

Билеты по матанализу за второй семестр

Содержание

1	Функции ограниченной вариации. Свойства. Замена переменной. Примеры.	3
2	Естественная параметризация. Гладкие пути. Длина гладкого пути.	3
3	Движение по окружности. Единственность простого вращения.	5
4	Построения простого вращения. Тригонометрические функции. Свойства. Формула Эйлера.	5
5	Дифференцируемость отображений между евклидовыми пространствами. Свойства. Примеры.	6
6	Отделимость линейных отображений от нуля. Норма в пространстве линейных отображений.	7
7	Дифференцирование суммы, произведения, частного.	8
8	Дифференцирование суперпозиции функций.	8
9	Частные производные. Связь частных производных с дифференцируемостью. Производная по направлению.	8
10	Лемма о билипшицевости.	9
11	Теорема об обратном отображении.	9
12	Матрица Якоби. Градиент.	9
13	Дифференцирование обратного отображения.	10
14	Теорема о равенстве смешанных производных.	10
15	Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.	11

16	Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.	12
17	Необходимое условие экстремума функции многих переменных.	12
18	Знак квадратичной формы. Достаточные условия экстремума функции многих переменных.	13
19	Касательные вектора. Касательная плоскость.	14
20	Теорема о неявной функции для двух переменных.	14
21	Теорема о неявной функции для произвольного числа переменных.	15
22	Теорема о неявной функции для систем уравнений. Примеры.	17
23	Полярные и сферические координаты. Параметризации поверхностей.	17
24	Задача условного экстремума. Необходимое условие условного экстремума.	17
25	Функции Лагранжа. Достаточное условие условного экстремума. Примеры.	17
26	Теорема о перестановке пределов. Общий вид теоремы Стокса-Зайделя.	17
27	Голоморфные функции. Примеры. Общий вид дифференциала голоморфной функции.	17
28	Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда.	17
29	Голоморфность суммы степенного ряда.	17
30	Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Лемма об аппроксимации $ x $.	17
31	Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Завершение доказательства.	17
32	Теорема о неподвижной точке. Приложение к дифференциальным уравнениям.	17
33	Топология в пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$. Метризуемость.	17
	Указатель	19

1 Функции ограниченной вариации. Свойства. Замена переменной. Примеры.

Определение 1. Вариация функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$V_f([a, b]) = \sup_{\substack{x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \\ x_0 = a, x_n = b}} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

Примечание 1. Свойства вариации

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f$ монотонна $\Rightarrow V_f([a, b]) = |f(a) - f(b)|$
- $V_f([a, b]) = 0 \Leftrightarrow f$ константо на $[a, b]$
- $V_{f+g} \leq V_f + V_g$
- V_f аддитивна по промежутку:
 $a \leq b \leq c : V_f([a, c]) = V_f([a, b]) + V_f([b, c])$

Примечание 2. Будем говорить, что f имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, если V_f конечна на $[a, b]$

Утверждение 1. Для $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующие утверждения эквивалентны

1. f имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$
2. $f = f_1 - f_2$, для каких-то f_1, f_2 неубывающих на $[a, b]$

Доказательство. "1 \rightarrow 2": рассмотрим $\phi(x) = V_f([a, x]) \Rightarrow \phi \nearrow$
 $f = \phi - (\phi - f)$, пусть $h = \phi - f$. $h \nearrow \Leftrightarrow$ при $x \leq y$: $h(x) \leq h(y) \Leftrightarrow \phi(x) - f(x) \leq \phi(y) - f(y) \Leftrightarrow f(y) - f(x) \leq \phi(y) - \phi(x) = V_f([x, y])$
 "2 \rightarrow 1": $V_{f_1 - f_2}[a, b] \leq V_{f_1}[a, b] + V_{-f_2}[a, b] = |f_1(a) - f_1(b)| + |f_2(a) - f_2(b)| \quad \square$

Утверждение 2. (Замена переменной в вариации) Пусть $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ непрерывная биекция, тогда $V_f[c, d] = V_{f \circ g}[a, b]$

Доказательство. g монотонна, будем считать, что возрастает. Любому набору x_0, x_1, \dots, x_n из определения вариации V_f найдутся соответствующие y_0, y_1, \dots, y_n , удовлетворяющие условию $g(y_k) = x_k$ и подходящие для подстановки в определение $V_{f \circ g}$, т.к. $y_k \nearrow \Leftrightarrow g(y_k) \nearrow$. Тогда $V_f[c, d] \leq V_{f \circ g}[a, b]$, но с другой стороны $V_f[c, d] \geq V_{f \circ g}[a, b]$, т.к. можно подставлять $x_k := g(y_k)$ в определение первой вариации. \square

2 Естественная параметризация. Гладкие пути. Длина гладкого пути.

Определение 2. Множество в \mathbb{R}^n называют кривой, если оно является образом некоторой непрерывной функции $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Дуга кривой (или же путь) - подмножество кривой $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Определение 3. Длина дуги кривой (пути) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ это $V_f([a, b])$.

Примечание 3. Если длина пути конечна, то путь называется спрямляемым, иначе - неспрямляемым.

Определение 4. Естественная параметризация кривой - параметризация длиной её дуги, отсчитываемой от фиксированной точки.

Примечание 4. Естественная параметризация - параметризация, которая "равномерна по времени, т.е. за одинаковый промежуток времени проходим одинаковое расстояние".

Естественная параметризация спрямляемого пути

$\phi : [a, b] \rightarrow [0, \beta], \phi(x) = V_f([a, x])$, если ϕ строго возрастает (путь "без остановок", $f \not\equiv \text{const}$ ни на каком интервале), то ϕ - биекция и

$$\exists \psi : [0, \beta] \rightarrow [a, b], \psi = \phi^{-1}, V_f([a, b]) = \phi(b) - \phi(a)$$

$$V_{f \circ \psi}([c, d]) = V_f([\psi(c), \psi(d)]) = \phi(\psi(d)) - \phi(\psi(c)) = d - c$$

Определение 5. Гладкий путь - образ гладкой $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (т.е. $f = (f_1, \dots, f_n)$, причём все f_k непрерывно дифференцируемы).

Напоминание 1. Формула Лагранжа, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Утверждение 3. Длина гладкого пути $f = (f_1, \dots, f_n)$ равна $\int_a^b \sqrt{\sum_{m=1}^n (f'_m(x))^2} dx$

Доказательство. Рассмотрим $V_f([a, b]) = \sup_{x_0=a, \dots, x_N=b} \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ и

воспользуемся формулой Лагранжа $\sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\sum_{m=1}^n (f'_m(x_{k+1}) - f'_m(x_k))^2} =$

$$\sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{\sum_{m=1}^n (f'_m(\xi_{m,k}))^2} = (V), \quad \xi_{m,k} \in (x_k, x_{k+1}), (f'_m)^2 \text{ равномерно}$$

непрерывна на $[x_k, x_{k+1}]$, значит для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно малое разбиение $[a, b]$ такое, что $(f'_m)^2(\xi_{m,k}) \leq \min_{[x_k, x_{k+1}]} (f'_m)^2 + \varepsilon^2$. Тогда

$$(I) \leq (V) \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{\sum_{m=1}^n \min_{[x_k, x_{k+1}]} (f'_m)^2 + \varepsilon^2}}_{(I)} \cdot \underbrace{(b - a)}_{\sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k)}$$

Левая и правая части стремятся к интегралу из условия (при стремлении мелкости к нулю), тогда по теореме о двух милиционерах туда же стремятся и (V) . \square

Естественная параметризация гладкого пути

$$\phi(x) = V_f([a, x]) = \int_a^x |f'(t)| dt = \int_a^x \sqrt{\sum_{k=1}^n (f'_k(t))^2} dt$$

Параметризация всё также по длине дуги $\psi = \phi^{-1}$

Утверждение 4. $|(f(\psi(x)))'| = 1$

Доказательство. $\phi'(x) = |f'(x)|, \psi'(x) = \frac{1}{\phi'(\psi(x))} = \frac{1}{|f'(\psi(x))|}$
 $|(f(\psi(x)))'| = |f'(\psi(x)) \cdot \psi'(x)| = 1$ □

3 Движение по окружности. Единственность простого вращения.

Единичная окружность описывается уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Хотим обойти её с единичной скоростью, начиная с точки $(1, 0)$.

Комплексные обозначения: рассмотрим биекцию \mathbb{R}^2 с \mathbb{C} по правилу: $(x, y) \leftrightarrow (x + iy)$. Тогда путь можно рассматривать как отображение из \mathbb{R} в \mathbb{C} .

Определение 6. *Простое вращение* по окружности это отображение $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \pi = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} | x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1, z = x + iy\}$,

- $\Gamma \in C^1$ (гладкая)
- $\Gamma(0) = 1, \Gamma'(0) = i$
- $|\Gamma'(t)| = 1$ для любого t

Лемма 1. $\Gamma'(t) \equiv i\Gamma(t)$

Доказательство. $\Gamma(t) \in \pi \Rightarrow |\Gamma(t)| = \Gamma(t)\overline{\Gamma(t)} = 1$
 $\Rightarrow (\Gamma(t)\overline{\Gamma(t)})' = \Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} + \Gamma(t)\overline{\Gamma'(t)} = 0$
 $\Rightarrow 2\Re(\Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)}) = 0, |\Gamma'(t)| = |\overline{\Gamma'(t)}| = 1$ и $\Gamma'(0)\overline{\Gamma(0)} = i \Rightarrow \Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} \equiv i$ □

Утверждение 5. Если Γ существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть Γ_1, Γ_2 - простые вращения, тогда по лемме $(\Gamma_1\overline{\Gamma_2})' = \Gamma_1'\overline{\Gamma_2} + \Gamma_1\overline{\Gamma_2'} = i\Gamma_1\overline{\Gamma_2} + \Gamma_1\overline{i\Gamma_2} = 0 \Rightarrow \Gamma_1\overline{\Gamma_2} = \text{const}, \Gamma_1(0)\overline{\Gamma_2(0)} = 1$
 $\Rightarrow \Gamma_1\overline{\Gamma_2} = 1 \Rightarrow \Gamma_1 = \frac{1}{\overline{\Gamma_2}} = \frac{\Gamma_2}{|\Gamma_2|} = \Gamma_2$ □

4 Построения простого вращения. Тригонометрические функции. Свойства. Формула Эйлера.

Утверждение 6. *Простое вращение* $\Gamma(t)$ существует.

Доказательство. $\pi = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$

$-1 \leq t \leq 1 : x = t, y = \sqrt{1-t^2}$

$1 \leq t \leq 3 : x = 2-t, y = -\sqrt{1-(2-t)^2}$

Покажем, что после естественной параметризации есть гладкость и ‘на краях’, $f'_1(t) = 1, f'_2(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

$\phi(x) = \int_{-1}^x |f'(t)| dt = \int_{-1}^x \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt = \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ этот интеграл сходится, т.к. особенность порядка $\frac{1}{2}$. *Пояснение:* из первого семестра мы знаем, что $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ сходится $\Leftrightarrow \alpha < 1$, а в данном случае достаточно рассмотреть $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}$, он сходится, т.к. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ сходится и можно, например, применить признак Абеля, чтобы домножить аргумент на $\frac{1}{\sqrt{1+t}}$. \square

5 Дифференцируемость отображений между евклидовыми пространствами. Свойства. Примеры.

Определение 7. **Норма** на евклидовых пространствах - отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}_+ , удовлетворяющее условиям:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Примечание 5. Все расстояния мы будем рассматривать с евклидовой нормой (т.е. $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$). Такая метрика стандартна. Так как в этом семестре рассматриваемые размерности евклидовых пространств конечные, то с точки зрения сходимостей к нулю мы можем считать разные нормы эквивалентными.

Напоминание 2. **Модуль (или длина) евклидова вектора** $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

Определение 8. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a , если существует линейное отображение L , такое что $f(x) = f(a) + L(x - a) + o(\|x - a\|)$, L называют **дифференциалом** функции f в точке a . L определяется матрицей A размера $m \times n$, её столбцы - это значения на базисных векторах, A называют **производной** функции.

Примечание 6. Запись $f(x) = f(a) + L(x - a) + o(\|x - a\|)$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \frac{|f(x) - f(a) - L(x - a)|}{\|x - a\|} < \varepsilon$$

Примечание 7. Если L существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 дифференциалы f в точке a , тогда $(L_1 - L_2)(x - a) = o(\|x - a\|)$ при $x \rightarrow a$, это возможно только если отображение $(L_1 - L_2)$ тождественный нуль.

Пояснение: пусть $L(x) = o(\|x\|)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$; $L(x) = \sum_{k=1}^n L(x_k e_k) = \sum_{k=1}^n x_k L(e_k)$, где e_k - базисные вектора. Пусть $\exists k : L(e_k) \neq 0 \Rightarrow$ для векторов вида $y = a e_k$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \rightarrow 0$, $\frac{L(y)}{\|y\|} = \frac{a L(e_k)}{a \|e_k\|} = \frac{L(e_k)}{\|e_k\|} \neq 0$, противоречие. \square

6 Отделимость линейных отображений от нуля. Норма в пространстве линейных отображений.

Определение 9. *Норма линейного отображения L :*

$$\|L\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\|$$

Примечание 8. Следующие нормы эквивалентны:

- $\|L\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\|$
- $\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\|$
- $\|L\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Lx\|$
- $\|L\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|}$

Утверждение 7. (Линейное отображение липшицево) $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ линейно, значит $\exists A : \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|Lx - Ly\| \leq A\|x - y\|$

Примечание 9. $\|L\| = \min\{A \mid \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|Lx - Ly\| \leq A\|x - y\|\}$

7 Дифференцирование суммы, произведения, частного.

8 Дифференцирование суперпозиции функций.

9 Частные производные. Связь частных производных с дифференцируемостью. Производная по направлению.

Определение 10. Частной производной функции f по i -ой координате в точке $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ называют предел:

$$f'_{x_i}(A) = \frac{\delta f}{\delta x_i}(A) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{x_i - a_i}$$

Примечание 10. Будем называть функцию **гладкой**, если все её частные производные непрерывны.

Напоминание 3. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ):

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

Теорема 1. Если все частные производные $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывны в некоторой окрестности точки x^0 , то f дифференцируема в x^0 .

Доказательство. Рассмотрим случай $m = 1$. $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Применим

$$\text{формулу Лагранжа } f(x) - f(x^0) = f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) = \sum_{k=1}^n (f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}, \dots, x_n)) =$$

$$\sum_{k=1}^n f'_{x_k} \big|_{(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_n)} (x_k - x_k^0) \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^n f'_{x_k} \big|_{x^0} (x_k - x_k^0) + o(|x - x^0|)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (f'_{x_k} \big|_{t_k} - f'_{x_k} \big|_{x^0}) (x_k - x_k^0) \stackrel{?}{=} o(|x - x^0|), \text{ |LHS| оценивается по нера-}$$

$$\text{венству КБШ как } \sqrt{\sum_{k=1}^n (f'_{x_k} \big|_{t_k} - f'_{x_k} \big|_{x^0})^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2} < \varepsilon \sqrt{n} |x - x^0|$$

при $|x - x_0| < \delta$ (пользуемся непрерывностью f'_{x_k} в окрестности точки x_0 и тем, что $|t_k - x_0| < |x - x_0|$). Для $m > 1$ достаточно представить f в виде $f = (f_1, \dots, f_m)$ и рассмотреть каждую f_k отдельно. \square

Примечание 11. Наличия частных производных в точке недостаточно, чтобы сказать, что функция дифференцируема.

Определение 11. Производной функции f по направлению единичного вектора e в точке x называется предел:

$$\lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \rightarrow 0}} \frac{f(x + te) - f(x)}{t}$$

Примечание 12. Частная производная f по k -ой координате это производная по направлению $\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{k-1}$.

Примечание 13. Производная $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по направлению $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ выражается через частные производные f .

$$f'_e(x) = \sum_{k=1}^n e_k f'_{x_k}(x)$$

10 Лемма о билипшицевости.

11 Теорема об обратном отображении.

Теорема 2. Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ (G — открытое в \mathbb{R}^n). У f есть частные непрерывные производные. A — производная f в точке x^0 , причём A невырождена. Тогда в окрестности т. x^0 существует гладкая g , т.ч. $g(f(x)) = x$ и производная g в т. x^0 это A^{-1} .

Утверждение 8. f гладкая в окрестности x^0 , значит она там же липшицева, т.е. $\exists C \forall x, y : |f(x) - f(y)| < C||x - y||$

Утверждение 9. $\text{Ker}(A) = \{0\} \Rightarrow f$ билипшицева, т.е. $\exists C_1, C_2 > 0 \forall x, y : C_1||x - y|| < |f(x) - f(y)| < C_2||x - y||$

12 Матрица Якоби. Градиент.

Определение 12. Градиент это вектор, состоящий из частных производных $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n} \right)$$

Примечание 14. Свойства

- Градиент указывает направление вектора, вдоль которого функция имеет наибольшее возрастание
- $df = \sum_k \frac{\delta f}{\delta x_k} dx_k = \langle \text{grad } f, dx \rangle$

Определение 13. Матрица Якоби - матрица состоящая из всех частных производных $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(x) & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(x) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(x) & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_m}{\delta x_2}(x) & \dots & \frac{\delta f_m}{\delta x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Примечание 15. Свойства

- Строки матрицы Якоби - градиенты соответствующих функций
- Если все f_k непрерывно дифференцируемы в окрестности a , то матрица Якоби - производная f в a , т.е. $f(x) = f(a) + J(a)(x - a) + o(|x - a|)$
- (Свойство функториальности) Если $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ дифференцируемы, то $J_{\psi \circ \varphi}(x) = J_\psi(\varphi(x))J_\varphi(x)$

13 Дифференцирование обратного отображения.

14 Теорема о равенстве смешанных производных.

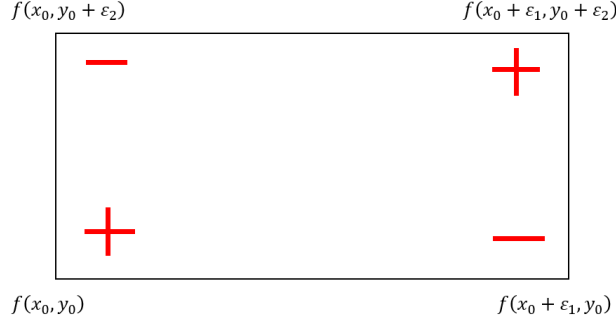
Определение 14. Смешанная производная порядка k определяется индуктивно:

База $k = 1$: обыкновенная частная производная $\frac{\delta f}{\delta x_{i_1}}$

Переход $k \rightarrow k + 1$: возьмём частную производную по i_{k+1} -ой координате в точке A от частной производной порядка k , т.е. от $\frac{\delta^k f}{\delta x_{i_k} \delta x_{i_{k-1}} \dots \delta x_{i_1}}$ (должна быть определена в некоторой окрестности A), если соответствующий предел существует, то его и назовём смешанной частной производной порядка $k + 1$, обозначим так: $\frac{\delta^{k+1} f}{\delta x_{i_{k+1}} \delta x_{i_k} \dots \delta x_{i_1}}$

Теорема 3. Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (G открытое), $f = f(x, y)$, смешанные производные $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}, \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ непрерывны в точке $(x_0, y_0) \in G$ и определены в её окрестности. Тогда $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x_0, y_0) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(x_0, y_0)$.

Доказательство. Воспользуемся формулой Лагранжа и вспомогательными функциями.



Примечание 16. Далее используются обозначения $f''_{xy} := \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$, $f''_{yx} := \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$

$$\phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = f(x_0, y_0) + f(x_0 + \varepsilon_1, y_0 + \varepsilon_2) - f(x_0 + \varepsilon_1, y_0) - f(x_0, y_0 + \varepsilon_2)$$

$$F_1(x) = f(x, y_0 + \varepsilon_2) - f(x, y_0) \Rightarrow \phi = F_1(x_0 + \varepsilon_1) - F_1(x_0) = \varepsilon_1 F'_1(\xi_1)$$

$$F'_1(\xi_1) = f'_x(\xi_1, y_0 + \varepsilon_2) - f'_x(\xi_1, y_0) = \varepsilon_2 f''_{xy}(\xi_1, \xi_2) \Rightarrow \phi = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f''_{xy}(\xi_1, \xi_2)$$

$$F_2(y) = f(x_0 + \varepsilon_1, y) - f(x_0, y) \Rightarrow \phi = F_2(y_0 + \varepsilon_2) - F_2(y_0) = \varepsilon_2 F'_2(\eta_2)$$

$$F'_2(\eta_2) = f'_y(x_0 + \varepsilon_1, \eta_2) - f'_y(x_0, \eta_2) = \varepsilon_1 f''_{yx}(\eta_1, \eta_2) \Rightarrow \phi = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f''_{yx}(\eta_1, \eta_2)$$

$$\phi = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f''_{xy}(\xi_1, \xi_2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f''_{yx}(\eta_1, \eta_2)$$

$$\xi_1, \eta_1 \in [x_0, x_0 + \varepsilon_1], \xi_2, \eta_2 \in [y_0, y_0 + \varepsilon_2]$$

При $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow 0$: $\frac{\phi}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \rightarrow f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ □

Следствие 1. Если частные производные $\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}$ непрерывны в точке и определены в её окрестности, то и равны в ней.

15 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Сведём всё к одномерному случаю, т.к. одномерную формулу Тейлора мы знаем, $x \in \mathbb{R}^n$ - центр разложения в ряд Тейлора, $y \in \mathbb{R}^n, h = y - x$.

$[x, y]$ - отрезок, его можно параметризовать так: $x + t(y - x) = x + th, t \in [0, 1]$. $\varphi(t) = f(x + th)$, эту функцию мы можем дифференцировать, т.к. это композиция дифференцируемых функций.

$$\varphi'(t) = \langle \text{grad } f, h \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\delta f}{\delta x_k}(x + th) h_k$$

...

$$\varphi^{(s)}(t) = \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_s \leq n} \frac{\delta^s f}{\delta x_{k_1} \dots \delta x_{k_s}}(x + th) h_{k_1} \dots h_{k_s} = \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{\delta}{\delta x_k} h_k \right)^s f \right)(x + th)$$

(последнее равенство следует воспринимать как удобное обозначение)

$$\varphi(\tau) = \sum_{s=0}^m \frac{\varphi^{(s)}(0)}{s!} \tau^s + \underbrace{\frac{\varphi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \tau^{m+1}}_{R_m(\tau, \varphi)}, \quad \xi \in [0, \tau]$$

$$R_m(\tau, \varphi) = \int_0^\tau \frac{\varphi^{(m+1)}(t)}{m!} (\tau^m - t)^m dt = \int_0^1 \frac{\varphi^{(m+1)}(t\tau)}{m!} \tau^{m+1} (1-t)^m dt$$

Утверждение 10. *Формула Тейлора с остатком в форме Пеано (подстави́ли $\tau = 1, t = 0$)*

$$f(y) = \sum_{s=0}^m \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{\delta}{\delta x_k} h_k \right)^s \frac{f}{s!} \right)(x) + o(|h|^m)$$

16 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

Утверждение 11. *Формула Тейлора с остатком в интегральной форме (см. прошлый билет)*

$$f(y) = \sum_{s=0}^m \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{\delta}{\delta x_k} h_k \right)^s \frac{f}{s!} \right)(x) + \int_0^1 \frac{(-1)^{m+1} (x + th)}{m!} (1-t)^m dt$$

17 Необходимое условие экстремума функции многих переменных.

Теорема 4. (*Необходимое условие экстремума*) $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (G открытое) гладкая, x^0 - точка локального минимума или максимума. Тогда $\text{grad } f|_{x^0} = 0$

Доказательство. $\text{grad } f = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n} \right)$

Пусть $\frac{\delta f}{\delta x_k}|_{x^0} \neq 0$, тогда $f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) = \underbrace{\frac{\delta f}{\delta x_k}|_{x^0}}_{\neq 0} (x_k - x_k^0) + o(|x_k - x_k^0|) \Rightarrow \rightarrow \leftarrow$ (свелось к одномерному случаю)

Напоминание 4. Одномерный случай, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

1. $g'(x_0) > 0$, тогда при достаточно малом $|x - x_0|$: $0 < g'(x_0) - \epsilon < \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} < g'(x_0) + \epsilon$, в таких окрестностях $g(x) > g(x_0)$ при $x > x_0$, $g(x) < g(x_0)$ при $x < x_0$, значит x_0 - не экстремум.

2. $g'(x_0) < 0$, тогда при достаточно малом $|x - x_0|$: $g'(x_0) - \epsilon < \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} < g'(x_0) + \epsilon < 0$, в таких окрестностях $g(x) < g(x_0)$ при $x > x_0$, $g(x) > g(x_0)$ при $x < x_0$, значит x_0 - не экстремум.

□

18 Знак квадратичной формы. Достаточные условия экстремума функции многих переменных.

Определение 15. **Квадратичная форма** $Q(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ - это выражение вида $\sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} x_k x_l$, где $a_{k,l}$ - скаляр.

Определение 16. (**Знак квадратичной формы**) Квадратичная форма $Q(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a_{k,l} \in \mathbb{R}$ положительно (отрицательно) определена, если для всех ненулевых x : $Q(x) > 0$ ($Q(x) < 0$) и знакопеременна, если может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема 5. (**Достаточное условие экстремума**) Пусть y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x^0 нулевой градиент и определены все смешанные производные второго порядка. Тогда если квадратичная форма $Q(h) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_l}(x^0) h_k h_l$:

1. положительно определена, значит x^0 точка локального минимума.
2. отрицательно определена, значит x^0 точка локального максимума.

Доказательство. На замкнутом шаре квадратичная форма достигает своего минимума и максимума, а по формуле Тейлора остаток маленький:

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_l}(x^0) (x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0) + o(|x - x^0|^2)$$

□

Примечание 17. На лекциях было доказательство через то, что эта сумма представима в виде $\langle A(x - x^0), (x - x^0) \rangle > 0$ (для полож. кв. формы A), а мы знаем про отделимость от нуля, т.е. из положительности следует, что $\exists \epsilon: \langle A(x - x^0), (x - x^0) \rangle \geq \epsilon \|x - x^0\|^2$

Пояснение: $\langle Ax, x \rangle > 0, x \neq 0 \Rightarrow \langle Ax, x \rangle \geq \epsilon$ при $\|x\| = 1$, т.к. функция от x при таких x достигает минимума и максимума, $\Rightarrow \langle Ax, x \rangle \geq \epsilon \|x\|^2$ (т.к. домножили обе линейные функции на скаляр $\|x\|$, скалярное произведение линейно).

Примечание 18. Квадратичную форму можно привести к симметричному виду $\sum a_{k,l} h_k h_l$, $a_{k,l} = a_{l,k}$, значит её можно привести и к диагональному виду $Q(h) = \sum_{k=1}^n \lambda_k h_k^2$

- $Q(h)$ положительна \Leftrightarrow все $\lambda_k > 0$ (x^0 т. мин.)
- $Q(h)$ отрицательна \Leftrightarrow все $\lambda_k < 0$ (x^0 т. макс.)
- $Q(h)$ знакопеременна $\Leftrightarrow \exists k, l : \lambda_k < 0 < \lambda_l$ (x^0 не т. экстр.)
- иначе требуется дополнительное исследование

Утверждение 12. *Критерий Сильвестра для симметричной квадратичной формы:*

1. для положительной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы *угловые миноры* её матрицы были положительны.
2. Для отрицательной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы *угловые миноры* чётного порядка её матрицы были положительны, а нечётного порядка — отрицательны.

19 Касательные вектора. Касательная плоскость.

Утверждение 13. *Есть уравнение $z = f(x, y)$ задающее плоскость и у f есть частные производные в (x_0, y_0) . Тогда $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0, y_0)}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0, y_0)}(y - y_0)$ - уравнение касательной плоскости. $(\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0, y_0)}, \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0, y_0)}, -1)$ - вектор нормали к кас.плоскости.*

20 Теорема о неявной функции для двух переменных.

Теорема 6. $F : G \rightarrow \mathbb{R} (G \subset \mathbb{R}^2 - \text{открытое})$

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $F \in C^1(G)$
3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогда $\exists I_x, I_y : x_0 \in I_x, y_0 \in I_y, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^2$
и $f : I_x \times I_y \in \mathbb{R}$ такая, что

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$$

$$f \in C^1, f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

Примечание 19. (неформальное рассуждение, почему такая формула) Предположим, что f существует и дифференцируема, $F(x, f(x)) = 0$ на всей области определения f , продифференцируем левую и правую часть по правилу композиции $F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))f'(x) = 0$.

Доказательство. Существование: пусть функция $g_x(y) = F(x, y)$, будем считать, что в малой окрестности $V_{(x_0, y_0)} : F'_y > 0$, тогда $g(y)$ - возрастающая. Тогда $\forall x \in V \exists! y : F(x, y) = 0$.

Непрерывность: рассмотрим прямоугольник с разрезами (т.е. $g_x(y)$). Так как $F(x, y) = 0$ образуют замкнутое множество, то из того, что $x \rightarrow a$ и $f(x) \not\rightarrow f(a)$, следует, что есть второй корень на линии $x = a$, а у нас корни единственные.

Гладкость: $F(x + h, f(x + h)) - F(x, f(x)) = F(x + h, f(x) + (f(x + h) - f(x))) - F(x, f(x)) = (F)$, при $h \rightarrow 0$ можно применять формулу Тейлора для F , получим $(F) = h(F'_x(x, f(x)) + \frac{f(x+h)-f(x)}{h} F'_y(x, f(x))) + o(|h|)$ \square

21 Теорема о неявной функции для произвольного числа переменных.

Теорема 7. $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$

$F : G \rightarrow \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^{m+n}$

- $F \in C^1(G)$
- $F(x^0, y^0) = 0$
- $F'_y(x^0, y^0)$ обратима (матрица $n \times n$)

тогда в некоторой окрестности $V_{(x^0, y^0)} \subset G$:

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x), f : V_{(x^0, y^0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x))$$

Доказательство. Докажем индукцией по n .

База: $n = 1 \forall m$ доказано ранее.

Переход: $F = (F_1, F_2, \dots, F_n), F_k : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$.

Имеем n уравнений вида $F_k = 0$.

Хотим: $y_k = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$, т.е. выразить каждый *игрик* через *иксы*.

Матрица невырождена, будем считать, что $\frac{\delta F_n}{\delta y_n} \neq 0$.

Тогда $y_n = f^*(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1})$ по предположению индукции.

$\phi_k(x, y_1, \dots, y_{n-1}) = F_k(x, y_1, \dots, y_{n-1}, f^*)$, $1 \leq k \leq n-1$ ($\phi_n = 0$ из-за того, как выбрали f^*). $\frac{\delta \phi_k}{\delta y_i} = \frac{\delta F_k}{\delta y_i} + \frac{\delta F_k}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_i}$

Вспомним как выглядит невырожденная матрица $F'_y(x^0, y^0)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta y_1} & \frac{\delta F_1}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_1}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_1}{\delta y_n} \\ \frac{\delta F_2}{\delta y_1} & \frac{\delta F_2}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_2}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_2}{\delta y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_1} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n} \\ \frac{\delta F_n}{\delta y_1} & \frac{\delta F_n}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_n}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \end{pmatrix}$$

Добавим к первым $n - 1$ столбцам последний, домноженный на скаляр, от этого матрица не перестанет быть невырожденной.

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta y_1} + \frac{\delta F_1}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_1} & \frac{\delta F_1}{\delta y_2} + \frac{\delta F_1}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_1}{\delta y_{n-1}} + \frac{\delta F_1}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_1}{\delta y_n} \\ \frac{\delta F_2}{\delta y_1} + \frac{\delta F_2}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_1} & \frac{\delta F_2}{\delta y_2} + \frac{\delta F_2}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_2}{\delta y_{n-1}} + \frac{\delta F_2}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_2}{\delta y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_1} + \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_2} + \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_{n-1}} + \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n} \\ \frac{\delta F_n}{\delta y_1} + \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_1} & \frac{\delta F_n}{\delta y_2} + \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_n}{\delta y_{n-1}} + \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\delta \phi_1}{\delta y_1} & \frac{\delta \phi_1}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta \phi_1}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_1}{\delta y_n} \\ \frac{\delta \phi_2}{\delta y_1} & \frac{\delta \phi_2}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta \phi_2}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_2}{\delta y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta \phi_{n-1}}{\delta y_1} & \frac{\delta \phi_{n-1}}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta \phi_{n-1}}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n} \\ \frac{\delta \phi_n}{\delta y_1} & \frac{\delta \phi_n}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta \phi_n}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi'_y & \vdots \\ 0 & \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \end{pmatrix}$$

откуда $\det(\phi'_y) \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \neq 0$, а значит для системы $\{\phi_k\}_{k \leq n-1} = 0$ применимо предположение индукции, т.е. $y_k = f_k(x)$ при $k \leq n-1$. В совокупности получаем $y_n = f^*(x, f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)) = f_n(x)$, что мы и хотели получить. Итоговая функция: $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$. Гладкость и искомая производная следуют из того, что мы умеем брать производную по композиции. \square

- 22 Теорема о неявной функции для систем уравнений. Примеры.
- 23 Полярные и сферические координаты. Параметризации поверхностей.
- 24 Задача условного экстремума. Необходимое условие условного экстремума.
- 25 Функции Лагранжа. Достаточное условие условного экстремума. Примеры.
- 26 Теорема о перестановке пределов. Общий вид теоремы Стокса-Зайделя.
- 27 Голоморфные функции. Примеры. Общий вид дифференциала голоморфной функции.
- 28 Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда.
- 29 Голоморфность суммы степенного ряда.
- 30 Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Лемма об аппроксимации $|x|$.
- 31 Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Завершение доказательства.
- 32 Теорема о неподвижной точке. Приложение к дифференциальным уравнениям.
- 33 Топология в пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$. Метризуемость.

Примечание 20. Сходимость: будем говорить, что последовательность $\{f_j\}_j \in R \subset C^\infty(R)$ сходится к $f \in C^\infty(R)$, если для любого компактного множе-

ства $K \subset R$ функции f_j сходятся к f равномерно на K .

Утверждение 14.

$$d(f, g) = \sum_{j, n \geq 0} \frac{\|f^{(j)} - g^{(j)}\|_{\infty, I_n}}{1 + \|f^{(j)} - g^{(j)}\|_{\infty, I_n}}$$

тогда d - метрика.

Утверждение 15. *Топология порожденная такой метрикой и топология порожденная такой сходимостью совпадают.*

Указатель

Вариация функции	3	Критерий Сильвестра	14
Гладкий путь	4	Матрица Якоби	10
Гладкость	8	Необходимое условие экстремума	12
Градиент	9	Норма	6
Дифференциал	6	Норма линейного отображения	7
Длина гладкого пути	4	Ограниченная вариация	3
Длина кривой (пути)	4	Производная	6
Достаточное условие экстремума	13	Производная по направлению	9
Замена переменной в вариации	3	Простое вращение	5
Знак квадратичной формы	13	Смешанная производная	10
Квадратичная форма	13	Формула Тейлора	12
Кривая	3	Частная производная	8