Počítačová fyzika II

Nelineárne iteračné schémy, chaos, fraktály

Peter Papp, Ján Ďurian

(Peter Markoš)

Katedra experimentálnej fyziky F2-81

Obsah

Nelineárne iteračné schémy majú nečakané riešenia. Môžeme nimi modelovať niektoré javy, pozorované v prírode a interpretovať ich prekvapujúce časové priebehy.

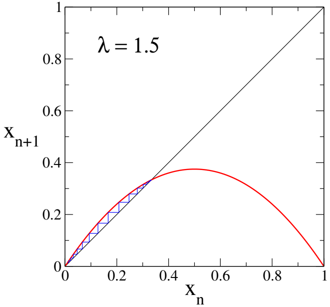
- Logistická mapa - May
- Period doubling
- Podivný atraktor
- Fraktál. definícia, metóda výpočtu fraktálnej dimenzie
- Zadanie úlohy 2.
- Dodatok: Intermitencia, phase locking

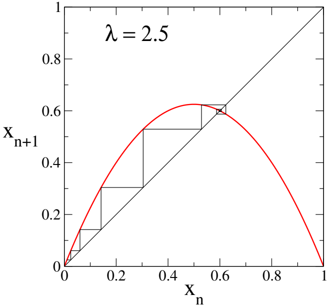
May

Najjednoduchšia nelineárna diferenčná schéma:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \lambda x_n(1 - x_n)$$

Zaujíma nás, ako sa postupnosť $x_1,\ x_2, \dots$ vyvíja v závislosti od hodnoty parametra λ





Pre $\lambda > 1$ existuje stabilný pevný bod $\hat{x} = 1 - \lambda^{-1}$ ktorý je riešením rovnice

$$\hat{x} = f(\hat{x})$$

Ale ...

May

Podmienka stability:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} < 1$$

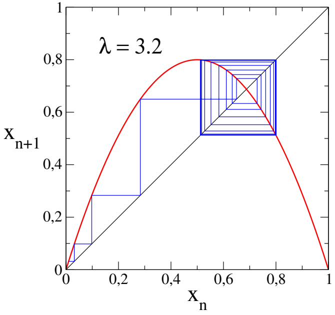
Pevný bod sa stane nestabilným, ak $\lambda > 3$ lebo

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} = 2 - \lambda$$

Vzniknú miesto neho dva nové stabilné body

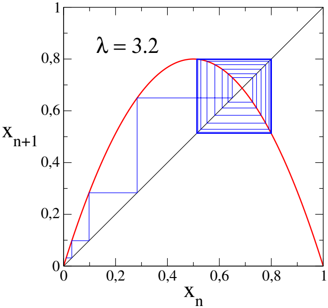
$$x_{n+2} = f(f(x_n)) = f^{(2)}(x_n)$$

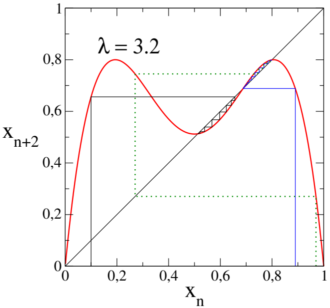
nastal period doubling
(vidličková bifurkácia)



May

Interpretácia nestability pevného bodu:



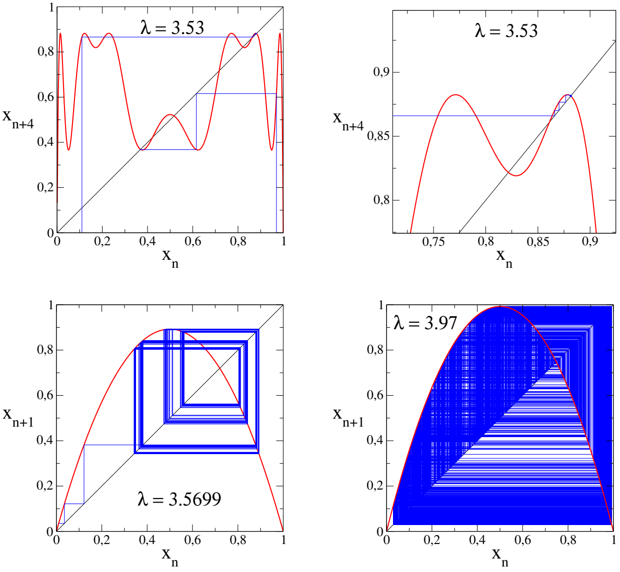


Dva stabilné pevné body, medzi nimi jeden nestabilný.
Kritérium stability:

$$\left| \frac{\partial F(x = \hat{x})}{\partial x} \right| < 1$$

May

Ďalší nárast parametra λ spôsobí nárast periódy:



May

Feigenbaum:

- séria kritických hodnôt λ_n v ktorých dochádza k zdvojnásobeniu periódy (period doubling)
- univerzálne škálovanie:

$$\alpha_n = \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$$

n	perioda	λ_n	α_n
1	2	3	-
2	4	3.4494897	-
3	8	3.5440903	4.7514
4	16	3.5644073	4.6562
5	32	3.5687594	4.6683
6	64	3.5696916	4.6686
7	128	3.5698913	4.6692
8	256	3.5699340	4.6694

https://en.wikipedia.org/wiki/Feigenbaum_constants

May

Zostrojme pravdepodobnostné rozdelenie hodnôt x_n $(n < N)$ Ak $1 < \lambda < 3$ tak

$$p((x_n) = N\delta_{x_n,\hat{x}}$$

Pre periodický dej s periódou P iteračná schéma prechádza bodmi $\hat{x_1}, \hat{x_2}, \dots \hat{x_P}$ a

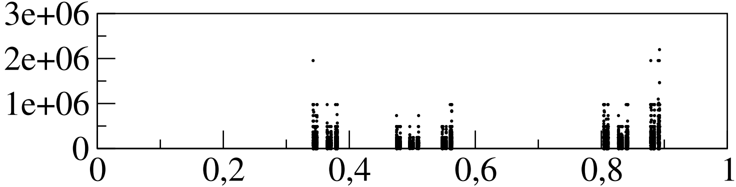
$$p(x) = \sum_{i}^{P} \frac{N}{P} \delta_{x,\hat{x}_i}$$

May

Existujú hodnoty λ, pre ktoré nenájdeme periodický režim. Napr. pre

$$\lambda^* = 3.56995$$

Pozorujeme deterministický chaos



Pravdepodobnostné rozdelenie $p(x)$ po $N = 10^9$ iteráciách.

May

Postup (Algoritmus výpočtu pravdep. rozdelenia).

- rozdeľ interval $(0,1)$ na M dielov (napr. $M = 5\ 000\ 000$)
  deklaruj pole $h(M) = 0$ a $\Delta = M^{-1}$
- iteruj N iterácií $x_i = f(x_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots N$ ($N \geq 10^9$)
  po každej iterácii počítaj
  index = INT($x_i * M$) +1
  h(index) = h(index)+1
- po skončení iterácii vypíš výsledok:
  pre i=1,M
  ak h(i)>0 tak print i/M, h(i)
- Normovanie:

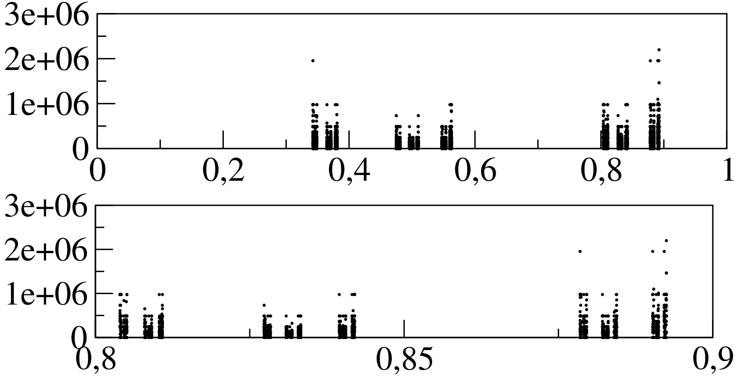
$$h(index) \to \frac{1}{N\Delta} h(index)$$

Normovanie potrebujeme, aby platilo

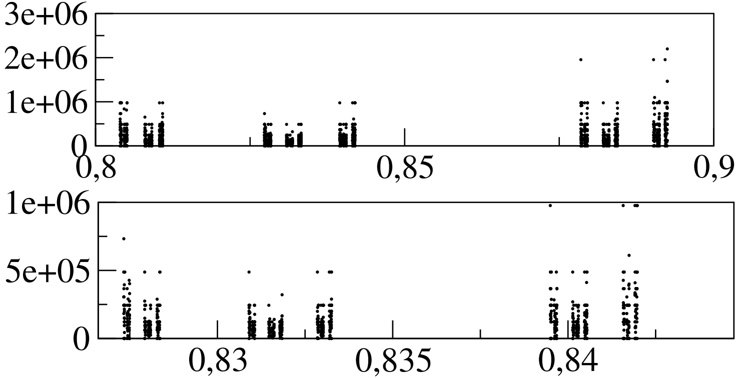
$$\int p(x)\mathrm{d}x = \sum_i^N \Delta p(x_i) = \sum_i^N h_i = 1$$

V našom prípade ho môžeme preskočiť.

May: self-similarity



May: self-similarity



Typická vlastnosť fraktálnej množiny.

Cantorova množina

Algoritmus: nekonečný počet iterácií:

Fraktál s fraktálnou dimenziou

$$d_f = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Pretože: ak meriam jeho "hmotnosť" $\mathcal{M}$ meradlom dĺžky Δ, dostanem

$$\mathcal{M} = \Delta^{-d_f} \times \Delta$$

Obyčajná úsečka má samozrejme $d_f = 1$, pretože získaná hmotnosť nezávisí od delenia.

Fraktálna dimenzia

Vráťme sa k nášmu rozdeleniu bodov x_n. Ak vyplníme len intervaly, v ktorých $h(i) \neq 0$, dostaneme fraktálnu množinu:

Nájdeme jej fraktálnu dimenziu:

Fraktálna dimenzia

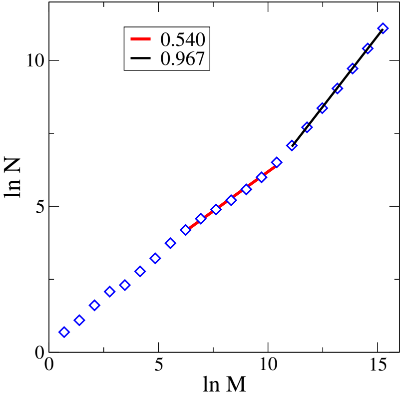
- zvolím $m = 2, 3, \ldots$ a rozdelím interval (0,1) na $M = 2^m$ dielikov
- nájdem $N(m)$ - počet dielikov, v ktorých leží časť nášho fraktálu
- urobím log-log plot $N(m)$ *vs* M a nájdem d_f zo smernice

$$N(m) \propto M^{d_f}$$

Diskusia:

Interval $(0, 1)$ rozdelíme na $M = 2^m$ dielikov. Iterujeme Mayovu schému v $\mathcal{N}$ krokoch a nájdeme pole h.

- pre veľmi malé hodnoty m dostaneme nedôveryhodné výsledky
- pre veľké m dostaneme $d_f \to 1$ pretože sme fraktál zostrojili len z konečného počtu intervalov.
- fraktál vidíme len v oblasti, kde $\mathcal{N} > M$.



Úloha 2

Povinná a nepovinná, ale zaujímavá.

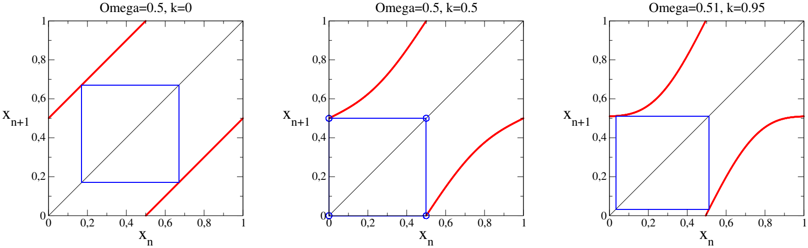
1. Napíšte program pre nelineárnu schému (May). Presvedčte sa, že zmenou parametra λ zmeníte periódu deja.
2. Pre $\lambda = 3.56995$ iterujte nelinárnu schému (aspoň 10^9 iterácií). Zostrojte pravdepodobnostné rozdelenie $p(x)$ ukážte jeho self-podobnosť.
3. Nájdite fraktálnu dimenziu.

Iná nelineárna schéma - phase locking

Nelineárny iteračný proces (má základ vo fyzikálnych dejoch)

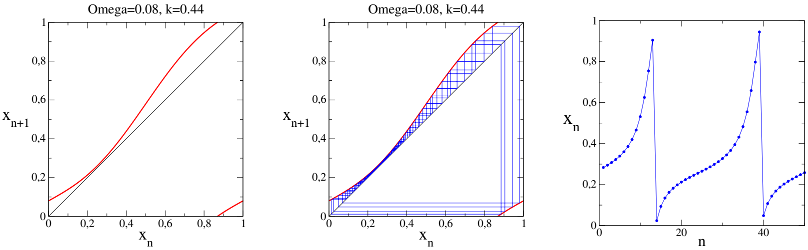
$$x_{n+1} = x_n + \Omega - \frac{k}{2\pi}\sin(2\pi x_n) \pmod 1$$

k … koeficient nelinearity



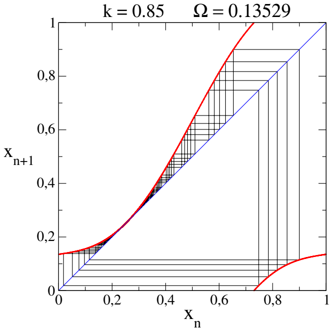
Phase locking - proces je periodický aj keď $\Omega \neq p/q$.

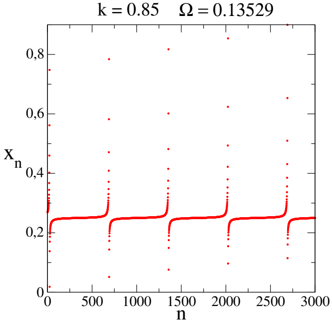
Intermittencia



Pre niektoré hodnoty parametrov systém veľmi dlho zotrvá v blízkosti nejakých hodnôt, a potom sa prudko v krátkom období zmení. Ukážka, ako nelinearita ovplyvňuje stabilitu systému.

Intermittencia





Iný príkald intermittencie. Všimnime si, že perióda stability môźe byť veľmi dlhá. Stabilita je prerušovaná krátkymi obdobiami, kedy sa sytém náhle vzdiali od rovnováhy.