

# Teoría del Caos y fractales

Miguel Ángel González-Gallego    Elena Gutiérrez    Pedro Valero    Alejandro Villegas

Universidad Autónoma de Madrid

*Complejidad y Computación*

9 de marzo de 2016

## Sistema dinámico

Un sistema dinámico es un sistema que consiste en un conjunto de estados, junto con una regla que determina el estado *actual* en términos de los estados *anteriores*.

Dos tipos de sistemas dinámicos:

- Discretos
- Continuos

## Teoría del Caos

La teoría del Caos es la rama de las Matemáticas que estudia el comportamiento de sistemas dinámicos **deterministas** muy sensibles a los datos iniciales.

## Example

Ecuación caótica:

$$z_{n+1} = f(z_n) \text{ siendo } f(x) = x^2 + 1$$

Tomando  $n = 11$  con un error  $\epsilon = 10^{-5} + 10^{-5}i$  al medir  $z_0$  tenemos:

$$f^{11}(\epsilon) = 1,4 \cdot 10^{181} + 1,13 \cdot 10^{174}i$$

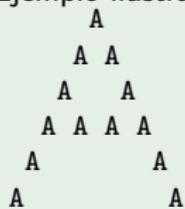
# Algunas definiciones

## Fractal

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas.

## Example

Ejemplo ilustrativo aunque no del todo exacto.



Si cada símbolo  $A$  que se muestra en el dibujo tuviese exactamente la misma forma que la letra representada con todas las  $A$ 's, entonces tendríamos realmente un fractal.

## Example

La ecuación en diferencias de primer orden:

$$X_{t+1} = F(X_t)$$

constituye un ejemplo de sistema dinámico determinista, siendo  $F(x)$  una función conocida.

Para ver las diferencias podemos escribir

$$X'(t) = g(X(t)) \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = g(X(t))$$

Puesto que los valores posibles de  $t$  y  $h$  son enteros tenemos:

$$\begin{aligned}g(X(t)) &= X'(t) = X(t+h) - X(t) = \Delta X(t) \implies X(t+h) = X(t) + \Delta X(t) \implies \\F(X(t)) &= X(t) + \Delta X(t)\end{aligned}$$

Por tanto, encontrar la función  $X(t)$  que resuelve el sistema planteado en el ejemplo es equivalente a resolver la ecuación:

$$X(t+1) = X(t) + \Delta X(t)$$

que, claramente, es una ecuación en diferencias.

## Ecuación logística

Refinamiento del modelo exponencial para el crecimiento de una magnitud. El estudio inicial de crecimiento es aproximadamente exponencial; al cabo de un tiempo, aparece la competencia entre algunos miembros de P por algún recurso crítico K ("cuello de botella") y la tasa de crecimiento disminuye; finalmente, en la madurez, el crecimiento se detiene.

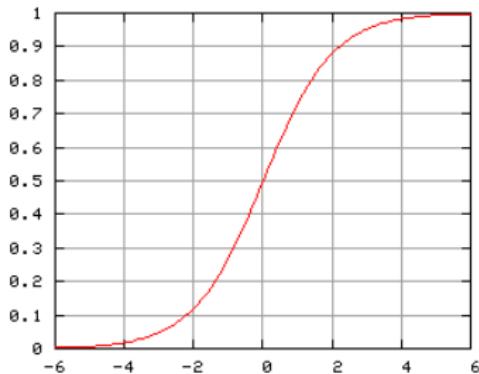


Figura: Gráfica de  $P(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$

### Definition (Proceso de Verhulst)

Modelo matemático que representa el desarrollo del número de individuos de una población a lo largo del tiempo.

### Descripción del modelo

- Ratio de crecimiento

$$R = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$$

- Si  $R = r$  constante

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r)x_n$$

lo que os lleva a

$$x_n = (1 + r)^n x_0$$

- Verhulst mejora el modelo con

$$R = r(1 - x_n)$$

obteniendo

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r)x_n - rx_n^2 \quad (1)$$

### Punto fijo

Un punto fijo de una función  $f$  es aquel tal que

$$x = f(x)$$

- El punto fijo  $x_0 = 0$  es estable.
- El punto fijo  $x_0 = 1$  requiere estudio
  - Definimos el error

$$\delta_n = x_n - 1$$

- Linealizando (1) tenemos

$$\delta_{n+1} = (1 - r)\delta_n$$

- Vemos que la estabilidad depende de  $r$ .

# Procesos de Verhulst.

## Estabilidad según $r$

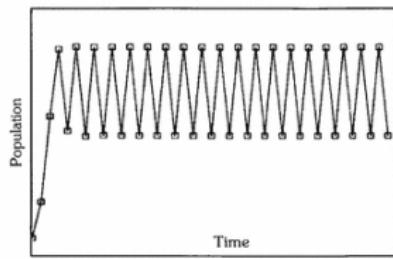


Figura: Evolución de la población con  $r = 2,3$

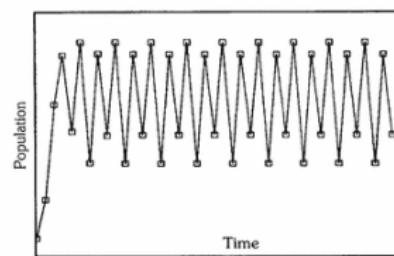


Figura: Evolución de la población con  $r = 2,5$

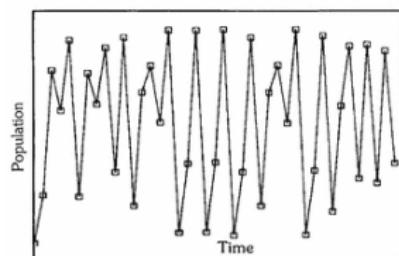


Figura: Evolución de la población con  $r = 3$

# Procesos de Verhulst.

## Estabilidad

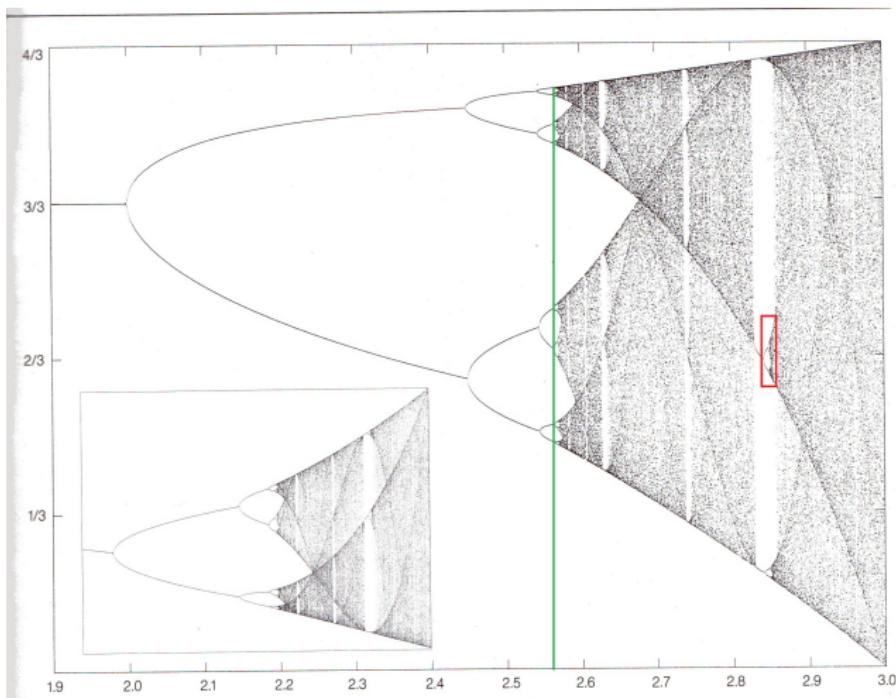


Figura: Visión global

# Conjuntos de Julia y Mandelbrot

## Repaso de números complejos

Es necesario tener claras las ideas básicas de los números complejos para hablar de los conjuntos de Julia y Mandelbrot.

- Son números de la forma

$$z = a + bi$$

donde  $a$  y  $b$  son números reales e  $i = \sqrt{-1}$

- Se representan como puntos de un plano: **el plano complejo**  
Cada número complejo tiene asociado un punto del plano y viceversa
- A menudo nos interesará considerar su módulo:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

# Conjuntos de Julia y Mandelbrot

## Conjunto de Julia

### Conjunto de Julia

Familia de conjuntos fractales que se obtienen al estudiar el comportamiento de los números complejos al ser iterados por una función.

Iterando en la siguiente 11 con  $c$  constante obtenemos un ejemplo de conjunto de Julia

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \text{ siendo } c \text{ un número complejo} \quad (2)$$

Para generarlos consideramos la iteración

$$\begin{aligned} z_0 &= z_0 \\ z_1 &= z_0^2 + c \\ z_2 &= z_1^2 + c \\ &\vdots \\ z_{n+1} &= z_n^2 + c \end{aligned}$$

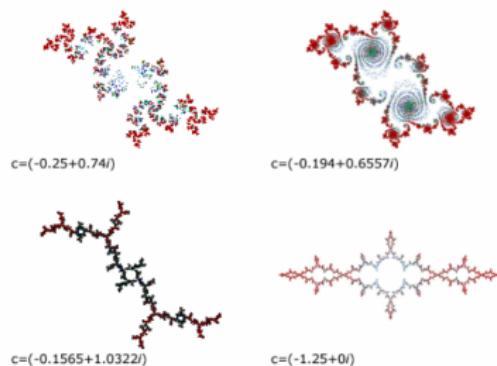


Figura: Ejemplos de conjuntos de Julia

# Conjuntos de Julia y Mandelbrot

## Conjunto de Mandelbrot

### Conjunto de Mandelbrot

Mandelbrot modifica el proceso iterativo de Julia haciendo variable el punto  $c$  y fijando el punto  $z_0 = 0$ .

El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de números complejos  $c$  para los cuales la sucesión de puntos obtenida por el método iterativo:

$$z_0 = z_0$$

$$z_1 = z_0^2 + c$$

$$z_2 = z_1^2 + c$$

⋮

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

no tiende a infinito, es decir,  
está acotada.

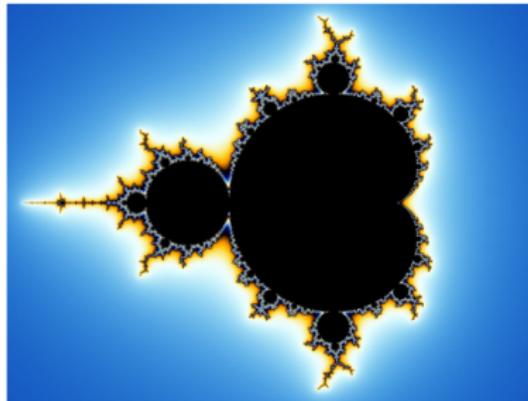


Figura: Conjunto de Mandelbrot

- El término fractal fue propuesto por el matemático **Benoit Mandelbrot** en 1975, procedente del latin “Fractus” que significa “fracturado”.
- Recordemos que en la figura 7 la diferencia entre los distintos colores mostrados se debía a la convergencia o no de los diferentes puntos del plano al aplicarles la ecuación de Mandelbrot.
- La relación entre el caos y los fractales se da en la frontera del dibujo.



Figura: Concha de un molusco



Figura: Trozo de brocoli al que se ha aplicado zoom

- La existencia de los fractales en la vida cotidiana se debe a la gran capacidad de comprimir información que tienen asociada.
- Definición recursiva de árbol.

## Polvo de Cantor

Se denomina Polvo de Cantor al fractal resultante de iterar sobre el conjunto de cantor en dos dimensiones.

## Conjunto de Cantor

Conjunto construido mediante el siguiente proceso:

- ① Tomamos el intervalo  $[0,1]$ , lo dividimos en 3 intervalos iguales y eliminamos el intervalo central
- ② Volvemos al paso 1 sobre cada uno de los dos conjuntos restantes.

La imagen 10 ilustra la construcción de este conjunto.

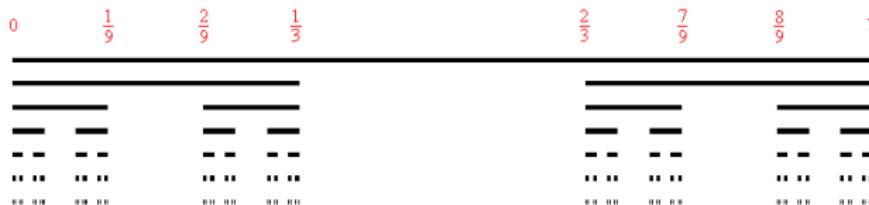


Figura: Primeras etapas del proceso de construcción del conjunto de Cantor

### Comparación con ecuaciones en diferencias:

- La diferencia con los sistemas dinámicos en diferencias se debe a la continuidad de las variables
- Expresamos los incrementos como derivadas
- Obtenemos **ecuaciones diferenciales**

### Ecuación diferencial

Una ecuación diferencial es una fórmula matemática que relaciona una función con sus derivadas.  
Por ejemplo

$$y'(x) = y(x) \implies y(x) = e^{x+c}$$

### Ecuación del calor

La ecuación del calor es una importante ecuación diferencial en derivadas parciales del tipo parabólica que describe la distribución del calor (o variaciones de la temperatura) en una región a lo largo del transcurso del tiempo.

### Modelización del problema

- La variable  $t$  es el tiempo
- Definimos  $x(t)$  como la diferencia de temperatura en todo instante  $t$
- $x'(t)$  nos da la variación de temperatura en todo instante  $t$
- **Teoría:** La tasa de cambio de temperatura es inversamente proporcional a la diferencia de temperatura

La ecuación que modeliza este fenómeno es:

$$x'(t) = ax(t) \quad \text{con } a < 0 \tag{3}$$

Cuya solución viene dada por:

$$x(t) = c \cdot e^{at} \tag{4}$$

### Movimiento del péndulo

Queremos estudiar el movimiento de un péndulo que tiene en su extremo un peso y que cuelga de un soporte que limita su movimiento a lo largo de un círculo.

### Modelización del sistema

- La variable  $t$  es el tiempo.
- Definimos  $x(t)$  como la posición angular del péndulo en todo instante  $t$ .
- La función  $x'(t)$  mide la velocidad angular del péndulo.
- La función  $x''(t)$  mide la aceleración angular del péndulo en todo instante  $t$

La ecuación que modeliza este fenómeno es:

$$x''(t) = -\sin x(t) \quad (5)$$

Se trata de una ecuación de *segundo orden* y es una de las más importantes en ciencia.

- Según el orden de las derivadas que aparezcan en la expresión:
  - Primer orden
  - Segundo orden
  - ...
- Según la relación entre la función  $x$  y sus derivadas
  - Lineales
  - No lineales
- Según si aparece explícitamente la variable  $t$  en la ecuación
  - Autónomas
  - No autónomas

### Dependencia del dato inicial

Siempre es necesario conocer un dato inicial a fin de determinar con exactitud la solución de la ecuación. Sin embargo, en ocasiones, pequeños errores al medir este dato inicial pueden dar lugar a grandes cambios en el sistema.

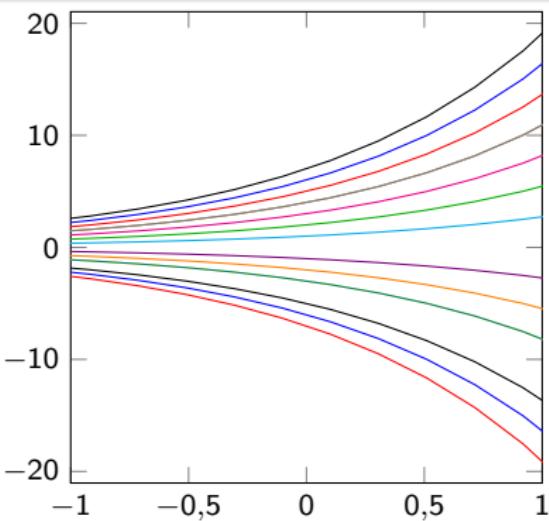


Figura: Familia de funciones de la forma  $x(t) = x(0)e^t$

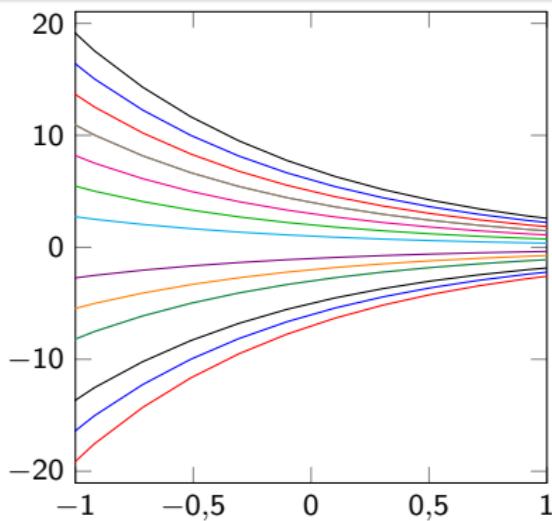
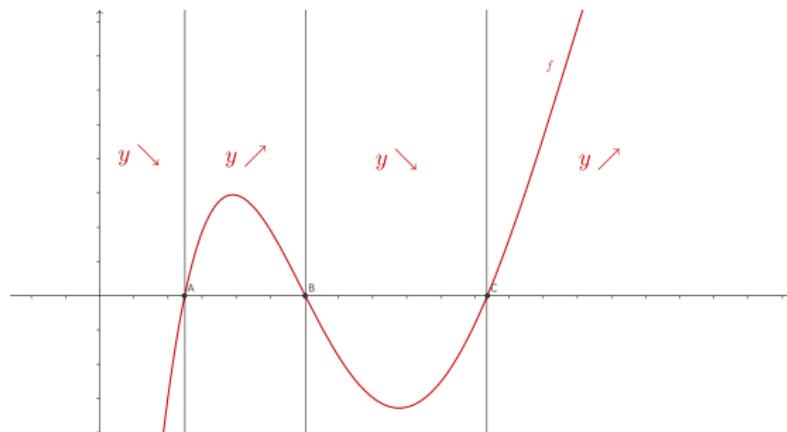


Figura: Familia de funciones de la forma  $x(t) = x(0)e^{-t}$

# Espacio de estados/fases

- A menudo no es nada sencillo obtener la solución de una ecuación diferencial.
- En matemáticas hay una asignatura completa dedicada a la comprensión de estas ecuaciones.
- Sin embargo puede estudiarse la tendencia general de la solución.
- Para ello empleamos los **diagrama de fases**

Consideramos un problema general  $x'(t) = f(x(t))$



(2.3, 0.86)



# Órbitas caóticas y exponentes de Lyapunov

## Definición

El concepto de equilibrio inestable es muy común en física

### Example

Aunque en teoría podemos colocar una pelota en el pico de una montaña sin que se mueva, en la práctica esto es imposible.

El estado de equilibrio estático es **inestable**

Un comportamiento muy común en algunos sistemas dinámicos es pasar de un estado de equilibrio inestable a otro estable.

### Órbitas caóticas

Las órbitas caóticas son aquellas que permanecen siempre en un estado inestable, sin llegar a ser converger o ser atraídas hacia ningún estado estático o periódico estable.

Esta irregularidad es cuantificada mediante los **números de Lyapunov** y los **exponentes de Lyapunov**.

### Número de Lyapunov

Informalmente, diremos que el **número de Lyapunov** es la tasa o razón media a la que los puntos divergen a lo largo de la órbita. Diremos que el **exponente de Lyapunov** es el logaritmo natural del número de Lyapunov.

# Órbitas caóticas y exponentes de Lyapunov

## Ejemplo numérico

- Encontramos *caos* cuando los coeficientes de Lyapunov de nuestro sistema dinámico son mayores que 1.

### Exponente de Lyapunov (definición formal)

Dado un dato inicial  $x_0$  consideramos un dato cercano  $x_0 + \epsilon_0$ , como ya hicimos en el ejemplo ?? siendo la separación  $\epsilon_0$  extremadamente pequeña.

Sea  $\epsilon_n$  la separación tras  $n$  iteraciones, si se da la relación  $|\epsilon_n| \approx e^{n \cdot \lambda} |\epsilon_0|$ , decimos que  $\lambda$  es el **exponente de Lyapunov**.

### Example

Vamos a calcular el exponente de Lyapunov para el caso concreto

$$f(x) = \begin{cases} rx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ r - rx, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

De forma genérica tendremos:

$$\epsilon_n = f^n(x_0 + \epsilon_0) - f^n(x_0)$$

y queremos escribir

$$|\epsilon_n| = |\epsilon_0| e^{n\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\epsilon_n}{\epsilon_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \epsilon_0) - f^n(x_0)}{\epsilon_0} \right| = \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)|$$

### Example (Continuación)

donde en el último paso hemos considerado  $\epsilon_0 \rightarrow 0$ .

Aplicando la regla de la cadena podemos escribir

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)$$

Razonando sobre los multiplicadores podemos escribir

$$\ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \sum i = 0^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

En esta ocasión tenemos  $f'(x) = \pm r$  para todo  $x$  lo que nos lleva a

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| = \ln r$$

Las transparencias que vienen a continuación son las que aparecen por defecto con el paquete que estamos usando. Las dejamos hasta el último momento ya que ahí se pueden ver muchos ejemplos de cómo hacer diferentes cosas.

El índice no se ve bien ahora mismo. Pasemos de eso, cuando tengamos esto terminado y veamos cuántas secciones y subsecciones hemos utilizado nos peleamos con cómo mostrar el índice.

# Overview

## 1 Introducción

- Algunas definiciones

## 2 Sistemas discretos

- Ecuaciones en diferencias.
- Ecuación logística
- Procesos de Verhulst.
- Conjuntos de Julia y Mandelbrot
  - Conjunto de Julia
  - Conjunto de Mandelbrot
- Fractales, dimensión de Hausdorff y dimensión fractal
- Polvo de Cantor

## 3 Sistemas continuos

- Sistemas dinámicos deterministas, ecuaciones diferenciales
- Espacio de estados/fases
- Oscilaciones
- Sistemas disipativos: atractores
- Flujos, compresibles o no
- Atractores extraños: caos
- Ejemplos de sistemas
- Lorenz Volterra
- Órbitas caóticas y exponentes de Lyapunov

## 4 Aplicaciones

- Generación gráfica de conjuntos de Julia
- Ejemplos gráficos de explorar el conjunto de Mandelbrot
- Caos y criptografía
- Compresión fractal

## Paragraphs of Text

Sed iaculis dapibus gravida. Morbi sed tortor erat, nec interdum arcu. Sed id lorem lectus. Quisque viverra augue id sem ornare non aliquam nibh tristique. Aenean in ligula nisl. Nulla sed tellus ipsum. Donec vestibulum ligula non lorem vulputate fermentum accumsan neque mollis.

Sed diam enim, sagittis nec condimentum sit amet, ullamcorper sit amet libero. Aliquam vel dui orci, a porta odio. Nullam id suscipit ipsum. Aenean lobortis commodo sem, ut commodo leo gravida vitae. Pellentesque vehicula ante iaculis arcu pretium rutrum eget sit amet purus. Integer ornare nulla quis neque ultrices lobortis. Vestibulum ultrices tincidunt libero, quis commodo erat ullamcorper id.

## Bullet Points

- Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit
- Aliquam blandit faucibus nisi, sit amet dapibus enim tempus eu
- Nulla commodo, erat quis gravida posuere, elit lacus lobortis est, quis porttitor odio mauris at libero
- Nam cursus est eget velit posuere pellentesque
- Vestibulum faucibus velit a augue condimentum quis convallis nulla gravida

# Blocks of Highlighted Text

## Block 1

*Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue. Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan dolor.*

## Block 2

*Pellentesque sed tellus purus. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Vestibulum quis magna at risus dictum tempor eu vitae velit.*

## Block 3

*Suspendisse tincidunt sagittis gravida. Curabitur condimentum, enim sed venenatis rutrum, ipsum neque consectetur orci, sed blandit justo nisi ac lacus.*

## Heading

- ① Statement
- ② Explanation
- ③ Example

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue. Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan dolor.

# Table

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Cuadro: Table caption

## Theorem (Mass–energy equivalence)

$$E = mc^2$$

## Example (Theorem Slide Code)

```
\begin{frame}
\frametitle{Theorem}
\begin{theorem}[Mass--energy equivalence]
$E = mc^2$
\end{theorem}
\end{frame}
```

# Figure

Uncomment the code on this slide to include your own image from the same directory as the template .TeX file.

An example of the \cite command to cite within the presentation:

This statement requires citation [Smith, 2012].

# References



John Smith (2012)

Title of the publication

*Journal Name* 12(3), 45 – 678.

# The End