Počítačová fyzika XII

Diferenciálne rovnice II

Peter Papp, Ján Ďurian

(Peter Markoš)

Katedra experimentálnej fyziky F2-81

2. časť - aplikácie metódy RK

- Budený harmonický oscilátor s trením
- Nelineárne kyvadlo
- Brownov pohyb
- Model Volterra-Lotka

Budený harmonický oscilátor

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = f(t)$$

$f(t) = F(t)/m$ je budiaca sila

$$f(t) = f_0 e^{i\omega t}$$

V stacionárnom režime oscilátor kmitá s výchylkou

$$x = x_0 e^{i\omega t}$$

$$x_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = |x_0| e^{i\theta}$$

Definuje amplitúdu výchylky $|x_0|$ a fázový posuv θ (Feynman 23.2).

Budený harmonický oscilátor - energia

Výkon, ktorý dodáva budiaca sila:

$$\begin{aligned} P = fx' &= x'x'' + \omega_0^2 x x' && + \quad \gamma(x')^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(x')^2 + \omega_0^2 x^2\right]' && + \quad \gamma(x')^2 \end{aligned}$$

Ak dosiahneme stacionárny režim, tak je prvý člen $= 0$ a pre výchylku $x = x_0 e^{i\omega t}$ dostaneme výkon ustredný cez jednu periódu

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\gamma\omega^2 |x_0|^2$$

Túto energiu vonkajšia sila dodá v priebehu jednej periódy $T = 2\pi/\omega$. Celková energia:

$$E = \frac{1}{2}\langle (x')^2 + \omega_0^2 x^2 \rangle = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2}|x_0|^2$$

Kvalita oscilátora:

$$Q = 2\pi \frac{E}{\langle P \rangle T} = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2\gamma\omega}$$

Budený harmonický oscilátor - numerické riešenie

Tri diferenciálne rovnice pre tri premenné:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(t) \\ y_2(t) &= p(t) = x'(t) \\ y_3(t) &= f(t)x'(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\gamma y_2 - \omega_0^2 y_1 + f(t) \\ y_3' &= f(t) y_2 \end{aligned}$$

posledná rovnica je zmena energie (výkon dodaný vonkajšou silou).
Začneme s okrajovými podmienkami

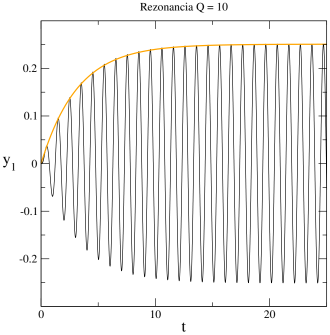
$$y_1(t=0) = 0, \qquad y_2(t=0) = 0, \qquad y_3(t=0) = 0$$

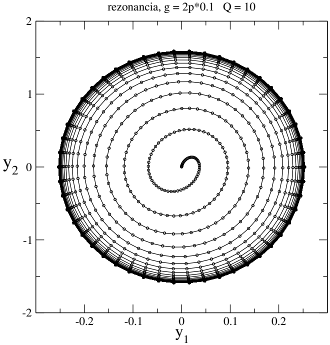
(mŕtvy oscilátor), ktorý začneme budiť periodickou silou

$$f(t) = f_0 \sin \omega t$$

Budený harmonický oscilátor - numerické riešenie

$f_0 = 1$, $\omega_0 = 2\pi$, $\omega = 0.99\omega_0$, $\gamma = 0.1\omega_0$

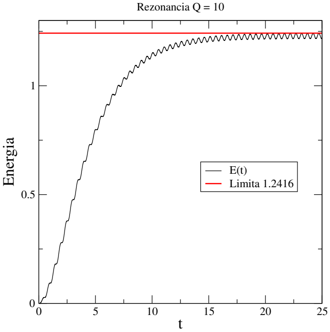


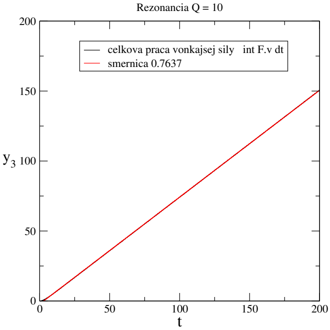


$|x_0| \to 0.25084$.
Amplitúda narastá s časom ako $|x_0| \times \left[1 - e^{-\gamma t/2}\right]$

Budený harmonický oscilátor - numerické riešenie

$f_0 = 1$, $\omega_0 = 2\pi$, $\omega = 0.99\omega_0$, $\gamma = 0.1\omega_0$





Energia oscilátora ako funkcia času konverguje k limitnej hodnote
Energia,ktorú vonkajšia sila "pumpuje" do systému. Smernica určuje výkon $\langle P \rangle$.

Nelineárne kyvadlo

$$\theta'' = -\omega^2 \sin\theta$$

Počiatočné podmienky: $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = 0$

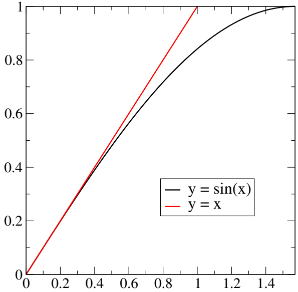
Ak je maximálna amplitúda θ_0 malá, tak

$$\sin\theta \approx \theta$$

dostávame lineárny oscilátor s periódou

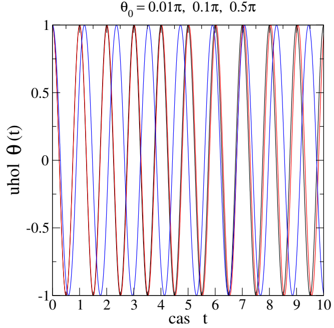
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

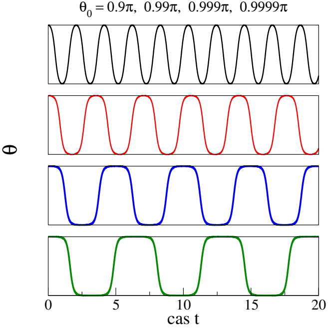
ktorá nezávisí od amplitúdy θ_0.



Nelineárne kyvadlo

Čo ak počiatočná hodnota rastie?





Perióda kyvadla narastá a časový priebeh sa už nepodobá harmonickému priebehu $\sim sin \omega t$.

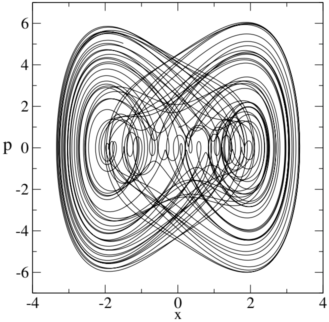
Z časového priebehu nelineárneho oscilátora nájdite periódu nelineárneho kyvadla ako funkciu počiatočnej polohy θ_0. Nakreslite graf $T = T(\theta_0)$.

Budený nelineárny oscilátor - chaos

Využime RK na riešenie diferenciálnej rovnice

$$x'' + \gamma x' + x^3 = F \sin t$$

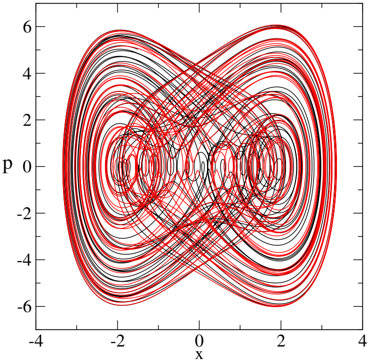
s parametrami $F = 7.5$, $\gamma = 0.05$
Numerické riešenie (RK-4) s h $= 2\pi/1000$, $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$:

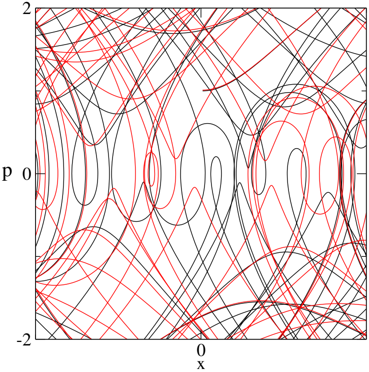


Podivný atraktor.

Budený nelineárny oscilátor - chaos

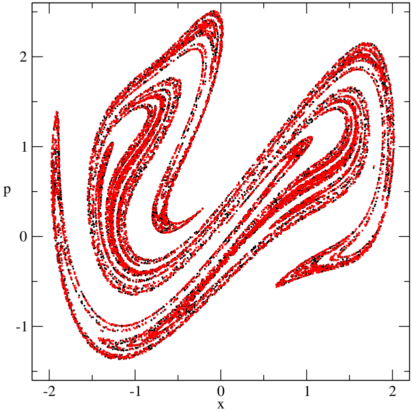
Citlivosť voči zmene počiatočných podmienok





Poincare

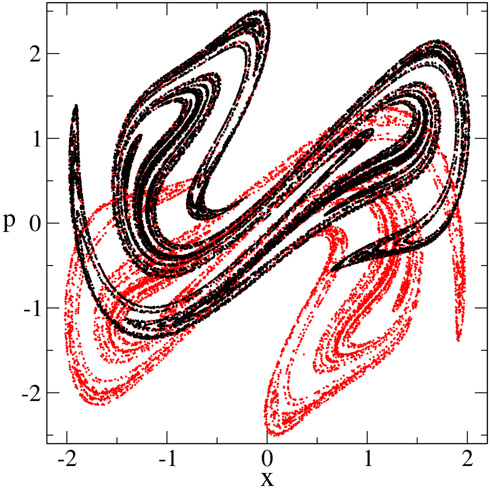
Nakreslime len body v časoch $n \times T$ (T je perióda).



Čierne a červené body zodpovedajú rôznym počiatočným podmienkam.
Fraktál? Fraktálna dimenzia? Univerzalita?

Poincare II

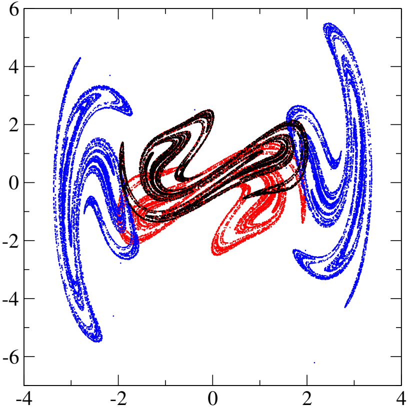
Pridajme aj body v pol perióde.



Poincare III

Zmena Poincareho mapy pri posune času o štvrť perioódy $t \to t + \pi/2$:

$$\begin{aligned} x'' + \gamma x' + x^3 &= \color{red}{F \sin t} \\ x'' + \gamma x' + x^3 &= \color{blue}{F \cos t} = F \sin(t + \pi/2) \end{aligned}$$



Brownov pohyb

Pohyb peľového zrnka na hladine vody (hmotnosť $m = 1$).

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t^2} = -\gamma \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{f}(t)$$

$\vec{r} = (x, y) \ldots$ poloha
$\vec{f} = (f_x, f_y)$ - náhodná sila, ktoré modeluje zrážky zrnka s molekulami

$$\langle f_x(t) \rangle = 0$$

$$\langle f_x(t) f_x(t') \rangle = f_0^2 \delta(t - t')$$

(biely šum). Takúto silu ľahko modelujeme generátorom náhodných čísiel.
Úloha trenia je podstatná, koeficient γ bude v simuláciách pomerne veľký.

Brownov pohyb

4 diferenciálne rovnice, ale v skutočnosti len dve dvojice:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -\gamma x_2 + f_x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\gamma y_2 + f_y(t) \end{aligned}$$

Brownov pohyb

1. Náhodná sila:
   δ - funkciu nevieme numericky simulovať, preto zavedieme krátky korelačný čas Δ

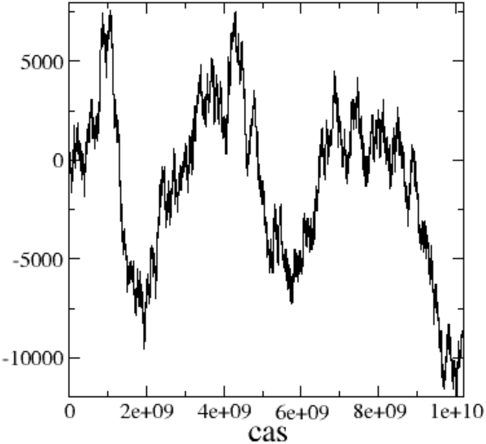
   $$\langle f_x(t) f_x(t') \rangle = \begin{cases} f_0^2 & |t - t'| < \Delta \\ 0 & |t - t'| > \Delta \end{cases}$$

   Zvolíme teda na intervale Δ od času nezávislú silu $\vec{f}$. Jej hodnotu a smer volíme náhodne generátorom náhodných čísiel.
   Δ môže byť zvolená náhodne s nejakým pravdepodobnostným rozdelením a strednou hodnotou Δ_0

2. Riešime samostatne rovnice pre x a pre y, nakoniec zostrojíme graf $x(t)$ *vs* $y(t)$.

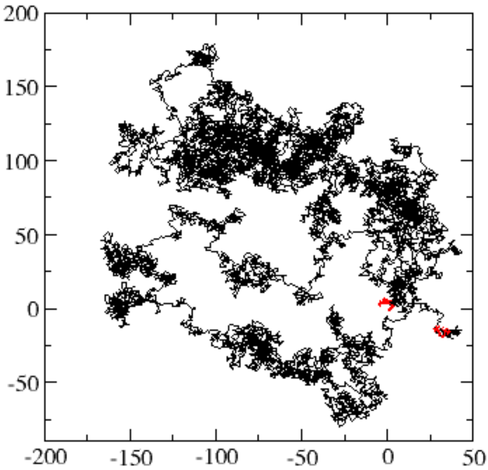
Poznámka: ak je sila konštantná na intervale Δ, potom vieme pohybové rovnice vyriešiť aj analyticky.

Brownov pohyb - najprv jednorozmerný



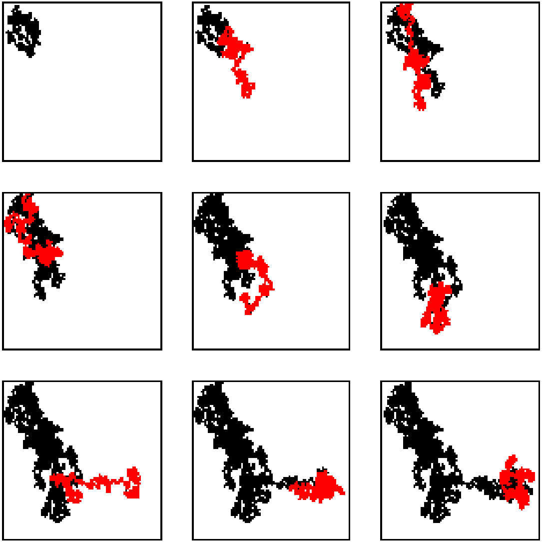
("opitý námorník"). $f_0 = 1$, $\gamma = 2\pi$
Veľká hodnota γ je dôležita - Skúste simulovať rovnice pre Brownov pohyb s malými hodnotami γ

Brownov pohyb



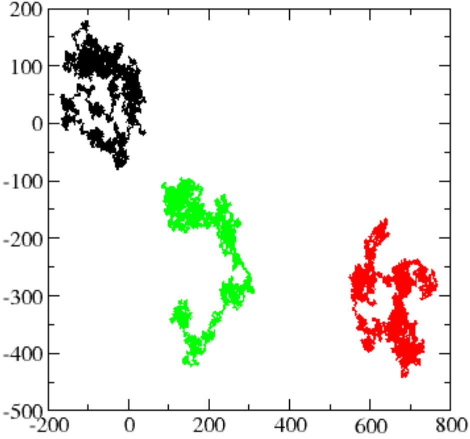
Simulácia pre $0 < t < T = 10^9\Delta$ (zobrazený je len každý 10000-ty bod).
$\gamma = 2\pi$, $\Delta = \frac{2\pi}{1000} \times 20$

Brownov pohyb



Časový vývoj s krokom $T = 10^9\Delta$. Červenou farbou je zvýraznený posledný "prírastok" za čas T.

Brownov pohyb



Detail troch dráh vykonaných za čas $T = 10^9 \Delta$.

Model Volterra-Lotka

Riešme systém dvoch nelineárnych diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} y_1' &= ay_1 + by_1y_2 \\ y_2' &= \alpha y_2 + \beta y_1 y_2 \end{aligned}$$

Tieto rovnice boli navrhnuté na kvalitatívnu analýzu jednoduchého biologického systému. Funkcie y_1 a y_2 môžu zodpovedať dvom typom živočíchov - napríklad zajacom a líškam. Zajace žerú trávu a rozmnožujú sa, preto $a > 0$ - čím viac zajacov, tým viac potomstva. Líšky sa živia zajacmi, preto $\alpha < 0$- bez potravy by líšky vyhynuli. Koeficienty b a β charakterizujú vzájomnú väzbu oboch populácií - čím viac líšok, tým rýchlejšie budú zajace ubúdať, preto je $b < 0$. Naopak, čím viac zajacov, tým rýchlejšie bude pribúdať líšok, preto $\beta > 0$.

Model Volterra-Lotka

Znamienka koeficientov preveríme výpočtom stacionárneho riešenia, v ktorom $y_1' \equiv 0$, $y_2' \equiv 0$:

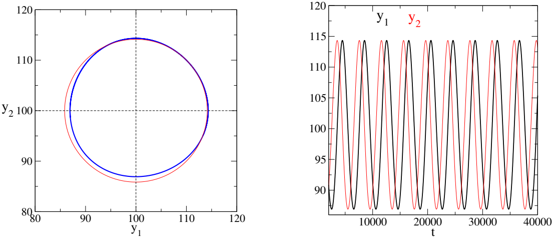
$$\tilde{y}_1 = -\frac{a}{b} > 0, \qquad \tilde{y}_2 = -\frac{\alpha}{\beta} > 0$$

V okolí blízkeho bodu položme $y_1 = \tilde{y}_1 + \zeta_1$, $y_2 = \tilde{y}_2 + \zeta_2$. Dosadením do rovnice (38) dostaneme, po zanedbaní malých členov $\zeta_1\zeta_2$ linearizovaný systém diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \zeta_1' &= -b\frac{\alpha}{\beta}\zeta_2 \\ \zeta_2' &= -\beta\frac{a}{b}\zeta_1 \end{aligned}$$

ktorý je formálne identický rovniciam lineárneho harmonického oscilátora. Dráhou vo fázovom priestore teda bude elipsa, a počty oboch živočíchov budú harmonicky oscilovať okolo svojich rovnovážnych polôh, a budú navzájom fázovo posunuté.

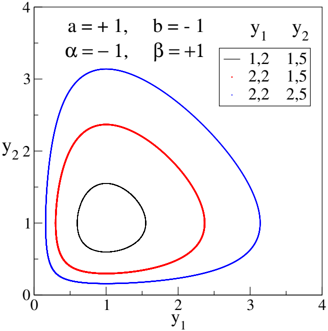
Model Volterra-Lotka



Obr.: Nelineárny model Volterra-Lotka pre $a = 1$, $\alpha = -1$, $b = -0.01$ a $\beta = -0.01$. Časovo nezávislé riešenie je $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 100$. Vľavo: dráha vo fázovom priestore (modrá krivka) a jej porovnanie s kružnicou, ktorá zodpovedá riešeniu linearizovaného systému rovníc (39). Pravý obrázok ukazuje časovú závislosť premenných y_1 a y_2.

Model Volterra-Lotka

Riešte numericky systém rovníc (38) s parametrami $a = 1$, $b = -1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$



Numerické riešenie modelu Volterra-Lotka pre parametre modelu $a = 1$, $\alpha = -1$, $b = -1$, $\beta = 1$. a pre tri počiatočné hodnoty uvedené v legende. Pre veľké hodnoty nelinearity riešenie už nie je periodické, odchýlky od periodicity sú tým výraznejšie, čím ďalej od stacionárneho riešenia $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 1$ sa pohybujeme.

Úloha 7

1. Budený harmonický oscilátor
   - napíšte program ktorý rieši časový vývoj budeného harmonického oscilátora s tlmením (RK 4. stupňa)
   - odhadnite čas potrebný k dosiahnutiu stacionárneho stavu v ktorom sa amplitúda kmitov už nemení
   - nájdite limitné hodnoty y_1
   - pre zvolené parametre ω_0, γ a ω overte, či numerické výsledky pre amplitúdu, energiu, výkon, súhlasia s analytickými vzťahmi.
   - zvoľte rôzne periodické budiace sily a zistite ako tvar budiacej sily ovplyvňuje výsledky.
2. Vyberte si niektorú z ďalších preberaných úloh a riešte ju numericky vlastným programom RK.