Билеты по матанализу за второй семестр

Содержание

1 Функции ограниченной вариации. Свойства. Замена переменной. Примеры. 3

2 Естественная параметризация. Гладкие пути. Длина гладкого пути. 3

3 Движение по окружности. Единственность простого вращения. 5

4 Построения простого вращения. Тригонометрические функции. Свойства. Формула Эйлера. 5

5 Дифференцируемость отображений между евклидовыми пространствами. Свойства. Примеры. 6

6 Отделимость линейных отображений от нуля. Норма в пространстве линейных отображений. 7

7 Дифференцирование суммы, произведения, частного. 7

8 Дифференцирование суперпозиции функций. 7

9 Частные производные. Связь частных производных с дифференцируемостью. Производная по направлению. 7

10 Лемма о билипшицевости. 8

11 Теорема об обратном отображении. 8

12 Матрица Якоби. Градиент. 9

13 Дифференцирование обратного отображения. 9

14 Теорема о равенстве смешанных производных. 9

15 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано. 11

16 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме. 11

17 Необходимое условие экстремума функции многих переменных. 11

18 Знак квадратичной формы. Достаточные условия экстремума функции многих переменных. 12

19 Касательные вектора. Касательная плоскость. 13

20 Теорема о неявной функции для двух переменных. 13

21 Теорема о неявной функции для произвольного числа переменных. 14

22 Теорема о неявной функции для систем уравнений. Примеры. 17

23 Полярные и сферические координаты. Параметризации поверхностей. 17

24 Задача условного экстремума. Необходимое условие условного экстремума. 17

25 Функции Лагранжа. Достаточное условие условного экстремума. Примеры. 17

26 Теорема о перестановке пределов. Общий вид теоремы Стокса-Зайделя. 17

27 Голоморфные функции. Примеры. Общий вид дифференциала голоморфной функции. 17

28 Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. 17

29 Голоморфность суммы степенного ряда. 17

30 Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Лемма об аппроксимации |x|. 17

31 Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Завершение докзательства. 17

32 Теорема о неподвижной точке. Приложение к дифференциальным уравнениям. 17

33 Топология в пространстве C\^infty(R). Метризуемость. 17

Указатель 19

1 Функции ограниченной вариации. Свойства. Замена переменной. Примеры.

Определение 1. Вариация функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$V_f([a,b]) = \sup_{\substack{x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n \\ x_0 = a, x_n = b}} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

Примечание 1. Свойства вариации

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f$ монотонна $\Rightarrow V_f([a,b]) = |f(a) - f(b)|$
- $V_f([a,b]) = 0 \Leftrightarrow f$ константо на $[a,b]$
- $V_{f+g} \le V_f + V_g$
- V_f аддитивна по промежутку:
  $a \le b \le c : V_f([a,c]) = V_f([a,b]) + V_f([b,c])$

Примечание 2. Будем говорить, что f имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$, если V_f конечна на $[a,b]$

Утверждение 1. *Для $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следующие утверждения эквивалентны*

1. *f имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$*
2. *$f = f_1 - f_2$, для каких-то f_1, f_2 неубывающих на $[a,b]$*

Доказательство. "$1 \to 2$": рассмотрим $\phi(x) = V_f([a,x]) \Rightarrow \phi \nearrow$
$f = \phi - (\phi - f)$, пусть $h = \phi - f$. $h \nearrow \Leftrightarrow$ при $x \le y$: $h(x) \le h(y) \Leftrightarrow \phi(x) - f(x) \le \phi(y) - f(y) \Leftrightarrow f(y) - f(x) \le \phi(y) - \phi(x) = V_f([x,y])$
"$2 \to 1$": $V_{f_1 - f_2}[a,b] \le V_{f_1}[a,b] + V_{-f_2}[a,b] = |f_1(a) - f_1(b)| + |f_2(a) - f_2(b)|$ □

Утверждение 2. *(Замена переменной в вариации) Пусть $g : [a,b] \to [c,d]$ непрерывная биекция, тогда $V_f[c,d] = V_{f \circ g}[a,b]$*

Доказательство. g монотонна, будем считать, что возрастает. Любому набору $x_0, x_1, \dots, x_n$ из определения вариации V_f найдутся соответсвующие $y_0, y_1, \dots, y_n$, удовлетворяющие условию $g(y_k) = x_k$ и подходящие для подстановки в определение $V_{f \circ g}$, т.к. $y_k \nearrow \Leftrightarrow g(y_k) \nearrow$. Тогда $V_f[c,d] \le V_{f \circ g}[a,b]$, но с другой стороны $V_f[c,d] \ge V_{f \circ g}[a,b]$, т.к. можно подставлять $x_k := g(y_k)$ в определение первой вариации. □

2 Естественная параметризация. Гладкие пути. Длина гладкого пути.

Определение 2. Множество в $\mathbb{R}^n$ называют кривой, если оно является образом некоторой непрерывной функции $f : (a,b) \to \mathbb{R}^n$. Дуга кривой (или же путь) - подмножество кривой $f : [c,d] \to \mathbb{R}^n$.

Определение 3. Длина дуги кривой (пути) $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ это $V_f([a,b])$.

Примечание 3. Если длина пути конечна, то путь называется спрямляемым, иначе - неспрямляемым.

Определение 4. Естественная параметризация кривой - параметризация длиной её дуги, отсчитываемой от фиксированной точки.

Примечание 4. Естественная параметризация - параметризация, которая "равномерна по времени, т.е. за одинаковый промежуток времени проходим одинаковое расстояние".

Естественная параметризация спрямляемого пути

$\phi : [a,b] \to [0,\beta], \phi(x) = V_f([a,x])$, если ϕ строго возрастает (путь "без остановок", $f \not\equiv const$ ни на каком интервале), то ϕ - биекция и
$\exists \psi : [0,\beta] \to [a,b], \psi = \phi^{-1}, V_f([a,b]) = \phi(b) - \phi(a)$
$V_{f\circ\psi}([c,d]) = V_f([\psi(c),\psi(d)]) = \phi(\psi(d)) - \phi(\psi(c)) = d - c$

Определение 5. Гладкий путь - образ гладкой $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (т.е. $f = (f_1, ..., f_n)$, причём все f_k непрерывно дифференцируемы).

Напоминание 1. Формула Лагранжа, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема $\Rightarrow$ $\exists \xi \in (a,b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Утверждение 3. *Длина гладкого пути $f = (f_1, ..., f_n)$ равна* $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\sum_{m=1}^{n} (f'_m(x))^2 dx}$

Доказательство. Рассмотрим $V_f([a,b]) = \displaystyle\sup_{x_0=a,\ldots,x_N=b} \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x)|$ и воспользуемся формулой Лагранжа $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n} (f_m(x_{k+1}) - f_m(x_k))^2} =$ $\sum\limits_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n} (f'_m(\xi_{m,k}))^2} = (V)$, $\xi_{m,k} \in (x_k, x_{k+1}), (f'_m)^2$ равномерно непрерывна на $[x_k, x_{k+1}]$, значит для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно малое разбиение $[a,b]$ такое, что $(f'_m)^2(\xi_{m,k}) \le \min_{[x_k,x_{k+1}]} (f'_m)^2 + \varepsilon^2$. Тогда

$$(I) \le (V) \le \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sqrt{\sum_{m=1}^{n} \min_{[x_k,x_{k+1}]} (f'_m)^2}}_{(I)} + \varepsilon\sqrt{n} \cdot \underbrace{(b-a)}_{\sum\limits_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k)}$$

Левая и правая части стремятся к интегралу из условия (при стремлении мелкости к нулю), тогда по теореме о двух миллиционерах туда же стремится и (V). $\square$

Естественная параметризация гладкого пути

$\phi(x) = V_f([a,x]) = \int_a^x |f'(t)|dt = \int_a^x \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (f_k'(t))^2 dt}$

Параметризация всё также по длине дуги $\psi = \phi^{-1}$

Утверждение 4. $|(f(\psi(x)))'| = 1$

Доказательство. $\phi'(x) = |f'(x)|, \psi'(x) = \frac{1}{\phi'(\psi(x))} = \frac{1}{|f'(\psi(x))|}$
$|(f(\psi(x)))'| = |f'(\psi(x)) \cdot \psi'(x)| = 1$ □

3 Движение по окружности. Единственность простого вращения.

Единичная окружность описывается уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Хотим обойти её с единичной скоростью, начиная с точки (1,0).

Комплексные обозначения: рассмотрим биекцию $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$ по правилу: $(x, y) \leftrightarrow (x + iy)$. Тогда путь можно рассматривать как отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$.

Определение 6. Простое вращение по окружности это отображение
$\Gamma : \mathbb{R} \to \pi = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \big| x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1, z = x + iy\}$,

- $\Gamma \in C^1$ (гладкая)
- $\Gamma(0) = 1, \Gamma'(0) = i$
- $|\Gamma'(t)| = 1$ для любого t

Лемма 1. $\Gamma'(t) \equiv i\Gamma(t)$

Доказательство. $\Gamma(t) \in \pi \Rightarrow |\Gamma(t)| = \Gamma(t)\overline{\Gamma(t)} = 1$
$\Rightarrow (\Gamma(t)\overline{\Gamma(t)})' = \Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} + \Gamma(t)\overline{\Gamma'(t)} = 0$
$\Rightarrow 2\Re(\Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)}) = 0$, $|\Gamma'(t)| = |\overline{\Gamma(t)}| = 1$ и $\Gamma'(0)\overline{\Gamma(0)} = i \Rightarrow \Gamma'(t)\overline{\Gamma(t)} \equiv i$ □

Утверждение 5. *Если* Γ *существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть Γ_1, Γ_2 - простые вращения, тогда по лемме
$(\Gamma_1\overline{\Gamma_2})' = \Gamma_1'\overline{\Gamma_2} + \Gamma_1\overline{\Gamma_2'} = i\Gamma_1\overline{\Gamma_2} + \Gamma_1\overline{i\Gamma_2} = 0 \Rightarrow \Gamma_1\overline{\Gamma_2} = const, \Gamma_1(0)\overline{\Gamma_2(0)} = 1$
$\Rightarrow \Gamma_1\overline{\Gamma_2} = 1 \Rightarrow \Gamma_1 = \frac{1}{\overline{\Gamma_2}} = \frac{\Gamma_2}{|\Gamma_2|} = \Gamma_2$ □

4 Построения простого вращения. Тригонометрические функции. Свойства. Формула Эйлера.

Утверждение 6. *Простое вращение* $\Gamma(t)$ *существует.*

Доказательство. $\pi = \{z = x + iy \big| x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$
$-1 \le t \le 1 : x = t,\ y = \sqrt{1 - t^2}$
$1 \le t \le 3 :\ x = 2 - t,\ y = -\sqrt{1 - (2 - t)^2}$
Покажем, что после естественной параметризации есть гладкость и ‘на краях‘, $f_1'(t) = 1, f_2'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$
$\phi(x) = \int_{-1}^{x} |f'(t)| dt = \int_{-1}^{x} \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt = \int_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ этот интеграл сходится, т.к. особенность порядка $\frac{1}{2}$. *Пояснение:* из первого семестра мы знаем, что $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ сходится $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$, а в данном случае достаточно рассмотреть $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}$, он сходится, т.к. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ сходится и можно, например, применить признак Абеля, чтобы домножить аргумент на $\frac{1}{\sqrt{1+t}}$. □

5 Дифференцируемость отображений между евклидовыми пространствами. Свойства. Примеры.

Определение 7. Норма на евклидовых пространствах - отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее условиям:

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$

Примечание 5. Все расстояния мы будем рассматривать с евклидовой нормой (т.е. $d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$). Такая метрика стандартна. Так как в этом семестре рассматриваемые размерности евлидовых пространств конечные, то с точки зрения сходимостей к нулю мы можем считать разные нормы эквивалентными.

Напоминание 2. Модуль (или длина) евклидова вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Определение 8. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке a, если существует линейное отображение L, такое что $f(x) = f(a) + L(x - a) + o(||x - a||)$, L называют дифференциалом функции f в точке a. L определяется матрицей A размера $m \times n$, её столбцы - это значения на базисных векторах, A называют производной функции.

Примечание 6. Запись $f(x) = f(a) + L(x-a) + o(||x-a||)$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta: \quad 0 < ||x-a|| < \delta \Rightarrow \frac{|f(x) - f(a) - L(x-a)|}{||x-a||} < \varepsilon$$

Примечание 7. Если L существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 дифференциалы f в точке a, тогда $(L_1 - L_2)(x-a) = o(||x-a||)$ при $x \to a$, это возможно только если отображение $(L_1 - L_2)$ тождественный нуль.

Пояснение: пусть $L(x) = o(||x||), x = (x_1, ..., x_n)$; $L(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} L(x_k e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k L(e_k)$, где e_k - базисные вектора. Пусть $\exists k : L(e_k) \neq 0 \Rightarrow$ для векторов вида $y = ae_k, a \in \mathbb{R}_{>0}, a \to 0$, $\frac{L(y)}{||y||} = \frac{aL(e_k)}{a||e_k||} = \frac{L(e_k)}{||e_k||} \neq 0$, противоречие. □

6 Отделимость линейных отображений от нуля. Норма в пространстве линейных отображений.

7 Дифференцирование суммы, произведения, частного.

8 Дифференцирование суперпозиции функций.

9 Частные производные. Связь частных производных с дифференцируемостью. Производная по направлению.

Определение 9. Частной производной функции f по i-ой координате в точке $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ называют предел:

$$f'_{x_i}(A) = \frac{\delta f}{\delta x_i}(A) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)}{x_i - a_i}$$

Примечание 8. Будем называть функцию гладкой, если все её частные производные непрерывны.

Напоминание 3. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

Теорема 1. *Если все частные производные $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывны в некоторой окрестности точки x^0, то f дифференцируема в x^0.*

Доказательство. Рассмотрим случай $m = 1$. $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$. Применим формулу Лагранжа $f(x) - f(x^0) = f(x_1, ..., x_n) - f(x_1^0, ..., x_n^0) =$ $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1} ..., x_n) - f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1} ..., x_n)\right) =$ $\sum\limits_{k=1}^{n} f'_{x_k}\big|_{(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, \xi_k, x_{k+1}, ..., x_n)} (x_k - x_k^0) \overbrace{=}^{?} \sum\limits_{k=1}^{n} f'_{x_k}\big|_{x^0}(x_k - x_k^0) + o(|x - x^0|)$ $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} (f'_{x_k}\big|_{t_k} - f'_{x_k}\big|_{x^0})(x_k - x_k^0) \overbrace{=}^{?} o(|x - x^0|)$, $|\mathrm{LHS}|$ оценивается по неравенству КБШ как $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(f'_{x_k}\big|_{t_k} - f'_{x_k}\big|_{x^0}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2} < \varepsilon\sqrt{n}|x - x^0|$ при $|x - x_0| < \delta$ (пользуемся непрерывностью f'_{x_k} в окрестности точки x_0 и тем, что $|t_k - x_0| < |x - x_0|$). Для $m > 1$ достаточно представить f в виде $f = (f_1, ..., f_m)$ и рассмотреть каждую f_k отдельно. □

Примечание 9. Наличия частных производных в точке недостаточно, чтобы сказать, что функция дифференцируема.

Определение 10. Производной функции f по направлению единичного вектора e в точке x называется предел:

$$\lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \to 0}} \frac{f(x + te) - f(x)}{t}$$

Примечание 10. Частная производная f по k-ой координате это производная по направлению $(\underbrace{0, ..., 0}_{k-1}, 1, 0, ..., 0)$.

Примечание 11. Производная $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по направлению $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ выражается через частные производные f.

$$f'_e(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k f'_{x_k}(x)$$

10 Лемма о билипшицевости.

11 Теорема об обратном отображении.

Теорема 2. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n (G-$ открытое в $\mathbb{R}^n)$. У f есть частные непрерывные производные. A - производная f в точке x^0, причём A невырождена. Тогда в окрестности т. x^0 существует гладкая g, т.ч. $g(f(x)) = x$ и производная g в т. x^0 это A^{-1}.*

Утверждение 7. *f гладкая в окрестности x^0, значит она там же липшецева, т.е.* $\exists C\ \forall x, y: \ |f(x) - f(y)| < C||x - y||$
Утверждение 8. $Ker(A) = \{0\} \Rightarrow f$ *билипшицева, т.е.* $\exists C_1,\ C_2\ \forall x, y: C_1||x - y|| < |f(x) - f(y)| < C_2||x - y||$

12 Матрица Якоби. Градиент.

Определение 11. Градиент это вектор, состоящий из частных производных $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, ..., \frac{\delta f}{\delta x_n}\right)$$

Примечание 12. Свойства

- Градиент указывает направление вектора, вдоль которого функция имеет наибольшее возрастание
- $df = \sum\limits_k \frac{\delta f}{\delta x_k} dx_k = \langle \text{grad } f, dx\rangle$

Определение 12. Матрица Якоби - матрица состоящая из всех частных производных $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f = (f_1, f_2, ..., f_m)$

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(x) & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(x) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(x) & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1}(x) & \frac{\delta f_m}{\delta x_2}(x) & \dots & \frac{\delta f_m}{\delta x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Примечание 13. Свойства

- Строчки матрицы Якоби - градиенты соответствующих функций
- Если все f_k непрерывно дифференцируемы в окрестности a, то матрица Якоби - производная f в a, т.е. $f(x) = f(a) + J(a)(x - a) + o(|x - a|)$
- (Свойство функториальности) Если $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ дифференцируемы, то $J_{\psi\circ\varphi}(x) = J_\psi(\varphi(x))J_\varphi(x)$

13 Дифференцирование обратного отображения.

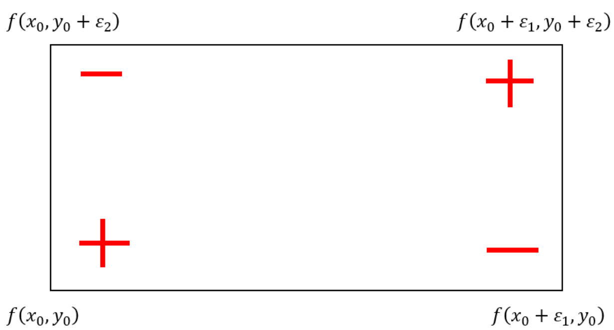
14 Теорема о равенстве смешанных производных.

Определение 13. Смешанная производная порядка k определяется индуктивно:

База $k = 1$: обыкновенная частная производная $\frac{\delta f}{\delta x_{i_1}}$
Переход $k \to k+1$: возьмём частную производную по i_{k+1}-ой координате в точке A от частной производной порядка k, т.е. от $\frac{\delta^k f}{\delta x_{i_k} \delta x_{i_{k-1}} \dots \delta x_{i_1}}$ (должна быть определена в некоторой окрестности A), если соответствующий предел существует, то его и назовём смешанной частной производной порядка $k+1$, обозначим так: $\frac{\delta^{k+1} f}{\delta x_{i_{k+1}} \delta x_{i_k} \dots \delta x_{i_1}}$

Теорема 3. *Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (G открытое), $f = f(x,y)$, смешанные производные $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$, $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ непрерывны в точке $(x_0, y_0) \in G$ и определены в её окрестности. Тогда $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x_0, y_0) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(x_0, y_0)$.*

Доказательство. Воспользуемся формулой Лагранжа и вспомогательными функциями.



Примечание 14. Далее используются обозначения $f''_{xy} := \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$, $f''_{yx} := \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$

$$\phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = f(x_0, y_0) + f(x_0 + \varepsilon_1, y_0 + \varepsilon_2) - f(x_0 + \varepsilon_1, y_0) - f(x_0, y_0 + \varepsilon_2)$$

$$F_1(x) = f(x, y_0 + \varepsilon_2) - f(x, y_0) \Rightarrow \phi = F_1(x_0 + \varepsilon_1) - F_1(x_0) = \varepsilon_1 F_1'(\xi_1)$$
$$F_1'(\xi_1) = f_x'(\xi_1, y_0 + \varepsilon_2) - f_x'(\xi_1, y_0) = \varepsilon_2 f''_{xy}(\xi_1, \xi_2) \Rightarrow \phi = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f''_{xy}(\xi_1, \xi_2)$$
$$F_2(y) = f(x_0 + \varepsilon_1, y) - f(x_0, y) \Rightarrow \phi = F_2(y_0 + \varepsilon_2) - F_2(y_0) = \varepsilon_2 F_2'(\eta_2)$$
$$F_2'(\eta_2) = f_y'(x_0 + \varepsilon_1, \eta_2) - f_y'(x_0, \eta_2) = \varepsilon_1 f''_{yx}(\eta_1, \eta_2) \Rightarrow \phi = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f''_{yx}(\eta_1, \eta_2)$$
$$\phi = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f''_{xy}(\xi_1, \xi_2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 f''_{yx}(\eta_1, \eta_2)$$
$$\xi_1, \eta_1 \in [x_0, x_0 + \varepsilon_1], \xi_2, \eta_2 \in [y_0, y_0 + \varepsilon_2]$$

При $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to 0 : \frac{\phi}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \to f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ $\square$

Следствие 1. Если частные производные $\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}$ непрерывны в точке и определены в её окрестности, то и равны в ней.

15 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Сведём всё к одномерному случаю, т.к. одномерную формулу Тейлора мы знаем, $x \in \mathbb{R}^n$ - центр разложения в ряд Тейлора, $y \in \mathbb{R}^n, h = y - x$.
$[x, y]$ - отрезок, его можно параметризовать так: $x+t(y-x) = x+th, t \in [0, 1]$.
$\varphi(t) = f(x + th)$, эту функцию мы можем дифференцировать, т.к. это композиция дифференцируемых функций.
$\varphi'(t) = \langle \text{grad } f, h\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_k}(x + th)h_k$
...
$\varphi^{(s)}(t) = \sum\limits_{1 \le k_1,\ldots,k_s \le n} \frac{\delta^s f}{\delta x_{k_1} \ldots \delta x_{k_s}}(x + th)h_{k_1} \ldots h_{k_s} = \left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_k} h_k\right)^s f\right)(x + th)$
(последнее равенство следует воспринимать как удобное обозначение)

$$\varphi(\tau) = \sum_{s=0}^{m} \frac{\varphi^s(0)}{s!}\tau^s + \underbrace{\frac{\varphi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\tau^{(m+1)}}_{R_m(\tau,\varphi)}, \quad \xi \in [0, \tau]$$

$$R_m(\tau, \varphi) = \int_0^\tau \frac{\varphi^{(m+1)}(t)}{m!}(\tau^m - t)^m dt = \int_0^1 \frac{\varphi^{(m+1)}(t\tau)}{m!}\tau^{m+1}(1 - t)^m dt$$

Утверждение 9. *Формула Тейлора с остатком в форме Пеано (подставили $\tau = 1, t = 0$)*

$$f(y) = \sum_{s=0}^{m} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_k} h_k\right)^s \frac{f}{s!}\right)(x) + o(|h|^m)$$

16 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

Утверждение 10. *Формула Тейлора с остатком в интегральной форме (см. прошлый билет)*

$$f(y) = \sum_{s=0}^{m} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta}{\delta x_k} h_k\right)^s \frac{f}{s!}\right)(x) + \int_0^1 \frac{(-1)^{m+1}(x + th)}{m!}(1 - t)^m dt$$

17 Необходимое условие экстремума функции многих переменных.

Теорема 4. *(Необходимое условие экстремума) $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (G открытое) гладкая, x^0 - точка локального минимума или максимума. Тогда grad $f\big|_{x^0} = 0$*

Доказательство. $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, ..., \frac{\delta f}{\delta x_n}\right)$
Пусть $\frac{\delta f}{\delta x_k}\big|_{x^0} \neq 0$, тогда $f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_n^0) =$
$\underbrace{\frac{\delta f}{\delta x_k}\big|_{x^0}}_{\neq 0}(x_k - x_k^0) + o(|x_k - x_k^0|) \Rightarrow\rightarrow\leftarrow$ (свелось к одномерному случаю) □

18 Знак квадратичной формы. Достаточные условия экстремума функции многих переменных.

Определение 14. Квадратичная форма $Q(x), x = (x_1, ..., x_n)$ - это выражение вида $\sum\limits_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} x_k x_l$, где $a_{k,l}$ - скаляр.

Определение 15. (Знак квадратичной формы) Квадратичная форма $Q(x), x \in \mathbb{R}^n, a_{k,l} \in \mathbb{R}$ положительно (отрицательно) определена, если для всех ненулевых $x : Q(x) > 0 (Q(x) < 0)$ и знакопеременна, если может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема 5. *(Достаточное условие экстремума) Пусть у $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке x^0 нулевой градиент и определены все смешанные производные второго порядка. Тогда если квадратичная форма $Q(h) = \sum\limits_{1 \leq k,l \leq n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_l}(x^0) h_k h_l$:*

1. *положительно определена, значит x^0 точка локального минимума.*
2. *отрицательно определена, значит x^0 точка локального максимума.*

Доказательство. На замкнутом шаре квадратичная форма достигает своего минимума и максимума, а по формуле Тейлора остаток маленький:

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k,l \leq n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_l}(x^0)(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0) + o(|x - x_0|^2)$$

□

Примечание 15. На лекциях было доказательство через то, что эта сумма представима в виде $\langle A(x - x^0), (x - x^0)\rangle > 0$ (для полож. кв. формы A), а мы знаем про отделимость от нуля, т.е. из положительности следует, что $\exists \varepsilon :\ \langle A(x - x^0), (x - x^0)\rangle \geq \varepsilon ||x - x^0||^2$
Пояснение: $\langle Ax, x\rangle > 0, x \neq 0 \Rightarrow (Ax, x) \geq \varepsilon$ при $||x|| = 1$, т.к. функция от x при таких x достигает минимума и максимума, $\Rightarrow (Ax, x) \geq \varepsilon ||x||^2$ (т.к. домножили обе линейные функции на скаляр $||x||$, скалярное произведение линейно).

Примечание 16. Квадратичную форму можно привести к симметричному виду $\sum a_{k,l} h_k h_l$, $a_{k,l} = a_{l,k}$, значит её можно привести и к диагольному виду $Q(h) = \sum_{k=1}^n \lambda_k h_k^2$

- $Q(h)$ положительна $\Leftrightarrow$ все $\lambda_k > 0$ (x^0 т. мин.)
- $Q(h)$ отрицательна $\Leftrightarrow$ все $\lambda_k < 0$ (x^0 т. макс.)
- $Q(h)$ знакопеременна $\Leftrightarrow \exists k, l : \lambda_k < 0 < \lambda_k$ (x^0 не т. экстр.)
- иначе требуется дополнительное исследование

Утверждение 11. *Критерий Сильвестра для симметричной квадратичной формы:*

1. *для положительной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры её матрицы были положительны.*
2. *Для отрицательной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры чётного порядка её матрицы были положительны, а нечётного порядка — отрицательны.*

19 Касательные вектора. Касательная плоскость.

Утверждение 12. *Есть уравнение $z = f(x, y)$ задающее плоскость и у f есть частные производные в (x_0, y_0). Тогда $z = f(x_0, y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}\big|_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}\big|_{(x_0,y_0)}(y - y_0)$ - уравнение касательной плоскости. $(\frac{\delta f}{\delta x}\big|_{(x_0,y_0)}, \frac{\delta f}{\delta y}\big|_{(x_0,y_0)}, -1)$ - вектор нормали к кас.плоскости.*

20 Теорема о неявной функции для двух переменных.

Теорема 6. $F : G \to \mathbb{R}(G \subset \mathbb{R}^2-$ *открытое*)

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $F \in C^1(G)$
3. $F'y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогда $\exists I_x, I_y : \quad x_0 \in I_x, y_0 \in I_y, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^2$
и $f : I_x \times I_y \in \mathbb{R}$ *такая, что*

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$$

$$f \in C^1, f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

Примечание 17. (неформальное рассуждение, почему такая формула) Предположим, что f существует и дифференцируема, $F(x, f(x)) = 0$ на всей области определения f, продифференцируем левую и правую часть по правилу композиции $F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))f'(x) = 0$.

Доказательство. Существование: пусть функция $g_x(y) = F(x, y)$, будем считать, что в малой окрестности $V_{(x_0,y_0)}: \ F'_y > 0$, тогда $g(y)$ - возрастающая. Тогда $\forall x \in V \exists! y: \ F(x, y) = 0$.
Непрерывность: рассмотрите прямоугольник с разрезами (т.е. $g_x(y)$). Так как $F(x, y) = 0$ образуют замкнутое множество, то из того, что $x \to a$, при этом $f(x) \not\to f(a)$, то есть второй корень на линии $x = a$, а у нас корни единственные.
Гладкость: $F(x+h, f(x+h)) - F(x, f(x)) = F(x+h, f(x) + (f(x+h) - f(x))) - F(x, f(x)) = (F)$, при $h \to 0$ можно применять формулу Тейлора для F, получим $(F) = h(F'_x(x, f(x)) + \frac{f(x+h)-f(x)}{h} F'_y(x, f(x))) + o(|h|)$ □

21 Теорема о неявной функции для произвольного числа переменных.

Теорема 7. $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$
$F: G \to \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^{m+n}$

- $F \in C^1(G)$
- $F(x^0, y^0) = 0$
- $F'_y(x^0, y^0)$ *обратима (матрица* $n \times n$*)*

тогда в некоторой окрестности $V_{(x^0,y^0)} \subset G$*:*

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x), \ f: V_{(x^0,y^0)} \to \mathbb{R}^n$$

$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x))$$

Доказательство. Докажем индукцией по n.
База: $n = 1 \forall m$ доказано ранее.
Переход: $F = (F_1, F_2, ..., F_n), F_k: \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$.
Имеем n уравнений вида $F_k = 0$.
Хотим: $y_k = f(x_1, x_2, ..., x_m)$*, т.е. выразить каждый игрик через иксы.*
Матрица невырождена, будем считать, что $\frac{\delta F_n}{\delta y_n} \neq 0$.
Тогда $y_n = f^*(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, ..., y_{n-1})$ по предположению индукции.
$\phi_k(x, y_1, ..., y_{n-1}) = F_k(x, y_1, ..., y_{n-1}, f^*), 1 \le k \le n-1$ ($\phi_n = 0$ из-за того, как выбрали f^*). $\frac{\delta \phi_k}{\delta y_l} = \frac{\delta F_k}{\delta y_l} + \frac{\delta F_k}{\delta y_n} \frac{\delta f^*}{\delta y_l}$
Вспомним как выглядит невырожденная матрица $F'_y(x^0, y^0)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta y_1} & \frac{\delta F_1}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_1}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_1}{\delta y_n} \\ \frac{\delta F_2}{\delta y_1} & \frac{\delta F_2}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_2}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_2}{\delta y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_1} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n} \\ \frac{\delta F_n}{\delta y_1} & \frac{\delta F_n}{\delta y_2} & \cdots & \frac{\delta F_n}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \end{pmatrix}$$

Добавим к первым $n-1$ столбцам последний, домноженный на скаляр, от этого матрица не перестанет быть невырожденной.

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta y_1} + \frac{\delta F_1}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_1} & \frac{\delta F_1}{\delta y_2} + \frac{\delta F_1}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_2} & \dots & \frac{\delta F_1}{\delta y_{n-1}} + \frac{\delta F_1}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_1}{\delta y_n} \\ \frac{\delta F_2}{\delta y_1} + \frac{\delta F_2}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_1} & \frac{\delta F_2}{\delta y_2} + \frac{\delta F_2}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_2} & \dots & \frac{\delta F_2}{\delta y_{n-1}} + \frac{\delta F_2}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_2}{\delta y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_1} + \frac{\delta F_2}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_2} + \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_2} & \dots & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_{n-1}} + \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_{n-1}}{\delta y_n} \\ \frac{\delta F_n}{\delta y_1} + \frac{\delta F_n}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_1} & \frac{\delta F_n}{\delta y_2} + \frac{\delta F_n}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_2} & \dots & \frac{\delta F_n}{\delta y_{n-1}} + \frac{\delta F_n}{\delta y_n}\frac{\delta f^*}{\delta y_{n-1}} & \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \phi'_y & \vdots \\ 0 & \frac{\delta F_n}{\delta y_n} \end{pmatrix}$$

откуда $det(\phi'_y)\frac{\delta F_n}{\delta y_n} \neq 0$, а значит для системы $\{\phi_k\}_{k \leq n-1} = 0$ применимо предположение индукции, т.е. $y_k = f_k(x)$ при $k \leq n-1$. В совокупности получаем $y_n = f(x, f_1(x), ..., f_{n-1}(x))$, что мы и хотели получить. Гладкость и искомая производная следуют из того, что мы умеем брать производную по композиции. $\square$

22 Теорема о неявной функции для систем уравнений. Примеры.

23 Полярные и сферические координаты. Параметризации поверхностей.

24 Задача условного экстремума. Необходимое условие условного экстремума.

25 Функции Лагранжа. Достаточное условие условного экстремума. Примеры.

26 Теорема о перестановке пределов. Общий вид теоремы Стокса-Зайделя.

27 Голоморфные функции. Примеры. Общий вид дифференциала голоморфной функции.

28 Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда.

29 Голоморфность суммы степенного ряда.

30 Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Лемма об аппроксимации |x|.

31 Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Завершение докзательства.

32 Теорема о неподвижной точке. Приложение к дифференциальным уравнениям.

33 Топология в пространстве C\^infty(R). Метризуемость.

Утверждение 13.

$$d(f,g) = \sum_{j,n\geq 0} \frac{||f^{(j)} - g^{(j)}||_{\infty, I_n}}{1 + ||f^{(j)} - g^{(j)}||_{\infty, I_n}}$$

тогда d *- метрика.*

Указатель

Вариация функции 3
Гладкий путь 4
Гладкость 7
Градиент 9
Дифференциал 6
Длина гладкого пути 4
Длина кривой (пути) 4
Достаточное условие экстремума 12
Замена переменной в вариации 3
Знак квадратичной формы 12
Квадратичная форма 12
Кривая 3
Критерий Сильвестра 13
Матрица Якоби 9
Необходимое условие экстремума 11
Норма 6
Ограниченная вариация 3
Производная 6
Производная по направлению 8
Простое вращение 5
Смешанная производная 9
Формула Тейлора 11
Частная производная 7