

Fraktály

Peter Markoš
Fyzikálny ústav SAV

Katedra fyziky FEI STU

Abstract

1. Motivácia
2. Fraktál - čo to je
3. Príklady fraktálov
4. Rôzne definície fraktálnej dimenzie
5. Multifraktály

Klasické geometrické útvary

Sledujme, ako sa mení objem V objektu s jeho veľkosťou L :

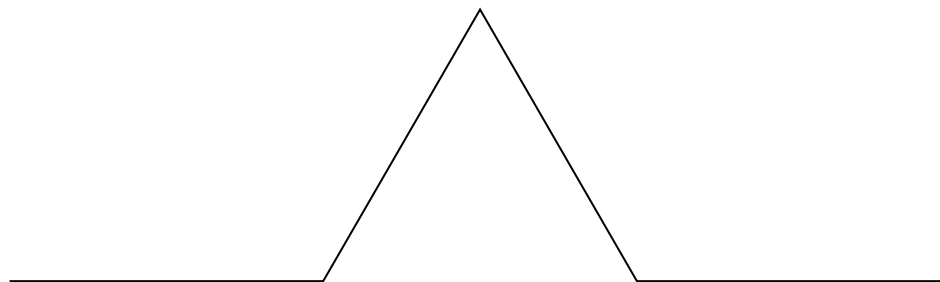
- úsečka: $V = L^1$ $d = 1$
- štvorec: $V = L^2$ $d = 2$
- kocka: $V = L^3$ $d = 3$

Jednoduché, ľahko pochopiteľné. V prírode však môže nastať aj iné:

$$V = L^{d_f} \tag{1}$$

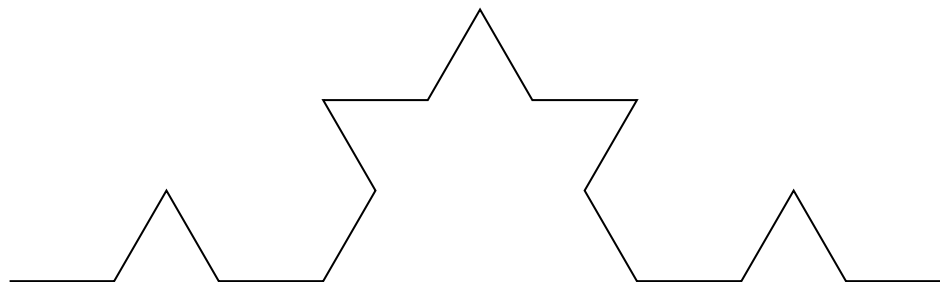
d_f . . . **neceločíselná** fraktálna dimenzia.

Príklad: Kochova krivka

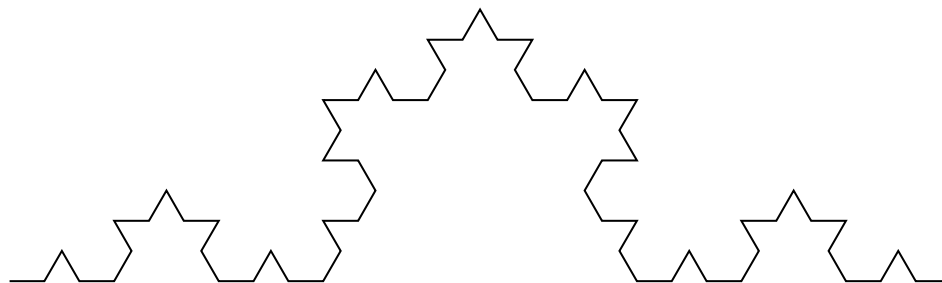


Iterujme takúto krivku:

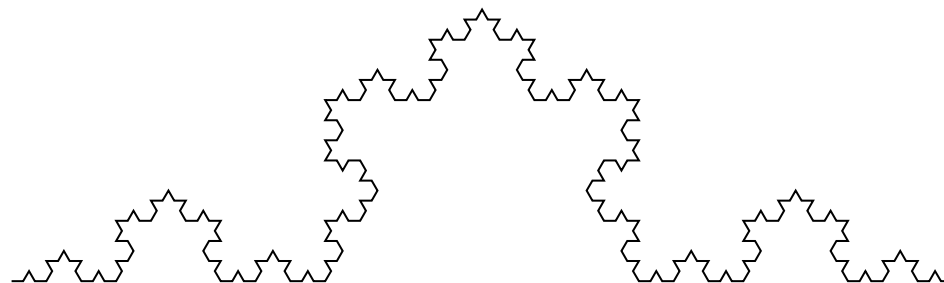
Kochova krivka II



Kochova krivka III



Kochova krivka IV



Kochova krivka: postup



Ak lineárna škála narastie $3\times$, tak objem narastie $4\times$.

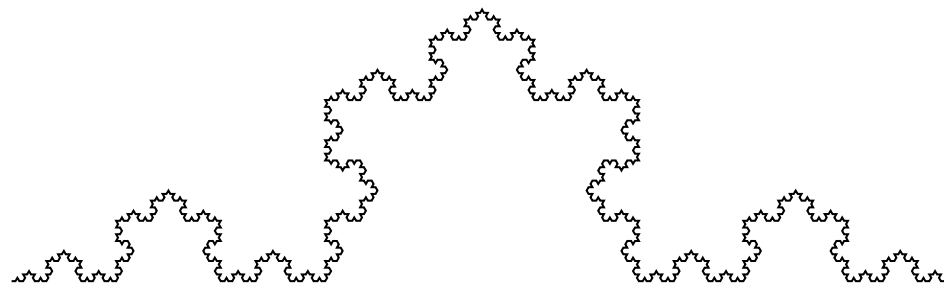
Takže máme

$$L \rightarrow 3L \qquad V \rightarrow 4V \qquad (2)$$

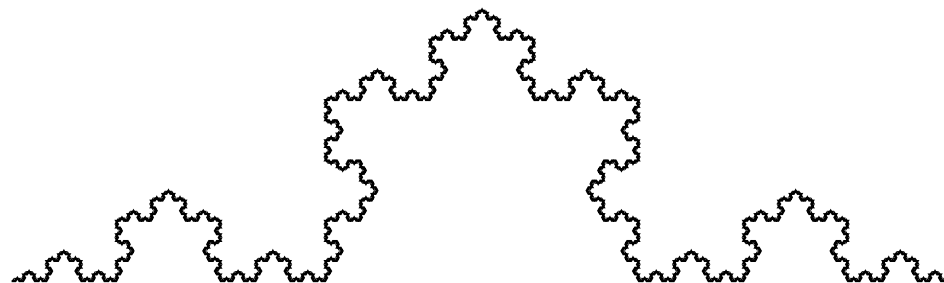
$$V = L^{d_f} \qquad d_f = \frac{\ln 4}{\ln 3} \qquad (3)$$

Fraktálna dimenzia d_f je neceločíselná, definuje, ako rastie “objem” Kochovej krivky.

Kochova krivka V



Kochova krivka VI



Na čo je to dobré ?

Klasické príklady:

- Pobrežie Veľkej Británie
- Tvar ostrovov
- Oblaky
- Blesk
- Elektrický prieraz
- Snehová vločka
- Kotoľný kameň

Príroda vytvára v'ačšinou "brčkové" objekty, nie priamky, roviny, gule a kocky.

Abstrakcia

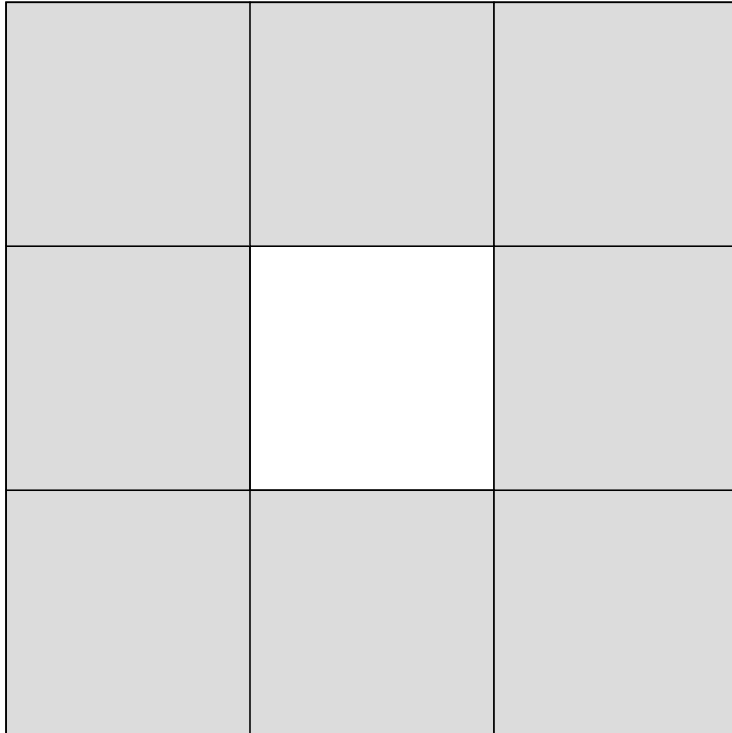
V geometrickej konštrukcii fraktálu môžeme iterovať donekonečna. To v reálnom svete nemá zmysel.

Každý fyzikálny objekt možno charakterizovať jeho typickými dĺžkami: maximálnou L_{\max} a minimálnou L_{\min} . O fraktálnych vlastnostiach má význam hovoriť len v škálach medzi týmito dĺžkami.

$$L_{\min} < L < L_{\max} \quad (4)$$

Aj vtedy však má pojem fraktálu zmysel. Odchylky od “normálnej” geometrie môžu vysvetliť viaceré fyzikálne javy.

“Dvojrozmerné” fraktály

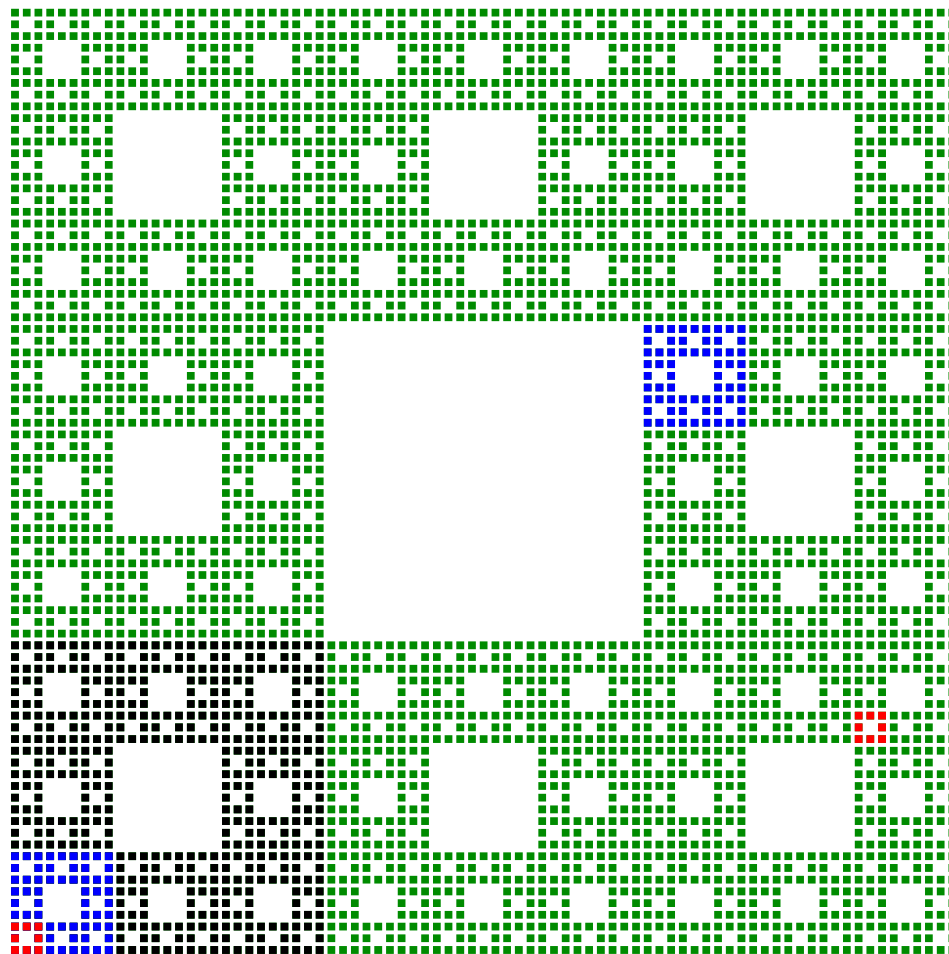


Rozdelím štvorec na $3 \times 3 = 9$ častí, a ponechám si len 8 z nich. Potom zväčším systém $3\times$ v oboch smeroch. Rozmer systému narástol $3\times$, plocha narástla len $8\times$

Fraktálna dimenzia:

$$d_f = \frac{\ln 8}{\ln 3} \quad (5)$$

“Dvojrozmerné” fraktály



Sierpinski gasket

Fraktál s dimenziou $d_f = \frac{\ln 8}{\ln 3}$

Postup: štvorec rozdelím na 9 častí a prostrednú vyberiem. Po transformácii $L \rightarrow 3L$ mi zostane len 8 štvorcov.

Self-similarita

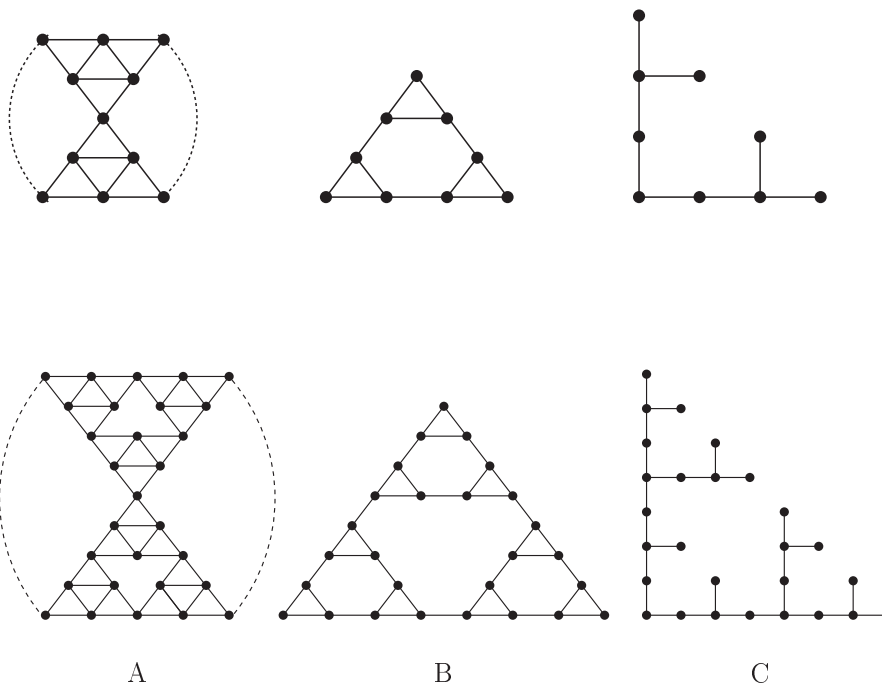
Pretože sa “motív”, podľa ktorého fraktál konštruujeme, neustále opakuje, je fraktál “sebepodobný” (self-similar).

Ak zv’äčšíme nejakú časť fraktálu na veľkosť celého systému, dostaneme “to isté”.

Fraktály v teoretickej fyzike

Mnohé javy, napríklad fázové prechody, závisia od dimenzie systému. V normálnom svete máme k dispozícii len celočíselné dimenzie. V počítači si ale môžeme vyrobiť fraktálne mriežky, na ktorých sa dajú testovať teoretické predpovede.

Iné fraktály



Všetky tri majú tú istú fraktálnu dimenziu, $d_q = \ln 3 / \ln 2$.

Očividne sa ale líšia svojou štruktúrou: počtom najbližších susedov, možnosťou vytvárať slučky (kruhové dráhy). Preto neprekvapuje, že fyzikálne deje na takýchto mriežkach môžu byť rôzne. Preto definujeme ďalšie parametre, ktoré charakterizujú mriežku.

Spektrálna dimenzia

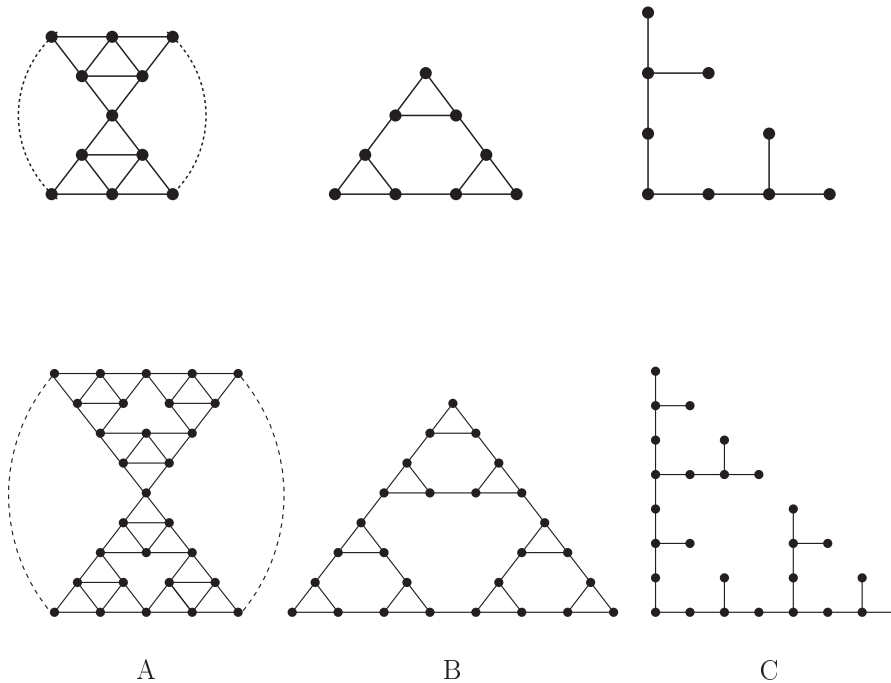
Mriežka atómov kmitá (teplotné kmity). Frekvencia kmitov a ich vlnová dĺžka závisia od štruktúry mriežky. Počet rôznych módov s danou frekvenciou (hustota stavov) závisí od frekvencie ocninne:

$$n(\omega) = \omega^{d_s} \tag{6}$$

kde d_s je spektrálna dimenzia mriežky - definovaná z fyzikálnych princípov !

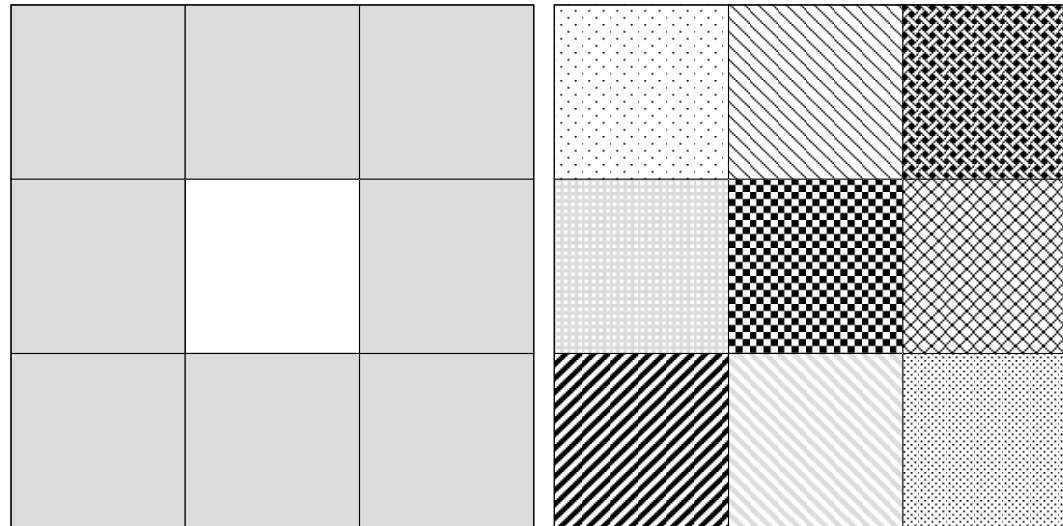
Pre regulárne mriežky je $d_s = d$. Pre fraktály môže byť $d_s \neq d_f$.

Ukazuje sa, že vo fyzikálnych aplikáciách je d_s dôležitejšia ako fraktálna dimenzia d_f .



Tieto fraktály majú tú istú **fraktálnu** dimenziu, $d_f = \ln 3 / \ln 2 \approx 1.585$, ale majú rôznu **spektrálnu** dimenziu. Fraktály A a B majú $d_s = 1.365$, ale fraktál C má $d_s = 1.226$

Náhodný fraktál I

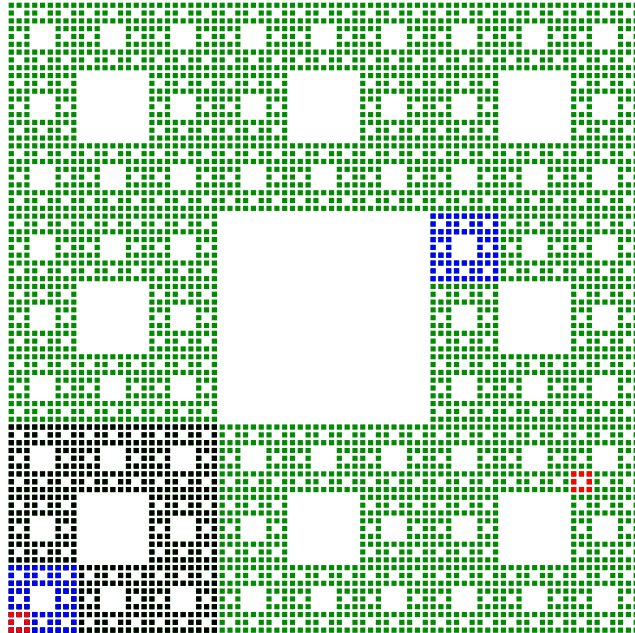


Predtým: každá plocha mala tú istú hustotu: alebo 1, alebo 0.

Teraz: každý štvorec i má inú hustotu p_i tak, aby $\sum_i^N p_i = C$ (C sa môže meniť).

Ďalší krok: v každom iteračnom kroku zvolíme hodnoty p_i nanovo - vznikne náhodný fraktál.

Náhodný fraktál I



Predchádzajúci príklad bol príliš jednoduchý. Mali sme totiž pravidelný algoritmus tvorby nasledujúcej generácie.

Zovšeobecnenia:

- vyberieme ľubovoľný štvorec, nielen stredný. Vol'bu vynechaného štvorca ponecháme zakaždým náhode.
- Každému štvorčeku priradíme náhodne inú váhu

Multifraktály

Ak má každý štvorček inú “váhu”, potom v jednej štruktúre vidíme veľa rôznych fraktálov. Môžeme totiž vyberať len body s danou váhou, a tie vytvoria “svoju” fraktálnu štruktúru.

Preto musíme systém charakterizovať nekonečným množstvom fraktálnych dimenzií.

Multifraktály

Definícia: majme dvojrozmerný systém veľkosti $L \times L$, s $N = L^2$ bodmi. Každý bod i je obsadený s pravdepodobnosťou p_i . Definujme

$$I_q = \sum_i^N p_i^q. \quad (7)$$

Uvažujme jednoduché príklady:

(1) homogénne rozdelenie hmoty: $p_i = 1/L^2$. Potom $I_q = L^{-2(q-1)}$

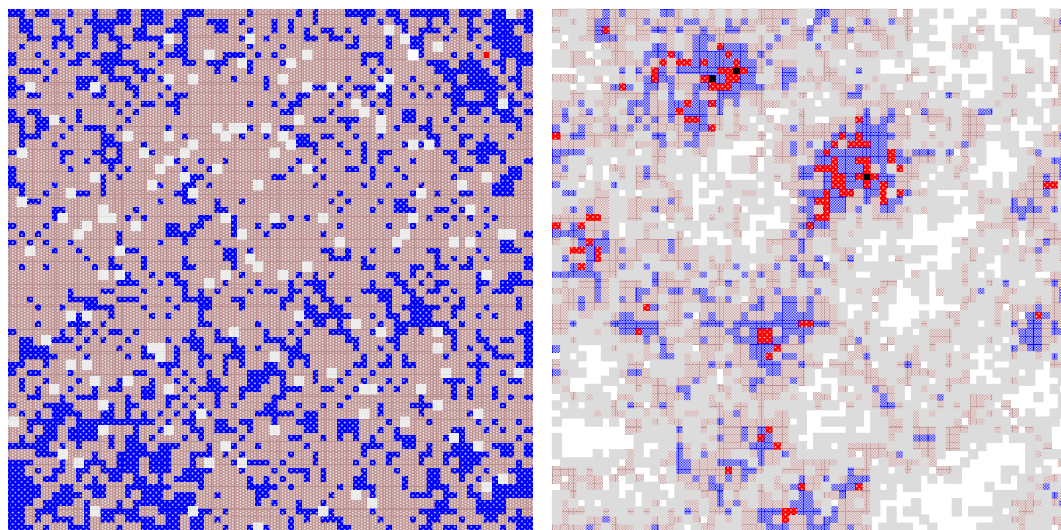
(2) obsadený je len jediný bod. Zrejme $I_q = 1 = L^{-0(q-1)}$

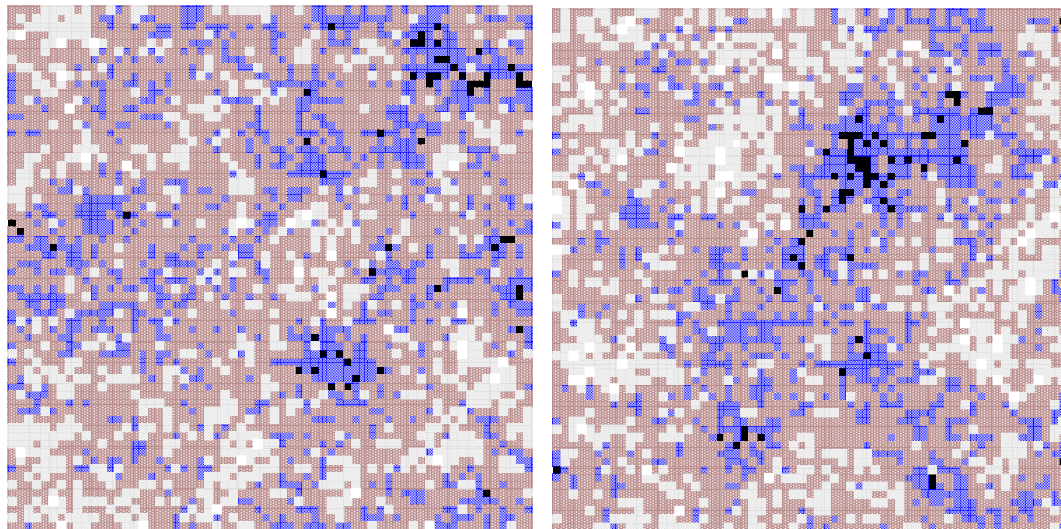
Ak je p_i náhodné číslo, potom s adá očakávať, že

$$I_q \propto L^{d_q(q-1)} \quad (8)$$

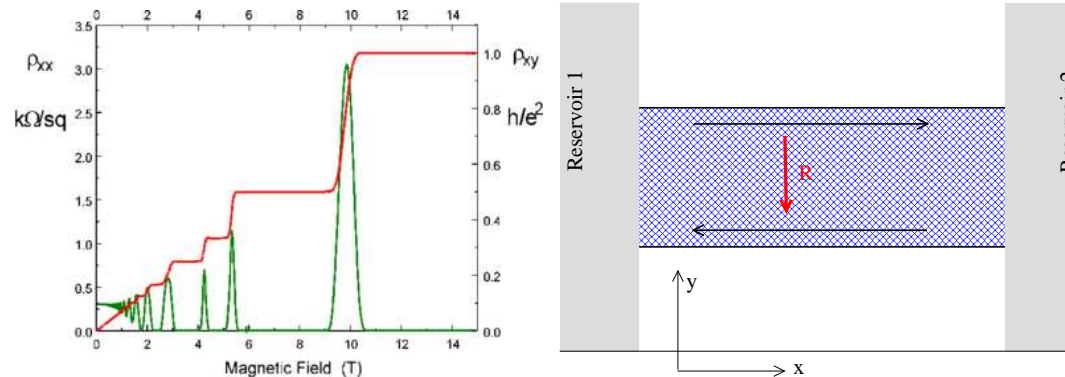
kde d_q sú multifraktálne dimenzie.

Príklad: priestorové rozdelenie elektrónu v dvojrozmiernej mriežke





Kvantovaný Hallov jav



Rozloženie elektrónov v kritickom bode (prechod z jedného plateau na druhé) je multifraktálne. Teória predpovedá, že

$$d_q = 2 - \frac{q}{2\pi\sigma} \quad (9)$$

kde σ je elektrická vodivosť.

Záver

Fraktály sú zaujímavé, užitočné, a nevyhnutné pre popis rôznych fyzikálnych javov. O mnohých z nich sme sa nezmienili, ale zmienime neskôr: napr. nelineárne systémy, podivný atraktor . . .