Počítačová fyzika VIII

Elektrostatika v 1D a 2D

Peter Papp, Ján Ďurian

(Peter Markoš)

Katedra experimentálnej fyziky F2-81

Obsah

Elektrostatika

Majme kovové teleso a priveďme naň náboj Q. Elektrostatika: podmienka rovnováhy:

$$\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

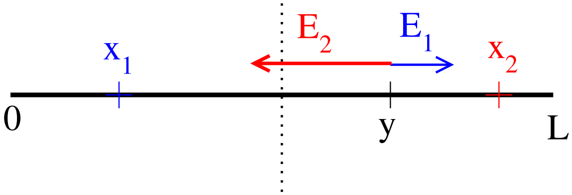
vo vnútri telesa sa dosiahne priestorovým rozdelením voľných nábojov. Dôsledok: privedený náboj sa rozloží po povrchu telesa, vo vnútri telesa je hustota náboja

$$\rho(\vec{r}) \equiv 0$$

Toto platí len v prípade trojrozmerných telies.

Elektrostatika v 1D

Problém: Majme jednorozmerné kovové vlákno a priveďme naň náboj Q. Nájdime priestorové rozloženie náboja $\rho(x)$.



Riešenie: intenzita poľa musí byť nulová pre každý bod vo vlákne.

Z podmienky $E(y) = 0$ dostaneme integrálnu rovnicu

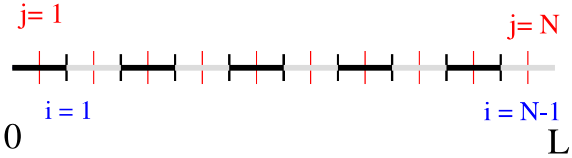
$$E(y) = \int_0^L \mathrm{d}x \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(x)}{|y-x|^3}(y-x) = 0$$

s podmienkou

$$\int_0^L \mathrm{d}x\ \rho(x) = Q$$

Riešenie integrálnej rovnice

Dostali sme homogénnu integrálnu rovnicu s neznámou funkciou $\rho(x)$.
Riešenie: diskretizácia integrálu.



- Úsečku $(0, +L)$ rozdelíme na N rovnakých častí
- Na j-tom dieliku aproximujeme $\rho(x)$ konštantou. Celý dielik má náboj q_j

$$q_j = \Delta \times \rho(x_j) = \Delta \times \rho_j$$

x_j je stred j-teho intervalu

$$x_j = \Delta \times \left(j - \frac{1}{2}\right), \qquad j = 1, 2, \ldots N$$

- Intenzitu $E(y)$ počítame v bodoch $y_i = i\Delta$, $\quad i = 1, 2, \ldots N - 1$.

Riešenie integrálnej rovnice

- Dostaneme $N-1$ lineárnych rovníc

$$E_i = E(y_i) = 0$$

  pre neznáme hustoty ρ_j.

- Posledná N-tá rovnica je daná zákonom zachovania náboja

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta\rho_j = Q$$

- Dostaneme systém N lineárnych rovníc pre N neznámych ρ_j, ktorý vyriešime Gauss-Jordanovou elimináciou

Lineárne rovnice

$$E_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{y_i - x_j}{|y_i - x_j|^3} \ \rho_j = 0$$

Konštanta $1/4\pi\epsilon_0$ nie je dôležitá, lebo všetky rovnice sú homogénne.
Dosadíme za x_i a y_j:

$$E_i = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^{N} \frac{i - j + 1/2}{|i - j + 1/2|^3} \ \rho_j = 0$$

Faktor $1/\Delta^2$ opäť nie je dôležitý, lebo pravá strana $= 0$
Dostaneme $N - 1$ lineárnych rovníc

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} \rho_j = 0$$

kde

$$A_{ij} = \frac{i - j + 1/2}{|i - j + 1/2|^3}, \qquad i = 1, 2, \ldots N - 1, \qquad j = 1, 2, \ldots N$$

Posledná rovnica

$$\int_0^L \mathrm{d}x \rho(x) = Q$$

$$\sum_{j=1}^{N} \rho_j = Q/\Delta$$

Konštantu na pravej strane položme $= 1$. Rieśenie, ktoré dostaneme, na koniec ľahko preškálujeme.

$$\sum_{j=1}^{N} \rho_j = 1$$

$$A_{Nj} = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots N$$

Systém lineárnych rovníc

Integrálnu rovnicu sme teda previedli na systém lineárnych rovníc

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

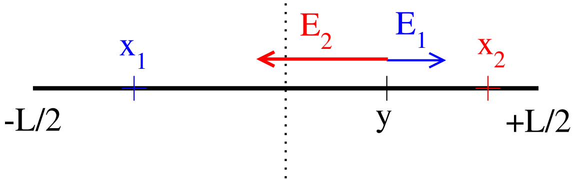
Prvky matice $\mathbf{A}$ pre $1 \leq i \leq N-1$ sú dané vyššie, a v poslednom riadku

$$A_{Nj} = 1$$

Riešenie na konci vynásobíme koeficientom Q/Δ, ktorý definuje celkový náboj prinesený na vlákno.

Symetria

Úlohu môžeme zjednodušiť:

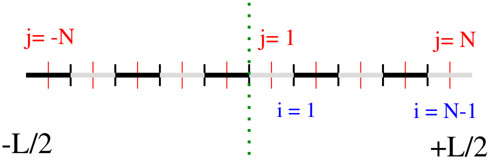


Ak posunieme počiatok súradnicovej sústavy do prostriedku vlákna, vidíme, že

$$\rho(-y) = \rho(+y)$$

Takže nám stačí počítať hustotu len v polovici vlákna.

Symetria



Rozdelíme vlákno na $2N$ dielikov dĺžky $\delta = \Delta/2$.
Pretože $\rho(-x) = \rho(x)$, dostaneme

$$\rho_{-j} = \rho_j$$

Intenzitu nám stačí počítať len pre $x > 0$ $(i = 1, 2, \ldots N-1)$

$$E_i = \frac{\delta}{\delta^2} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{i-j+1/2}{|i-j+1/2|^3} + \frac{i+j-1/2}{|i+j-1/2|^3} \right] \rho_j$$

Vzhľadom na symetriu problému platí $E_{i=0} \equiv 0$.

Elektrostatika v 1D

Dostali sme systém lineárnych rovníc

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ Q/2 \end{pmatrix}$$

Prvky matice $\mathbf{A}$ pre $1 \leq i \leq N-1$ sú dané vyššie, a v poslednom riadku

$$A_{Nj} = 1$$

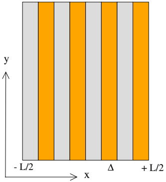
Poznámka: systém je lineárny, preto je výhodné položiť $Q/2 = 1$.

Elektrostatika v 2D

Zložitejšia úloha:
Majme nekonečne dlhý (v smere y) kovový pásik šírky L. na jednotku dĺžky v smere y privediem náboj Q. Nájdite rozloženie náboja v smere osi x.
Riešenie je analogické 1D úlohe. Pásik rozrežeme na nekonečne tenké pásiky, ktoré sú také tenké, že ich môžeme nahradiť vláknom s dĺžkovou hustotou $\rho(x)$ (x je poloha vlákna!) a zopakujeme postup z 1D s intenzitou poľa

$$E_i = \frac{\Delta}{\Delta} \sum_{j=1}^{N} \frac{y_i - x_j}{|y_i - x_j|^2} \; \rho_j$$

(všimnime si exponent v menovateli!).



Systém lineárnych rovníc

$$\mathbf{A}x = b$$

N rovníc pre N neznámych $\{x\}$.

Predpokladajme det $\mathbf{A} \neq 0$.

Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ & & \dots & \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

1. predpokladajme $a_{11} \neq 0$
2. odčítajme od k-teho riadku ($k \neq 1$) 1. riadok vynásobený a_{k1}/a_{11}

Gauss-Jordan

Dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ 0 & a_{22} - a_{12}\color{red}{a_{21}/a_{11}} & \dots & a_{2N} - a_{2N}\color{red}{a_{21}/a_{11}} \\ & & \dots & \\ 0 & a_{N2} - a_{12}\color{blue}{a_{N1}/a_{11}} & \dots & a_{NN} - a_{1N}\color{blue}{a_{N1}/a_{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1\color{red}{a_{21}/a_{11}} \\ \dots \\ b_N - b_1\color{blue}{a_{N1}/a_{11}} \end{pmatrix}$$

Vynulovali sme všetky členy v 1. stĺpci, okrem prvku 11.
Novú maticu napíšeme v tvare:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ & & \dots & \\ 0 & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

a_{ij} a b_i majú iné hodnoty ako na začiatku !!

Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ & & \dots & \\ 0 & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

1. predpokladajme $a_{22} \neq 0$
2. odčítajme od $k \neq 2$-teho riadku 2. riadok vynásobený a_{k2}/a_{22}
3. takto vynulujeme všetky prvky v druhom stĺpci
4. proces opakujeme až po N-tý stĺpec

Dostaneme diagonálny systém rovníc

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan

Po skončení procesu dostaneme namiesto matice **A** diagonálnu maticu.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

Ktorý preíšeme na tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \dots \\ \tilde{b}_N \end{pmatrix}$$

takže riešenie $\{x\}$ je rovné vektoru $\{\tilde{b}\}$.

Pivotovanie

- Niekedy sa môže stať, že narazíme na delenie nulou. Napríklad nájdeme $a_{11} = 0$.
- v tom prípade nájdeme v 1. stĺpci najväčší člen (napr. a_{k1}) a vymeníme prvý a k-ty riadok.
- vo všeobecnosti je výhodné pred elimináciou prvkov umiestniť na diagonálu maximálny prvok v danom stĺpci
  inak môžeme naraziť na numerické nestability

Poznámky

Takým istým algoritmom vieme riešiť aj systém

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

s $N \times N$ maticami $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}$ a $\mathbf{B}$. Ak začneme s jednotkovou maticou

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

dostaneme na konci výpočtu

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

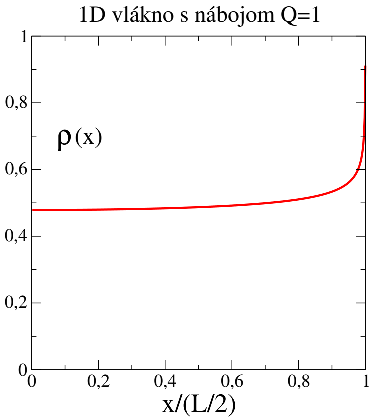
Vieme teda počítať inverziu matice.

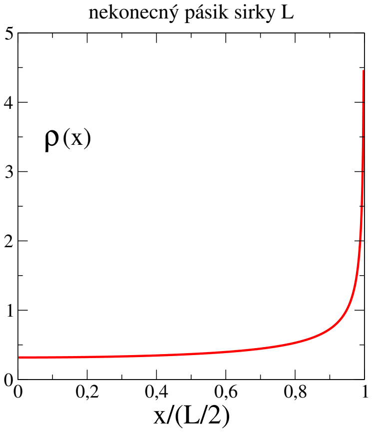
Poznámky

- Hoci lineárne rovnice vyzerajú triviálne, ich riešenie môže byť náročné kvôli numerickým nestabilitám (prípady, kedy det $\mathbf{A}$ je "malý".
- Je praktickejšie používať osvedčené numericky stabilné subroutiny napr. LAPCK (je súčasťou linuxu).
- Často sa vyskytujú tzv. riedke systému (sparse matrix): matica $\mathbf{A}$ má väčšinu prvkov nulových (napr. matica rozmeru $10^6 \times 10^6$ má v každom riadku len 7 nenulových prvkov). Oplatí sa vyhľadať špeciálne subroutiny na riešenie takýchto systémov.
- Úloha je veľmi dobre paralelizovateľná.

Numerické výsledky

Pre $N = 500$.



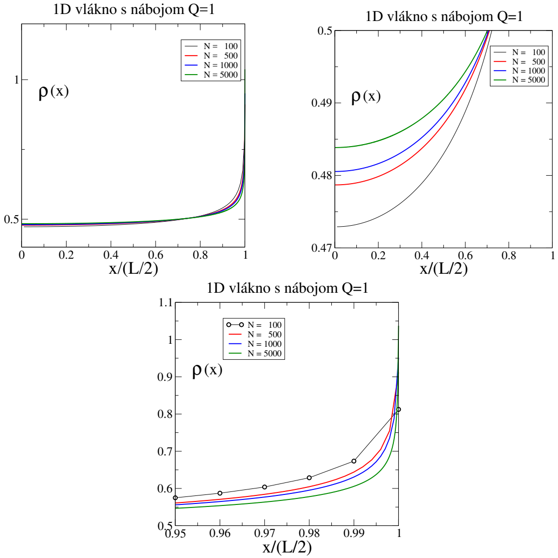


Úloha

1. Napíšte subroutinu ktorá rieši systém N lineárnych rovníc. Vstupom bude matica $\mathbf{A}$ a vektor b (pravé strany), výstupom bude vektor b (riešenie systému rovníc).
2. Program rozšírte na inverziu matice
3. Riešte fyzikálnu úlohu rozloženia náboja Q na lineárnom vlákne.

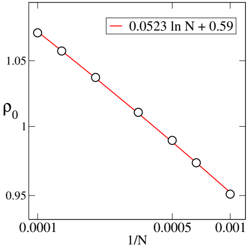
Dodatok - 1D systém

Výsledky závisia od počtu bodov, na koľko delíme interval!



Dodatok - 1D systém

Na okraji retiazky dostaneme logaritmickú divegenciu:



Poďakovanie: Eve Pospíšilovej za podrobnú numerickú analýzu problému