### Задача Капса

Будем решать задачу Капса

которая имеет плавное решение *x*₁*(t) = exp(-*2*t), x*₂*(t) = exp(-t)*, не зависящее от параметра жесткости *μ* (собственные значения якобиана при больших *μ* примерно равны –*μ*, –1). В качестве меры вычислительной работы будем использовать число вычислений правой части *Nf* (включая также и вычисления, выполняемые при расчете матрицы Якоби), а точность численного решения будем оценивать по формуле

где *error* – максимальная относительная ошибка на всем интервале интегрирования. Таким образом, *scd* – минимальное число правильных значащих цифр численного решения (от англ. significant correct digits). Результаты для явных методов и трех лучших неявных методов при *hmin* = 1e-6, *hmax* = 1, *relerr* = 1e-3, *abserr* = 1e-10 приведены в таблице 1.

Таблица 1. Точность и вычислительные затраты при решении задачи Капса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Метод | *scd Nf* | *scd Nf* | *scd Nf* | *scd Nf* | *scd Nf* |
| Рунге-Кутты кл.  Рунге-Кутты мод. Мерсона кл. Мерсона мод. | 3.7   110 3.7   110 4.9   100 4.9   100 | 4.1   264 3.6   198 4.5   250 4.5   250 | 0.4   2639 3.3   528 3.8   1419 4.4   835 | -0.7   25770 3.1   605 3.9   14098 3.9   4133 | -1.9   255720 3.4   1210 4.1   140902 3.1   19715 |
| Адаптивный 1 Адаптивный 2 Адаптивный 3 Адаптивный 4 Адаптивный 5 | 4.0   87 3.8   120 3.7   75 5.0   42 4.3   120 | 3.6   143 3.7   208 3.5   125 5.6   48 3.6   217 | 2.7   237 2.2   248 3.4   150 5.6   51 3.9   260 | 2.1   304 2.0   256 3.4   165 5.5   60 3.9   270 | 2.0   319 1.8   240 3.6   195 5.5   60 3.9   270 |
| Гира DIRK3 DIRK4 | 2.9   39 2.6   36 4.0   55 | 3.1   40 3.0   49 4.0   53 | 3.1   40 3.3   34 4.2   47 | 3.0   40 3.3   34 3.6   41 | 3.0   40 3.3   34 3.6   41 |

Вычислительные затраты классических явных методов возрастают практически линейно при увеличении жесткости, что вызвано необходимостью уменьшать шаг интегрирования для обеспечения устойчивости численного решения. Значительное снижение точности классического метода Рунге‑Кутты объясняется отсутствием SC‑устойчивости. Модифицированные методы эффективнее классических, но заметно уступают адаптивным и неявным методам. Адаптивные методы демонстрируют небольшое увеличение объема вычислений при повышении жесткости (а первые два из них также и снижение точности), что вызвано снижением порядка при решении жестких задач. Точность и вычислительные затраты неявных методов практически не зависят от жесткости. Результаты решения задачи Капса подтвердили эффективность метода Гира, который традиционно считается одним из лучших для жестких задач, а также показали перспективность новых методов (адаптивных, DIRK3, DIRK4).