Билеты по матанализу за второй семестр

Содержание

1 Функции ограниченной вариации. Свойства. Замена переменной. Примеры.

Определение 1. Вариация функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$V_f([a,b]) = \sup_{\substack{x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n \\ x_0 = a, x_n = b}} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

Примечание 1. Свойства вариации

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f$ монотонна $\Rightarrow V_f([a,b]) = |f(a) - f(b)|$
- $V_f([a,b]) = 0 \Leftrightarrow f$ константо на $[a,b]$
- $V_{f+g} \le V_f + V_g$
- V_f аддитивна по промежутку:
  $a \le b \le c : V_f([a,c]) = V_f([a,b]) + V_f([b,c])$

Примечание 2. Будем говорить, что f имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$, если V_f конечна на $[a,b]$

Утверждение 1. *Для $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следующие утверждения эквивалентны*

1. *f имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$*
2. *$f = f_1 - f_2$, для каких-то f_1, f_2 неубывающих на $[a,b]$*

Доказательство. "$1 \to 2$": рассмотрим $\phi(x) = V_f([a,x]) \Rightarrow \phi \nearrow$
$f = \phi - (\phi - f)$, пусть $h = \phi - f$. $h \nearrow \Leftrightarrow$ при $x \le y$: $h(x) \le h(y) \Leftrightarrow \phi(x) - f(x) \le \phi(y) - f(y) \Leftrightarrow f(y) - f(x) \le \phi(y) - \phi(x) = V_f([x,y])$
"$2 \to 1$": $V_{f_1 - f_2}[a,b] \le V_{f_1}[a,b] + V_{-f_2}[a,b] = |f_1(a) - f_1(b)| + |f_2(a) - f_2(b)|$ □

Утверждение 2. *(Замена переменной в вариации) Пусть $g : [a,b] \to [c,d]$ непрерывная биекция, тогда $V_f[c,d] = V_{f \circ g}[a,b]$*

Доказательство. g монотонна, будем считать, что возрастает. Любому набору $x_0, x_1, \dots, x_n$ из определения вариации V_f найдутся соответсвующие $y_0, y_1, \dots, y_n$, удовлетворяющие условию $g(y_k) = x_k$ и подходящие для подстановки в определение $V_{f \circ g}$, т.к. $y_k \nearrow \Leftrightarrow g(y_k) \nearrow$. Тогда $V_f[c,d] \le V_{f \circ g}[a,b]$, но с другой стороны $V_f[c,d] \ge V_{f \circ g}[a,b]$, т.к. можно подставлять $x_k := g(y_k)$ в определение первой вариации. □

2 Естественная параметризация. Гладкие пути. Длина гладкого пути.

Определение 2. Множество в $\mathbb{R}^n$ называют кривой, если оно является образом некоторой непрерывной функции $f : (a,b) \to \mathbb{R}^n$. Дуга кривой (или же путь) - подмножество кривой $f : [c,d] \to \mathbb{R}^n$.

Определение 3. Длина дуги кривой (пути) $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ это $V_f([a, b])$.

Примечание 3. Если длина пути конечна, то путь называется спрямляемым, иначе - неспрямляемым.

Определение 4. Естественная параметризация кривой - параметризация длиной её дуги, отсчитываемой от фиксированной точки.

Примечание 4. Естественная параметризация - параметризация, которая "равномерна по времени, т.е. за одинаковый промежуток времени проходим одинаковое расстояние".

Естественная параметризация спрямляемого пути

$\phi : [a, b] \to [0, \beta], \phi(x) = V_f([a, x])$, если ϕ строго возрастает (путь "без остановок", $f \not\equiv const$ ни на каком интервале), то ϕ - биекция и
$\exists \psi : [0, \beta] \to [a, b], \psi = \phi^{-1}, V_f([a, b]) = \phi(b) - \phi(a)$
$V_{f\circ\psi}([c, d]) = V_f([\psi(c), \psi(d)]) = \phi(\psi(d)) - \phi(\psi(c)) = d - c$

Определение 5. Гладкий путь - образ гладкой $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Напоминание 1. Формула Лагранжа, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема $\Rightarrow$ $\exists \xi \in (a, b) :$

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Утверждение 3. *Длина гладкого пути $f = (f_1, ..., f_n)$ равна* $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\sum_{m=1}^{n} (f'_m(x))^2} dx$

Доказательство. Рассмотрим $V_f([a, b]) = \displaystyle\sup_{x_0=a,\dots,x_N=b} \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x)|$ и воспользуемся формулой Лагранжа $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n} (f_m(x_{k+1}) - f_m(x_k))^2} =$
$\sum\limits_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n} (f'_m(\xi_{m,k}))^2} = (V)$, $\xi_{m,k} \in (x_k, x_{k+1}), (f'_m)^2$ равномерно непрерывна на $[x_k, x_{k+1}]$, значит для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно малое разбиение $[a, b]$ такое, что $(f'_m)^2(\xi_{m,k}) \le \min_{[x_k,x_{k+1}]}(f'_m)^2 + \varepsilon^2$. Тогда

$$(I) \le (V) \le \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{\sum_{m=1}^{n} \min_{[x_k,x_{k+1}]} (f'_m)^2}}_{(I)} + \varepsilon\sqrt{n} \cdot \underbrace{(b - a)}_{\sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1}-x_k)}$$

Левая и правая части стремятся к интегралу из условия (при стремлении мелкости к нулю), тогда по теореме о двух миллиционерах туда же стремится и (V). $\square$

Естественная параметризация гладкого пути

$$\phi(x) = V_f([a,x]) = \int_a^x |f'(t)|dt = \int_a^x \sqrt{\sum_{k=1}^n (f_k'(t))^2 dt}$$

Параметризация всё также по длине дуги $\psi = \phi^{-1}$
Утверждение 4. $|(f(\psi(x)))'| = 1$

Доказательство. $\phi'(x) = |f'(x)|, \psi'(x) = \frac{1}{\phi'(\psi(x))} = \frac{1}{|f'(\psi(x))|}$
$|(f(\psi(x)))'| = |f'(\psi(x)) \cdot \psi'(x)| = 1$ □

3 Движение по окружности. Единственность простого вращения.

Единичная окружность описывается уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Хотим обойти её с единичной скоростью, начиная с точки (1,0).

Комплексные обозначения: рассмотрим биекцию $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$ по правилу: $(x, y) \leftrightarrow (x + iy)$. Тогда путь можно рассматривать как отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$.

Определение 6. Простое вращение по окружности это отображение
$\Gamma : \mathbb{R} \to \pi = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \big| x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1, z = x + iy\}$,

- $\Gamma \in C^1$ (гладкая)
- $\Gamma(0) = 1, \Gamma'(0) = i$
- $|\Gamma'(t)| = 1$ для любого t

Лемма 1. $\Gamma'(t) \equiv i\Gamma(t)$

Доказательство. $\Gamma(t) \in \pi \Rightarrow |\Gamma(t)| = \Gamma(t)\overline{\Gamma(t)} = 1$
$\Rightarrow (\Gamma(t)\overline{\Gamma(t)})' = \Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} + \Gamma(t)\overline{\Gamma'(t)} = 0$
$\Rightarrow 2\Re(\Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)}) = 0$, $|\Gamma'(t)| = |\overline{\Gamma(t)}| = 1$ и $\Gamma'(0)\overline{\Gamma(0)} = i \Rightarrow \Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} \equiv i$ □

Утверждение 5. *Если* Γ *существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть Γ_1, Γ_2 - простые вращения, тогда по лемме
$(\Gamma_1\overline{\Gamma_2})' = \Gamma_1'\overline{\Gamma_2} + \Gamma_1\overline{\Gamma_2'} = i\Gamma_1\overline{\Gamma_2} + \Gamma_1\overline{i\Gamma_2} = 0 \Rightarrow \Gamma_1\overline{\Gamma_2} = const, \Gamma_1(0)\overline{\Gamma_2(0)} = 1$
$\Rightarrow \Gamma_1\overline{\Gamma_2} = 1 \Rightarrow \Gamma_1 = \dfrac{1}{\overline{\Gamma_2}} = \dfrac{\Gamma_2}{|\Gamma_2|} = \Gamma_2$ □

4 Построения простого вращения. Тригонометрические функции. Свойства. Формула Эйлера.

Утверждение 6. $\Gamma(t)$ *существует. (см. прошлый билет)*

Доказательство. $\pi = \{z = x + iy \big| x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$
$-1 \leq t \leq 1 : x = t,\ y = \sqrt{1 - t^2}$
$1 \leq t \leq 3 :\ x = 2 - t,\ y = -\sqrt{1 - (2 - t)^2}$
Покажем, что после естественной параметризации есть гладкость и ‘на краях‘, $f_1'(t) = 1, f_2'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$
$\phi(x) = \int_{-1}^{x} |f'(t)|dt = \int_{-1}^{x} \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}}dt = \int_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ этот интеграл сходится, т.к. особенность порядка $\frac{1}{2}$. *Пояснение:* из первого семестра мы знаем, что $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ сходится $\Leftrightarrow \alpha < 1$, а в данном случае достаточно рассмотреть $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}$, он сходится, т.к. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -\int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ сходится и можно, например, применить признак Абеля, чтобы домножить аргумент на $\frac{1}{\sqrt{1+t}}$. □

5 Дифференцируемость отображений между евклидовыми пространствами. Свойства. Примеры.

Определение 7. Норма на евклидовых пространствах - отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее условиям:

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Примечание 5. Все расстояния мы будем рассматривать с евклидовой нормой (т.е. $d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$). Такая метрика стандартна. Так как в этом семестре рассматриваемые размерности евлидовых пространств конечные, то с точки зрения сходимостей к нулю мы можем считать разные нормы эквивалентными.

Напоминание 2. Модуль (или длина) евклидова вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Определение 8. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a, если существует линейное отображение L, такое что $f(x) = f(a) + L(x - a) + o(||x - a||)$, L называют дифференциалом функции f в точке a. L определяется матрицей A размера $m \times n$, её столбцы - это значения на базисных векторах, A называют производной функции.

Примечание 6. Запись $f(x) = f(a) + L(x-a) + o(||x-a||)$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta:\quad 0 < ||x-a|| < \delta \Rightarrow \frac{|f(x) - f(a) - L(x-a)|}{||x-a||} < \varepsilon$$

Примечание 7. Если L существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 дифференциалы f в точке a, тогда $(L_1 - L_2)(x-a) = o(||x-a||)$ при $x \to a$, это возможно только если отображение $(L_1 - L_2)$ тождественный нуль.

Пояснение: пусть $L(x) = o(||x||), x = (x_1, ..., x_n)$; $L(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} L(x_k e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k L(e_k)$, где e_k - базисные вектора. Пусть $\exists k : L(e_k) \neq 0 \Rightarrow$ для векторов вида $y = ae_k, a \in \mathbb{R}_{>0}, a \to 0$, $\frac{L(y)}{||y||} = \frac{aL(e_k)}{a||e_k||} = \frac{L(e_k)}{||e_k||} \neq 0$, противоречие. □

6 Отделимость линейных отображений от нуля. Норма в пространстве линейных отображений.

7 Дифференцирование суммы, произведения, частного.

8 Дифференцирование суперпозиции функций.

9 Частные производные. Связь частных производных с дифференцируемостью. Производная по направлению.

Определение 9. Частной производной функции f по i-ой координате в точке $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ называют предел:

$$f'_{x_i}(A) = \frac{\delta f}{\delta x_i}(A) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)}{x_i - a_i}$$

Напоминание 3. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

Теорема 1. *Если все частные производные $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывны в некоторой окрестности точки x^0, то f дифференцируема в x^0.*

Доказательство. Рассмотрим случай $m = 1$. $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$. Применим формулу Лагранжа $f(x) - f(x^0) = f(x_1, ..., x_n) - f(x_1^0, ..., x_n^0) =$
$\sum\limits_{k=1}^{n} \left(f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1} ..., x_n) - f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1} ..., x_n)\right) =$
$\sum\limits_{k=1}^{n} f'_{x_k}\big|_{(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, \xi_k, x_{k+1}, ..., x_n)} (x_k - x_k^0) \overbrace{=}^{?} \sum\limits_{k=1}^{n} f'_{x_k}\big|_{x^0} (x_k - x_k^0) + o(|x - x^0|)$
$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} (f'_{x_k}\big|_{t_k} - f'_{x_k}\big|_{x^0})(x_k - x_k^0) \overbrace{=}^{?} o(|x - x^0|)$, $|\mathrm{LHS}|$ оценивается по неравенству КБШ как $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(f'_{x_k}\big|_{t_k} - f'_{x_k}\big|_{x^0}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2} < \varepsilon\sqrt{n}|x - x^0|$ при $|x - x_0| < \delta$ (пользуемся непрерывностью f'_{x_k} в окрестности точки x_0 и тем, что $|t_k - x_0| < |x - x_0|$). Для $m > 1$ достаточно представить f в виде $f = (f_1, ..., f_m)$ и рассмотреть каждую f_k отдельно. □

Примечание 8. Обратная теорема неверна.

Определение 10. Производной функции f по направлению единичного вектора e в точке x называется предел:

$$\lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \to 0}} \frac{f(x + te) - f(x)}{t}$$

Примечание 9. Частная производная f по k-ой координате это производная по направлению $(\underbrace{0, ..., 0}_{k-1}, 1, 0, ..., 0)$.

Примечание 10. Производная $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по направлению $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ выражается через частные производные f.

$$f'_e(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k f'_{x_k}(x)$$

10 Лемма о билипшицевости.

11 Теорема об обратном отображении.

12 Матрица Якоби. Градиент.

Определение 11. Градиент это вектор, состоящий из частных производных $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla f = \mathrm{grad}\ f = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, ..., \frac{\delta f}{\delta x_n}\right)$$

Примечание 11. Свойства

- Градиент указывает направление вектора, вдоль которого функция имеет наибольшее возрастание
- $df = \sum\limits_k \frac{\delta f}{\delta x_k} dx_k = \langle \text{grad } f, dx \rangle$

Определение 12. Матрица Якоби - матрица состоящая из всех частных производных $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f = (f_1, f_2, ..., f_m)$

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(x) & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(x) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(x) & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_m}{\delta x_2}(x) & \dots & \frac{\delta f_m}{\delta x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Примечание 12. Свойства

- Строчки матрицы Якоби - градиенты соответствующих функций
- Если все f_k непрерывно дифференцируемы в окрестности a, то матрица Якоби - производная f в a, т.е. $f(x) = f(a) + J(a)(x - a) + o(|x - a|)$
- (Свойство функториальности) Если $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ дифференцируемы, то $J_{\psi \circ \varphi}(x) = J_\psi(\varphi(x)) J_\varphi(x)$

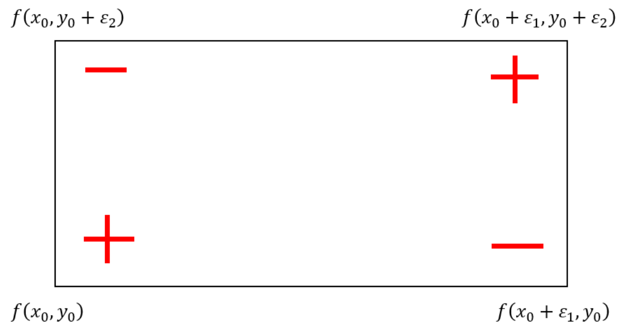
13 Дифференцирование обратного отображения.

14 Теорема о равенстве смешанных производных.

Определение 13. Смешанная производная порядка k определяется индуктивно:
База $k = 1$: обыкновенная частная производная $\frac{\delta f}{\delta x_{i_1}}$
Переход $k \to k + 1$: возьмём частную производную по i_{k+1}-ой координате в точке A от частной производной порядка k, т.е. от $\frac{\delta^k f}{\delta x_{i_k} \delta x_{i_{k-1}} ... \delta x_{i_1}}$ (должна быть определена в некоторой окрестности A), если соответствующий предел существует, то его и назовём смешанной частной производной порядка $k + 1$, обозначим так: $\frac{\delta^{k+1} f}{\delta x_{i_{k+1}} \delta x_{i_k} ... \delta x_{i_1}}$

Теорема 2. *Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (G открытое), $f = f(x, y)$, смешанные производные $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$, $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ непрерывны в точке $(x_0, y_0) \in G$ и определены в её окрестности. Тогда $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x_0, y_0) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(x_0, y_0)$.*

Доказательство. Воспользуемся формулой Лагранжа и вспомогательными функциями.



Примечание 13. Далее используются обозначения $f''_{xy} := \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$, $f''_{yx} := \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$

$$\phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = f(x_0, y_0) + f(x_0 + \varepsilon_1, y_0 + \varepsilon_2) - f(x_0 + \varepsilon_1, y_0) - f(x_0, y_0 + \varepsilon_2)$$
$$F_1(x) = f(x, y_0 + \varepsilon_2) - f(x, y_0) \Rightarrow \phi = F_1(x_0 + \varepsilon_1) - F_1(x_0) = \varepsilon_1 F_1'(\xi_1)$$
$$F_1'(\xi_1) = f_x'(\xi_1, y_0 + \varepsilon_2) - f_x'(\xi_1, y_0) = \varepsilon_2 f''_{xy}(\xi_1, \xi_2) \Rightarrow \phi = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f''_{xy}(\xi_1, \xi_2)$$
$$F_2(y) = f(x_0 + \varepsilon_1, y) - f(x_0, y) \Rightarrow \phi = F_2(y_0 + \varepsilon_2) - F_2(y_0) = \varepsilon_2 F_2'(\eta_2)$$
$$F_2'(\eta_2) = f_y'(x_0 + \varepsilon_1, \eta_2) - f_y'(x_0, \eta_2) = \varepsilon_1 f''_{yx}(\eta_1, \eta_2) \Rightarrow \phi = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f''_{yx}(\eta_1, \eta_2)$$
$$\phi = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f''_{xy}(\xi_1, \xi_2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f''_{yx}(\eta_1, \eta_2)$$
$$\xi_1, \eta_1 \in [x_0, x_0 + \varepsilon_1], \xi_2, \eta_2 \in [y_0, y_0 + \varepsilon_2]$$

При $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to 0 : \frac{\phi}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \to f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ □

Следствие 1. Если частные производные $\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}$ непрерывны в точке и определены в её окрестности, то и равны в ней.

15 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

$x \in \mathbb{R}^n$ - центр разложения в ряд Тейлора, $y \in \mathbb{R}^n, h = y - x$.
$[x, y]$ - отрезок, его можно параметризовать так: $x + t(y - x) = x + th, t \in [0, 1]$.
$\varphi(t) = f(x + th)$
$\varphi'(t) = \langle \text{grad } f, h \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_k}(x + th) h_k$
...
$\varphi^{(s)}(t) = \sum\limits_{1 \le k_1, \ldots, k_s \le n} \frac{\delta^s f}{\delta x_{k_1} \ldots \delta x_{k_s}}(x + th) h_{k_1} \ldots h_{k_s} = \left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_k} h_k \right)^s f \right)(x + th)$
(последнее равенство следует воспринимать как удобное обозначение)

$$f(y) = \sum_{s=0}^{m} \frac{\varphi^s(0)}{s!} + o(|h|^m)$$

Утверждение 7. *Формула Тейлора с остатком в форме Пеано*

$$f(y) = \sum_{s=0}^{m} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_k} h_k \right)^s \frac{f}{s!} \right)(x) + o(|h|^m)$$

16 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

Утверждение 8. *Формула Тейлора с остатком в интегральной форме*

$$f(y) = \sum_{s=0}^{m} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_k} h_k \right)^s \frac{f}{s!} \right)(x) + \int_0^1 \frac{(-1)^{m+1}(x+th)}{m!}(1-t)^m dt$$

17 Необходимое условие экстремума функции многих переменных.

Теорема 3. *(Необходимое условие экстремума) $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (G открытое) гладкая, x^0 - точка локального минимума или максимума. Тогда $grad\ f\big|_{x^0} = 0$*

Доказательство. $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, ..., \frac{\delta f}{\delta x_n}\right)$
Пусть $\frac{\delta f}{\delta x_k}\big|_{x^0} \neq 0$, тогда $f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_n^0) = \underbrace{\frac{\delta f}{\delta x_k}\big|_{x^0}}_{\neq 0}(x_k - x_k^0) + o(|x_k - x_k^0|) \Rightarrow\rightarrow\leftarrow$ (свелось к одномерному случаю) □

18 Знак квадратичной формы. Достаточные условия экстремума функции многих переменных.

Определение 14. Квадратичная форма $Q(x), x = (x_1, ..., x_n)$ - это выражение вида $\sum\limits_{1 \le k,l \le n} a_{k,l} x_k x_l$, где $a_{k,l}$ - скаляр.

Определение 15. (Знак квадратичной формы) Квадратичная форма $Q(x), x \in \mathbb{R}^n, a_{k,l} \in \mathbb{R}$ положительно (отрицательно) определена, если для всех ненулевых $x : Q(x) > 0 (Q(x) < 0)$ и знакопеременна, если может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема 4. *(Достаточное условие экстремума) Пусть у $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке x^0 нулевой градиент и определены все смешанные производные второго порядка. Тогда если квадратичная форма $Q(h) = \sum\limits_{1 \le k,l \le n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_l}(x^0) h_k h_l$:*

1. *положительно определена, значит x^0 точка локального минимума.*

2. *отрицательно определена, значит x^0 точка локального максимума.*

Доказательство. На замкнутом шаре квадратичная форма достигает своего минимума и максимума, а по формуле Тейлора остаток маленький:

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{1 \le k,l \le n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_l}(x^0) h_k h_l + o(|h|^2);\ h = x - x^0$$

□

Примечание 14. Квадратичную форму можно привести к симметричному виду $\sum a_{k,l} h_k h_l$, $a_{k,l} = a_{l,k}$, значит её можно привести и к диагольному виду $Q(h) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k^2$

- $Q(h)$ положительна $\Leftrightarrow$ все $\lambda_k > 0$ (x^0 т. мин.)
- $Q(h)$ отрицательна $\Leftrightarrow$ все $\lambda_k < 0$ (x^0 т. макс.)
- $Q(h)$ знакопеременна $\Leftrightarrow$ $\exists k, l : \lambda_k < 0 < \lambda_k$ (x^0 не т. экстр.)
- иначе требуется дополнительное исследование

Утверждение 9. *Критерий Сильвестра для симметричной квадратичной формы:*

1. *для положительной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры её матрицы были положительны.*

2. *Для отрицательной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры чётного порядка её матрицы были положительны, а нечётного порядка — отрицательны.*

19 Лемма о билипшицевости.

20 Лемма о билипшицевости.

21 Лемма о билипшицевости.

Указатель