

**Описание первой версии теплогидравлического
кода SimInTech
Методика решения уравнений сохранения
Версия 1.0**

Чернецов Н. Г. Ходаковский В. В.

Январь 2015 г.

Аннотация

Отчёт: 57 стр., 9 рис., 0 табл., 3 источника, 159 нумерованных уравнений.

Предметом рассмотрения в отчёте является теплогидравлический код, входящий в дистрибутив среды SimInTech.

Цель работы – описание методики решения уравнений сохранения для теплоносителя в контуре произвольной топологии, реализованной в первой версии теплогидравлического кода.

Сведения из отчёта могут быть использованы при доработке справочной системы SimInTech и при подготовке других отчётных материалов.

Оглавление

1	Введение	4
2	Основные элементы теплогидравлического кода	5
3	Основные уравнения сохранения	7
3.1	Уравнение сохранения массы	7
3.2	Уравнение сохранения импульса	9
3.3	Уравнение сохранения энергии	12
4	Аппроксимация временных производных и прогноз для неизвестных на следующем временном слое	15
4.1	Аппроксимация временных производных	15
4.2	Прогноз для неизвестных на следующем временном слое	20
5	Разностные уравнения сохранения	24
5.1	Уравнение сохранения массы	24
5.2	Уравнение сохранения импульса	25
5.3	Уравнение сохранения энергии	27
6	Метод Ньютона-Рафсона	29
7	Метод расчёта поля давления в контуре произвольной топологии	33
7.1	Связь давлений в ячейках канала с давлениями в узлах	33
7.2	Уравнения для давлений в узлах	37
8	Метод расчёта поля энтальпии в контуре произвольной топологии	42
8.1	Связь энтальпий в ячейках канала с энтальпиями в узлах	42
8.2	Уравнения для энтальпий в узлах	43
9	Алгоритм основного метода расчёта	46
10	Заключение	56
	Литература	57

1. Введение

В состав среды SimInTech включён теплогидравлический код собственной разработки. В настоящее время проводятся работы по совершенствованию теплогидравлического кода, добавлению новых возможностей, расширяющих функциональность, описанию кода и наполнению справочной системы.

В настоящем отчёте приведено описание основных уравнений сохранения, решаемых в теплогидравлическом коде, и подробно описана реализованная в первой версии методика их решения.

2. Основные элементы теплогидравлического кода

Теплогидравлический код предназначен для расчёта динамики поведения основных параметров сжимаемого и несжимаемого теплоносителя в теплогидравлических контурах с произвольной топологией. В нём решаются уравнения сохранения массы, импульса и энергии для жидкости (в односкоростном приближении), а также нестационарные уравнения теплопроводности для тепловых структур (стенок каналов), в том числе с учётом теплового излучения между цилиндрическими стенками. Основой является одномерная нестационарная гомогенная модель течения сжимаемой жидкости.

Код является внешней подключаемой в виде DLL-библиотек программой для SimInTech и работает совместно с ним, хотя принципиально может быть запущен отдельно. В графической подсистеме SimInTech пользователь из блоков набирает теплогидравлическую расчётную схему. Далее при инициализации задачи автоматически выполняется анализ набранной схемы и готовится файл расчётного задания для теплогидравлического кода. В коде осуществляется расчёт основных параметров (расходов, температур, давлений и т. д.) в элементах схемы, а отображение текущих значений и построение графиков осуществляется в графической оболочке SimInTech.

В нодализационной схеме циркуляционный контур разбивается на расчётные ячейки. Расчётной ячейкой (контрольным объёмом) называется фиксированный в пространстве фрагмент потока теплоносителя, ограниченный поверхностями конструкций, формирующих поток. Граница между смежными (соседними) расчётными ячейками называется гидравлической связью. В каждой расчётной ячейке описывается теплогидравлика однофазного или двухфазного теплоносителя в сосредоточенных параметрах с использованием гомогенной модели. Скалярные характеристики потока (давление, энтальпия) определяются относительно центров ячеек из уравнений сохранения массы и энергии, а векторные (скорости) рассчитываются в гидравлических связях ячеек из уравнений сохранения импульса. Расчётные ячейки обмениваются массой и энергией с соседними ячейками посредством конвекции через гидравлические связи, а также обмениваются тепловой энергией со стенками каналов. Схема разбиения канала на контрольные объёмы показана на рисунке 2.1.

Граничная ячейка (граничный узел) отличается от обычной расчётной ячейки тем, что скалярные величины в ней известны (могут либо задаваться пользователем как функции времени, либо рассчитываться в специализированных модулях или в смежных задачах при помощи описываемого теплогидравлического модуля) и требуется рассчитывать только векторные величины в гидравлических связях.

Цепочка последовательно соединённых расчётных ячеек называется каналом. В каналах задается положительное направление движения теплоносителя, которое определяет положительное направление движения в гидравлических связях расчётных ячеек, составляющих канал. Если вычисленная скорость имеет противоположное направление, она будет иметь отрицательное значение. Соединение каналов возможно посредством другого элемента нодализационной схемы — внутреннего узла, который представляет собой расчётную

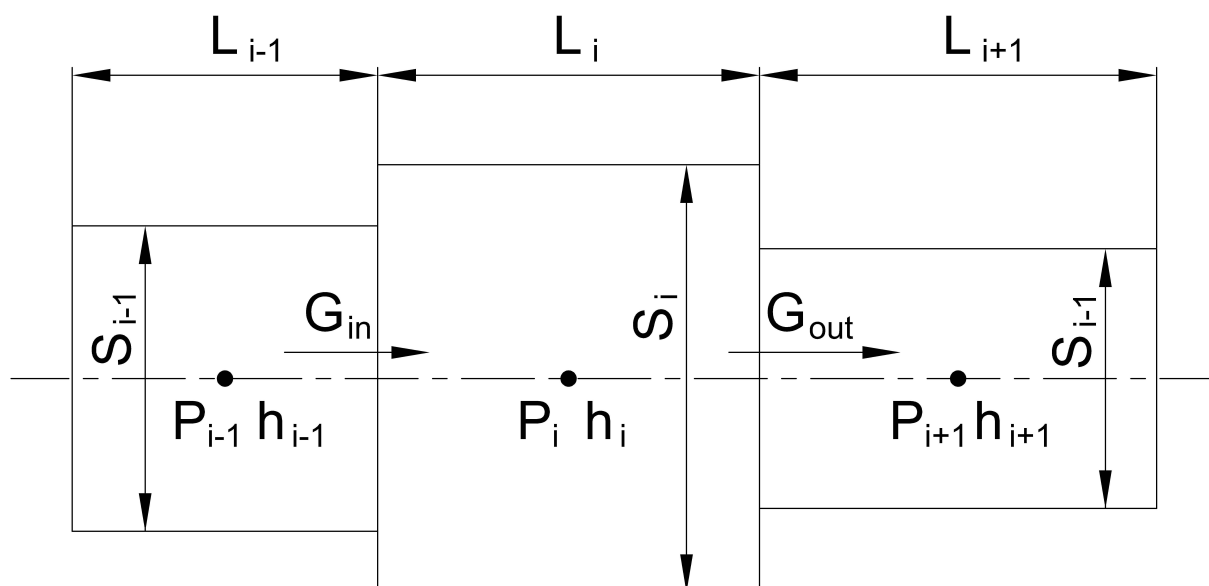


Рис. 2.1 — СХЕМА РАЗБИЕНИЯ КАНАЛА НА КОНТРОЛЬНЫЕ ОБЪЁМЫ

ячейку, которая может содержать два и более соединений. Множество расчётных ячеек, находящихся между двумя узлами, называется ребром.

Кроме граничной ячейки воздействие различных внешних по отношению к рассматриваемому циркуляционному контуру систем можно отразить через элемент нодализационной схемы — подпитку. Источник (сток) массы задаёт расходы и энтальпии, поступающие в любую расчётную ячейку из внешних по отношению к контуру систем или уходящие из расчётной ячейки ячейки во внешнюю систему. Подпитка предназначена для моделирования незамкнутых контуров с заданным расходом теплоносителя.

3. Основные уравнения сохранения

3.1. Уравнение сохранения массы

Исходное уравнение сохранения массы имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) = R_m, \quad (3.1)$$

где $\rho(x, y, z, t)$ – плотность жидкости (или газа); $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ – вектор скорости жидкости или газа в точке с координатами (x, y, z) в момент времени t , R_m – локальный объёмный источник массы.

Для течений в каналах уравнение неразрывности может быть записано в терминах средних значений по поперечному сечению канала. Умножим (3.1) на площадь канала $S = S(x)$.

$$S \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + S \cdot \frac{\partial(\rho \cdot V)}{\partial x} = S \cdot R_m, \quad (3.2)$$

где $\rho = \rho(x, t)$ и $V = V(x, t)$ – средние значения плотности и проекции скорости на ось x по поперечному сечению канала. Внесём площадь во втором слагаемом под знак производной. Получим

$$S \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial(\rho \cdot V \cdot S)}{\partial x} - \rho \cdot V \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \right) = S \cdot R_m. \quad (3.3)$$

Разделим уравнение на площадь S :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot V \cdot S)}{\partial x} - \rho \cdot V \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = R_m. \quad (3.4)$$

Это общий вид уравнения сохранения массы в канале. Если предположить, что площадь поперечного сечения канала изменяется по длине достаточно медленно (так называемое «гидравлическое приближение»), то можно пренебречь слагаемым с производной площади и получить уравнение сохранения массы в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot V \cdot S)}{\partial x} = R_m. \quad (3.5)$$

В настоящее время в теплогидравлическом коде рассматривается это упрощённое уравнение, но в дальнейших выводах для общности (и для возможной будущей модернизации кода) будем использовать (3.4).

Перепишем уравнение сохранения массы относительно давления в контрольном объёме с использованием уравнения состояния для плотности $\rho = \rho(P, h)$, где P – давление, h – энтальпия. Заменим производную плотности по времени с использованием следующего соотношения

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_h \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_P \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau}, \quad (3.6)$$

где $\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_h$ – производная плотности по давлению при постоянной энтальпии; $\left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_P$ – производная плотности по энтальпии при постоянном давлении. В настройках параметров расчёта предусмотрен выбор типа модели: сжимаемая или несжимаемая. Введём коэффициент f_{comp} , который равен единице, если выбрана сжимаемая модель, и равен нулю, если выбрана несжимаемая модель. Запишем производную плотности по времени с учётом этого множителя:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_h \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} + f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_P \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau}, \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (3.4), получим

$$f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_h \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} + f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_P \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot V \cdot S)}{\partial x} - \rho \cdot V \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = R_m. \quad (3.8)$$

Проинтегрируем это уравнение по x в пределах контрольного объёма (от 0 до L , где L – длина контрольного объёма):

$$f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_h \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} = R_m - \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot V \cdot S)}{\partial x} + \rho \cdot V \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} - f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_P \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau}; \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_h \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} \cdot dx = \int_0^L \left[R_m - \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot V \cdot S)}{\partial x} + \right. \\ \left. + \rho \cdot V \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} - f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_P \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau} \right] \cdot dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вынесем величины, постоянные в пределах контрольного объёма, из-под знака интеграла:

$$\begin{aligned} f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_h \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} \cdot \int_0^L dx = R_m \cdot \int_0^L dx - \frac{1}{S} \cdot \int_0^L \frac{\partial(\rho \cdot V \cdot S)}{\partial x} \cdot dx + \\ + \rho \cdot V \cdot \frac{1}{S} \cdot \int_0^L \frac{\partial S}{\partial x} \cdot dx - f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_P \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau} \cdot \int_0^L dx; \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_h \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} \cdot L = R_m \cdot L - \frac{1}{S} \cdot \int_0^L \frac{\partial(\rho \cdot V \cdot S)}{\partial x} \cdot dx + \\ + \rho \cdot V \cdot \frac{1}{S} \cdot \int_0^L \frac{\partial S}{\partial x} \cdot dx - f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_P \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau} \cdot L. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В уравнении (3.12) $\rho \cdot V \cdot S = G$ – массовый расход жидкости в канале. С ячейкой может быть соединено некоторое количество гидравлических связей. По определению интеграл от производной равен дифференцируемой функции, то есть $\int_a^b \frac{df(x)}{dx} \cdot dx = (f(x) + c) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$. Поэтому $\int_0^L \frac{\partial(\rho \cdot V \cdot S)}{\partial x} \cdot dx = G(L) - G(0) = -\sum_{j=1}^N G_j$, где N – общее количество подключённых к ячейке гидравлических связей, а смена знака связана с положительным направлением нормали к ячейке (положительный расход слева противоположен положительному

направлению нормали, а положительный расход справа, наоборот, совпадает с этим направлением). Кроме того, и из физического смысла ясно, что если втекает расхода больше, чем вытекает, то $\partial P / \partial \tau$ должно быть больше нуля.

По теореме о среднем значении $\int_0^L \frac{\partial S}{\partial x} \cdot dx = \overline{\frac{\partial S}{\partial x}} \cdot L$, где $\overline{\frac{\partial S}{\partial x}}$ – среднее значение производной площади в пределах контрольного объёма. Строго говоря, в рассматриваемом приближении площадь проходного сечения в пределах контрольного объёма считается постоянной (поэтому мы и вынесли её из-под знака интеграла в (3.11)). Но производную $\frac{\partial S}{\partial x}$ можно аппроксимировать каким-либо образом между соседними ячейками. С учётом этого, перепишем (3.12) в следующем виде

$$f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_h \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} \cdot L = R_m \cdot L + \frac{1}{S} \cdot \sum_{j=1}^N G_j + \rho \cdot V \cdot \frac{1}{S} \cdot \overline{\frac{\partial S}{\partial x}} \cdot L - f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_p \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau} \cdot L. \quad (3.13)$$

Разделим (3.13) на длину ячейки и получим окончательно уравнение сохранения массы в виде

$$f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_h \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} = R_m + \frac{1}{V} \cdot \sum_{j=1}^N G_j + \rho \cdot W \cdot \frac{1}{S} \cdot \overline{\frac{\partial S}{\partial x}} - f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_p \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau}, \quad (3.14)$$

где $V = L \cdot S$ – объём ячейки; N – количество гидравлических связей, подсоединённых к ячейке; G_j – массовый расход через j -ю гидравлическую связь; W – скорость жидкости в ячейке.

3.2. Уравнение сохранения импульса

Дифференциальное уравнение сохранения импульса жидкости и газа в переменных Эйлера выглядит следующим образом (см. [1]):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + (\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \vec{V} = \frac{-1}{\rho} \cdot grad(P) + \frac{\vec{F}}{\rho}. \quad (3.15)$$

В проекции на координатную ось x это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial V_x}{\partial \tau} + \sum_{\alpha=1}^3 V_\alpha \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x_\alpha} = \frac{-1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{F_x}{\rho}. \quad (3.16)$$

В нашем случае скорость жидкости направлена только вдоль оси x , то есть $V_x = V$, и поэтому уравнение можно переписать следующим образом

$$\rho \cdot \frac{\partial V}{\partial \tau} + \rho \cdot V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = R_{mom}, \quad (3.17)$$

где R_{mom} — источниковый член в уравнении сохранения импульса. В данном случае $R_{mom} = F_x$, где F_x — это составляющая объёмной внешней силы, действующая на жидкость в направлении потока (например, сила тяжести, действующая на жидкость в вертикальном канале), но в общем случае могут присутствовать и другие составляющие, например источник импульса, связанный с работой насоса.

Уравнение количества движения для контрольного объёма получается путем интегрирования (3.17) по двум полуобъёмам, примыкающим к рассматриваемой гидравлической связи слева (индекс "in") и справа (индекс "out"):

$$\int_{-L_{in}/2}^0 \left(\rho \cdot \frac{\partial V}{\partial \tau} + \rho \cdot V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} - R_{mom} \right) \cdot dx + \int_0^{L_{out}/2} \left(\rho \cdot \frac{\partial V}{\partial \tau} + \rho \cdot V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} - R_{mom} \right) \cdot dx = 0. \quad (3.18)$$

Выразим скорость теплоносителя через массовый расход ($V = \frac{G}{\rho \cdot S}$) и подставим в (3.17). Кроме того, объединим два слагаемых в скобках в одно

$$\left(\rho \cdot V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{\rho \cdot V^2}{2} \right) \right).$$

Тогда получим

$$\int_{-L_{in}/2}^0 \left(\rho \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{G}{\rho \cdot S} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{\rho \cdot V^2}{2} \right) - R_{mom} \right) \cdot dx + \int_0^{L_{out}/2} \left(\rho \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{G}{\rho \cdot S} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{\rho \cdot V^2}{2} \right) - R_{mom} \right) \cdot dx = 0. \quad (3.19)$$

Объединим два интеграла в один

$$\int_{-L_{in}/2}^{L_{out}/2} \left(\rho \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{G}{\rho \cdot S} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{\rho \cdot V^2}{2} \right) - R_{mom} \right) \cdot dx = 0. \quad (3.20)$$

Оставим в левой части слагаемое, содержащее массовый расход:

$$\int_{-L_{in}/2}^{L_{out}/2} \left(\rho \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{G}{\rho \cdot S} \right) \right) \cdot dx = - \int_{-L_{in}/2}^{L_{out}/2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{\rho \cdot V^2}{2} \right) - R_{mom} \right) \cdot dx \quad (3.21)$$

Раскроем производную в левой части. Получим

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{G}{\rho \cdot S} \right) &= \rho \cdot \left(\frac{1}{\rho \cdot S} \cdot \frac{\partial G}{\partial \tau} - \frac{G}{\rho^2 \cdot S} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tau} - \frac{G}{\rho \cdot S^2} \cdot \frac{\partial S}{\partial \tau} \right) = \\ &= \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial G}{\partial \tau} - \frac{G}{\rho \cdot S} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tau} - \frac{G}{S^2} \cdot \frac{\partial S}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Подставим (3.22) в (3.21) и проинтегрируем по длине. Тогда получим в левой части (3.21) следующую сумму:

$$\begin{aligned} \int_{-L_{in}/2}^{L_{out}/2} \left(\rho \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{G}{\rho \cdot S} \right) \right) \cdot dx &= \int_{-L_{in}/2}^{L_{out}/2} \left(\frac{1}{S} \cdot \frac{\partial G}{\partial \tau} - \frac{G}{\rho \cdot S} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tau} - \frac{G}{S^2} \cdot \frac{\partial S}{\partial \tau} \right) \cdot dx = \\ &= \left(\frac{L_{in}}{2 \cdot S_{in}} + \frac{L_{out}}{2 \cdot S_{out}} \right) \cdot \frac{\partial G}{\partial \tau} - \left(\frac{L_{in}}{2 \cdot \rho_{in} \cdot S_{in}} \cdot \frac{\partial \rho_{in}}{\partial \tau} + \frac{L_{out}}{2 \cdot \rho_{out} \cdot S_{out}} \cdot \frac{\partial \rho_{out}}{\partial \tau} \right) \cdot G - \\ &\quad - \left(\frac{L_{in}}{2 \cdot S_{in}^2} \cdot \frac{\partial S_{in}}{\partial \tau} + \frac{L_{out}}{2 \cdot S_{out}^2} \cdot \frac{\partial S_{out}}{\partial \tau} \right) \cdot G \end{aligned} \quad (3.23)$$

В первой версии теплогидравлического кода слагаемые, связанные с изменением плотности и площади проходного сечения во времени, полагаются малыми (хотя в будущем, при модернизации кода, они возможно будут учтены). Обозначим сумму давления и скоростного напора в правой части (3.21) через P_{total} (полное давление). С учётом этого перепишем (3.21) в следующем виде

$$\left(\frac{L_{in}}{2 \cdot S_{in}} + \frac{L_{out}}{2 \cdot S_{out}} \right) \cdot \frac{\partial G}{\partial \tau} = - \int_{-L_{in}/2}^{L_{out}/2} \frac{\partial P_{total}}{\partial x} \cdot dx + \int_{-L_{in}/2}^{L_{out}/2} R_{mom} \cdot dx \quad (3.24)$$

Обозначим множитель в левой части через J . Это так называемый ”инерционный коэффициент” гидравлической связи. Первый член в правой части есть изменение полного давления жидкости между центрами соседних контрольных объёмов. Второй член в правой части это изменение импульса жидкости за счёт внешних воздействий (например, силы тяжести или работы насоса). Падение полного давления между соседними ячейками можно расписать через статические давления в этих ячейках и сумму потерь давления и добавочных напоров. Добавим для общности также отброшенные члены. Тогда получим окончательно уравнение сохранения импульса в следующем виде

$$\boxed{J \cdot \frac{\partial G}{\partial \tau} - A_1 \cdot G - A_2 \cdot G = P_{in} - P_{out} - \Delta P_{fr} - \Delta P_{loc} - \Delta P_{acc} + H_{niv} + H_{pump}}, \quad (3.25)$$

где A_1 — множитель, учитывающий производную плотности от времени; A_2 — множитель, учитывающий производную площади от времени; P_{in} — давление в контрольном объёме на входе гидравлической связи; P_{out} — давление в контрольном объёме на выходе гидравлической связи; ΔP_{fr} — потери давления на трение; ΔP_{loc} — потери давления на преодоление

местных гидравлических сопротивлений; ΔP_{acc} — потери давления на ускорение; H_{niv} — нивелирный напор; H_{pump} — напор насоса.

3.3. Уравнение сохранения энергии

Дифференциальное уравнение сохранения энергии жидкости и газа в переменных Эйлера выглядит следующим образом (см. [1]):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\varepsilon + \frac{V^2}{2} \right) + (\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \left(\varepsilon + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{-1}{\rho} \cdot \text{div}(P \cdot \vec{V}) + \frac{Q}{\rho} + \frac{F \cdot \vec{V}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{div}(\vec{W}), \quad (3.26)$$

где ε — внутренняя энергия единицы массы; $\frac{V^2}{2}$ — кинетическая энергия единицы массы; $\frac{-1}{\rho} \cdot \text{div}(P \cdot \vec{V})$ — член, связанный с работой поверхностных сил; $\frac{F \cdot \vec{V}}{\rho}$ — член, связанный с работой объёмных сил; Q — мощность объёмных источников энергии, распределённых в пространстве; \vec{W} — вектор плотности теплового потока (знак минус связан с тем, что при выводе уравнения энергии положительно направление нормали к рассматриваемому элементарному объёму принимается совпадающим с внешней нормалью).

По определению энтальпия единицы массы газа или жидкости есть

$$h = \varepsilon + \frac{P}{\rho}. \quad (3.27)$$

Заменим в уравнении (3.26) внутреннюю энергию на энтальпию, выраженную из (3.27). Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(h - \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) + (\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \left(h - \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) = \\ = \frac{-1}{\rho} \cdot \text{div}(P \cdot \vec{V}) + \frac{Q}{\rho} + \frac{F \cdot \vec{V}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{div}(\vec{W}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Запишем проекцию уравнения сохранения энергии на ось x , совпадающую с направлением потока:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{V^2}{2} \right) + V \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - V \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) + V \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \\ = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (P \cdot V) + \frac{Q}{\rho} + \frac{F_x \cdot V}{\rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3.29)$$

где y — направление, перпендикулярное направлению потока. Раскроем производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \tau} - \frac{\frac{\partial P}{\partial \tau} \cdot \rho - P \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tau}}{\rho^2} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial \tau} + V \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - V \cdot \frac{\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \rho - P \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}}{\rho^2} + V^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = \\ = -\frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot V + P \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{Q}{\rho} + \frac{F_x \cdot V}{\rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Умножим уравнение (3.30) на ρ и сгруппируем слагаемые с учётом того, что из уравнения сохранения импульса (3.17) $\rho \cdot \frac{\partial V}{\partial \tau} + \rho \cdot V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = F_x - \frac{\partial P}{\partial x}$. Получим

$$\begin{aligned} \left(\rho \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{P}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right) + \left(\rho \cdot V \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{P \cdot V}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + P \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial \tau} + V \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \\ = Q - \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Выберем уровень, от которого отсчитывается внутренняя энергия, так, чтобы в рассматриваемом элементарном объёме $\varepsilon = 0$. Тогда из (3.27) получим, что $h = P/\rho$. Тогда слагаемые в первых скобках (3.31) можно сгруппировать в $\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho \cdot h)$, а во вторых скобках — в $\frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot V \cdot h)$. Тогда получится

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho \cdot h) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot V \cdot h) - \left(\frac{\partial P}{\partial \tau} + V \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) = Q - \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} \right). \quad (3.32)$$

Добавим во втором слагаемом площадь контрольного объёма и учтём, что эта площадь может изменяться по длине. Кроме того, заменим произведение $\rho \cdot V \cdot S$ на G — массовый расход. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho \cdot h) + \left(\frac{1}{S} \cdot \frac{\partial(G \cdot h)}{\partial x} - \rho \cdot V \cdot h \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial \tau} + V \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \\ = Q - \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Проведём интегрирование полученного уравнения в пределах контрольного объёма.

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial(\rho \cdot h)}{\partial \tau} \cdot dx + \int_0^L \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial(G \cdot h)}{\partial x} \cdot dx - \int_0^L \rho \cdot V \cdot h \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \cdot dx - \\ - \int_0^L \left(\frac{\partial P}{\partial \tau} + V \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) \cdot dx = \int_0^L \left(Q - \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} \right) \right) \cdot dx. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Вынесем не зависящие от x величины из-под знака интегрирования. Производную $\partial S / \partial x$ аппроксимируем средним значением между соседними ячейками. Член с производной массового расхода запишем в виде $\int_0^L \frac{\partial(G \cdot h)}{\partial x} \cdot dx = G(L) \cdot h(L) - G(0) \cdot h(0) = -\sum_{j=1}^{N_{in}} G_j \cdot h_j + \sum_{j=1}^{N_{out}} G_j \cdot h$ (поскольку из контрольного объёма теплоноситель выходит, имея энтальпию этого контрольного объёма). Также учтём, что в рассматриваемом контрольном объёме $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$, поскольку давление не изменяется по длине контрольного объёма. Умножим обе

части уравнения на площадь проходного сечения ячейки S . После этого получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot h)}{\partial \tau} \cdot V - \sum_{j=1}^{N_{in}} G_j \cdot h_j + \sum_{j=1}^{N_{out}} G_j \cdot h - \rho \cdot W \cdot h \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \cdot L - \frac{\partial P}{\partial \tau} \cdot V = \\ = Q \cdot V - S \cdot \int_0^L \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} \right) \cdot dx. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Раскладываем член $\frac{\partial(\rho \cdot h)}{\partial \tau}$ на сумму двух слагаемых и заменяем производную $\frac{\partial \rho}{\partial \tau}$ на величину $\left(R_m + \frac{1}{V} \cdot \sum_{j=1}^N G_j + \rho \cdot W \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \right)$, следующую из уравнения сохранения массы (3.14). Перепишем первые три слагаемых в уравнении (3.35):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot h)}{\partial \tau} \cdot V - \sum_{j=1}^{N_{in}} G_j \cdot h_j + \sum_{j=1}^{N_{out}} G_j \cdot h &= \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \cdot h \cdot V + \rho \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau} \cdot V - \sum_{j=1}^{N_{in}} G_j \cdot h_j + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_{out}} G_j \cdot h = \left(R_m + \frac{1}{V} \cdot \sum_{j=1}^N G_j + \rho \cdot W \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \right) \cdot h \cdot V + \rho \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau} \cdot V - \\ &- \sum_{j=1}^{N_{in}} G_j \cdot h_j + \sum_{j=1}^{N_{out}} G_j \cdot h = R_m \cdot h \cdot V + h \cdot \sum_{j=1}^N G_j + \rho \cdot W \cdot h \cdot L \cdot \frac{\partial S}{\partial x} + \\ &+ \rho \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau} \cdot V - \sum_{j=1}^{N_{in}} G_j \cdot h_j + \sum_{j=1}^{N_{out}} G_j \cdot h = R_m \cdot h \cdot V + \rho \cdot W \cdot h \cdot L \cdot \frac{\partial S}{\partial x} + \\ &+ \rho \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau} \cdot V + \sum_{j=1}^{N_m} G_j \cdot (h - h_j). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Эти преобразования показывают, что в уравнении сохранения энергии для контрольного объёма следует учитывать только входящие в ячейку массовые расходы (то есть выходящие расходы не изменяют энергию в ячейке). Введём коэффициент μ_j , зависящий от знака расхода:

$$\mu_j = \begin{cases} 1, & \text{если } G_j > 0; \\ 0, & \text{если } G_j \leq 0. \end{cases}$$

Подставив (3.36) в (3.35), получаем окончательно уравнение сохранения энергии в следующем виде

$$\boxed{\rho \cdot V \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau} = \sum_{j=1}^{N_{gc}} \mu_j \cdot G_j \cdot (h_j - h) + V \cdot \left(Q + \frac{\partial P}{\partial \tau} - R_m \cdot h \right) + Q_{wall} + Q_{ax}}, \quad (3.37)$$

где N_{gc} — количество гидравлических связей, соединённых с рассматриваемой ячейкой; Q_{wall} — тепловой поток от тепловых структур к ячейке; Q_{ax} — осевой тепловой поток из соседних расчётных ячеек в рассматриваемую.

4. Аппроксимация временных производных и прогноз для неизвестных на следующем временном слое

4.1. Аппроксимация временных производных

Для перехода от дифференциальных уравнений сохранения к алгебраическим (для решения их на ЭВМ) требуется аппроксимация временных производных. В теплогидравлическом коде аппроксимация временных производных осуществляется с использованием так называемой "формулы дифференцирования назад" (ФДН). Она позволяет получить порядок аппроксимации временной производной выше второго.

Рассмотрим формулу дифференцирования назад

$$\frac{dx(t_{n+1})}{d\tau} \approx -\frac{1}{h} \cdot \sum_{i=0}^k \alpha_i \cdot x(t_{n+1-i}) = a_x + b_x \cdot dX(t_n), \quad (4.1)$$

где $x = \{P, h, G\}$ — искомые неизвестные (давления и энтальпии в ячейках, расходы в гидравлических связях); n — временной слой; k — порядок формулы; h — шаг интегрирования по времени.

$dX(t_n)$ в правой части это так называемая восходящая разность, которая представляет собой приращение неизвестной величины на шаге по времени (от текущего до следующего шага по времени):

$$dX(t_n) = x(t_{n+1}) - x(t_n).$$

Рассмотрим способ нахождения коэффициентов α_i . Разложим функцию $x(t_{n+1-i})$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t = t_{n+1}$. Получим

$$\begin{aligned} x(t_{n+1-i}) &= x(t_{n+1}) + \frac{x'(t_{n+1})}{1!} \cdot (t_{n+1-i} - t_{n+1}) + \frac{x''(t_{n+1})}{2!} \cdot (t_{n+1-i} - t_{n+1})^2 + \\ &+ \dots + \frac{x^{(n)}(t_{n+1})}{n!} \cdot (t_{n+1-i} - t_{n+1})^n + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{(j)}(t_{n+1})}{j!} \cdot (t_{n+1-i} - t_{n+1})^j. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Перепишем разность временных отметок в виде $t_{n+1-i} - t_{n+1} = \frac{t_{n+1-i} - t_{n+1}}{h} \cdot h$. Тогда ряд Тейлора примет вид

$$x(t_{n+1-i}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{(j)}(t_{n+1})}{j!} \cdot \left(\frac{t_{n+1-i} - t_{n+1}}{h} \right)^j \cdot h^j. \quad (4.3)$$

Подставим (4.3) в (4.1). Получим

$$\begin{aligned} \frac{dx(t_{n+1})}{d\tau} &\approx -\frac{1}{h} \cdot \sum_{i=0}^k \alpha_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{(j)}(t_{n+1})}{j!} \cdot \left(\frac{t_{n+1-i} - t_{n+1}}{h} \right)^j \cdot h^j = \\ &= -\frac{1}{h} \cdot \sum_{i=0}^k \alpha_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot \frac{x^{(j)}(t_{n+1})}{j!} \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n+1-i}}{h} \right)^j \cdot h^j. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Выпишем несколько первых слагаемых этой двойной суммы:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{h} \cdot \left\{ \alpha_0 \cdot \left[x(t_{n+1}) \cdot 1 - \frac{x'(t_{n+1})}{1!} \cdot 0 + 0 - \dots \right] + \right. \\
& + \alpha_1 \cdot \left[1 \cdot x(t_{n+1}) - 1 \cdot \frac{x'(t_{n+1})}{1!} \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^1 \cdot h^1 + \right. \\
& \quad \left. + 1 \cdot \frac{x''(t_{n+1})}{2!} \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^2 \cdot h^2 - \dots \right] + \\
& + \alpha_2 \cdot \left[1 \cdot x(t_{n+1}) - 1 \cdot \frac{x'(t_{n+1})}{1!} \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^1 \cdot h^1 + \right. \\
& \quad \left. + 1 \cdot \frac{x''(t_{n+1})}{2!} \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^2 \cdot h^2 - \dots \right] + \\
& + \alpha_3 \cdot \left[1 \cdot x(t_{n+1}) - 1 \cdot \frac{x'(t_{n+1})}{1!} \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^1 \cdot h^1 + \right. \\
& \quad \left. + 1 \cdot \frac{x''(t_{n+1})}{2!} \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^2 \cdot h^2 - \dots \right] + \dots \left. \right\}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые в сумме, выделив члены при $x(t_{n+1})$, $x'(t_{n+1})$ и т.д., и подставим её в уравнение (4.1). Получим

$$\begin{aligned}
x'(t_{n+1}) = & -\frac{1}{h} \cdot \left\{ x(t_{n+1}) \cdot \left[\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots \right] + \right. \\
& + x'(t_{n+1}) \cdot \left[0 - \alpha_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^1 \cdot h^1 - \alpha_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^1 \cdot h^1 - \right. \\
& \quad \left. - \alpha_3 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^1 \cdot h^1 - \dots \right] + \\
& + x''(t_{n+1}) \cdot \left[0 + \alpha_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \alpha_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \right. \\
& \quad \left. + \alpha_3 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \dots \right] + \\
& + x'''(t_{n+1}) \cdot \left[0 - \alpha_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^3 \cdot \frac{h^3}{3!} - \alpha_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^3 \cdot \frac{h^3}{3!} - \right. \\
& \quad \left. - \alpha_3 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^3 \cdot \frac{h^3}{3!} - \dots \right] + \dots \left. \right\}. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Для того, чтобы (4.6) было справедливо при всех x , коэффициенты α_i должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{h} \cdot [\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots] \\ 1 = -\frac{1}{h} \cdot \left[0 - \alpha_1 \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^1 \cdot h^1 - \alpha_2 \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^1 \cdot h^1 - \alpha_3 \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^1 \cdot h^1 - \dots \right] \\ 0 = -\frac{1}{h} \cdot \left[0 + \alpha_1 \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \alpha_2 \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \alpha_3 \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \dots \right] \\ 0 = -\frac{1}{h} \cdot \left[0 - \alpha_1 \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^3 \cdot \frac{h^3}{3!} - \alpha_2 \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^3 \cdot \frac{h^3}{3!} - \alpha_3 \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^3 \cdot \frac{h^3}{3!} - \dots \right] \\ 0 = \dots \end{cases} \quad (4.7)$$

Немного перепишем систему, сократив множители:

$$\begin{cases} 0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots \\ 1 = \alpha_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^1 + \alpha_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^1 + \alpha_3 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^1 + \dots \\ 0 = \alpha_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^2 + \alpha_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^2 + \alpha_3 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^2 + \dots \\ 0 = \alpha_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^3 + \alpha_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^3 + \alpha_3 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^3 + \dots \\ 0 = \dots \end{cases} \quad (4.8)$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов ФДН необходимо решить следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^1 & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^1 & \dots & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n+1-k}}{h} \right)^1 \\ 0 & \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^2 & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^2 & \dots & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n+1-k}}{h} \right)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^k & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^k & \dots & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n+1-k}}{h} \right)^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Матрица данной системы похожа на транспонированную матрицу Вандермонда. Найдём теперь коэффициенты a_x и b_x в уравнении (4.1). Выразим $x(t_{n+1-i})$ через восходящие разности:

$$\begin{cases} x(t_{n-k+2}) = x(t_{n-k+1}) + dX(t_{n-k+1}) \\ x(t_{n-k+3}) = x(t_{n-k+1}) + dX(t_{n-k+1}) + dX(t_{n-k+2}) \\ \dots \\ x(t_n) = x(t_{n-k+1}) + dX(t_{n-k+1}) + \dots + dX(t_{n-2}) + dX(t_{n-1}) \\ x(t_{n+1}) = x(t_{n-k+1}) + dX(t_{n-k+1}) + \dots + dX(t_{n-1}) + dX(t_n) \end{cases} \quad (4.10)$$

Подставим x из (4.10) в (4.1):

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{h} \cdot \sum_{i=0}^k \alpha_i \cdot x(t_{n+1-i}) = \\
& = -\frac{1}{h} \cdot \left\{ \alpha_0 \cdot \left[x(t_{n-k+1}) + dX(t_{n-k+1}) + \dots + dX(t_{n-1}) + dX(t_n) \right] + \right. \\
& + \alpha_1 \cdot \left[x(t_{n-k+1}) + dX(t_{n-k+1}) + \dots + dX(t_{n-2}) + dX(t_{n-1}) \right] + \dots + \\
& \left. + \alpha_{k-1} \cdot \left[x(t_{n-k+1}) + dX(t_{n-k+1}) \right] + \alpha_k \cdot x(t_{n-k+1}) \right\}. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{h} \cdot \sum_{i=0}^k \alpha_i \cdot x(t_{n+1-i}) = \\
& = -\frac{1}{h} \cdot \left\{ \alpha_0 \cdot dX(t_n) + (\alpha_0 + \alpha_1) \cdot dX(t_{n-1}) + \dots + \right. \\
& \quad + (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}) \cdot dX(t_{n-k+1}) + \\
& \quad \left. + (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} + \alpha_k) \cdot x(t_{n-k+1}) \right\}. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Согласно первому уравнению системы (4.8) $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} + \alpha_k = 0$. С учётом этого можно (4.12) записать в сокращённом виде:

$$x'(t_{n+1}) = -\frac{1}{h} \cdot \sum_{i=0}^k \alpha_i \cdot x(t_{n+1-i}) = -\frac{1}{h} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \alpha'_i \cdot dX(t_{n-i}), \quad (4.13)$$

где

$$\alpha'_i = \sum_{j=0}^i \alpha_j. \quad (4.14)$$

Перепишем (4.13) в следующем виде

$$x'(t_{n+1}) = -\frac{1}{h} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \alpha'_i \cdot dX(t_{n-i}) = -\frac{1}{h} \cdot \alpha'_0 \cdot dX(t_n) - \frac{1}{h} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \alpha'_i \cdot dX(t_{n-i}), \quad (4.15)$$

поэтому

$$a_x = -\frac{1}{h} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \alpha'_i \cdot dX(t_{n-i}); b_x = -\frac{1}{h} \cdot \alpha'_0 = -\frac{1}{h} \cdot \alpha_0. \quad (4.16)$$

Проиллюстрируем полученные уравнения на примере формулы дифференцирования назад 2-го порядка ($k=2$). В этом случае

$$\frac{dx(t_{n+1})}{d\tau} \approx -\frac{1}{h} \cdot \left(\alpha_0 \cdot x(t_{n+1}) + \alpha_1 \cdot x(t_n) + \alpha_2 \cdot x(t_{n-1}) \right), \quad (4.17)$$

где коэффициенты α_i находятся из следующей системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \left(\frac{t_{n+1}-t_n}{h}\right)^1 & \left(\frac{t_{n+1}-t_{n-1}}{h}\right)^1 \\ 0 & \left(\frac{t_{n+1}-t_n}{h}\right)^2 & \left(\frac{t_{n+1}-t_{n-1}}{h}\right)^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Чтобы решить эту систему, необходимо запоминать предыдущий момент времени t_{n-1} и знать прогнозируемый следующий момент времени t_{n+1} . После нахождения α определяем коэффициенты a_x и b_x :

$$\begin{aligned} \alpha'_0 &= \alpha_0; \\ \alpha'_1 &= \alpha_0 + \alpha_1; \\ \frac{dx(t_{n+1})}{d\tau} &\approx -\frac{1}{h} \cdot (\alpha'_0 \cdot dX(t_n) + \alpha'_1 \cdot dX(t_{n-1})) = a_x + b_x \cdot dX(t_n); \\ a_x &= -\frac{1}{h} \cdot \alpha'_1 \cdot dX(t_{n-1}); b_x = -\frac{1}{h} \cdot \alpha'_0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Видно, что α_2 непосредственно не используется, но оно необходимо, чтобы найти α_0 и α_1 . Кроме того, необходимо запоминать предыдущее значение восходящей разности $dX(t_{n-1})$. Если предположить, что шаг по времени в течение двух временных шагов не изменялся и равнялся h , то, решая вручную систему (4.18), найдём

$$\begin{cases} \alpha_0 = -3/2 \\ \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1/2. \end{cases}$$

Тогда для производной получим

$$\begin{aligned} \frac{dx(t_{n+1})}{d\tau} &\approx -\frac{1}{h} \cdot \left(-\frac{3}{2} \cdot x(t_{n+1}) + 2 \cdot x(t_n) - \frac{1}{2} \cdot x(t_{n-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot x(t_{n+1}) - 2 \cdot x(t_n) + \frac{1}{2} \cdot x(t_{n-1}) \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

что совпадает с выражением для формулы дифференцирования назад, полученной в [2, стр. 110]. Если переписать (4.20) через восходящие разности, то получим:

$$\frac{dx(t_{n+1})}{d\tau} \approx -\frac{1}{h} \cdot \left(-\frac{3}{2} \cdot dX(t_n) + \frac{1}{2} \cdot dX(t_{n-1}) \right) = \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot dX(t_n) - \frac{1}{2} \cdot dX(t_{n-1}) \right). \quad (4.21)$$

Особенностью использования ФДН является наличие так называемого ”разгонного участка” в начале расчёта, когда количество пройденных шагов по времени меньше выбранного порядка метода. В теплогидравлическом коде предусмотрено правильное прохождение разгонного участка с постепенным увеличением текущего порядка метода до выбранного.

4.2. Прогноз для неизвестных на следующем временном слое

В алгоритме расчёта используется прогнозирование значений на следующем временном слое по найденным значениям в предыдущие моменты времени. Получим некоторые общие выражения метода прогнозирования.

Предположим, что значение функции на следующем шаге по времени можно выразить через значения на нескольких предыдущих шагах в следующем виде:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \sum_{i=0}^k \beta_i \cdot x(t_{n-i}). \quad (4.22)$$

Разложим функцию $x(t_{n+1})$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t = t_{n+1}$. Получим:

$$x(t_{n-i}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{(j)}(t_{n+1})}{j!} \cdot \left(\frac{t_{n-i} - t_{n+1}}{h} \right)^j \cdot h^j, \quad (4.23)$$

где h может быть вообще говоря любым числом, но в данном случае мы будем считать, что h — текущий шаг по времени, то есть $h = t_{n+1} - t_n$.

Подставим (4.23) в (4.22), поменяв в нём местами временные отметки. Тогда будем иметь

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \sum_{i=0}^k \beta_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot \frac{x^{(j)}(t_{n+1})}{j!} \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-i}}{h} \right)^j \cdot h^j. \quad (4.24)$$

Выпишем несколько первых слагаемых двойной суммы в правой части:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^k \beta_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot \frac{x^{(j)}(t_{n+1})}{j!} \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-i}}{h} \right)^j \cdot h^j = \\ & = \beta_0 \cdot \left\{ 1 \cdot x(t_{n+1}) - 1 \cdot \frac{x'(t_{n+1})}{1!} \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^1 h^1 + 1 \cdot \frac{x''(t_{n+1})}{2!} \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^2 h^2 - \dots \right\} + \\ & + \beta_1 \cdot \left\{ 1 \cdot x(t_{n+1}) - 1 \cdot \frac{x'(t_{n+1})}{1!} \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^1 h^1 + 1 \cdot \frac{x''(t_{n+1})}{2!} \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^2 h^2 - \dots \right\} + \\ & + \beta_2 \cdot \left\{ 1 \cdot x(t_{n+1}) - 1 \cdot \frac{x'(t_{n+1})}{1!} \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^1 h^1 + 1 \cdot \frac{x''(t_{n+1})}{2!} \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^2 h^2 - \dots \right\} + \\ & + \dots \quad (4.25) \end{aligned}$$

Перегруппируем члены, выделив множители перед $x(t_{n+1})$, $x'(t_{n+1})$, $x''(t_{n+1})$ и так далее. Получим:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^k \beta_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot \frac{x^{(j)}(t_{n+1})}{j!} \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-i}}{h} \right)^j \cdot h^j = \\
& = x(t_{n+1}) \cdot [\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots] + \\
& + x'(t_{n+1}) \cdot \left[-\beta_0 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^1 \cdot h^1 - \beta_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^1 \cdot h^1 - \beta_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^1 \cdot h^1 - \dots \right] + \\
& + x''(t_{n+1}) \cdot \left[\beta_0 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \beta_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \beta_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \dots \right] + \dots
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Разложим $x(t_n)$ в ряд Тейлора в окрестности точки t_{n+1} :

$$x(t_n) = x(t_{n+1}) + \frac{x'(t_{n+1})}{1!} \cdot (-h) + \frac{x''(t_{n+1})}{2!} \cdot (-h)^2 + \frac{x'''(t_{n+1})}{3!} \cdot (-h)^3 + \dots \tag{4.27}$$

Подставим выражения (4.26) и (4.27) в (4.24). Получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
x(t_{n+1}) &= x(t_{n+1}) \cdot [1 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots] - \\
&- x'(t_{n+1}) \cdot h \cdot \left[1 + \beta_0 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^1 + \beta_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^1 + \beta_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^1 + \dots \right] + \\
&+ x''(t_{n+1}) \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot \left[1 + \beta_0 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^2 + \beta_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^2 + \beta_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^2 + \dots \right] - \dots
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Сравнивая левую и правую части, получим следующую систему уравнений для нахождения неизвестных β_i :

$$\begin{cases} 1 = 1 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots \\ 0 = 1 + \beta_0 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^1 + \beta_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^1 + \beta_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^1 + \dots \\ 0 = 1 + \beta_0 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{h} \right)^2 + \beta_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^2 + \beta_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^2 + \dots \\ \dots \end{cases} \tag{4.29}$$

С учётом того, что $\frac{t_{n+1} - t_n}{h} = 1$, систему (4.29) можно представить в следующем матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1^1 & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^1 & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^1 & \dots & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-k}}{h} \right)^1 \\ 1^2 & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^2 & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^2 & \dots & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-k}}{h} \right)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^k & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h} \right)^k & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h} \right)^k & \dots & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-k}}{h} \right)^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

Рассмотрим исходное уравнение (4.22):

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \beta_0 x(t_n) + \beta_1 x(t_{n-1}) + \beta_2 x(t_{n-2}) + \dots = (1 + \beta_0)x(t_n) + \beta_1 x(t_{n-1}) + \beta_2 x(t_{n-2}) + \dots$$

Обозначим $1 + \beta_0 = \beta_0^*$. Тогда $\beta_0 = \beta_0^* - 1$. Подставим β_0^* вместо β_0 в систему (4.29). Тогда получим:

$$\begin{cases} 1 = 1 + \beta_0^* - 1 + \beta_1 + \beta_2 + \dots \\ 0 = 1 + (\beta_0^* - 1) \cdot 1^1 + \beta_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h}\right)^1 + \beta_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h}\right)^1 + \dots \\ 0 = 1 + (\beta_0^* - 1) \cdot 1^2 + \beta_1 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h}\right)^2 + \beta_2 \cdot \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h}\right)^2 + \dots \\ \dots \end{cases} \quad (4.31)$$

Получается, что система (4.30) оказывается эквивалентной следующей системе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1^1 & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h}\right)^1 & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h}\right)^1 & \dots & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-k}}{h}\right)^1 \\ 1^2 & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h}\right)^2 & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h}\right)^2 & \dots & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-k}}{h}\right)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^k & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{h}\right)^k & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-2}}{h}\right)^k & \dots & \left(\frac{t_{n+1} - t_{n-k}}{h}\right)^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Матрица полученной системы похожа на матрицу с определителем Вандермонда. Рассмотрим вопрос о нахождении значения функции на следующем шаге по времени через приращения функции на предыдущих шагах по времени.

Выразим $x(t_{n-i})$ через восходящие разности:

$$\begin{cases} x(t_{n-k+1}) = x(t_{n-k}) + dX(t_{n-k}) \\ x(t_{n-k+2}) = x(t_{n-k}) + dX(t_{n-k}) + dX(t_{n-k+1}) \\ \dots \\ x(t_{n-1}) = x(t_{n-k}) + dX(t_{n-k}) + \dots + dX(t_{n-3}) + dX(t_{n-2}) \\ x(t_n) = x(t_{n-k}) + dX(t_{n-k}) + \dots + dX(t_{n-2}) + dX(t_{n-1}) \end{cases} \quad (4.33)$$

Подставим $x(t_{n-i})$ из (4.33) в (4.22):

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) = & x(t_n) + \beta_0 \cdot [x(t_{n-k}) + dX(t_{n-k}) + \dots + dX(t_{n-2}) + dX(t_{n-1})] + \\ & + \beta_1 \cdot [x(t_{n-k}) + dX(t_{n-k}) + \dots + dX(t_{n-3}) + dX(t_{n-2})] + \dots \\ & + \beta_{k-1} \cdot [x(t_{n-k}) + dX(t_{n-k})] + \beta_k \cdot x(t_{n-k}). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) = & x(t_n) + \beta_0 \cdot dX(t_{n-1}) + (\beta_0 + \beta_1) \cdot dX(t_{n-2}) + \dots + \\ & + (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{k-1}) \cdot dX(t_{n-k}) + (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{k-1} + \beta_k) \cdot x(t_{n-k}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Согласно первому уравнению (4.30) $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{k-1} + \beta_k = 0$, поэтому член с $x(t_{n-k})$ отбрасываем. Заменим β_0 на $\beta_0^* - 1$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) = & x(t_n) + (-1 + \beta_0^*) \cdot dX(t_{n-1}) + (-1 + \beta_0^* + \beta_1) \cdot dX(t_{n-2}) + \dots + \\ & + (-1 + \beta_0^* + \beta_1 + \dots + \beta_{k-1}) \cdot dX(t_{n-k}) = x(t_n) + \sum_{i=1}^k \beta'_{i-1} \cdot dX(t_{n-i}), \end{aligned} \quad (4.36)$$

где

$$\beta'_{i-1} = -1 + \sum_{j=1}^i \beta_{j-1}, \quad (4.37)$$

а вместо β_0 используется β_0^* .

5. Разностные уравнения сохранения

При конечно-разностной аппроксимации уравнений сохранения реализованы следующие основные принципы:

- в основе пространственной дискретизации уравнений лежит метод контрольного объёма. При этом разностные уравнения сохранения массы и энергии составляются балансным методом в консервативной форме;
- по пространственной координате используется смещённая (шахматная) сетка. Схема разбиения показана на рисунке 2.1;
- аппроксимация конвективных членов переноса массы и энергии осуществлена по схеме против потока;
- используется полунеявная численная схема аппроксимации по времени;
- решение общей теплогидравлической задачи ”расщеплено” на последовательное решение гидравлической и тепловой задач.

5.1. Уравнение сохранения массы

Найдём конечно-разностный аналог уравнения сохранения массы (для ячейки или для узла). Для этого рассмотрим уравнение сохранения массы для контрольного объёма (3.14). При этом для упрощения записи отнесём объёмный источник массы R_m к массовым расходам, входящим в контрольный объём. Получим

$$f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_h \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{V} \cdot \sum_{j=1}^N G_j + \rho \cdot W \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} - f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_p \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau}. \quad (5.1)$$

Запишем производные энтальпии и давления по формуле дифференцирования назад:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_j^{n+1}}{\partial \tau} = a_j^P + b_j^P \cdot dP_j^n; \\ \frac{\partial h_j^{n+1}}{\partial \tau} = a_j^h + b_j^h \cdot dh_j^n. \end{cases}$$

Сумму расходов разделим на сумму входящих расходов и сумму выходящих:

$$\sum_{j=1}^N G_j = \sum_{j=1}^{N_{in}} G_j - \sum_{j=1}^{N_{out}} G_j.$$

Каждый из расходов запишем в виде суммы расхода на предыдущем шаге по времени и восходящую разность как $G_j^{n+1} = G_j^n + dG_j^n$. Подставим всё это в уравнение (5.1). Получим

$$f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_h \cdot (a_j^P + b_j^P \cdot dP_j^n) = \frac{1}{V} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_{in}} (G_j^n + dG_j^n) - \sum_{j=1}^{N_{out}} (G_j^n + dG_j^n) \right) + \\ + \rho \cdot W \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} - f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_p \cdot (a_j^h + b_j^h \cdot dh_j^n). \quad (5.2)$$

Умножим обе части уравнения на объём ячейки V и перегруппируем слагаемые следующим образом

$$-1 \cdot \sum_{j=1}^{N_{in}} dG_j^n + V \cdot f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_h \cdot b_j^P \cdot dP_j^n + 1 \cdot \sum_{j=1}^{N_{out}} dG_j^n + V \cdot f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_p \cdot b_j^h \cdot dh_j^n + \\ + \left(V \cdot f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_h \cdot a_j^P + V \cdot f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_p \cdot a_j^h - \rho \cdot W \cdot L \cdot \frac{\partial S}{\partial x} - \sum_{j=1}^{N_{in}} G_j^n + \sum_{j=1}^{N_{out}} G_j^n \right) = 0. \quad (5.3)$$

Получим окончательно конечно-разностное уравнение сохранения массы для контрольного объёма в виде

$$\boxed{A_j^P \cdot \sum_{j=1}^{N_{in}} dG_j^n + B_j^P \cdot dP_j^n + C_j^P \cdot \sum_{j=1}^{N_{out}} dG_j^n + D_j^P \cdot dh_j^n + E_j^P = 0 = F_j^P}, \quad (5.4)$$

$$\text{где } A_j^P = -1; B_j^P = V \cdot f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_h \cdot b_j^P; C_j^P = 1; D_j^P = V \cdot f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_p \cdot b_j^h; \\ E_j^P = V \cdot f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_h \cdot a_j^P + V \cdot f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_p \cdot a_j^h - \rho \cdot W \cdot L \cdot \frac{\partial S}{\partial x} - \sum_{j=1}^{N_{in}} G_j^n + \sum_{j=1}^{N_{out}} G_j^n.$$

5.2. Уравнение сохранения импульса

Найдём конечно-разностный аналог уравнения сохранения импульса, записанный для левой границы j -ой ячейки. Для этого рассмотрим уравнение сохранения импульса для гидравлической связи (3.25). Заменим производную расхода по формуле дифференцирования назад

$$\frac{\partial G_j^{n+1}}{\partial \tau} = a_j^G + b_j^G \cdot dG_j^n. \quad (5.5)$$

Запишем потери на трение и на преодоление местных сопротивлений в следующем виде:

$$\Delta P_{fr} + \Delta P_{loc} = \left(\frac{\lambda \cdot \frac{L}{2}}{d_g} + \xi \right)_{in} \cdot \frac{\rho_{in} \cdot w_{in}^2}{2} + \left(\frac{\lambda \cdot \frac{L}{2}}{d_g} + \xi \right)_{out} \cdot \frac{\rho_{out} \cdot w_{out}^2}{2}. \quad (5.6)$$

В этой формуле учитываются потери на трение на половине длины входной и выходной ячеек, а также потери на преодоление местных сопротивлений по обе стороны от гидравлической связи. Скорость жидкости можно переписать через массовый расход как $w = \frac{G}{\rho \cdot S}$.

Запишем потери на трение в полунявном виде с использованием массового расхода на текущем и на следующем шаге по времени в виде

$$\Delta P_{fr} + \Delta P_{loc} = \left\{ \left[\left(\frac{\lambda \cdot \frac{L}{2}}{d_g} + \xi \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho \cdot S^2} \right]_{in} + \left[\left(\frac{\lambda \cdot \frac{L}{2}}{d_g} + \xi \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho \cdot S^2} \right]_{out} \right\} \times \\ \times |G_j^n| \cdot G_j^{n+1} = F_{fr}^n \cdot |G_j^n| \cdot G_j^{n+1}, \quad (5.7)$$

где F_{fr}^n — приведённый коэффициент трения, рассчитанный по параметрам на текущем шаге по времени.

Запишем нивелирные потери (величину, обратную нивелирному напору) в следующем виде

$$\Delta P_{niv} = -H_{niv} = \rho_{in}^n \cdot g \cdot \frac{\Delta Z_{in}}{2} + \rho_{out}^n \cdot g \cdot \frac{\Delta Z_{out}}{2}, \quad (5.8)$$

где ΔZ_{in} и ΔZ_{out} — изменение высоты в ячейке на входе гидравлической связи и на выходе гидравлической связи соответственно. Таким образом, если изменение высоты будет положительным, то необходимо будет затратить энергию на подъём жидкости при движении её в положительном направлении.

Напор насоса запишем в виде

$$H_{pump} = \Delta P_{pump} + \min \left(\frac{\partial P_{pump}}{\partial G_j}, 0 \right) \cdot dG_j^n. \quad (5.9)$$

Подставим (5.5), (5.7) и (5.9) в (3.25). Получим

$$J_j \cdot (a_j^G + b_j^G \cdot dG_j^n) = P_{j-1}^{n+1} - P_j^{n+1} - F_{fr}^n \cdot |G_j^n| \cdot G_j^{n+1} - \Delta P_{acc} - \Delta P_{niv} + \\ + \Delta P_{pump} + \min \left(\frac{\partial P_{pump}}{\partial G_j}, 0 \right) \cdot dG_j^n. \quad (5.10)$$

Запишем вместо G_j^{n+1} в правой части его выражение через приращение на шаге по времени и значение на предыдущем шаге: $G_j^{n+1} = G_j^n + dG_j^n$. Кроме того, поскольку все уравнения сохранения в теплогидравлическом коде решаются в отклонениях, запишем давления в ячейках, примыкающих к гидравлической связи, через их приращения и значения на предыдущем шаге по времени:

$$\begin{cases} P_{j-1}^{n+1} = P_{j-1}^n + dP_{j-1}^n; \\ P_j^{n+1} = P_j^n + dP_j^n. \end{cases}$$

Подставим эти выражения в (5.10):

$$J_j \cdot (a_j^G + b_j^G \cdot dG_j^n) = (P_{j-1}^n + dP_{j-1}^n) - (P_j^n + dP_j^n) - F_{fr}^n \cdot |G_j^n| \cdot (G_j^n + dG_j^n) - \\ - \Delta P_{acc} - \Delta P_{niv} + \Delta P_{pump} + \min \left(\frac{\partial P_{pump}}{\partial G_j}, 0 \right) \cdot dG_j^n. \quad (5.11)$$

Перегруппируем слагаемые и перепишем полученное уравнение в следующем виде

$$\begin{aligned} -1 \cdot dP_{j-1}^n + \left(J_j \cdot b_j^G + F_{fr}^n \cdot |G_j^n| - \min \left(\frac{\partial P_{pump}}{\partial G_j}, 0 \right) \right) \cdot dG_j^n + 1 \cdot dP_j^n + \\ + \left(J_j \cdot a_j^G - P_{j-1}^n + P_j^n + F_{fr}^n \cdot |G_j^n| \cdot G_j^n + \Delta P_{acc} + \Delta P_{niv} - \Delta P_{pump} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Получим окончательно конечно-разностное уравнение сохранения импульса для гидравлической связи в виде

$$\boxed{A_j^G \cdot dP_{j-1}^n + B_j^G \cdot dG_j^n + C_j^G \cdot dP_j^n + D_j^G = 0 = F_j^G}, \quad (5.13)$$

где $A_j^G = -1$; $B_j^G = J_j \cdot b_j^G + F_{fr}^n \cdot |G_j^n| - \min \left(\frac{\partial P_{pump}}{\partial G_j}, 0 \right)$; $C_j^G = 1$;
 $D_j^G = J_j \cdot a_j^G - P_{j-1}^n + P_j^n + F_{fr}^n \cdot |G_j^n| \cdot G_j^n + \Delta P_{acc} + \Delta P_{niv} - \Delta P_{pump}$.

5.3. Уравнение сохранения энергии

Найдём конечно-разностный аналог уравнения сохранения энергии. Для этого рассмотрим уравнение для контрольного объёма (ячейки либо узла) в виде (3.37). Заменим производные энтальпии и давления по формуле дифференцирования назад. Перепишем сумму, содержащую сумму расходов в гидравлических связях, следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{N_{gc}} \mu_k \cdot G_k \cdot (h_k - h_j) = \sum_{k=1}^{N_{in}} \mu_k \cdot G_k \cdot (h_k - h_j) - \sum_{k=1}^{N_{out}} (1 - \mu_k) \cdot G_k \cdot (h_k - h_j). \quad (5.14)$$

Таким образом, если выходящий расход больше нуля, то во второй сумме $\mu_k = 1$ и соответствующее слагаемое обнуляется, а если выходящий расход меньше нуля, то он становится входящим и вносит свой вклад в общую сумму.

Расходы запишем через сумму расходов на предыдущем шаге по времени и соответствующей восходящей разности. Кроме того, отнесём источник массы R_m в соответствующую сумму расходов (в зависимости от его знака). Сумму всех входящих в контрольный объём тепловых потоков для упрощения запишем в виде

$$V \cdot Q + Q_{wall} + Q_{ax} = Q + \min \left(\frac{\partial Q}{\partial h_j^n}, 0 \right) \cdot dh_j^n.$$

В итоге получим:

$$\begin{aligned} \rho \cdot V \cdot (a_j^h + b_j^h \cdot dh_j^n) = \sum_{k=1}^{N_{in}} \mu_k \cdot (G_k^n + dG_k^n) \cdot (h_k - h_j) - \\ - \sum_{k=1}^{N_{out}} (1 - \mu_k) \cdot (G_k^n + dG_k^n) \cdot (h_k - h_j) + V \cdot (a_j^P + b_j^P \cdot dP_j^n) + Q + \min \left(\frac{\partial Q}{\partial h_j^n}, 0 \right) \cdot dh_j^n. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^{N_{in}} \mu_k \cdot (h_k - h_j) \cdot dG_k^n + \left(\rho \cdot V \cdot b_j^h - \min \left(\frac{\partial Q}{\partial h_j^n}, 0 \right) \right) \cdot dh_j^n + \\
& + \sum_{k=1}^{N_{out}} (1 - \mu_k) \cdot (h_k - h_j) \cdot dG_k^n - V \cdot b_j^p \cdot dP_j^n + \left(\rho \cdot V \cdot a_j^h - \right. \\
& \left. - \sum_{k=1}^{N_{in}} \mu_k \cdot G_k^n \cdot (h_k - h_j) + \sum_{k=1}^{N_{out}} (1 - \mu_k) \cdot G_k^n \cdot (h_k - h_j) - V \cdot a_j^p - Q \right) = 0.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Получим окончательно конечно-разностное уравнение сохранения энергии для контрольного объёма в виде

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N_{in}} A_{kj}^h \cdot dG_k^n + B_j^h \cdot dh_j^n + \sum_{k=1}^{N_{out}} C_{kj}^h \cdot dG_k^n + D_j^h \cdot dP_j^n + E_j^h = 0 = F_j^h}, \tag{5.17}$$

где $A_{kj}^h = -\mu_k \cdot (h_k - h_j)$; $B_j^h = \rho \cdot V \cdot b_j^h - \min \left(\frac{\partial Q}{\partial h_j^n}, 0 \right)$; $C_{kj}^h = (1 - \mu_k) \cdot (h_k - h_j)$; $D_j^h = -V \cdot b_j^p$; $E_j^h = \rho \cdot V \cdot a_j^h - \sum_{k=1}^{N_{in}} \mu_k \cdot G_k^n \cdot (h_k - h_j) + \sum_{k=1}^{N_{out}} (1 - \mu_k) \cdot G_k^n \cdot (h_k - h_j) - V \cdot a_j^p - Q$.

В полученные дискретных аналогах (5.4), (5.13) и (5.17) член F_j равен разности левой и правой части соответствующего уравнения сохранения.

уравнений (6.1) заменится следующей системой:

[illegible]

являющейся линейной системой относительно погрешностей Δx_i . Решая систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (6.4), вычислим следующее приближение искомого решения

$$x_i^{(r+1)} = x_i^{(r)} + \Delta x_i. \quad (6.5)$$

Каждое приближение будет отличаться от точного решения, так как исходная система уравнений была линеаризована, но погрешности Δx_i на каждом приближении будут становиться всё меньше и меньше. В математической теории доказывается, что если начальное приближение выбрано достаточно хорошо и матрица СЛАУ (6.4) на каждой итерации достаточно хорошо обусловлена и имеет обратную матрицу, то метод Ньютона-Рафсона сходится к единственному в данной окрестности решению и, кроме того, имеет квадратичную сходимость. После очередной итерации погрешность каждой неизвестной уменьшается примерно на один или два порядка.

Запишем СЛАУ (6.4) в матричном виде

$$\frac{dF(x^{(r)})}{dx} \cdot (x^{(r+1)} - x^{(r)}) = -f(x^{(r)}), \quad (6.6)$$

где $\frac{dF(x^{(r)})}{dx}$ — матрица Якоби, которая одновременно является матрицей СЛАУ (6.4); $f(x^{(r)})$ — вектор-столбец значений функций (6.1); $x^{(r)}$ — вектор-столбец неизвестных на r -м приближении.

Из уравнения (6.6) можно получить рекуррентное соотношение для нахождения неизвестных в матричной форме:

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} - \left(\frac{dF(x^{(r)})}{dx} \right)^{-1} \cdot f(x^{(r)}). \quad (6.7)$$

Запишем каждое уравнение сохранения импульса типа (5.13) в виде, аналогичном (6.1):

$$F_j^G = A_j^G \cdot dP_{j-1}^n + B_j^G \cdot dG_j^n + C_j^G \cdot dP_j^n + D_j^G = 0 \quad (6.8)$$

Выполняя преобразования, такие же, как при выводе метода Ньютона-Рафсона, получим систему уравнений вида

$$\frac{\partial F_j^G(x^{(r)})}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial F_j^G(x^{(r)})}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \frac{\partial F_j^G(x^{(r)})}{\partial x_3} \cdot \Delta x_3 = -F_j^G(x^{(r)}), \quad (6.9)$$

где вектор неизвестных $x^{(r)} = [x_1, x_2, x_3]^T$; функция $F_j^G = A_j^G \cdot x_1 + B_j^G \cdot x_2 + C_j^G \cdot x_3 + D_j^G$; искомые неизвестные есть $x_1 = dP_{j-1}^n$; $x_2 = dG_j^n$; $x_3 = dP_j^n$, а искомые приращения неизвестных на текущей итерации: $\Delta x_1 = dP_{j-1}^{n,(r+1)} - dP_{j-1}^{n,(r)}$, $\Delta x_2 = dG_j^{n,(r+1)} - dG_j^{n,(r)}$, $\Delta x_3 = dP_j^{n,(r+1)} - dP_j^{n,(r)}$, где r — номер итерации на текущем шаге по времени.

Найдём составляющие матрицы Якоби для рассматриваемой системы. Уравнение сохранения импульса переписано в виде линейной комбинации неизвестных, поэтому производные по неизвестным равны множителям перед ними, то есть просто

$$\begin{cases} \frac{\partial F_j^G(x^{(r)})}{\partial x_1} = A_j^G; \\ \frac{\partial F_j^G(x^{(r)})}{\partial x_2} = B_j^G; \\ \frac{\partial F_j^G(x^{(r)})}{\partial x_3} = C_j^G. \end{cases} \quad (6.10)$$

В итоге получим уравнение сохранения импульса в следующем виде

$$A_j^G \cdot \Delta(dP_{j-1}^n) + B_j^G \cdot \Delta(dG_j^n) + C_j^G \cdot \Delta(dP_j^n) = -F_j^G(x^{(r)}). \quad (6.11)$$

Аналогично получаем для уравнения сохранения массы

$$A_j^P \cdot \Delta(dG_{j,in}^n) + B_j^P \cdot \Delta(dP_j^n) + C_j^P \cdot \Delta(dG_{j,out}^n) + D_j^P \cdot \Delta(dh_j^n) = -F_j^P(x^{(r)}) \quad (6.12)$$

и для уравнения сохранения энергии

$$A_j^h \cdot \Delta(dG_{j,in}^n) + B_j^h \cdot \Delta(dh_j^n) + C_j^h \cdot \Delta(dG_{j,out}^n) + D_j^h \cdot \Delta(dP_j^n) = -F_j^h(x^{(r)}). \quad (6.13)$$

Рассмотрим несколько соседних контрольных объёмов в канале и запишем для них систему уравнений сохранения массы, импульса и энергии:

$$\begin{cases} A_j^P \cdot \Delta(dG_{j,in}^n) + B_j^P \cdot \Delta(dP_j^n) + C_j^P \cdot \Delta(dG_{j,out}^n) + D_j^P \cdot \Delta(dh_j^n) = -F_j^P(x^{(r)}) \\ A_j^h \cdot \Delta(dG_{j,in}^n) + B_j^h \cdot \Delta(dh_j^n) + C_j^h \cdot \Delta(dG_{j,out}^n) + D_j^h \cdot \Delta(dP_j^n) = -F_j^h(x^{(r)}) \\ A_j^G \cdot \Delta(dP_{j-1}^n) + B_j^G \cdot \Delta(dG_j^n) + C_j^G \cdot \Delta(dP_j^n) = -F_j^G(x^{(r)}). \end{cases} \quad (6.14)$$

Проведём некоторые преобразования полученной системы. Выразим из уравнения сохранения энергии приращение энтальпии:

$$\Delta(dh_j^n) = \frac{-F_j^h(x^{(r)}) - A_j^h \cdot \Delta(dG_{j,in}^n) - C_j^h \cdot \Delta(dG_{j,out}^n) - D_j^h \cdot \Delta(dP_j^n)}{B_j^h} \quad (6.15)$$

и подставим его в уравнение сохранения массы. Получим

$$A_j^P \cdot \Delta(dG_{j,in}^n) + B_j^P \cdot \Delta(dP_j^n) + C_j^P \cdot \Delta(dG_{j,out}^n) - \frac{D_j^P}{B_j^h} \cdot \left(F_j^h(x^{(r)}) + A_j^h \cdot \Delta(dG_{j,in}^n) + C_j^h \cdot \Delta(dG_{j,out}^n) + D_j^h \cdot \Delta(dP_j^n) \right) = -F_j^P(x^{(r)}). \quad (6.16)$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\left(A_j^P - \frac{D_j^P}{B_j^h} \cdot A_j^h \right) \cdot \Delta(dG_{j,in}^n) + \left(B_j^P - \frac{D_j^P}{B_j^h} \cdot D_j^h \right) \cdot \Delta(dP_j^n) + \left(C_j^P - \frac{D_j^P}{B_j^h} \cdot C_j^h \right) \cdot \Delta(dG_{j,out}^n) = - \left(F_j^P(x^{(r)}) - \frac{D_j^P}{B_j^h} \cdot F_j^h(x^{(r)}) \right). \quad (6.17)$$

Переобозначим коэффициенты, добавив штрих. Тогда (6.17) можно будет записать в виде

$$\left(A_j^P \right)' \cdot \Delta(dG_{j,in}^n) + \left(B_j^P \right)' \cdot \Delta(dP_j^n) + \left(C_j^P \right)' \cdot \Delta(dG_{j,out}^n) = - \left(F_j^P \right)', \quad (6.18)$$

избавившись таким образом от приращения энтальпии в уравнении сохранения массы.

7. Метод расчёта поля давления в контуре произвольной топологии

Вначале получим уравнения для связи давления во всех расчётных ячейках канала с давлениями в ограничивающих этот канал узлах. Затем получим систему уравнений для давлений в узлах. Основные идеи излагаемого метода были впервые описаны в диссертации [3].

7.1. Связь давлений в ячейках канала с давлениями в узлах

Рассмотрим канал, состоящий из N контрольных объёмов, пронумерованных от 0 до $N - 1$. Слева канал ограничен входным узлом с давлением P_{in} , а справа — выходным узлом с давлением P_{out} . Первая гидравлическая связь, связывающая входной узел с первой расчётной ячейкой канала, имеет номер 0, а последняя гидравлическая связь, связывающая последнюю расчётную ячейку канала с выходным узлом — номер N . Общее количество гидравлических связей — $N + 1$.

Запишем уравнения сохранения массы и импульса в форме (6.18) и (6.11) для трёх соседних расчётных ячеек с номерами $j - 1$, j и $j + 1$. Гидравлические связи между ними будут иметь номера j и $j + 1$. Тогда имеем систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} A_j^G \cdot \Delta(dP_{j-1}^n) + B_j^G \cdot \Delta(dG_j^n) + C_j^G \cdot \Delta(dP_j^n) = -F_j^G \\ (A_j^P)' \cdot \Delta(dG_j^n) + (B_j^P)' \cdot \Delta(dP_j^n) + (C_j^P)' \cdot \Delta(dG_{j+1}^n) = -(F_j^P)' \\ A_{j+1}^G \cdot \Delta(dP_j^n) + B_{j+1}^G \cdot \Delta(dG_{j+1}^n) + C_{j+1}^G \cdot \Delta(dP_{j+1}^n) = -F_{j+1}^G. \end{cases} \quad (7.1)$$

Выразим из первого и третьего уравнения расходы в гидравлических связях через давления в ячейках:

$$\begin{cases} \Delta(dG_j^n) = -\frac{F_j^G + A_j^G \cdot \Delta(dP_{j-1}^n) + C_j^G \cdot \Delta(dP_j^n)}{B_j^G} \\ \Delta(dG_{j+1}^n) = -\frac{F_{j+1}^G + A_{j+1}^G \cdot \Delta(dP_j^n) + C_{j+1}^G \cdot \Delta(dP_{j+1}^n)}{B_{j+1}^G}. \end{cases} \quad (7.2)$$

Подставим полученные выражения в уравнение сохранения массы для j -й ячейки:

$$\begin{aligned} & -\frac{(A_j^P)'}{B_j^G} \cdot (F_j^G + A_j^G \cdot \Delta(dP_{j-1}^n) + C_j^G \cdot \Delta(dP_j^n)) + (B_j^P)' \cdot \Delta(dP_j^n) - \\ & -\frac{(C_j^P)'}{B_{j+1}^G} \cdot (F_{j+1}^G + A_{j+1}^G \cdot \Delta(dP_j^n) + C_{j+1}^G \cdot \Delta(dP_{j+1}^n)) = -(F_j^P)'. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Раскроем скобки и приведём подобные члены перед давлениями. Получим

$$\begin{aligned} & \left(- (A_j^P)' \cdot \frac{A_j^G}{B_j^G} \right) \cdot \Delta(dP_{j-1}^n) + \left(- (A_j^P)' \cdot \frac{C_j^G}{B_j^G} + (B_j^P)' - (C_j^P)' \cdot \frac{A_{j+1}^G}{B_{j+1}^G} \right) \cdot \Delta(dP_j^n) + \\ & + \left(- (C_j^P)' \cdot \frac{C_{j+1}^G}{B_{j+1}^G} \right) \cdot \Delta(dP_{j+1}^n) = - \left((F_j^P)' - \frac{(A_j^P)'}{B_j^G} \cdot F_j^G - \frac{(C_j^P)'}{B_{j+1}^G} \cdot F_{j+1}^G \right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Переобозначим коэффициенты, поставив два штриха. Окончательно получим уравнение, связывающее давления в трёх соседних ячейках канала:

$$\boxed{(A_j^P)'' \cdot \Delta(dP_{j-1}^n) + (B_j^P)'' \cdot \Delta(dP_j^n) + (C_j^P)'' \cdot \Delta(dP_{j+1}^n) = - (F_j^P)''}. \quad (7.5)$$

Получилось трёхточечное уравнение. Система таких уравнений эффективно решается методом прогонки. Предположим, что неизвестные приращения давлений связаны рекуррентным соотношением

$$\Delta(dP_j^n) = \beta_{j+1} \cdot \Delta(dP_{j+1}^n) + \alpha_{j+1}. \quad (7.6)$$

Используя это соотношение, выразим $\Delta(dP_{j-1}^n)$ и $\Delta(dP_j^n)$ через $\Delta(dP_{j+1}^n)$:

$$\begin{cases} \Delta(dP_j^n) = \beta_{j+1} \cdot \Delta(dP_{j+1}^n) + \alpha_{j+1} \\ \Delta(dP_{j-1}^n) = \beta_j \cdot \Delta(dP_j^n) + \alpha_j = \beta_j \cdot (\beta_{j+1} \cdot \Delta(dP_{j+1}^n) + \alpha_{j+1}) + \alpha_j. \end{cases} \quad (7.7)$$

Подставим (7.7) в (7.5). Получим

$$\begin{aligned} & (A_j^P)'' \cdot (\beta_j \cdot \beta_{j+1} \cdot \Delta(dP_{j+1}^n) + \beta_j \cdot \alpha_{j+1} + \alpha_j) + (B_j^P)'' \cdot (\beta_{j+1} \cdot \Delta(dP_{j+1}^n) + \alpha_{j+1}) + \\ & + (C_j^P)'' \cdot \Delta(dP_{j+1}^n) = - (F_j^P)''; \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} & \left((A_j^P)'' \cdot \beta_j \cdot \beta_{j+1} + (B_j^P)'' \cdot \beta_{j+1} + (C_j^P)'' \right) \cdot \Delta(dP_{j+1}^n) + \\ & + \left((A_j^P)'' \cdot \beta_j \cdot \alpha_{j+1} + (A_j^P)'' \cdot \alpha_j + (B_j^P)'' \cdot \alpha_{j+1} + (F_j^P)'' \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Чтобы это равенство выполнялось независимо от решения, необходимо, чтобы удовлетворялись следующие равенства:

$$\begin{cases} (A_j^P)'' \cdot \beta_j \cdot \beta_{j+1} + (B_j^P)'' \cdot \beta_{j+1} + (C_j^P)'' = 0 \\ (A_j^P)'' \cdot \beta_j \cdot \alpha_{j+1} + (A_j^P)'' \cdot \alpha_j + (B_j^P)'' \cdot \alpha_{j+1} + (F_j^P)'' = 0. \end{cases} \quad (7.10)$$

Отсюда следуют рекуррентные соотношения для нахождения прогоночных коэффициентов:

$$\begin{cases} \beta_{j+1} = \frac{-(C_j^P)''}{(A_j^P)'' \cdot \beta_j + (B_j^P)''}; \\ \alpha_{j+1} = \frac{-(F_j^P)'' - (A_j^P)'' \cdot \alpha_j}{(A_j^P)'' \cdot \beta_j + (B_j^P)''}. \end{cases} \quad (7.11)$$

Из уравнения для первой ячейки канала находим

$$\begin{aligned} (A_0^P)'' \cdot \Delta(dP_{in}^n) + (B_0^P)'' \cdot \Delta(dP_0^n) + (C_0^P)'' \cdot \Delta(dP_1^n) &= -(F_0^P)''; \\ \Delta(dP_0^n) &= -\frac{(C_0^P)''}{(B_0^P)''} \cdot \Delta(dP_1^n) + \frac{-(F_0^P)'' - (A_0^P)'' \cdot \Delta(dP_{in}^n)}{(B_0^P)''}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

но $\Delta(dP_0^n) = \beta_1 \cdot \Delta(dP_1^n) + \alpha_1$, поэтому получаем для первых прогоночных коэффициентов выражения

$$\begin{cases} \beta_1 = -\frac{(C_0^P)''}{(B_0^P)''}; \\ \alpha_1 = -\frac{(F_0^P)'' + (A_0^P)'' \cdot \Delta(dP_{in}^n)}{(B_0^P)''}. \end{cases} \quad (7.13)$$

Выразим прогоночные коэффициенты α_j через давление во входном узле. Можно показать справедливость следующего тождества:

$$\alpha_{j+1} = \omega_j \cdot \Delta(dP_{in}^n) + u_j, \quad (7.14)$$

где коэффициенты ω_j и u_j находятся из следующих рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} \omega_{j+1} = \frac{(A_{j+1}^P)'' \cdot \omega_j}{-(B_{j+1}^P)'' - (A_{j+1}^P)'' \cdot \beta_{j+1}}; \\ u_{j+1} = \frac{(A_{j+1}^P)'' \cdot u_j + (F_{j+1}^P)''}{-(B_{j+1}^P)'' - (A_{j+1}^P)'' \cdot \beta_{j+1}}, \end{cases} \quad (7.15)$$

и, кроме того,

$$\begin{cases} \omega_0 = -\frac{(A_0^P)''}{(B_0^P)''}; \\ u_0 = -\frac{(F_0^P)''}{(B_0^P)''}. \end{cases} \quad (7.16)$$

Выразим давления в ячейках канала через давление в выходном узле, начиная с последней ячейки с номером $N - 1$. Для этого используем уравнение (7.6):

$$\begin{aligned} \Delta(dP_{N-1}^n) &= \beta_N \cdot \Delta(dP_{out}^n) + \alpha_N; \\ \Delta(dP_{N-2}^n) &= \beta_{N-1} \cdot \Delta(dP_{N-1}^n) + \alpha_{N-1} = \beta_{N-1} \cdot (\beta_N \cdot \Delta(dP_{out}^n) + \alpha_N) + \alpha_{N-1} = \\ &= \beta_{N-1} \cdot \beta_N \cdot \Delta(dP_{out}^n) + (\beta_{N-1} \cdot \alpha_N + \alpha_{N-1}); \\ \Delta(dP_{N-3}^n) &= \beta_{N-2} \cdot \Delta(dP_{N-2}^n) + \alpha_{N-2} = \\ &= \beta_{N-2} \cdot (\beta_{N-1} \cdot \beta_N \cdot \Delta(dP_{out}^n) + (\beta_{N-1} \cdot \alpha_N + \alpha_{N-1})) + \alpha_{N-2} = \\ &= \beta_{N-2} \cdot \beta_{N-1} \cdot \beta_N \cdot \Delta(dP_{out}^n) + (\beta_{N-2} \cdot \beta_{N-1} \cdot \alpha_N + \beta_{N-2} \cdot \alpha_{N-1} + \alpha_{N-2}) \end{aligned} \quad (7.17)$$

и так далее вплоть до первой ячейки, для которой получим

$$\Delta(dP_0^n) = B \cdot \Delta(dP_{out}^n) + A, \quad (7.18)$$

где $B = \beta_N \cdot \beta_{N-1} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1$;

$A = \alpha_N \cdot \beta_{N-1} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1 + \alpha_{N-1} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1 + \dots + \alpha_2 \cdot \beta_1 + \alpha_1$.

Подставим в выражение для A вместо α_j их выражения из уравнения (7.14). Получим

$$\begin{aligned} A = & (\omega_{N-1} \cdot \Delta(dP_{in}^n) + u_{N-1}) \cdot \beta_{N-1} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1 + \\ & + (\omega_{N-2} \cdot \Delta(dP_{in}^n) + u_{N-2}) \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1 + \dots + \\ & + (\omega_1 \cdot \Delta(dP_{in}^n) + u_1) \cdot \beta_1 + (\omega_0 \cdot \Delta(dP_{in}^n) + u_0). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые с давлением $\Delta(dP_{in}^n)$ и все остальные. Тогда

$$\begin{aligned} A = & (\omega_{N-1} \cdot \beta_{N-1} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1 + \omega_{N-2} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1 + \dots + \\ & + \omega_1 \cdot \beta_1 + \omega_0) \cdot \Delta(dP_{in}^n) + (u_{N-1} \cdot \beta_{N-1} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1 + \\ & + u_{N-2} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1 + \dots + u_1 \cdot \beta_1 + u_0). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Подставляя (7.20) в (7.18), получим окончательно для первой расчётной ячейки канала выражение

$$\Delta(dP_0^n) = S_0^0 + S_0^1 \cdot \Delta(dP_{in}^n) + S_0^2 \cdot \Delta(dP_{out}^n), \quad (7.21)$$

где $S_0^0 = u_{N-1} \cdot \beta_{N-1} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1 + u_{N-2} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1 + \dots + u_1 \cdot \beta_1 + u_0$;

$S_0^1 = \omega_{N-1} \cdot \beta_{N-1} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1 + \omega_{N-2} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1 + \dots + \omega_1 \cdot \beta_1 + \omega_0$;

$S_0^2 = \beta_N \cdot \beta_{N-1} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_1$.

Для последней расчётной ячейки канала получим из первого уравнения (7.17)

$$\begin{aligned} \Delta(dP_{N-1}^n) = & \beta_N \cdot \Delta(dP_{out}^n) + \alpha_N = \beta_N \cdot \Delta(dP_{out}^n) + (\omega_{N-1} \cdot \Delta(dP_{in}^n) + u_{N-1}) = \\ = & S_{N-1}^0 + S_{N-1}^1 \cdot \Delta(dP_{in}^n) + S_{N-1}^2 \cdot \Delta(dP_{out}^n), \end{aligned} \quad (7.22)$$

где $S_{N-1}^0 = u_{N-1}$; $S_{N-1}^1 = \omega_{N-1}$; $S_{N-1}^2 = \beta_N$.

Аналогично можно получить общее выражение для произвольной j -й ячейки. Оно будет иметь вид

$$\Delta(dP_j^n) = S_j^0 + S_j^1 \cdot \Delta(dP_{in}^n) + S_j^2 \cdot \Delta(dP_{out}^n), \quad (7.23)$$

где $S_j^0 = u_{N-1} \cdot \beta_{N-1} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_{j+1} + u_{N-2} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_{j+1} + \dots + u_{j+1} \cdot \beta_{j+1} + u_j$;

$S_j^1 = \omega_{N-1} \cdot \beta_{N-1} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_{j+1} + \omega_{N-2} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_{j+1} + \dots + \omega_{j+1} \cdot \beta_{j+1} + \omega_j$;

$S_j^2 = \beta_N \cdot \beta_{N-1} \cdot \beta_{N-2} \dots \beta_{j+1}$.

Можно усмотреть некую аналогию вычисления коэффициентов S_j и метода прогонки. Действительно, сначала при прямом ходе вычисляются коэффициенты ω_j и u_j , а затем при обратном ходе находятся коэффициенты S_j . При этом справедливы следующие рекуррентные

соотношения:

$$\begin{aligned} S_{N-1}^0 &= u_{N-1}; S_j^0 = u_j + S_{j+1}^0 \cdot \beta_{j+1}; \\ S_{N-1}^1 &= \omega_{N-1}; S_j^1 = \omega_j + S_{j+1}^1 \cdot \beta_{j+1}; \\ S_{N-1}^2 &= \beta_N; S_j^2 = S_{j+1}^2 \cdot \beta_{j+1}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

7.2. Уравнения для давлений в узлах

В теплогидравлической схеме принципиально в любой узел может входить и выходить произвольное количество рёбер. Основная идея алгоритма состоит в следующем:

- для всех узлов записываются уравнения сохранения импульса для последних гидравлических связей входящих рёбер и для первых гидравлических связей выходящих рёбер. Эти уравнения содержат давления в узлах и в последних расчётных ячейках входящих рёбер и в первых расчётных ячейках выходящих рёбер;
- для всех узлов вместо давлений в первых и в последних расчётных ячейках рёбер подставляются их выражения согласно уравнениям (7.21) и (7.22). В результате в уравнениях сохранения импульса остаются только расходы в гидравлических связях, примыкающих к узлам, и давления в узлах;
- из полученных уравнений выражаются расходы в гидравлических связях через давления в узлах;
- эти расходы подставляются в уравнения сохранения массы для узлов. В результате этой подстановки для узлов получаются уравнения, содержащие давления в данном узле и всех связанных с ним узлов. Если решить полученную систему каким-либо методом, то найдём давления в узлах на следующем шаге по времени.

В нашем случае давления в граничных узлах считаются известными, и поэтому для них составлять соответствующее уравнение в общей системе не нужно. Найдём общий вид уравнения для внутреннего узла. Рассмотрим внутренний узел, в который входит N_{in} рёбер и из которого выходят N_{out} рёбер (рисунок 7.1).

В процессе анализа топологии расчётной схемы для узла составляются следующие списки:

1. ToList — список входящих в узел рёбер;
2. FrList — список выходящих из узла рёбер;
3. UzelList — список, содержащий имена данного узла и всех связанных с ним узлов;
4. ToIndexes — список, содержащий локальные номера узлов из списка ToList;
5. FrIndexes — список, содержащий локальные номера узлов из списка FrList,

а также массив cJas глобальных номеров узлов из списка UzelList.

Запишем уравнения сохранения импульса для последних гидравлических связей рёбер, входящих в рассматриваемый узел:

$$(A_N^G)_{k_1} \cdot (\Delta(dP_{N-1}^n))_{k_1} + (B_N^G)_{k_1} \cdot (\Delta(dG_N^n))_{k_1} + (C_N^G)_{k_1} \cdot \Delta(dP_u^n) = (-F_N^G)_{k_1}, \quad (7.25)$$

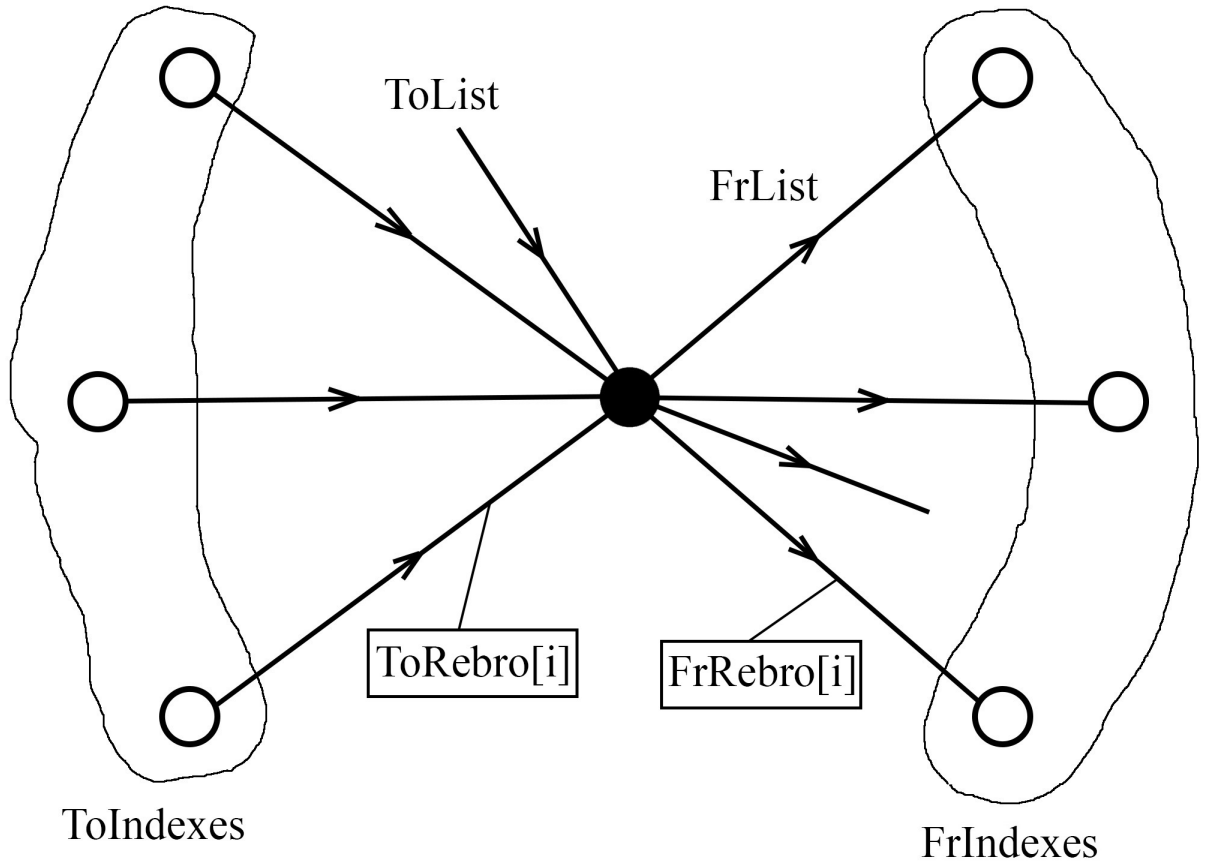


Рис. 7.1 — СХЕМА СВЯЗЕЙ ДЛЯ УЗЛА

где k_1 — номер входящего ребра; $N - 1$ — номер последней расчётной ячейки входящего в узел ребра; N — номер последней гидравлической связи входящего в узел ребра; dP_u^n — давление в рассматриваемом узле.

Запишем уравнения сохранения импульса для первых гидравлических связей рёбер, выходящих из рассматриваемого узла:

$$(A_0^G)_{k_2} \cdot \Delta(dP_u^n) + (B_0^G)_{k_2} \cdot (\Delta(dG_0^n))_{k_2} + (C_0^G)_{k_2} \cdot (\Delta(dP_0^n))_{k_2} = (-F_0^G)_{k_2}, \quad (7.26)$$

где k_2 — номер выходящего ребра; 0 — номер первой ячейки выходящего из узла ребра и номер первой гидравлической связи.

Подставим в уравнения сохранения импульса вместо давлений в ячейках, примыкающих к узлу, их выражения через давления во входном и выходном узлах канала. Тогда для входящих рёбер получим

$$(A_N^G)_{k_1} \cdot [(S_{N-1}^0)_{k_1} + (S_{N-1}^1)_{k_1} \Delta(dP_{u_{in}}^n)_{k_1} + (S_{N-1}^2)_{k_1} \Delta(dP_u^n)] + (B_N^G)_{k_1} \cdot (\Delta(dG_N^n))_{k_1} + (C_N^G)_{k_1} \cdot \Delta(dP_u^n) = (-F_N^G)_{k_1}, \quad (7.27)$$

а для выходящих рёбер —

$$(A_0^G)_{k_2} \cdot \Delta(dP_u^n) + (B_0^G)_{k_2} \cdot (\Delta(dG_0^n))_{k_2} + (C_0^G)_{k_2} \cdot [(S_0^0)_{k_2} + (S_0^1)_{k_2} \Delta(dP_u^n) + (S_0^2)_{k_2} \Delta(dP_{u_{out}}^n)_{k_2}] = (-F_0^G)_{k_2}, \quad (7.28)$$

где $(dP_{u_{in}}^n)_{k_1}$ — давление в узле на входе в k_1 -е входящее ребро, а $(dP_{u_{out}}^n)_{k_2}$ — давление в узле на выходе из k_2 -го выходящего ребра.

Выразим из полученных уравнений расходы в гидравлических связях:

$$\begin{aligned} (\Delta(dG_N^n))_{k_1} &= \frac{1}{(B_N^G)_{k_1}} \cdot \left[(-F_N^G)_{k_1} - (A_N^G)_{k_1} \cdot [(S_{N-1}^0)_{k_1} + (S_{N-1}^1)_{k_1} \Delta(dP_{u_{in}}^n)_{k_1} + \right. \\ &\quad \left. + (S_{N-1}^2)_{k_1} \Delta(dP_u^n)] - (C_N^G)_{k_1} \Delta(dP_u^n) \right]; \\ (\Delta(dG_0^n))_{k_2} &= \frac{1}{(B_0^G)_{k_2}} \cdot \left[(-F_0^G)_{k_2} - (A_0^G)_{k_2} \Delta(dP_u^n) - \right. \\ &\quad \left. - (C_0^G)_{k_2} \cdot [(S_0^0)_{k_2} + (S_0^1)_{k_2} \Delta(dP_u^n) + (S_0^2)_{k_2} \Delta(dP_{u_{out}}^n)_{k_2}] \right]. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые с давлениями в узлах и все остальные. Получим

$$\begin{aligned} (\Delta(dG_N^n))_{k_1} &= \frac{1}{(B_N^G)_{k_1}} \cdot \left[[(-F_N^G)_{k_1} - (A_N^G)_{k_1} (S_{N-1}^0)_{k_1}] - (A_N^G)_{k_1} (S_{N-1}^1)_{k_1} \Delta(dP_{u_{in}}^n)_{k_1} - \right. \\ &\quad \left. - [(A_N^G)_{k_1} (S_{N-1}^2)_{k_1} + (C_N^G)_{k_1}] \Delta(dP_u^n) \right]; \\ (\Delta(dG_0^n))_{k_2} &= \frac{1}{(B_0^G)_{k_2}} \cdot \left[[(-F_0^G)_{k_2} - (C_0^G)_{k_2} (S_0^0)_{k_2}] - [(A_0^G)_{k_2} + (C_0^G)_{k_2} (S_0^1)_{k_2}] \Delta(dP_u^n) - \right. \\ &\quad \left. - (C_0^G)_{k_2} (S_0^2)_{k_2} \Delta(dP_{u_{out}}^n)_{k_2} \right]. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Подставим эти расходы в уравнение сохранения массы для узла вида (6.18)

$$\begin{aligned} (A_k^p)' \cdot \sum_{j=1}^{K1} \frac{1}{(B_N^G)_j} \cdot \left[[(-F_N^G)_j - (A_N^G)_j (S_{N-1}^0)_j] - (A_N^G)_j (S_{N-1}^1)_j \Delta(dP_{u_{in}}^n)_j - \right. \\ \left. - [(A_N^G)_j (S_{N-1}^2)_j + (C_N^G)_j] \Delta(dP_u^n) \right] + (B_k^p)' \cdot \Delta(dP_u^n) + \\ + (C_k^p)' \cdot \sum_{j=1}^{K2} \frac{1}{(B_0^G)_j} \cdot \left[[(-F_0^G)_j - (C_0^G)_j (S_0^0)_j] - [(A_0^G)_j + (C_0^G)_j (S_0^1)_j] \Delta(dP_u^n) - \right. \\ \left. - (C_0^G)_j (S_0^2)_j \Delta(dP_{u_{out}}^n)_j \right] = - (F_k^p)', \end{aligned} \quad (7.31)$$

где k — номер рассматриваемого узла; $K1$ — количество входящих в рассматриваемый узел рёбер; $K2$ — количество выходящих из рассматриваемого узла рёбер.

Выделим из полученного уравнения члены перед давлениями в соседних узлах, перед давлением в данном узле, и свободный член. Тогда будем иметь:

- множитель перед давлениями во входящих узлах

$$(A_k^P)_j^* = (A_k^P)' \cdot \frac{1}{(B_N^G)_j} \cdot [-(A_N^G)_j(S_{N-1}^1)_j]; \quad (7.32)$$

- множитель перед давлениями в выходящих узлах

$$(C_k^P)_j^* = (C_k^P)' \cdot \frac{1}{(B_0^G)_j} \cdot [-(C_0^G)_j(S_0^2)_j]; \quad (7.33)$$

- множитель перед давлением в рассматриваемом узле

$$\begin{aligned} (B_k^P)^* &= (B_k^P)' + (A_k^P)' \cdot \sum_{j=1}^{K1} \frac{-1}{(B_N^G)_j} \cdot [(A_N^G)_j(S_{N-1}^2)_j + (C_N^G)_j] + \\ &+ (C_k^P)' \cdot \sum_{j=1}^{K2} \frac{-1}{(B_0^G)_j} \cdot [(A_0^G)_j + (C_0^G)_j(S_0^1)_j]; \end{aligned} \quad (7.34)$$

- свободный член

$$\begin{aligned} (F_k^P)^* &= (F_k^P)' + (A_k^P)' \cdot \sum_{j=1}^{K1} \frac{-1}{(B_N^G)_j} \cdot [(F_N^G)_j + (A_N^G)_j(S_{N-1}^0)_j] + \\ &+ (C_k^P)' \cdot \sum_{j=1}^{K2} \frac{-1}{(B_0^G)_j} \cdot [(F_0^G)_j + (C_0^G)_j(S_0^0)_j]. \end{aligned} \quad (7.35)$$

С использованием сокращённых обозначений (7.32) – (7.35) окончательно уравнение сохранения массы для узла запишем в виде

$$\sum_{j=1}^{K1} (A_k^P)_j^* \cdot \Delta(dP_{u_{in}}^n)_j + (B_k^P)^* \cdot \Delta(dP_k^n) + \sum_{j=1}^{K2} (C_k^P)_j^* \cdot \Delta(dP_{u_{out}}^n)_j = -(F_k^P)^*. \quad (7.36)$$

Если записать эти уравнения для всех внутренних узлов схемы, то получится СЛАУ относительно давлений в узлах. Размер матрицы этой СЛАУ будет равен $n \times n$, где n — общее количество внутренних узлов в схеме. Ненулевыми в каждой строке этой матрицы будут члены, соответствующие тем узлам, с которыми связан узел этой строки, и член, соответствующий самому узлу этой строки. Если решить СЛАУ каким-либо способом, то найдём погрешности для давлений в узлах на r -й итерации на текущем шаге по времени.

По найденным погрешностям для давлений в узлах найдём по уравнениям (7.23) погрешности для давлений во всех расчётных ячейках всех каналов. Затем по уравнениям метода Ньютона-Рафсона (6.5) можно перейти на $(r+1)$ -ю итерацию на текущем шаге по времени.

По утверждению автора диссертации [3] этот метод расчёта поля давления в контуре произвольной топологии, названный им ”безытерационным”, ”превосходит известные классические методы решения полной системы уравнений относительно давлений в расчётных ячейках разветвлённого контура циркуляции более чем на порядок по быстродействию”.

Например, в диссертации приводятся результаты сравнения быстродействия предложенного метода относительно метода разреженных матриц библиотеки NAG для условий, когда количество точек ветвления значительно меньше общего количества расчётных ячеек. Показано, что безытерационный метод расчёта поля давления приблизительно в 17 раз превосходит метод разреженных матриц библиотеки NAG, и этот показатель не зависит от количества расчётных ячеек.

Следует, однако, учитывать, что в диссертации метод предлагается для расчёта двухфазных течений по более сложной физической модели по сравнению с заложенной в теплогидравлический код SimInTech, и, кроме того, там не рассматривается использование итерационного метода Ньютона-Рафсона (или какого-либо другого) для определения искомых величин на каждом шаге по времени. Одним словом, вопрос быстродействия метода требует отдельного исследования.

8. Метод расчёта поля энтальпии в контуре произвольной топологии

В первой версии теплогидравлического кода решение уравнений движения и энергии на каждом шаге по времени осуществляется последовательно, то есть вначале из уравнений сохранения массы и импульса находится поле давления и расходы в контуре на следующей итерации, а затем по новым значениям расходов и давлений рассчитывается поле энтальпий. Таким образом, используется своеобразный метод расщепления по физическим процессам.

Получим уравнения для связи энтальпий во всех расчётных ячейках канала с энтальпиями в ограничивающих этот канал узлах.

8.1. Связь энтальпий в ячейках канала с энтальпиями в узлах

Вновь рассмотрим уравнение сохранения энергии (3.37). Производную энтальпии в левой части заменим по формуле дифференцирования назад. Энтальпии в правой части распишем через значения на предыдущем шаге по времени и приращение на текущем шаге. Тогда уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \rho \cdot V \cdot (a_j^h + b_j^h \cdot dh_j^n) = \mu_j \cdot G_j^{n+1} \cdot (h_{j-1}^{n+1} - h_j^{n+1}) - \\ -(1 - \mu_{j+1}) \cdot G_{j+1}^{n+1} \cdot (h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}) + V \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} + Q; \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot V \cdot (a_j^h + b_j^h \cdot dh_j^n) = \mu_j \cdot G_j^{n+1} \cdot (h_{j-1}^n + dh_{j-1}^n - h_j^n - dh_j^n) - \\ -(1 - \mu_{j+1}) \cdot G_{j+1}^{n+1} \cdot (h_{j+1}^n + dh_{j+1}^n - h_j^n - dh_j^n) + V \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} + Q. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Выделим члены перед приращениями энтальпий:

$$\begin{aligned} -\mu_j G_j^{n+1} dh_{j-1}^n + \left[\rho V b_j^h + \mu_j G_j^{n+1} - (1 - \mu_{j+1}) G_{j+1}^{n+1} - \min\left(\frac{\partial Q}{\partial h_j^n}, 0\right) \right] dh_j^n + \\ +(1 - \mu_{j+1}) G_{j+1}^{n+1} dh_{j+1}^n + \left[\rho V a_j^h - V \frac{\partial P}{\partial \tau} - Q - \mu_j G_j^{n+1} (h_{j-1}^n - h_j^n) + \right. \\ \left. + (1 - \mu_{j+1}) G_{j+1}^{n+1} (h_{j+1}^n - h_j^n) \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Запишем это уравнение в сокращённом виде

$$A_j^h \cdot dh_{j-1}^n + B_j^h \cdot dh_j^n + C_j^h \cdot dh_{j+1}^n + D_j^h = 0 = F_j^h, \quad (8.4)$$

где $A_j^h = -\mu_j \cdot G_j^{n+1}$; $C_j^h = (1 - \mu_{j+1}) \cdot G_{j+1}^{n+1}$; $B_j^h = \rho \cdot V \cdot b_j^h - \min\left(\frac{\partial Q}{\partial h_j^n}, 0\right) - A_j^h - C_j^h$;
 $D_j^h = \rho \cdot V \cdot a_j^h - V \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} - Q - \mu_j \cdot G_j^{n+1} \cdot (h_{j-1}^n - h_j^n) + (1 - \mu_{j+1}) \cdot G_{j+1}^{n+1} \cdot (h_{j+1}^n - h_j^n)$.

Выполняя далее преобразования этого уравнения к виду, пригодному для решения итерационным методом Ньютона-Рафсона, получим

$$A_j^h \cdot \Delta(dh_{j-1}^n) + B_j^h \cdot \Delta(dh_j^n) + C_j^h \cdot \Delta(dh_{j+1}^n) = -F_j^h. \quad (8.5)$$

Полученное уравнение связывает энтальпии в трёх соседних расчётных ячейках канала и по форме оно аналогично уравнению (7.5). Это означает, что весь вывод, проведённый в подразделе 7.1, справедлив и для полученного уравнения, то есть можно использовать полученную методику для нахождения коэффициентов, связывающих приращения отклонений энтальпий в расчётных ячейках на текущей итерации с приращениями отклонений энтальпий в ограничивающих каналах узлов.

Получается, что можно для энтальпии в любой расчётной ячейке канала записать следующее уравнение:

$$\Delta(dh_j^n) = S_j^0 + S_j^1 \cdot \Delta(dh_{in}^n) + S_j^2 \cdot \Delta(dh_{out}^n). \quad (8.6)$$

8.2. Уравнения для энтальпий в узлах

Сделаем вывод, по сути аналогичный проведённому в подразделе 7.2. Рассмотрим уравнение (8.1) применительно к внутреннему узлу. В этом случае вместо одного входящего и выходящего расхода будет рассматриваться сумма по входам и выходам узла:

$$\begin{aligned} \rho \cdot V \cdot (a_k^h + b_k^h \cdot dh_k^n) = & \sum_{j=1}^{N_{in}} \mu_j \cdot G_j^{n+1} \cdot (h_j^{n+1} - h_k^{n+1}) - \\ & - \sum_{j=1}^{N_{out}} (1 - \mu_j) \cdot G_j^{n+1} \cdot (h_j^{n+1} - h_k^{n+1}) + V \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} + Q. \end{aligned} \quad (8.7)$$

В правой части распишем энтальпии через значение на предыдущем шаге по времени и приращение:

$$\begin{aligned} \rho \cdot V \cdot (a_k^h + b_k^h \cdot dh_k^n) = & \sum_{j=1}^{N_{in}} \mu_j \cdot G_j^{n+1} \cdot (h_j^n + dh_j^n - h_k^n - dh_k^n) - \\ & - \sum_{j=1}^{N_{out}} (1 - \mu_j) \cdot G_j^{n+1} \cdot (h_j^n + dh_j^n - h_k^n - dh_k^n) + V \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} + Q. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Сгруппируем множители перед приращениями энтальпии в узле и в граничных ячейках. Получим

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^{N_{in}} \mu_j \cdot G_j^{n+1} \cdot dh_j^n + \\
& + \left[\rho \cdot V \cdot b_k^h + \sum_{j=1}^{N_{in}} \mu_j \cdot G_j^{n+1} - \sum_{j=1}^{N_{out}} (1 - \mu_j) \cdot G_j^{n+1} - \min \left(\frac{\partial Q}{\partial h_k^n}, 0 \right) \right] \cdot dh_k^n + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{out}} (1 - \mu_j) \cdot G_j^{n+1} \cdot dh_j^n + \left[\rho \cdot V \cdot a_k^h - \sum_{j=1}^{N_{in}} \mu_j \cdot G_j^{n+1} \cdot (h_j^n - h_k^n) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{N_{out}} (1 - \mu_j) \cdot G_j^{n+1} \cdot (h_j^n - h_k^n) - V \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} - Q \right] = 0. \quad (8.9)
\end{aligned}$$

Запишем это уравнение в сокращённом виде:

$$\sum_{j=1}^{N_{in}} A_j^h \cdot dh_j^n + B_k^h \cdot dh_k^n + \sum_{j=1}^{N_{out}} C_j^h \cdot dh_j^n + D_k^h = 0 = F_k^h, \quad (8.10)$$

где $A_j^h = -\mu_j \cdot G_j^{n+1}$; $C_j^h = (1 - \mu_j) \cdot G_j^{n+1}$;

$B_k^h = \rho \cdot V \cdot b_k^h - \sum_{j=1}^{N_{in}} A_j^h - \sum_{j=1}^{N_{out}} C_j^h - \min \left(\frac{\partial Q}{\partial h_k^n}, 0 \right)$;

$D_k^h = \rho \cdot V \cdot a_k^h + \sum_{j=1}^{N_{in}} A_j^h \cdot (h_j^n - h_k^n) + \sum_{j=1}^{N_{out}} C_j^h \cdot (h_j^n - h_k^n) - V \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} - Q$.

Вновь, как и раньше, перейдём к приращениям отклонений на текущей итерации. Получим:

$$\sum_{j=1}^{N_{in}} A_j^h \cdot \Delta(dh_j^n) + B_k^h \cdot \Delta(dh_k^n) + \sum_{j=1}^{N_{out}} C_j^h \cdot \Delta(dh_j^n) = -F_k^h. \quad (8.11)$$

Подставим в полученное уравнение вместо энтальпий в последних ячейках входящих рёбер и первых ячейках выходящих рёбер их выражения через давления в узлах согласно уравнению (8.6). Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N_{in}} A_j^h \cdot \left((S_{N-1}^0)_j + (S_{N-1}^1)_j \cdot \Delta(dh_j^n) + (S_{N-1}^2)_j \cdot \Delta(dh_k^n) \right) + \\
& + B_k^h \cdot \Delta(dh_k^n) + \sum_{j=1}^{N_{out}} C_j^h \cdot \left((S_0^0)_j + (S_0^1)_j \cdot \Delta(dh_k^n) + (S_0^2)_j \cdot \Delta(dh_j^n) \right) = -F_k^h. \quad (8.12)
\end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые перед начальными узлами входящих рёбер, конечными узлами выходящих рёбер, и рассматриваемым узлом:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_{in}} A_j^h \cdot (S_{N-1}^1)_j \cdot \Delta(dh_j^n) + \left[B_k^h + \sum_{j=1}^{N_{in}} A_j^h \cdot (S_{N-1}^2)_j + \sum_{j=1}^{N_{out}} C_j^h \cdot (S_0^1)_j \right] \cdot \Delta(dh_k^n) + \\ + \sum_{j=1}^{N_{out}} C_j^h \cdot (S_0^2)_j \cdot \Delta(dh_j^n) = - \left(F_k^h + \sum_{j=1}^{N_{in}} A_j^h \cdot (S_{N-1}^0)_j + \sum_{j=1}^{N_{out}} C_j^h \cdot (S_0^0)_j \right). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Перепишем (8.13) в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{N_{in}} (A_j^h)^* \cdot \Delta(dh_j^n) + (B_k^h)^* \cdot \Delta(dh_k^n) + \sum_{j=1}^{N_{out}} (C_j^h)^* \cdot \Delta(dh_j^n) = -(F_k^h)^*, \quad (8.14)$$

где $(A_j^h)^* = A_j^h \cdot (S_{N-1}^1)_j$; $(B_k^h)^* = B_k^h + \sum_{j=1}^{N_{in}} A_j^h \cdot (S_{N-1}^2)_j + \sum_{j=1}^{N_{out}} C_j^h \cdot (S_0^1)_j$;
 $(C_j^h)^* = C_j^h \cdot (S_0^2)_j$; $(F_k^h)^* = F_k^h + \sum_{j=1}^{N_{in}} A_j^h \cdot (S_{N-1}^0)_j + \sum_{j=1}^{N_{out}} C_j^h \cdot (S_0^0)_j$.

В итоге получаем систему уравнений относительно энтальпий в узлах, решая которую каким-либо методом, найдём приращения отклонений энтальпий во всех внутренних узлах рассматриваемой схемы на текущей итерации.

9. Алгоритм основного метода расчёта

В этом заключительном разделе отчёта опишем, как в первой версии теплогидравлического кода реализован основной метод расчёта **Method_1**, который выполняет очередной шаг по времени при расчёте теплогидравлической схемы.

Приведём окончательный вид полученных в других разделах настоящего отчёта дискретных аналогов уравнений сохранения и входящих в них коэффициентов:

- уравнения сохранения массы и энергии для ячейки канала (6.18) и (6.13)

$$\left(A_j^P\right)' \cdot \Delta(dG_j^n) + \left(B_j^P\right)' \cdot \Delta(dP_j^n) + \left(C_j^P\right)' \cdot \Delta(dG_{j+1}^n) = -\left(F_j^P\right)';$$

$$A_j^h \cdot \Delta(dG_j^n) + B_j^h \cdot \Delta(dh_j^n) + C_j^h \cdot \Delta(dG_{j+1}^n) + D_j^h \cdot \Delta(dP_j^n) = -F_j^h,$$

где $\left(A_j^P\right)' = A_j^P - \frac{D_j^P}{B_j^h} \cdot A_j^h;$

$$\left(B_j^P\right)' = B_j^P - \frac{D_j^P}{B_j^h} \cdot D_j^h;$$

$$\left(C_j^P\right)' = C_j^P - \frac{D_j^P}{B_j^h} \cdot C_j^h;$$

$$\left(F_j^P\right)' = F_j^P - \frac{D_j^P}{B_j^h} \cdot F_j^h,$$

где $A_j^P = -1;$

$$B_j^P = V \cdot f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_h \cdot b_j^P;$$

$$C_j^P = 1;$$

$$D_j^P = V \cdot f_{comp} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_P \cdot b_j^h;$$

$$F_j^P = V \cdot f_{comp} \cdot \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_h \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \tau}\right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial \tau}\right) \right) - G_j + G_{j+1};$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}\right) = a_j^P + b_j^P \cdot (P_j^{n+1} - P_j^n); \left(\frac{\partial h}{\partial \tau}\right) = a_j^h + b_j^h \cdot (h_j^{(n+1)} - h_j^n);$$

$$A_j^h = -\mu_j \cdot (h_{j-1} - h_j);$$

$$B_j^h = \rho \cdot V \cdot b_j^h - \min\left(\frac{\partial Q}{\partial h_j^n}, 0\right);$$

$$C_j^h = (1 - \mu_{j+1}) \cdot (h_{j+1} - h_j);$$

$$D_j^h = -V \cdot b_j^P;$$

$$F_j^h = \rho \cdot V \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau} + A_j^h \cdot G_j + C_j^h \cdot G_{j+1} - V \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} - Q - \min\left(\frac{\partial Q}{\partial h_j^n}, 0\right) \cdot dh_j^n;$$

- уравнение сохранения импульса для гидравлической связи (6.11)

$$A_j^G \cdot \Delta(dP_{j-1}^n) + B_j^G \cdot \Delta(dG_j^n) + C_j^G \cdot \Delta(dP_j^n) = -F_j^G,$$

где $A_j^G = -1;$

$$B_j^G = J_j \cdot b_j^G + F_{fr}^n \cdot |G_j^n| - \min\left(\frac{\partial H_{pump}}{\partial G_j}, 0\right);$$

$$C_j^G = 1;$$

$$F_j^G = J_j \cdot \frac{\partial G_j}{\partial \tau} - P_{j-1} + P_j + \Delta P_{fr} + \Delta P_{acc} + \Delta P_{niv} - \Delta P_{pump} - \min\left(\frac{\partial P_{pump}}{\partial G_j}, 0\right) \cdot dG_j^n,$$

где $\Delta P_{fr} = F_{fr}^n \cdot |G_j^n| \cdot G_j^{n+1};$

$$F_{fr}^n = \left[\left(\frac{\lambda \cdot \frac{L}{2}}{d_g} + \xi \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho \cdot S^2} \right]_{in} + \left[\left(\frac{\lambda \cdot \frac{L}{2}}{d_g} + \xi \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho \cdot S^2} \right]_{out};$$

ΔP_{acc} — определяется по соответствующим справочным формулам для однофазного или двухфазного потока по параметрам в соседних с гидравлической связью расчётных ячеек;

$$\Delta P_{niv} = \rho_{j-1}^n \cdot g \cdot \frac{\Delta Z_{j-1}}{2} + \rho_j^n \cdot g \cdot \frac{\Delta Z_j}{2};$$

- уравнение сохранения энергии для контрольного объёма ((6.13) совместно с (5.17))

$$\sum_{k=1}^{N_{in}} A_{kj}^h \cdot \Delta(dG_{j,in}^n) + B_j^h \cdot \Delta(dh_j^n) + \sum_{k=1}^{N_{out}} C_{kj}^h \cdot \Delta(dG_{j,out}^n) + D_j^h \cdot \Delta(dP_j^n) = -F_j^h,$$

где $A_{kj}^h = -\mu_k \cdot (h_k - h_j);$

$$B_j^h = \rho \cdot V \cdot b_j^h - \min\left(\frac{\partial Q}{\partial h_j^n}, 0\right);$$

$$C_{kj}^h = (1 - \mu_k) \cdot (h_k - h_j);$$

$$D_j^h = -V \cdot b_j^p;$$

- уравнение для связи давлений в трёх соседних ячейках канала (7.5)

$$\left(A_j^p\right)'' \cdot \Delta(dP_{j-1}^n) + \left(B_j^p\right)'' \cdot \Delta(dP_j^n) + \left(C_j^p\right)'' \cdot \Delta(dP_{j+1}^n) = -\left(F_j^p\right)'',$$

где $\left(A_j^p\right)'' = -\left(A_j^p\right)' \cdot \frac{A_j^G}{B_j^G};$

$$\left(B_j^p\right)'' = \left(B_j^p\right)' - \left(A_j^p\right)' \cdot \frac{C_j^G}{B_j^G} - \left(C_j^p\right)' \cdot \frac{A_{j+1}^G}{B_{j+1}^G};$$

$$\left(C_j^p\right)'' = -\left(C_j^p\right)' \cdot \frac{C_{j+1}^G}{B_{j+1}^G};$$

$$\left(F_j^p\right)'' = \left(F_j^p\right)' - \frac{\left(A_j^p\right)'}{B_j^G} \cdot F_j^G - \frac{\left(C_j^p\right)'}{B_{j+1}^G} \cdot F_{j+1}^G;$$

- уравнение для связи энтальпий в трёх соседних ячейках канала (8.5)

$$A_j^h \cdot \Delta(dh_{j-1}^n) + B_j^h \cdot \Delta(dh_j^n) + C_j^h \cdot \Delta(dh_{j+1}^n) = -F_j^h,$$

где $A_j^h = -\mu_j \cdot G_j^{n+1};$

$$C_j^h = (1 - \mu_{j+1}) \cdot G_{j+1}^{n+1};$$

$$B_j^h = \rho \cdot V \cdot b_j^h - \min\left(\frac{\partial Q}{\partial h_j^n}, 0\right) - A_j^h - C_j^h;$$

$$F_j^h = \rho \cdot V \cdot \frac{\partial h}{\partial \tau} + A_j^h \cdot (h_{j-1} - h_j) + C_j^h \cdot (h_{j+1} - h_j) - V \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau} - Q - \min\left(\frac{\partial Q}{\partial h_j^n}, 0\right) \cdot dh_j^n;$$

- уравнение для давления в узле (уравнение сохранения массы для узла) (7.31)

$$\sum_{j=1}^{N_{in}} (A_k^P)_j^* \cdot \Delta(dP_{u_{in}}^n)_j + (B_k^P)^* \cdot \Delta(dP_u^n) + \sum_{j=1}^{N_{out}} (C_k^P)_j^* \cdot \Delta(dP_{u_{out}}^n)_j = -(F_k^P)^*,$$

$$\text{где } (A_k^P)_j^* = (A_k^P)' \cdot \frac{1}{(B_N^G)_j} \cdot [-(A_N^G)_j (S_{N-1}^1)_j];$$

$$(B_k^P)^* = (B_k^P)' + (A_k^P)' \cdot \sum_{j=1}^{N_{in}} \frac{-1}{(B_N^G)_j} \cdot [(A_N^G)_j (S_{N-1}^2)_j + (C_N^G)_j] + (C_k^P)' \cdot \sum_{j=1}^{N_{out}} \frac{-1}{(B_0^G)_j} \cdot [(A_0^G)_j + (C_0^G)_j (S_0^1)_j];$$

$$(C_k^P)_j^* = (C_k^P)' \cdot \frac{1}{(B_0^G)_j} \cdot [-(C_0^G)_j (S_0^2)_j];$$

$$(F_k^P)^* = (F_k^P)' - (A_k^P)' \cdot \sum_{j=1}^{N_{in}} \frac{1}{(B_N^G)_j} \cdot [(F_N^G)_j + (A_N^G)_j (S_{N-1}^0)_j] - (C_k^P)' \cdot \sum_{j=1}^{N_{out}} \frac{1}{(B_0^G)_j} \cdot [(F_0^G)_j + (C_0^G)_j (S_0^0)_j],$$

где N_{in} — количество рёбер, входящих в рассматриваемый узел; N_{out} — количество рёбер, выходящих из рассматриваемого узла, k — индекс рассматриваемого узла; S^0 , S^1 и S^2 — коэффициенты в выражении давления в ячейке канала через давления в ограничивающих этот канал узлах (уравнение (7.23));

- уравнение для энтальпии в узле (уравнение сохранения энергии для узла) (8.14)

$$\sum_{j=1}^{N_{in}} (A_j^h)^* \cdot \Delta(dh_j^n) + (B_k^h)^* \cdot \Delta(dh_k^n) + \sum_{j=1}^{N_{out}} (C_j^h)^* \cdot \Delta(dh_j^n) = -(F_k^h)^*,$$

$$\text{где } (A_j^h)^* = A_j^h \cdot (S_{N-1}^1)_j;$$

$$(B_k^h)^* = B_k^h + \sum_{j=1}^{N_{in}} A_j^h \cdot (S_{N-1}^2)_j + \sum_{j=1}^{N_{out}} C_j^h \cdot (S_0^1)_j;$$

$$(C_j^h)^* = C_j^h \cdot (S_0^2)_j;$$

$$(F_k^h)^* = F_k^h + \sum_{j=1}^{N_{in}} A_j^h \cdot (S_{N-1}^0)_j + \sum_{j=1}^{N_{out}} C_j^h \cdot (S_0^0)_j,$$

где S^0 , S^1 и S^2 — коэффициенты в выражении энтальпии в ячейке канала через энтальпии в ограничивающих этот канал узлах (уравнение (8.6)).

На рисунках 9.1 – 9.7 приведена блок-схема алгоритм метода выполнения шага расчёта с достаточно подробными комменариями. Отметим, что при определении, достигнута ли достаточная точность решения для перехода на следующих шаг по времени, используется сравнение прогнозного решения и фактически найденного. Если отличие этих двух решений велико, то это означает, что в пределах шага по времени произошли какие-то существенные изменения параметров, и поэтому шаг интегрирования следует уменьшить, а затем повторить решение с меньшим шагом.

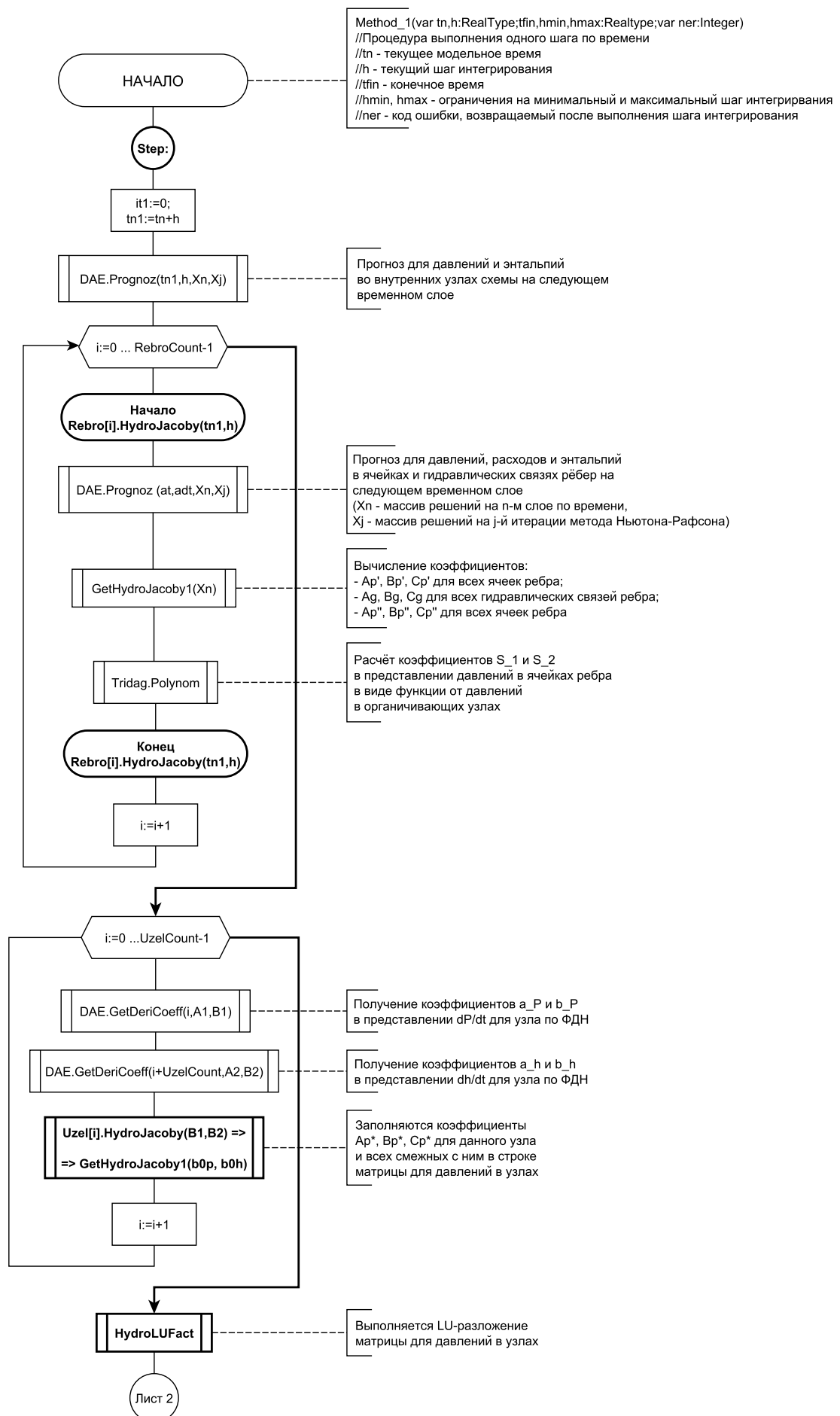


Рис. 9.1 — Блок-схема алгоритма выполнения шага расчёта (лист 1)

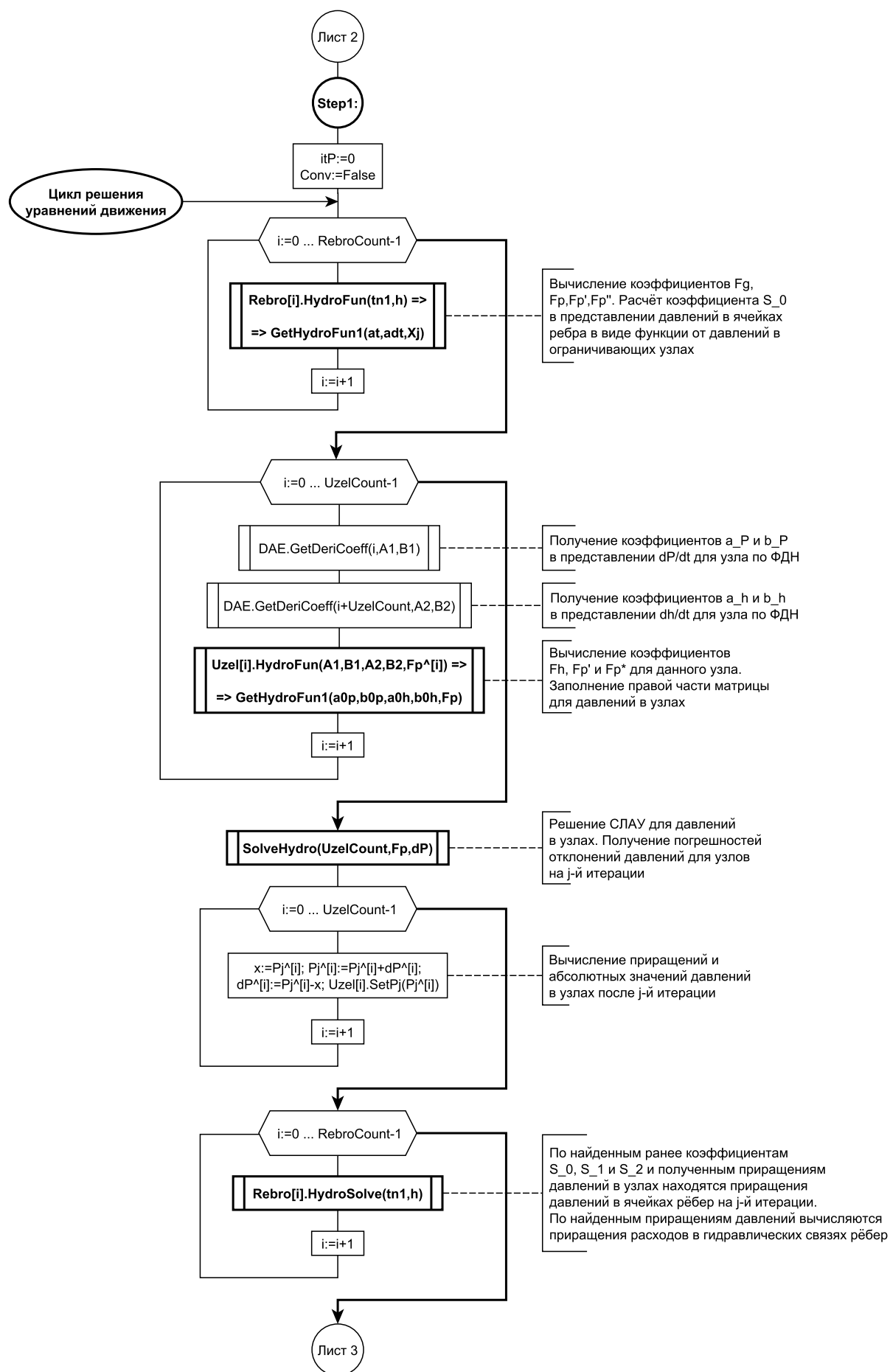


Рис. 9.2 — Блок–схема алгоритма выполнения шага расчёта (лист 2)

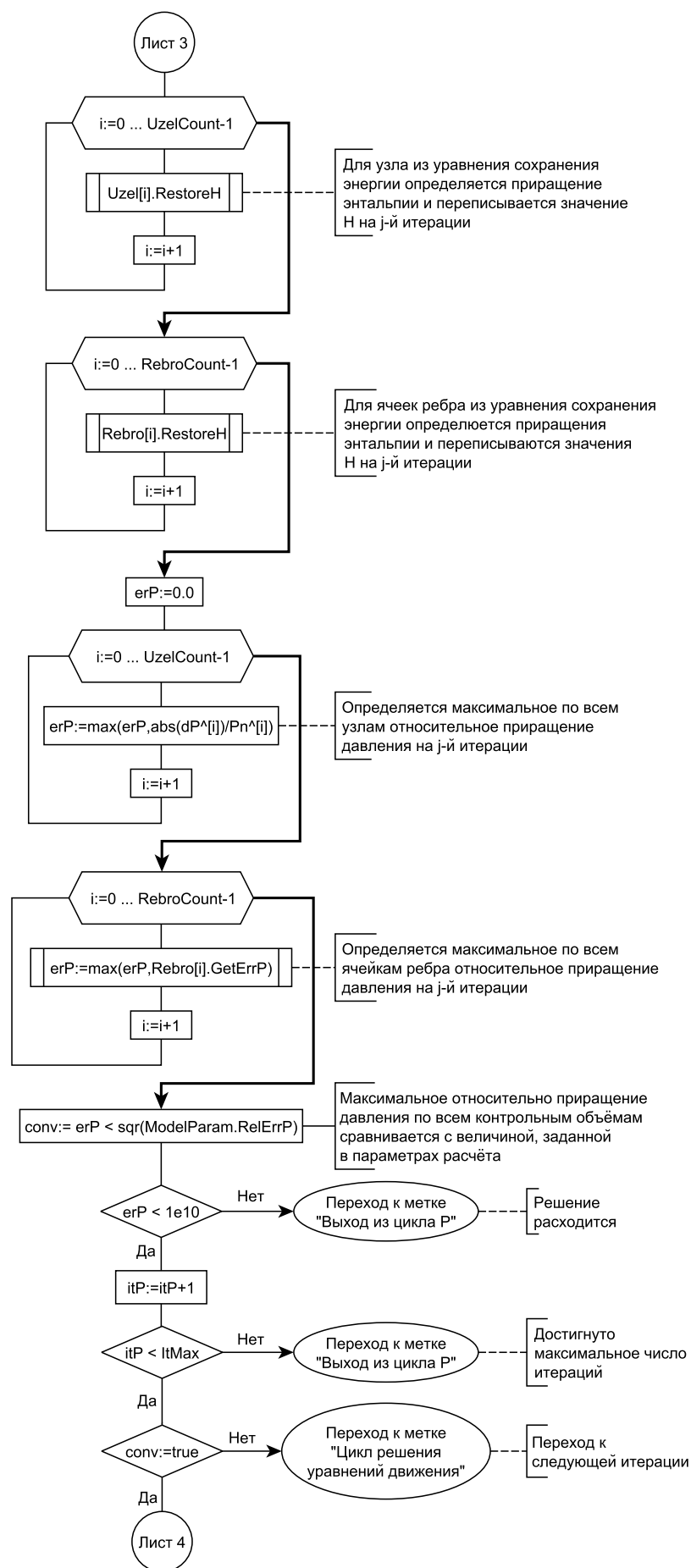


Рис. 9.3 — Блок-схема алгоритма выполнения шага расчёта (лист 3)

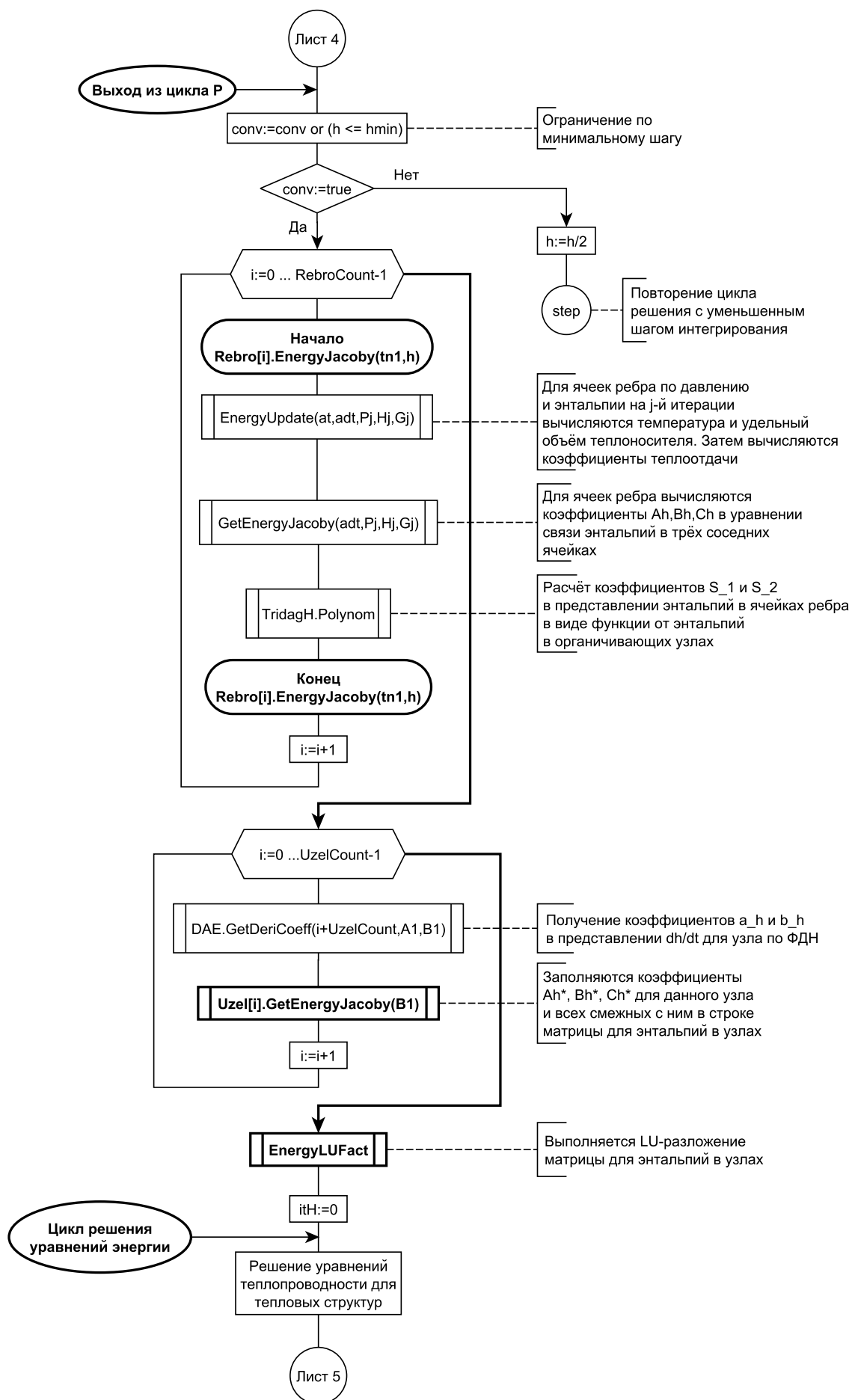


Рис. 9.4 — Блок–схема алгоритма выполнения шага расчёта (лист 4)

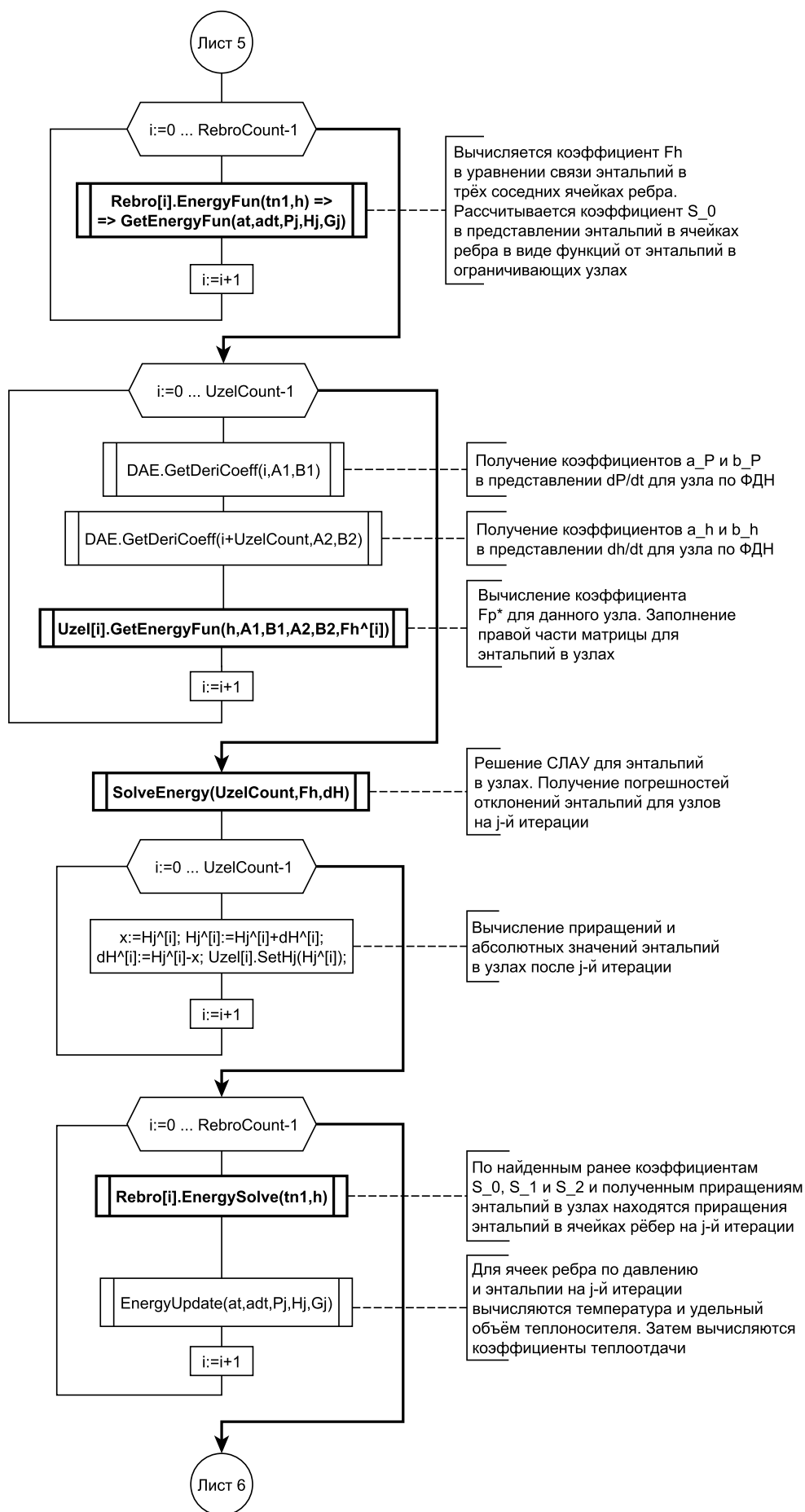


Рис. 9.5 — Блок–схема алгоритма выполнения шага расчёта (лист 5)

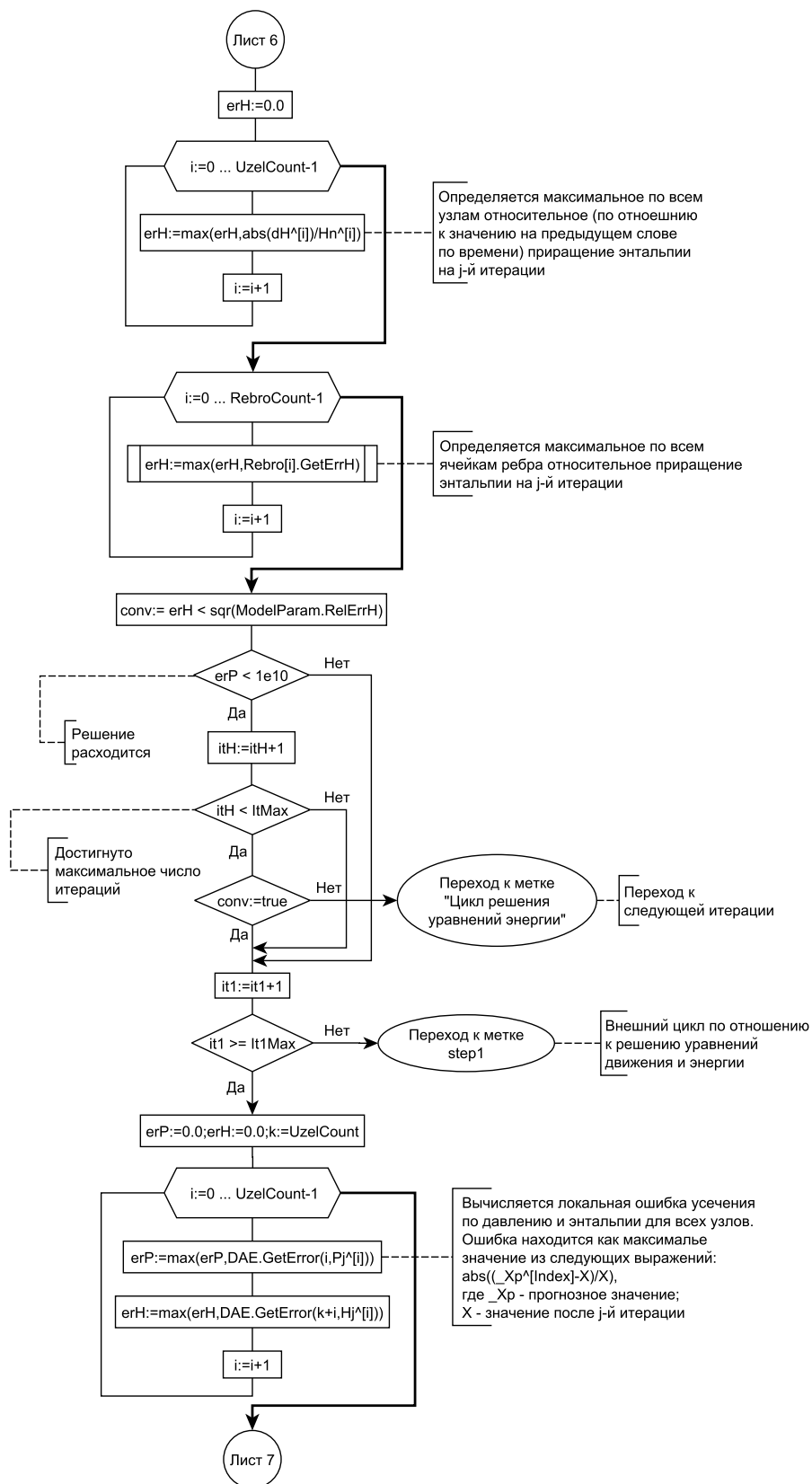


Рис. 9.6 — Блок-схема алгоритма выполнения шага расчёта (лист 6)

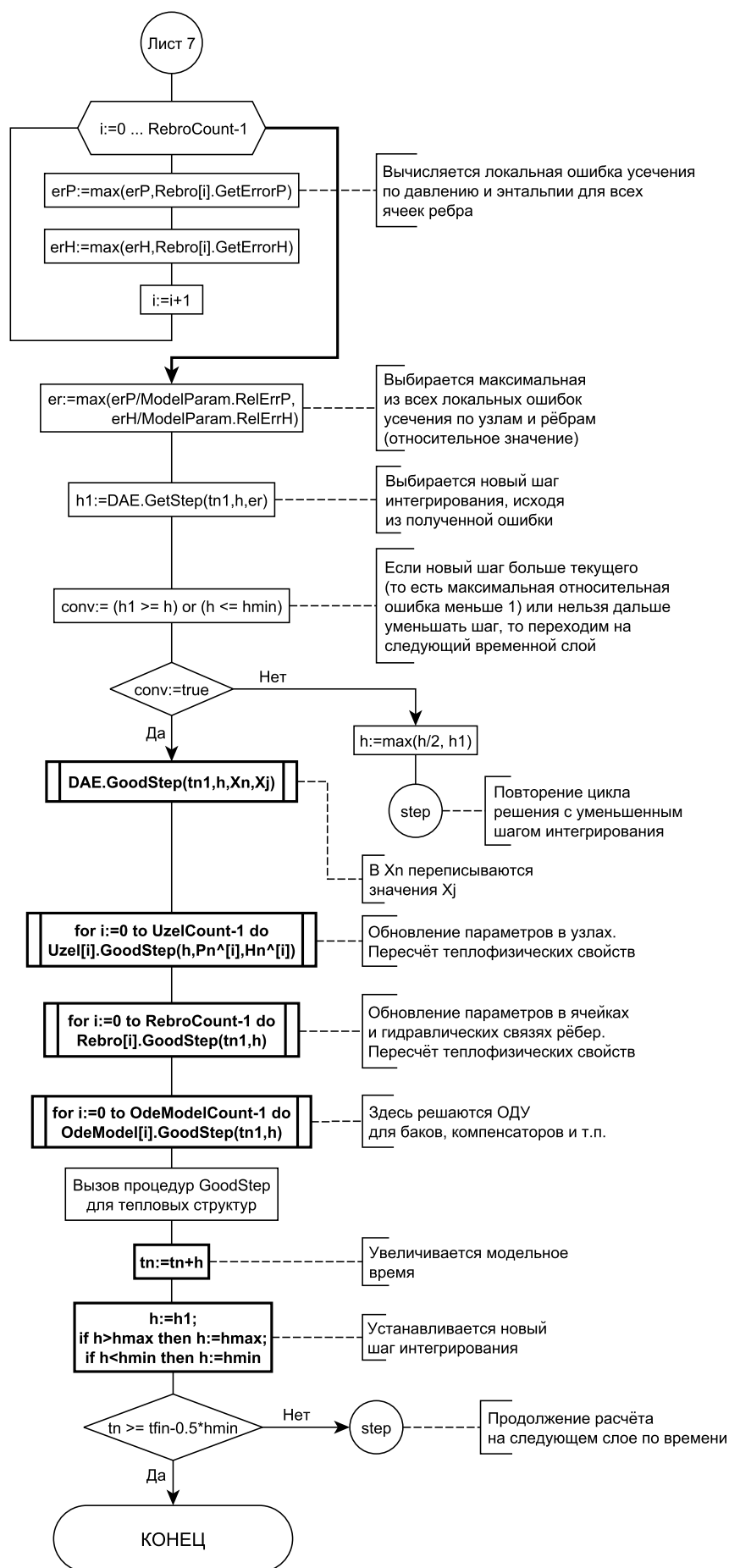


Рис. 9.7 — Блок-схема алгоритма выполнения шага расчёта (лист 7)

10. Заключение

В отчёте описаны основные решаемые в теплогидравлическом коде SimInTech уравнения сохранения для жидкости, приведён подробный вывод конечно-разностных уравнений, описано приведение их к виду, пригодному для решения итерационным методом Ньютона-Рафсона.

Приведён вывод основных уравнений для определения полей давления и энтальпии в разветвлённом теплогидравлическом контуре произвольной топологии. Описан алгоритм основного метода, осуществляющего выполнение очередного шага по времени при расчёте теплогидравлической схемы.

В будущем планируется расширять функциональные возможности кода, в частности рассмотреть и другие численные схемы решения системы уравнений сохранения (явная, неявная), дать возможность выбора максимального числа итераций (ноль итераций соответствует безытерационной схеме) и порядка формулы дифференцирования назад. Для каждой расчётной ячейки будет добавлено вычисление интегрального небаланса массы и энергии в ячейке в процессе расчёта и, возможно, численная компенсация этого небаланса.

Литература

1. А. А. Самарский, Ю. П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики, 1992.
2. T. Marić, J. Höpken, K. Mooney. The OpenFOAM Technology Primer, 2014.
3. Ю. В. Юдов. Разработка двухжидкостной модели контурной теплогидравлики реакторных установок с водяным теплоносителем. Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук, Сосновый Бор, 2001.