# Počítačová fyzika III

## Poissonovo a Gaussovo rozdelenie

Peter Papp, Ján Ďurian

(Peter Markoš)

Katedra experimentálnej fyziky F2-81

# Obsah

- Náhodné čísla - jednoduchý generátor
- Delenie intervalu na $N$ častí
- Pravdepodobnostné rozdelenie:
  - časové intervaly medzi nekorelovanými udalosťami
  - rozdelenie energie medzi $N$ častíc (teplota)
- Zákon veľkých čísiel - Gaussovo rozdelenie
- Úlohy:
  3.1 Binárne pravdepodobnostné rozdelenie
  3.2 Náhodné delenie intervalu
  3.3. Zákon veĺkých čísiel

# Náhodné čísla

Najjednoduchší generátor založený na celočíselnom delení veľkými číslami,napr.

$$i = mod(i * ia + ic, im), \qquad x = FLOAT(i)/FLOAT(im)$$

Ak potrebujeme $N$ náhodných čísiel, zopakujeme výpočet, pričom hodnotu $i$ získanú predchádzajúcej ioterácie použijeme na výpoćet novej hodnoty. Iterácie začneme z počiatočnej hodnoty, napr. $i = 123$.

- Nevýhoda: periodickosť, korelácie nasledujúcich čísiel
- Výhoda: reprodukovateľnosť pre daný vstup $i$ zopakuje vždy tú istú postupnosť

# Generovanie náhodných čísiel

Ľubovoľným algoritmom (každý jazyk má svoj generátor).

Dá sa použiť napr.:

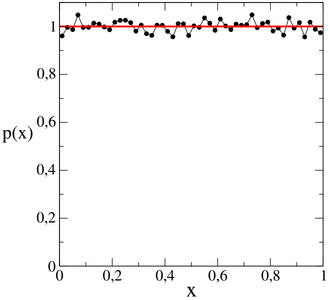
```
      function UNIF(ix)
!
       integer*4 ix,k1
       real*8 unif
!
       k1=ix/127773
       ix=16807*(ix-k1*127773)-k1*2836
       IF(ix.lt.0) ix=ix+2147483647
       UNIF=FLOAT(ix)*4.656612875d-10
!
       return
       end
```

Vstup: integer ix
Výstup:

- nový integer ix, ktorý môžem použiť ako ďalší vstup
- reálne číslo UNIF niekde medzi 0 a 1

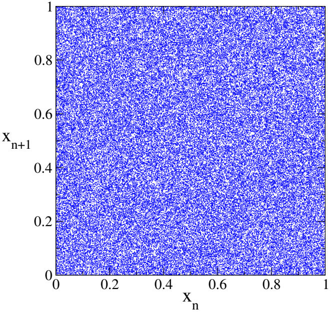
# Cvičenie: 100000 náhodných čísiel

vygenerujeme $N = 100000$ náhodných čísiel $0 < x < 1$ a zostrojíme pravdepodobnostné rozdelenie:




Generátor teda generuje uspokojivo homogénne rozdelenie náhodných čísiel.
Z algoritmu ale vidíme, že má periódu $P = 2^{31} \sim 2 \times 10^9$. Nie je preto vhodný na numerickú simuláciu veľmi dlhých náhodných procesov.

# Cvičenie: 100000 náhodných čísiel



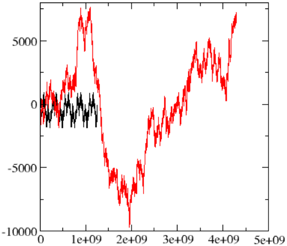

Test korelácie emdzi nasledujúcimi náhodnými číslami. Nekorelované č ísla "pokryjú" plochu homogénne. Zlý generátor vytvorí klastre.

Iný test: výpočet korelačnej funkcie

$$C = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n x_{n+1} - \langle x \rangle^2, \qquad \langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{n+1}^{N} x_n$$

V našom prípade $C = -0.001158$ pre $N = 10^5$, $C = -0.00025$ pre $N = 10^6$.

# Cvičenie: $10^{10}$ náhodných čísiel




Ak použijeme na generovanie náhodných čísiel generátor s krátkou periódou, môže sa stať, že budeme simulovať periodický dej namiesto náhodného.

# Náhodné čísla s iným rozdelením

Ak máme náhodné čísla $\{x\}$ s pravdepodobnostným rozdelením $p(x)$, vieme vytvoriť iné náhodné čísla $y(x)$ s rozdelením $q(y)$:

$$|p(x)\mathrm{d}\ x| = |q(y)\mathrm{d}\ y|$$

a preto

$$q(y) = p(x)\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|$$

# Príklad: potrebujem náhodné čísla s rozdelením $p(y) = e^{-y}$

Riešenie:

- vygeneruj náhodné čísla $x$ homogénne rozdelené v intervale $(0, 1)$

$$p(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \ \text{ alebo } \ x > 1 \end{cases}$$

- Vytvor náhodné čísla $y = -\ln x \qquad (0 < y < \infty)$
- Naozaj,

$$q(y)\mathrm{d}y = p(x)\frac{\partial x}{\partial y}\mathrm{d}y = e^{-y}\ \mathrm{d}y$$

# Príklad: chcem náhodné čísla s gaussovským rozdelením

- Generujem náhodné čísla $\{u\}$ a $\{v\}$.
- Z každej dvojice $(u, v)$ vytvorím nové dve čísla

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{-2\ln u}\cos 2\pi v \\ y &= \sqrt{-2\ln u}\sin 2\pi v \end{aligned}$$

  takže

$$\begin{aligned} u &= \exp\left[-(x^2+y^2)/2\right] \\ v &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{artan}\frac{y}{x} \end{aligned}$$

- Nájdem pravdepodobnostné rozdelenie $q(x, y)$:

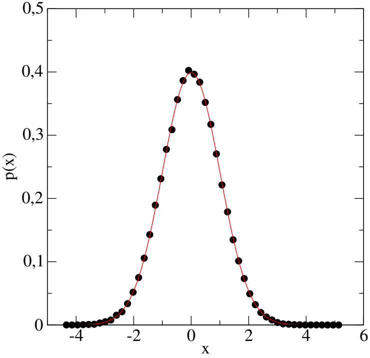
$$q(x,y) = p(u,v)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|$$

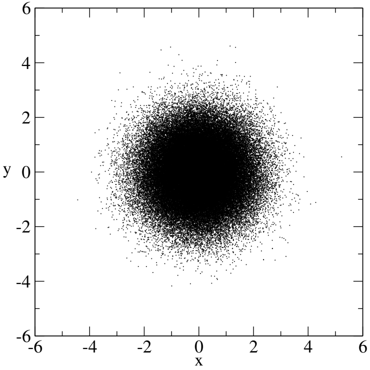
- Nájdem Jacobián

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-x^2\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-y^2\right]$$

- čísla $\{x\}$ a $\{y\}$ majú teda gaussovské rozdelenie

# Dostal som náhodné čísla s gaussovským rozdelením



# Náhodné delenie intervalu $(0, N)$na $N$ častí

Interval $0 \leq x \leq N$ rozdelím náhodne na $N$ častí:

1. generujem $N-1$ náhodných čísliel $x_1$,$x_2$,$\ldots x_{N-1}$
2. zoradím ich podľa veľkosti
   $\{x\} \to \{x\}_{\text{zoradené}}$
3. definujem $x_0 = 0, \qquad x_N = N$
4. nájdem dĺžky intervalov:
   $\ell_i = x_i - x_{i-1}$
5. Nájdem rozdelenie $P(\ell)$

Ukáže sa, že získané rozdelenie je univerzálne.

# Zoradenie náhodných čísiel

V dvoch cykloch:

1. hľadanie najväčšieho čísla z $N$ čísiel $x_1$,$x_2$,$\ldots x_N$
   - $x_{\max} = x_N$
   - cyklus $i = 1, 2, \ldots x_{N-1}$
     ak $x_i > x_{\max}$ tak ich vymeň
2. výsledok: Najväčšie číslo $x_{\max}$ je umiestnené na $N$-tom mieste
3. zopakujem proces pre $N - 1$ čísiel $x_1, \ldots x_{N-1}$
   Výsledok: druhé najväčšie číslo bude na $N - 1$ mieste
4. zopakujem proces pre $N - 2$ čísiel $x_1, \ldots x_{N-2}$
5. atď

Výsledok: zoradená postupnosť $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N$

# Pravdepodobnostné rozdelenie návod na zostrojenie

- vstup: $N$ čísiel $\ell_1 \ldots \ell_N$
- zvoľ hranice: spodnú $a = \ell_{\min}$ a hornú $b = \ell_{\max}$
  pre naše potreby stačí $a = 0$ a $b = 10$
- rozdeľ interval $(a, b)$ na $M$ dielov (napr. $M = 50$)
  deklaruj pole $P(M) = 0$ a $\Delta = (b - a)M^{-1}$
- počítaj integer
  index = INT$((\ell - a)/\Delta)$+1 = INT$((\ell_i - a)/(b - a) * M)$ +1
  P(index) = P(index)+1
- Normovanie:

$$P(index) \to \frac{1}{N\Delta} P(index)$$

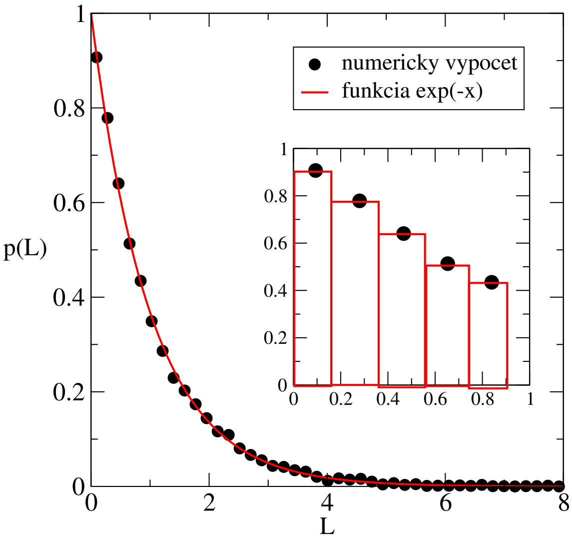
- Pravdep. rozdelenie $p(x)$:
  v bodoch $x = \Delta(\mathrm{index} - \frac{1}{2})$, $p(x) = \mathrm{P(index)}$.

Normovanie potrebujeme, aby platilo

$$\int p(x)\mathrm{d}x = \sum_i^N \Delta p(x_i) = \sum_i p_i = 1$$

# Pravdepodobnostné rozdelenie $P(\ell)$

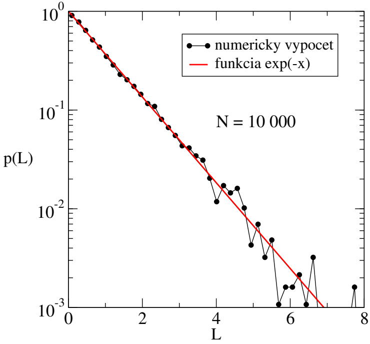
Rozdelili sme interval

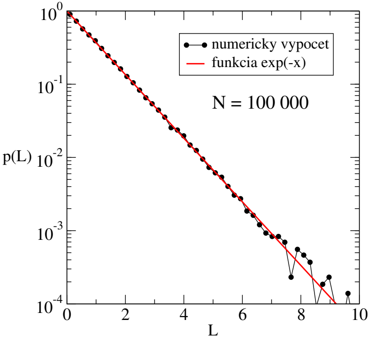



Dostaneme Poissonovo rozdelenie

# Pravdepodobnostné rozdelenie

Analýza numerických výsledkov:




- Lepšie je testovať výsledok v logaritmickej škále
- Odchýlky pre malé hodnoty $p(L)$ - prečo ??
- Vyšší počet bodov zabezpečí presnejšie výsledky

# Pravdepodobnosti

Usporiadané náhodné čísla $x_n$ môžeme interpretovať ako časy, v ktorých nastali nekorelované udalosti.

Rozdiely medzi nimi sú potom intervaly medzi dvoma nekorelovanými udalosťami

Teória pravdepodobnosti: Pravdepodobnostné rozdelenie intervalov medzi nekorelovanými udalosťami má tvar

$$p(\tau) = \exp - \frac{\tau}{\langle \tau \rangle}$$

# Zákon veľkých čísiel

Majme náhodné čísla $x_i$ a zostrojme súčet

$$s = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$s$ je tiež náhodné číslo.
Tvrdenie: $p(s)$ je gaussovské a platí

$$\langle s \rangle = N \langle x \rangle$$

$$\mathrm{var}\ s = N\ \mathrm{var}\ x$$

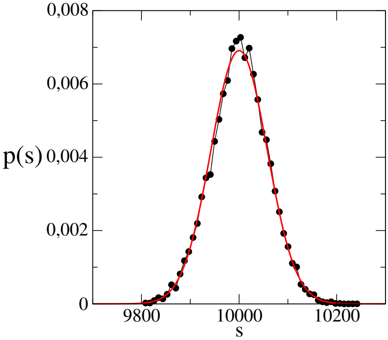
$$\mathrm{var}\ x = \langle x \rangle^2 - \langle x \rangle^2$$

Typická odchýlka je teda $\sqrt{\mathrm{var}\ s} \sim \sqrt{N}$ !
Dôležité:

$$\frac{\sqrt{\mathrm{var}\ s}}{\langle s \rangle} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

# Zákon veľkých čísiel

Porovnanie numericky získaného rozdelenia s teoretickou predpoveďou




$0 < x < 2, \qquad N = 10000$

$\langle x \rangle = 1, \qquad \mathrm{var}\ x = 1/3$

Z rozdelenia vyšlo

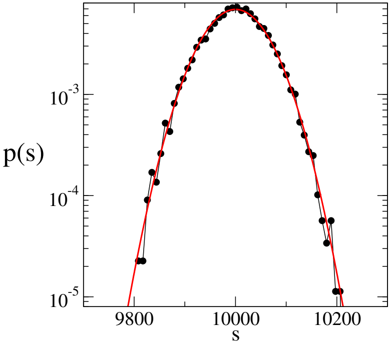
$\langle s \rangle = 10000.63 \qquad \mathrm{var}\ s = 3288$

$\sqrt{\mathrm{var}\ s} = 57.34$

čísla $s$ teda fluktuujú len v rozmedzí 0.57% okolo svojej strednej hodnoty

# Zákon veľkých čísiel

To isté rozdelenie, ale v logaritmickej škále




Gaussovské rozdelenie:

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{var}\ s}} \exp\left[-\frac{(s-\langle s\rangle)^2}{2\mathrm{var}\ s}\right]$$

takže

$$\ln p(s) = \alpha(s-\langle s\rangle)^2 + \beta$$

je parabola.

# Úlohy

Vyberte si jednu z troch úloh.

## Úloha 3.1

1. zostrojte súbor náhodných čísiel $\{x\}$ homogénne rozdelených v intervale $(a, b)$
2. zostrojte súbor náhodných čísiel $\{x\}$ s binominálnym rozdelením

   $$P(x) = p\delta_{x,a} + (1-p)\delta_{x,b}$$

   kde

   $$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{ak} \quad x = y \\ 0 & \text{ak} \quad x \neq y \end{cases}$$

   a $0 < p < 1$.
3. zostrojte súbor náhodných čísiel $\{x\}$ s gaussovským rozdelením
4. Nakreslite obrázky.

# Úloha 3.2

1. Rozdeľte interval $(0, N)$ na $N$ častí.
2. Zostrojte pravdepodobnostné rozdelenie $p(\ell)$
3. Porovnajte $p(\ell)$ s exponenciálnou funkciou $\exp -\ell$
4. Porovnajte, ako sa rozdelenie zmení, keď zmeníte $N$ (napr. $N = 1000$, $N = 10000$.
   Nakreslite obrázky.

# Úloha 3.3

1. Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie $p(s)$ pre čísla

$$s = \sum_{i}^{N} x_i$$

   Pre rôzne hodnoty $N$ ($N = 100$, $N = 1000$).
   Vygenerujete teda veľký počet (napr. $M = 1000$) čísiel $s$ a pre ne nájdete $p(s)$.

2. Vypočítajte $\langle s \rangle$ a var $s$

3. Nakreslite obrázok, porovnajte získané rozdelenie s gaussovským rozdelením s tou istou strednou hodnotou a variáciou

4. presvedčte sa, že pre variáciu platí

$$\frac{\sqrt{\mathrm{var}\ s}}{\langle s \rangle} \sim N^{-1/2}$$