в $A \subset C^{\infty}(G)$ имеет сходящуюся подпоследовательноть $\Leftrightarrow$ ClA в метрическом пространстве $C^{\infty}(G)$ компактно.

Theorem 11.4.3 (Переформулировка)**.** *Множество $A \subset C^{\infty}(G)$ относительно компактно $\Leftrightarrow$ $\forall\ K \subset G\ \forall\ \alpha\ \exists\ C_{K,\alpha} : |D^{\alpha}f(x)\| \leq C_{K,\alpha}\ \forall x \in K$*

Proof. $\Leftrightarrow$ доказали,

$\Rightarrow$; $\forall\ l\ p_l$ непрерывна на $C^{\infty}(G)$. $|p_l(f) - p_l(g)| \leq p_l(f-g), |p_l(f) - p_l(g)| \leq 2^l\rho(f,g)$. ClA компактно $\Rightarrow$ $p_l|_{ClA}$ ограничены $\forall\ l$ по теореме Вейерштрасса. □

Def. $\mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем.

Theorem 11.4.4 (О разбиениях единицы)**.** *$K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $\{U_{\alpha}\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует конечный набор функций $\phi_1, \ldots \phi_N\ \in\ \mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$:*

1. $\phi_j \geq 0$
2. $\sum\limits_{j=1}^{N} \phi_j \leq 1$, *причем на компакте достигается равенство*
3. *($supp\phi = Cl(\{x|\phi(x) \neq 0\})$) $\forall\ j$ $supp\phi_j$ содержится в одном из U_{α}*

Corollary. K — компакт, G — открытое, $K \subset G$ тогда есть $\phi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^n) : \phi|_K = 1, \phi_{\mathbb{R}^n \setminus K} = 0$ тождественно, $0 \leq \phi \leq 1$ всюду.

$//\phi = \sum\limits_{j=1}^{N} \phi_j$

Proof. Хочется искать подходящие функции с маленьких носителем.

$$[-2,2]; u(x) = \begin{cases} 0, x \geq 2, x \leq -2 \\ e^{-\frac{1}{(x+2)^2}} e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}, x \in (-2,2) \end{cases}$$

Пусть $u_j(x) = u(x-j), j \in \mathbb{Z}; v_j(x) = \frac{u_j(x)}{\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} u_k(x)}$ (все действия производится с конечными суммами). В знаменателе некоторая сумма, всюду положительная на всей прямой; $v_j \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$. Функции неотрицательны и сумма всех равна единице. Носитель большой.

Посмотрим на $\phi_j^k = \phi_j(2^k x)$, то есть при fix k носитель сосредоточен на отрезке длины 2^{2-k}, $\forall\ k \sum\limits_j \phi_i^k = 1$.

Что в $\mathbb{R}^n$? Посмотрим на функции $\Phi^k_{j_1,\ldots j_n} = \phi^k_{j_1}(x_1)\ldots\phi^k_{j_n}(x_n)$. Диаметр множества — диагональ куба: $diam(supp\Phi^k_{j_1\ldots j_n}) \leq \sqrt{n}2^{2-k}$, то есть настолько маленький, насколько нам хочется и $\sum\limits_{j_1,\ldots j_k \in Z} \Phi_{j_1,\ldots j_k} = 1$. □

Rem. Итого, получили такое разбиение единицы в $\mathbb{R}^n$: $\rho > 0\ \exists\ \phi_j \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^n), j \in \mathbb{N}; diam\phi_j \leq \rho, \phi_j \geq 0, \sum\limits_j \phi_j \equiv 1$

$K \subset \mathbb{R}^n$ компакт, $\cup_\alpha U_\alpha$ — его открытое ппокрытие.

$U = \cup_\alpha U_\alpha; K \subset U, K$ компакт $\Rightarrow\ \exists\ \delta :\ \forall\ x \in K\ dist(x, \mathbb{R}^n \setminus U) > 2\delta$. F — замкнутое множество, $x \mapsto dist(x,F)$ — непрерывная функция. $d(x,F) > 0$ на компакте $\Rightarrow\ d(x,F)$ отделена от нуля для $x \in K$ по теореме Вейерштрасса.

$\tilde{K} = \{x | dist(x,K) \leq \delta\}; \tilde{K}$ замкнуто и ограничено, то есть компакт. Кроме того, $\tilde{K} \subset U = \cup_\alpha U_\alpha$, то есть это открытое покрытие нового компакта. Пусть ν — лебегово число (максимальный радиус шариков вокруг точек таких, что любой помещается в элемент покрытия) этого покрытия множества $\tilde{K}.\rho := min(\nu,\delta)$. Нашли разбиение единицы для K: те функции, для которых $\exists\ x \in K : \phi_j(x) \neq 0$.

//только конечное число может не обращаться в ноль, потому что вспомним, что наши фишки получаются друг из друга сдвигами.

Функции, которые мы отобрали, назовем $\{\psi_l\}_{l=1}^N; \sum\limits_{l=1}^N \psi_l(x) \equiv 1$ на K.

Далее, заметим, что $\forall\ l\ supp\psi_l \subset \tilde{K} \Rightarrow$ по лемме Лебега $\exists\ \alpha : supp\psi_l \subset U_\alpha$.

11.5 Еще один вид несобственных интегралов: интегралы в смысле главного значения

Когда интегрируем по отрезку, содержащему особенность функции, разбиваем отрезок на два и пытаемся считать пределы $\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx, \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{c}^{a-\delta} f(x)dx$.

Но с фукнцией $\frac{1}{x}$ на отрезке $[-1,1]$ так не справится. Возможно не стоит смотреть на окрестности слева и справа отдельно. Возьмем мелкий отрезок вокруг нуля

(u,v); $\int\limits_{[-1,1]\setminus[u,v]} \frac{dx}{x} = \int\limits_{-1}^{u} \frac{dx}{x} + \int\limits_{v}^{1} \frac{dx}{x} = \log|x||_{-1}^{u} + \log|x||_{v}^{1} = \log\frac{|u|}{v}$. Если $v = 2|u|$, то предел $\frac{1}{2}$, понятно, что так по-разному можно издеваться, но если $|u| = |v|$ все время, то интеграл равен нулю, что хорошо с точки зрения здравого смысла.

Def. g; у нее особенность в точке a на отрезке I. Если $\exists \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{I\setminus(a-\epsilon,a+\epsilon)} g(x)dx$, то он называется интегралом функции на отрезке в смысле главного значения. Обозначается $p.v. \int\limits_{I} f(x)dx$ (на английский манер, раньше было на французский vp).

Пусть f — непрерывная функция на прямой с компактным носителем. Попробуем посчитать $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}dy$. По факту это интеграл по конечному отрезку, но в точке x особенность.

$$p.v. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}dy = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int\limits_{-R}^{x-\epsilon} + \int\limits_{x+\epsilon}^{R}\right) f(x)dx$$

$$p.v. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}dy = p.v. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)-f(x)}{x-y}dy,$$

ведь $p.v. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{x-y} = 0$.

Пусть $\exists\, \alpha \in (0,1] :\ \forall\, t$ (или для всякого достаточно малого по модулю) выполнено условие Гельдера подярка α $|f(x+t)-f(x)| \le C|t|^{\alpha}$ ($\alpha = 1$ — условие Липшица, и оно выполняется например если функция дифференцируема). Тогда $\left|\frac{f(y)-f(x)}{x-y}\right| \le \frac{|x-y|^{\alpha}}{|x-y|}$ — интегрируемая особенность. Все, что мы делали, можно писать для конечного интервала, если взять $p.v. \int\limits_{x-R}^{x+R} \frac{f(y)-f(x)}{x-y}dy$.

Вот, например, если при сделанных предположениях f еще и дифференцируема всюду, то $p.v. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}dy\ \exists\ \forall\, x$.

Def. Преобразование Гильберта функции f — это $\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} p.v. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}dy$ (когда это осмысленно для f, $\forall\, x$, например когда f имеет компактный носитель и гельдерова порядка α для всех точек: $\exists\, C :\ \forall u, v\ |f(u)-f(v)| \le C|u-v|^{\alpha}$).

Зачем эта штука нужна? Пусть у нас есть верхняя полуплоскость и f — аналитическая функция в $\{z : Im > -\epsilon\}$ (с каким-то запасом). Пусть $f = u + iv, u, v \in \mathbb{R}$, убывают "достаточно быстро"на бесконечности (тогда интеграл выше сойдется на бесконечности без требования на компактность носителя) $v|_{\mathbb{R}} = \mathcal{H}(U)$ внезапно o_O (но нам сейчас это долго понимать).

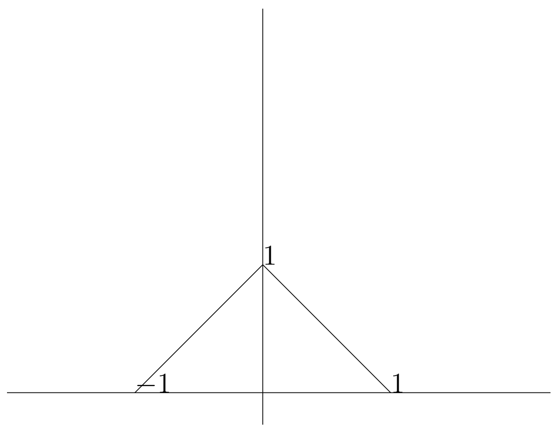
Theorem 11.5.1. *Пусть f удовлетворяет условию Гельдера порядка α (глобальному), $[f]_\alpha = \sup_{v,u\in\mathbb{R},u\neq v} \frac{|f(u)-f(v)|}{|u-v|^\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$ (при $\alpha > 1$ класс таких функций — просто константы).*

Пусть $\alpha \in (0,1)$; $\exists\ C = C_\alpha :\ \forall\ f$ удовлетворяющих условию Гельдера порядка α и с компактным носителем, тогда

$$[\mathcal{H}f]_\alpha \leq C_\alpha [f]_\alpha$$

//преобразование сохраняет Гельдеров класс: если была порядка α, то останется того же порядка

Note. При $\alpha = 1$ это неправда.



Proof. 1. Как проверить, что функция удовлетворяет условию Гельдера какого-то там порядка?

Есть удобная для нас простая переформулировка: для этого необходимо и достаточно

$$\forall\ I \subset \mathbb{R} \text{ конечного } \exists\ a \in \mathbb{R} : |f(x) - a| \leq C|I|^\alpha, C \neq F(I)$$

Proof. Если f — гельдерова порядка α, то $C := f(x_0), x_0$ — середина I.

Обратно, посмотрим на $u < v, I := [u,v]$; тогда $|f(u) - a| \leq C|u-v|^\alpha, |f(v) - a| \leq C|u-v|^\alpha \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \frac{C}{2}|u-v|^\alpha$. □

2. Проверяем наше удобное условие для $\mathcal{H}f$, предполагая, что f с компактным носителем — гельдерова порядка α.

Пусть R — ОЧЕНЬ БОЛЬШОЕ ЧИСЛО. I — конечный отрезок, $x \in I$.

$$\mathcal{H}f(x) = p.v. \int\limits_{x-R}^{x+R} \frac{f(y)}{x-y} dy = p.v. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t)}{t} dt = \lim_{\epsilon\to 0} \left(\int\limits_{-\infty}^{\epsilon} \ldots + \int\limits_{\epsilon}^{\infty} \ldots \right)$$

Пусть $a = \int\limits_{|t|>2b} \frac{f(x_0-t)}{t} dt, I = x_0 + [-b, b]$.

$$\mathcal{H}f(x) - b = p.v. \int\limits_{-2b}^{2b} \frac{f(x-t)}{t} dt + \int\limits_{|t|>2b} \left(\frac{f(x-t)}{t} - \frac{f(x_0-t)}{t} \right) dt =$$

$$p.v. \int\limits_{-2b}^{2b} \frac{f(x-t)-f(x)}{f} dt + \int\limits_{|t|>2b} \left(\frac{f(x-t)}{t} - \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t} \right) dt$$

$$|\mathcal{H}f(x) - b| \leq |I| + |II|$$

$$|I| \leq \int\limits_{-2b}^{2b} \frac{f(x-t)-f(x)}{|f|} dt \leq C \int\limits_{-2b}^{2} b|t|^{\alpha-1} dt \leq C'b^{\alpha} \leq C''|I|^{\alpha}$$

$$II = \int\limits_{|x-y|>2b} \frac{f(y)-f(x_0)}{x-y} dy - \int\limits_{|x_0-y|>2b} \frac{f(y)-f(x_0)}{x_0-y} dy =$$

$$= \int\limits_{|x_0-y|\geq 10b} (f(y)0f(x_0)) \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x_0-y} \right) dy + \int\limits_{|x-y|\geq 2b, |x_0-y|\leq 10b} \frac{f(y)-f(x_0)}{x-y} dy -$$

$$- \int\limits_{|x_0-y|\geq 2b, |x_0-y|<10b} \frac{f(y)-f(x_0)}{x_0-y}$$

$$|II| \leq \int\limits_{|x_0-y|\geq 10b} \frac{|f(y)-f(x_0)|}{|x-y||x_0-y|} |x-x_0| dy + C \int\limits_{|x-y|\geq 2b, |x_0-y|\leq 10b} \frac{|y-x_0|^{\alpha}}{|x-y|} dy +$$

$$+C \int\limits_{10b>|x_0-y|\geq 2b} \frac{|y-x_0|^{\alpha}}{|x_0-y|} dy = (1) + (2) + (3)$$

$$(2), (3) \leq C|b|^{\alpha}|b|^{-1}|b| \leq C'|I|^{\alpha}$$

А y довольно далеко от x_0, x, так что $|x-y|$ и $|x_0-y|$ примерно одинаковые:

$$(1) \leq C \int\limits_{|x_0-y|\geq 10b} |y-x_0|^{-2+\alpha}|I|,$$

это уже интегрируется и $\leq C'|b|^{-1+\alpha}|I| \leq C'|I|^{\alpha}$, так что суммарно получилась ровно нужная оценка.

$\square$

11.6 Бесконечные произведения

Def. $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$; говорят, что это произведение сходится, если $\exists\ \lim_{k\to\infty} a_1 \ldots a_k$ и не равен нулю (если равен нулю, то говорят, что расходится к нулю). Такое определение дается, чтобы логарифмировать и сводить все к рядам, отсюда и терминология. Если несколько a-шек равно нулю, то говорят, что произведение все равно сходится, если после удаления нескольких этих a-шек сходится.

Пусть $A_k = \prod_{n=1}^{k} a_n; a_k = \frac{A_k}{A_{k-1}} \to 1$, если произведение сходится. То есть когда речь идет о сходимости бесконечных произведений вещественных чисел, можно считать, что $a_n > 0$. То есть естественно применять логарифм.

Statement. *Пусть* $a_n > 0 \Rightarrow\ \prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log a_n$ *сходится.*

Proof. $A_k \to a \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{\log a_i} \to \log a$ из непрерывности логарифма, обратно из непрерывности экспоненты и результат никогда не равен нулю. □

Теперь посмотрим на комплексный случай: $a_n \in \mathbb{C}$. Но с логарифмом все не так просто, поскольку экспонента периодическая.

Def. Логарифм — это "обратная функция"к экспоненте.

//поскольку не существует на самом деле такой из-за периодичности, их просто много разных

1. В окрестности любой точки, кроме нуля, существует логарифм $g, g'(z) = \frac{1}{z}$:

   $e^z = e^a e^{ib}$ — модуль никогда не ноль. $(e^z)' = e^z$

   $e^z - e^{z_0} = e^{z_0}(z - z_0) + o(|z - z_0|)$ — умножение на e_0^z — дифференциал экспоненты в точке z_0. То есть если применить соответствующую теорему для вещественных чисел, то получим такое утверждение: $z_0 \in \mathbb{C}, w_0 = e^{z_0} \Rightarrow$ в окрестности точки w_0 существует единственная обратная функция к e^z, дифференцируемая в вещественном смысле, и ее дифференциал — оператор, обратный к дифференциалу экспоненты, т.е. умножение на $e^{-z_0} = \frac{1}{w_0}, g'(w_0) = \frac{1}{w_0}$ там, где g определен.

   Выпишем логарифм явно: решим уравнение $e^z = w, z = a + bi, e^a = |w|, a = \log|w|$; аргумент $w \in \mathbb{C} \neq 0$ — любое число $b : w = |w|e^{ib}$ с точностью до $2\pi k$.

   $$Log(w) = \log|w| + iArgg(w)$$

   — совокупность всех логарифмов числа w.

   Главная ветвь логарифма

   Пусть $G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ (комплексная плоскость с разрезом). $\forall\ w \in G\ \exists\, !\theta \in (-\pi, pi) : \theta$ — значение аргумента числа w, которое называют главным.

$\theta = arg(w), w \in G, arg : G \to \mathbb{R}$ — "главная ветвь аргумента". Ну а главная ветвь логарифма, соответственно, $\log : G \to \mathbb{C}; \log w = \log|w| + iarg(w)$. В этой области $exp(\log(w)) = w$, $\log(G) = \{x + iy : |y| < \pi\}$. Если посмотреть в этой полосе на экспоненту, то логарифм — единственная обратная функция.

$\prod_{n=1}^{k} a_n \to a \neq 0$; в вещественном случае мы писали $\log \prod_{n=1}^{k} a_n = \log a_1 + \dots + \log a_n$, а в нашем — это очень сомнительное равенстно: если аргумент двух точек близок к пи, то аргумент их произведения — к двум пи, и тогда равенство $\log(w_1 w_2) = \log(w_1) + \log(w_2)$ не верно.

Но это верно наверняка, если w_1, w_2 лежат в правой полуплоскости. Потому что тогда $|argw_1| < \frac{\pi}{2}, |argw_2| < \frac{\pi}{2}$ (главная ветвь) и $\log w_1 + \log w_2 = \log|w_1| + \log|w_2| + i(arg(w_1) + arg(w_2)) = \log|w_1 w_2| + iarg(w_1 w_2)$.

Напишем определение того, что наше произведение сходится: $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N : k > N \Rightarrow |a_1 \dots a_k - a| < \epsilon \ \Rightarrow\ |\frac{a_1 \dots a_k}{a} - 1| < \epsilon/|a|$. Произведение любого подотрезка будет близко к единице: $m > l > N; |a_1 \dots a_m - a| < \epsilon, |a_1 \dots a_l - a| < \epsilon$, так что $\forall\, \eta > 0\ \exists\, \epsilon :$ если выполнены предыдущие два равенства, то $|\frac{a_1 \dots a_m}{a_1 \dots a_l} - 1| < \eta$. В частности, $\exists\, L :\ \forall\, n > L\ \forall\, s > n\ a_{n+1} \dots a_s$ лежит в правой полуплоскости. То есть если $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то это верно. Хвост произведения $\prod_{n=k+1}^{\infty} a_n$ — тоже сходится и его уже можно логарифмировать: $\log(a_{k+1} \dots a_s) = \log(a_{k+1} \dots a_{s-1}) + \log(a_s)$, в произведении слева опять можно будет разбить на два слагаемых, так что все можно будет разбить.

Из непрерывности главной ветви логарифма, $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow\ \prod_{n=L+1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=L+1}^{\infty} \log a_n$ сходится, значит и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log(a_n)$ сходится.//

Обратно, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log a_n$ сходится, значит $\exists\ \lim_{k\to\infty} exp \sum\limits_{n=1}^{k} \log a_n = \lim \prod_{n=1}^{k} a_n$.

Theorem 11.6.1. *Если $a_n \in G$, то сходимость произведения эквивалентно сходимости сумме ряда (сохраняется теорема их вещественных).*

Глава 12

Предисловие к теории меры и интегралу Лебега

Идея, из которой, видимо, произошел интеграл Лебега: разбиение не той координатной оси, которую бил Риман.

$s = \sum\limits_{k=1}^{N} |\Delta_k| \inf_{|\Delta_k|} f, S = \sum\limits_{k=1}^{N} |\Delta_k| \sup_{|\Delta_k|} f$ — верхняя и нижняя суммы Дарбу, и здесь участвует что-то вроде непрерывности: чтобы $\sum\limits_{k=1}^{N} |\Delta_k osc_{\Delta_k} f|$ была маленькая, это неизбежно надо (и если берем какую-то точку на отрезке, то есть рассматриваем эквивалентное определение из листка 1 с $\sum\limits_{k=1}^{N} f(\xi_k)|\Delta_k|, \xi_j \in \Delta_k)$.

Пусть f — ограниченная на $[a, b], m \leq f(x) \leq M; I_1, \ldots I_k$ — попарно непрерсекающиеся отрезки, $|I_j| = \frac{M-m}{k}, \cup_{j=1}^{k} I_j = [m, M]$. $\delta_j = f^{-1}(I_j); \delta_i \cap \delta_j = \emptyset, \cup_{j=1}^{k} \delta_j = [a, b]$.

Тогда $osc_{\delta_j} f \leq \frac{M-m}{k}; S := \sum\limits_{j1}^{k} \sup_{\delta_j} f|\delta_j|, s := \sum\limits_{j1}^{k} \inf_{\delta_j} f|\delta_j|$, и $S - s \leq \frac{(M-m)(b-a)}{k}$. Казалось бы, мы проинтегрировали любую ограниченную функцию, но на самом деле мы не знаем, что такое длина множества δ_j. То есть чем у большего количества множеств сможем определить длину, тем больше интегрировать функций научимся. Множества, у которых сможем определить длину, будут называться измеримыми.

Ex.

$$D(x) = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$I_1 = [0, \frac{1}{2}), I_2 = [\frac{1}{2}, 1); \delta_1 = D^{-1}(I_1) =$ множество иррациональных точек отрезка, $\delta_2 = D^{-1}(I_2) =$ множество рациональных точек отрезка. Так что интеграл ноль.

Def. $\langle a, b \rangle$ — конечный или бесконечный отрезок, определим его длину $|\langle a, b \rangle| = \{b - a, \text{если конечен}// + \infty$

Тогда понятно, что у конечного набора отрезков есть длина, и какие бы теоретико-множественные операци не применяли бы, у нас получится набор из конечного числа отрезков. Чтобы получить что-то новое, надо сделать счетное число операций (большое количество предельных переходов). Хотим, чтобы у них тоже была длина, и можем продолжать так делать по трансфинитной индукции.

Theorem 12.0.2 (Счетная аддитивность длины)**.** *I — отрезок, $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ — отрезки, $I_k \cap I_l = \emptyset k \neq l$ и $\cup_{k=1}^{\infty} I_k = I$. Тогда $|I| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k|$*

Proof. В первую очередь заметим, что нам понятно, что написано слева и справа в равенстве, которое собираемся доказывать: справа стоит либо бесконечность, если длина какого-то из отрезков бесконечность, либо сумма положительных чисел, и это либо положительное число, либо снова бесконечность.

Если среди мелких интервалов есть бесконечный, равенство верно: слева и справа бесконечность. Считаем, что $|I_k| < \infty \ \forall \ k$.

Пусть $\Delta_1, \dots \Delta_s$ конечные интервалы, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, \Delta_i \subset \Delta \ \forall \ i \Rightarrow \ \sum\limits_{j=1}^{s} |\Delta_j| \leq |\Delta|$. Докажем это. Если Δ бесконечный, верно. $\Delta_j = [a_j, b_j], \Delta = [u, v]$ и пусть интервалы занумерованы слева направо по возрастанию величин левого конца. Тогда $v - u = (v - b_s) + (b_s - a_s) + (a_s - b_{s-1}) + \dots$ — ну в этой сумме все слагаемые положительные и среди слагаемых есть все длины наших интервалов.

Пусть $\Delta, \Delta_1, \dots \Delta_s$ конечные интервалы и $\Delta \subset \cup_{j=1}^{s} \Delta_j \ \Rightarrow \ |\Delta| \leq \sum\limits_{j=1}^{s} |\Delta_j|$. Это потому что $\chi_{\Delta} \leq \sum\limits_{j=1}^{s} \chi_{\Delta_s}$, проинтегрируем.

Пусть $d \in \mathbb{R}, d > 0 : d < |I|$. Тогда есть компактный (замкнутый, конечный) подынтервал $I_1 \subset I : |I_1| > d$. Если I бесконечный, очевидно, нет, ну тогда предъявим явно его: $I = \langle a, b \rangle, \lessdot \epsilon > 0, I_1 := [a + \epsilon, b - \epsilon]$, и осталось взять правильный епсилон.

Проверим неравенство $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |I_j| \leq |I|$. Ну действительно, $\forall \ N \sum\limits_{j=1}^{N} |I_j| \leq |I|$ и перешли к супремуму.

Докажем неравенство в обратную сторону. Пусть $d < |I|, d \in \mathbb{R}_+$; мы знаем, что $\exists \ J : J \subset I, |J| > d$. Пусть $\epsilon > 0, I_j = \langle a_j, b_j \rangle, \tilde{I}_j = (a - \frac{\epsilon}{2^j}, b_j + \frac{\epsilon}{2^j})$, ну теперь чуть-чуть пересекаются. $J \subset \cup_{j=1}^{\infty} \tilde{I}_j$ — открытое покрытие, так что $\ \exists \ j_1, \dots j_s : \tilde{I}_{j_i}$ покрывают J. Знаем, что $d < |J| \leq \sum\limits_{k=1}^{s} |\tilde{I}_{j_k}| \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\tilde{I}_j| = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |I_j| + \frac{\epsilon}{2^{j-1}} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |I_j| + 2\epsilon$.

То есть

$$\forall \ d < |I| \ \forall \ \epsilon d < \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| + 2\epsilon$$

Значит доказали. □

Можно показать, что длина единственным образом продолжается с сохранением счетной аддитивности на σ-алгебру множеств, порожденную отрезками.

Def. X — множество, $\mathcal{A}$ — система его подмножеств. Эта система подмножеств называется σ-алгеброй, если она замкнута относительно операций взятия дополнения, пересечения и объединения (бесконечных).

Минимальная сигма-алгебра, чем-то порождающаяся — это пересечение всех сигма-алгебр, в которых содержится данное множество.

Пусть h — возрастающая функция на $\mathbb{R}$. Считаем, что $h(\pm\infty) = \lim_{x\to\pm\infty} h(x)$. $I = \langle a, b\rangle$; квазидлина: $l_h(I) = h(b) - h(a)$. Если $I = \cup_{k=1}^{N} I_k$, I_k попарно не пересекаются, то $l_h(I) = \sum\limits_{k=1}^{N} l_h(I_k)$. Обычная длина — это когда $h(x) = x$.

Ex. $h(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \\ 1, x \geq 1 \end{cases}$

$l_h([0,1]) = h(1) - h(0) = 1$.

Пусть $I_0 = [0, \frac{1}{2}), I_j (j \geq 1) = [1 - \frac{1}{2^j}, 1 - \frac{1}{2^{j+1}})$; длина каждого из них ноль, а в объединении 1, то есть такая квазидлина не счетно-аддитивна (это не такое какое-то автоматическое условие, а только нормальные функции дают его).