

# Teoría del Caos y fractales

Miguel Ángel González-Gallego    Elena Gutiérrez    Pedro Valero    Alejandro Villegas

Universidad Autónoma de Madrid

*Complejidad y Computación*

20 de marzo de 2016

## 1 Introducción

- Algunas definiciones

## 2 Sistemas discretos

- Ecuaciones en diferencias.
- Ecuación logística
- Procesos de Verhulst.
- Conjuntos de Julia y Mandelbrot
  - Conjunto de Julia
  - Conjunto de Mandelbrot
- Fractales, dimensión de Hausdorff y dimensión fractal
  - Dimensión de Hausdorff y dimensión fractal
  - Ejemplos
- Polvo de Cantor

## 3 Sistemas continuos

- Sistemas dinámicos deterministas, ecuaciones diferenciales
- Espacio de estados/fases
- Algunos ejemplos

## • Ecuaciones diferenciales no lineales

## • Sistemas disipativos: atractores

## • Flujos, compresibles o no

## • Atractores extraños: caos

- Ejemplos de atractores extraños: Mapa de Henón

## • Ecuaciones de Lorenz

- Introducción
- Propiedades

## • Órbitas caóticas y exponentes de Lyapunov

## 4 Aplicaciones

- Generación gráfica de conjuntos de Julia y Mandelbrot
  - Códigos
  - Imágenes
- Caos y criptografía
  - Usando una función caótica para encriptar
- Compresión fractal
- Antenas fractales
- Teoría del Caos y Aeronáutica

## 1 Introducción

- Algunas definiciones

## 2 Sistemas discretos

- Ecuaciones en diferencias.
- Ecuación logística
- Procesos de Verhulst.
- Conjuntos de Julia y Mandelbrot
  - Conjunto de Julia
  - Conjunto de Mandelbrot
- Fractales, dimensión de Hausdorff y dimensión fractal
  - Dimensión de Hausdorff y dimensión fractal
  - Ejemplos
- Polvo de Cantor

## 3 Sistemas continuos

- Sistemas dinámicos deterministas, ecuaciones diferenciales
- Espacio de estados/fases
- Algunos ejemplos

- Ecuaciones diferenciales no lineales

- Sistemas disipativos: atractores

- Flujos, compresibles o no

- Atractores extraños: caos

- Ejemplos de atractores extraños: Mapa de Henón

- Ecuaciones de Lorenz

- Introducción

- Propiedades

- Órbitas caóticas y exponentes de Lyapunov

## 4 Aplicaciones

- Generación gráfica de conjuntos de Julia y Mandelbrot
  - Códigos
  - Imágenes
- Caos y criptografía
  - Usando una función caótica para encriptar
- Compresión fractal
- Antenas fractales
- Teoría del Caos y Aeronáutica

## Sistema dinámico

Un sistema dinámico es un sistema que consiste en un conjunto de estados, junto con una regla que determina el estado *actual* en términos de los estados *anteriores*.

Dos tipos de sistemas dinámicos:

- Discretos
- Continuos

## Sistema dinámico

Un sistema dinámico es un sistema que consiste en un conjunto de estados, junto con una regla que determina el estado *actual* en términos de los estados *anteriores*.

Dos tipos de sistemas dinámicos:

- Discretos
- Continuos

## Teoría del Caos

La teoría del Caos es la rama de las Matemáticas que estudia el comportamiento de sistemas dinámicos **deterministas** muy sensibles a los datos iniciales.

## Sistema dinámico

Un sistema dinámico es un sistema que consiste en un conjunto de estados, junto con una regla que determina el estado *actual* en términos de los estados *anteriores*.

Dos tipos de sistemas dinámicos:

- Discretos
- Continuos

## Teoría del Caos

La teoría del Caos es la rama de las Matemáticas que estudia el comportamiento de sistemas dinámicos **deterministas** muy sensibles a los datos iniciales.

## Example

Ecuación caótica:

$$z_{n+1} = f(z_n) \text{ siendo } f(x) = x^2 + 1$$

Tomando  $n = 11$  con un error  $\epsilon = 10^{-5} + 10^{-5}i$  al medir  $z_0$  tenemos:

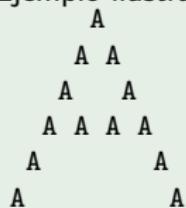
$$f^{11}(\epsilon) = 1,4 \cdot 10^{181} + 1,13 \cdot 10^{174}i$$

## Fractal

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas.

## Example

Ejemplo ilustrativo aunque no del todo exacto.



Si cada símbolo  $A$  que se muestra en el dibujo tuviese exactamente la misma forma que la letra representada con todas las  $A$ 's, entonces tendríamos realmente un fractal.

## 1 Introducción

- Algunas definiciones

## 2 Sistemas discretos

- Ecuaciones en diferencias.
- Ecuación logística
- Procesos de Verhulst.
- Conjuntos de Julia y Mandelbrot
  - Conjunto de Julia
  - Conjunto de Mandelbrot
- Fractales, dimensión de Hausdorff y dimensión fractal
  - Dimensión de Hausdorff y dimensión fractal
  - Ejemplos
- Polvo de Cantor

## 3 Sistemas continuos

- Sistemas dinámicos deterministas, ecuaciones diferenciales
- Espacio de estados/fases
- Algunos ejemplos

## • Ecuaciones diferenciales no lineales

- Sistemas disipativos: atractores
- Flujos, compresibles o no
- Atractores extraños: caos
  - Ejemplos de atractores extraños: Mapa de Henón
- Ecuaciones de Lorenz
  - Introducción
  - Propiedades
- Órbitas caóticas y exponentes de Lyapunov

## 4 Aplicaciones

- Generación gráfica de conjuntos de Julia y Mandelbrot
  - Códigos
  - Imágenes
- Caos y criptografía
  - Usando una función caótica para encriptar
- Compresión fractal
- Antenas fractales
- Teoría del Caos y Aeronáutica

## Example

La ecuación en diferencias de primer orden:

$$X_{t+1} = F(X_t)$$

constituye un ejemplo de sistema dinámico determinista, siendo  $F(x)$  una función conocida.

Para ver las diferencias podemos escribir

$$X'(t) = g(X(t)) \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = g(X(t))$$

Puesto que los valores posibles de  $t$  y  $h$  son enteros tenemos:

$$\begin{aligned}g(X(t)) &= X'(t) = X(t+h) - X(t) = \Delta X(t) \implies X(t+h) = X(t) + \Delta X(t) \implies \\F(X(t)) &= X(t) + \Delta X(t)\end{aligned}$$

Por tanto, encontrar la función  $X(t)$  que resuelve el sistema planteado en el ejemplo es equivalente a resolver la ecuación:

$$X(t+1) = X(t) + \Delta X(t)$$

que, claramente, es una ecuación en diferencias.

## Ecuación logística

Refinamiento del modelo exponencial para el crecimiento de una magnitud. El estudio inicial de crecimiento es aproximadamente exponencial; al cabo de un tiempo, aparece la competencia entre algunos miembros de P por algún recurso crítico K ("cuello de botella") y la tasa de crecimiento disminuye; finalmente, en la madurez, el crecimiento se detiene.

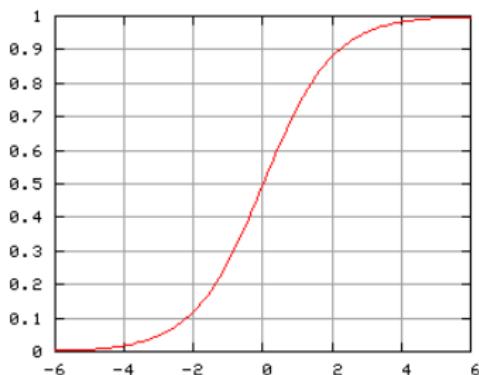


Figura 1: Gráfica de  $P(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$

### Definición (Proceso de Verhulst)

Modelo matemático que representa el desarrollo del número de individuos de una población a lo largo del tiempo.

### Definición (Proceso de Verhulst)

Modelo matemático que representa el desarrollo del número de individuos de una población a lo largo del tiempo.

### Descripción del modelo

- Ratio de crecimiento

$$R = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$$

### Definición (Proceso de Verhulst)

Modelo matemático que representa el desarrollo del número de individuos de una población a lo largo del tiempo.

#### Descripción del modelo

- Ratio de crecimiento

$$R = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$$

- Si  $R = r$  constante

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r)x_n$$

lo que os lleva a

$$x_n = (1 + r)^n x_0$$

### Definición (Proceso de Verhulst)

Modelo matemático que representa el desarrollo del número de individuos de una población a lo largo del tiempo.

#### Descripción del modelo

- Ratio de crecimiento

$$R = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$$

- Si  $R = r$  constante

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r)x_n$$

lo que os lleva a

$$x_n = (1 + r)^n x_0$$

- Verhulst mejora el modelo con

$$R = r(1 - x_n)$$

obteniendo

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r)x_n - rx_n^2 \quad (1)$$

### Punto fijo

Un punto fijo de una función  $f$  es aquel tal que

$$x = f(x)$$

- El punto fijo  $x_0 = 0$  es inestable.
- El punto fijo  $x_0 = 1$  requiere estudio

- Definimos el error

$$\delta_n = x_n - 1$$

- Linealizando la ecuación (1) tenemos

$$\delta_{n+1} = (1 - r)\delta_n$$

- Vemos que la estabilidad depende de  $r$ .

# Procesos de Verhulst.

Estabilidad según  $r$

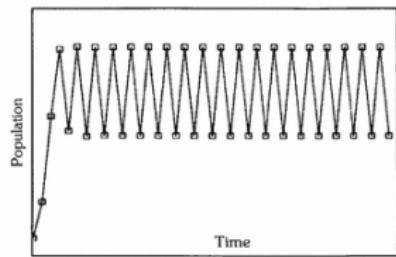


Figura 2: Evolución de la población con  $r = 2,3$

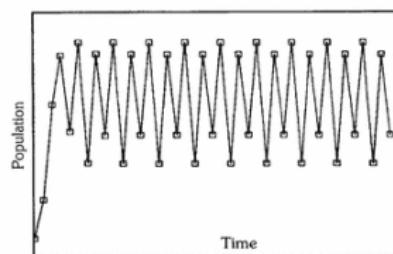


Figura 3: Evolución de la población con  $r = 2,5$

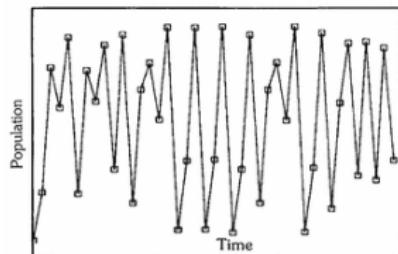


Figura 4: Evolución de la población con  $r = 3$

# Procesos de Verhulst.

## Estabilidad

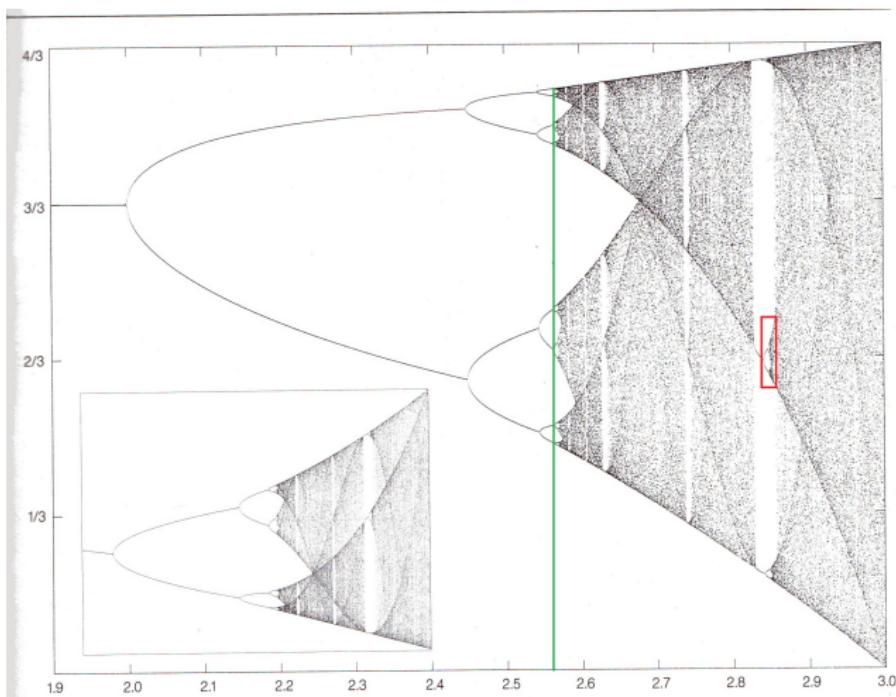


Figura 5: Visión global

# Conjuntos de Julia y Mandelbrot

## Repasso de números complejos

Es necesario tener claras las ideas básicas de los números complejos para hablar de los conjuntos de Julia y Mandelbrot.

- Son números de la forma

$$z = a + bi$$

donde  $a$  y  $b$  son números reales e  $i = \sqrt{-1}$

- Se representan como puntos de un plano: **el plano complejo**  
Cada número complejo tiene asociado un punto del plano y viceversa
- A menudo nos interesará considerar su módulo:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

# Conjuntos de Julia y Mandelbrot

## Conjunto de Julia

### Conjunto de Julia

Familia de conjuntos fractales que se obtienen al estudiar el comportamiento de los números complejos al ser iterados por una función.

Iterando en la siguiente ecuación con  $c$  constante obtenemos un ejemplo de conjunto de Julia

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \text{ siendo } c \text{ un número complejo} \quad (2)$$

Para generarlos consideramos la iteración

$$z_0 = z_0$$

$$z_1 = z_0^2 + c$$

$$z_2 = z_1^2 + c$$

⋮

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

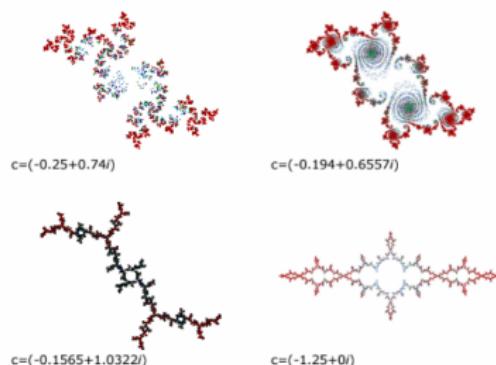


Figura 6: Ejemplos de conjuntos de Julia

# Conjuntos de Julia y Mandelbrot

## Conjunto de Mandelbrot

### Conjunto de Mandelbrot

Mandelbrot modifica el proceso iterativo de Julia haciendo variable el punto  $c$  y fijando el punto  $z_0 = 0$ .

El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de números complejos  $c$  para los cuales la sucesión de puntos obtenida por el método iterativo:

$$z_0 = z_0$$

$$z_1 = z_0^2 + c$$

$$z_2 = z_1^2 + c$$

⋮

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

no tiende a infinito, es decir,  
está acotada.

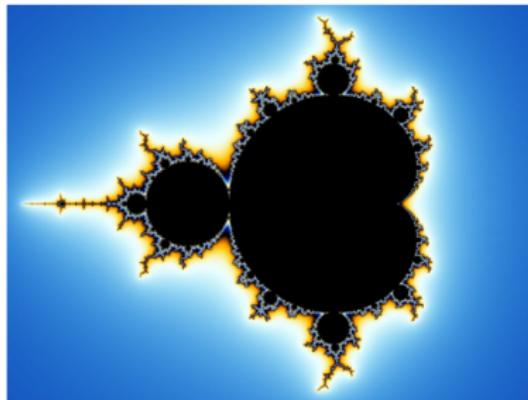


Figura 7: Conjunto de Mandelbrot

- El término fractal fue propuesto por el matemático **Benoit Mandelbrot** en 1975, procedente del latín "Fractus" que significa "fracturado".
- Recordemos que en la figura 7 la diferencia entre los distintos colores mostrados se debía a la convergencia o no de los diferentes puntos del plano al aplicarles la ecuación de Mandelbrot.
- La relación entre el caos y los fractales se da en la frontera del dibujo.



Figura 8: Concha de un molusco



Figura 9: Trozo de brocoli al que se ha aplicado zoom

- La existencia de los fractales en la vida cotidiana se debe a la gran capacidad de comprimir información que tienen asociada.
- Definición recursiva de árbol.

# Fractales, dimensión de Hausdorff y dimensión fractal

## Dimensión de Hausdorff y dimensión fractal

- La **dimensión topológica** de un cierto objeto en un espacio es  $d$  si y sólo si cada punto del objeto se puede *desconectar* (es decir, quitar uno o varios puntos dejando el objeto inconexo) del resto por un conjunto de dimensión  $d - 1$ .
- Todas estas dimensiones son enteras
- Los fractales tienen dimensión topológica entera pero se comportan como objetos de dimensión mayor.
- Surge la dimensión de Hausdorff

### Dimensión de Hausdorff

De nuevo, intuitivamente, la dimensión de Hausdorff nos dice cómo el objeto en cuestión llena el espacio en el que está inmerso. Para ellos recubriremos la figura con *bolas* de radio  $r$ . La razón entre el número de bolas que necesitemos  $N(r)$  y  $\ln(\frac{1}{r})$  es la dimensión fractal de nuestro objeto. Esto es,

$$D = \frac{N(r)}{\ln(\frac{1}{r})} \quad (3)$$

# Fractales, dimensión de Hausdorff y dimensión fractal

## Ejemplos



Figura 10: Medida fractal de la línea de costa de Gran Bretaña

Valor exacto	Valor aproximado	Nombre
$\frac{\log(2)}{\log(3)}$	0.6309	Conjunto de Cantor
Medida (recuento de cajas)	1,2	Conjunto de Julia Dendrita
$\log\left(\frac{1+\sqrt[3]{73-6\sqrt{87}}+\sqrt[3]{73+6\sqrt{87}}}{3}\right) \cdot \frac{1}{\log(2)}$	1,5236	Frontera de la curva Dragón
$3 \frac{\log(\phi)}{\log(1+\sqrt{2})}$	1,6379	Fractal de Fibonacci
2	2	Frontera del Conjunto de Mandelbrot
Medido	1,24	Línea de costa de Gran Bretaña
Medido	1,52	Línea de costa de Noruega

Figura 11: Ejemplos de conjuntos con dimensión fractal

## Polvo de Cantor

Se denomina Polvo de Cantor al fractal resultante de iterar sobre el conjunto de cantor en dos dimensiones.

## Conjunto de Cantor

Conjunto construido mediante el siguiente proceso:

- ① Tomamos el intervalo  $[0,1]$ , lo dividimos en 3 intervalos iguales y eliminamos el intervalo central
- ② Volvemos al paso 1 sobre cada uno de los dos conjuntos restantes.

La imagen 12 ilustra la construcción de este conjunto.

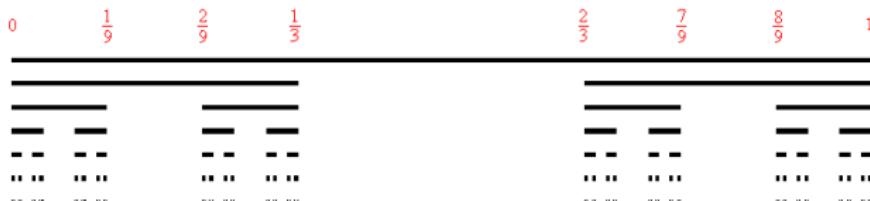


Figura 12: Primeras etapas del proceso de construcción del conjunto de Cantor

## 1 Introducción

- Algunas definiciones

## 2 Sistemas discretos

- Ecuaciones en diferencias.
- Ecuación logística
- Procesos de Verhulst.
- Conjuntos de Julia y Mandelbrot
  - Conjunto de Julia
  - Conjunto de Mandelbrot
- Fractales, dimensión de Hausdorff y dimensión fractal
  - Dimensión de Hausdorff y dimensión fractal
  - Ejemplos
- Polvo de Cantor

## 3 Sistemas continuos

- Sistemas dinámicos deterministas, ecuaciones diferenciales
- Espacio de estados/fases
- Algunos ejemplos

## ● Ecuaciones diferenciales no lineales

### ● Sistemas disipativos: atractores

### ● Flujos, compresibles o no

### ● Atractores extraños: caos

- Ejemplos de atractores extraños: Mapa de Henón

### ● Ecuaciones de Lorenz

- Introducción
- Propiedades

### ● Órbitas caóticas y exponentes de Lyapunov

## 4 Aplicaciones

- Generación gráfica de conjuntos de Julia y Mandelbrot
  - Códigos
  - Imágenes
- Caos y criptografía
  - Usando una función caótica para encriptar
- Compresión fractal
- Antenas fractales
- Teoría del Caos y Aeronáutica

### Comparación con ecuaciones en diferencias:

- La diferencia con los sistemas dinámicos en diferencias se debe a la continuidad de las variables
- Expresamos los incrementos como derivadas
- Obtenemos **ecuaciones diferenciales**

### Ecuación diferencial

Una ecuación diferencial es una fórmula matemática que relaciona una función con sus derivadas.  
Por ejemplo

$$y'(x) = y(x) \implies y(x) = e^{x+c}$$

### Ecuación del calor

La ecuación del calor es una importante ecuación diferencial en derivadas parciales del tipo parabólica que describe la distribución del calor (o variaciones de la temperatura) en una región a lo largo del transcurso del tiempo.

### Modelización del problema

- La variable  $t$  es el tiempo
- Definimos  $x(t)$  como la diferencia de temperatura en todo instante  $t$
- $x'(t)$  nos da la variación de temperatura en todo instante  $t$
- **Teoría:** La tasa de cambio de temperatura es inversamente proporcional a la diferencia de temperatura

La ecuación que modeliza este fenómeno es:

$$x'(t) = ax(t) \quad \text{con } a < 0 \tag{4}$$

Cuya solución viene dada por:

$$x(t) = c \cdot e^{at} \tag{5}$$

### Movimiento del péndulo

Queremos estudiar el movimiento de un péndulo que tiene en su extremo un peso y que cuelga de un soporte que limita su movimiento a lo largo de un círculo.

### Modelización del sistema

- La variable  $t$  es el tiempo.
- Definimos  $x(t)$  como la posición angular del péndulo en todo instante  $t$ .
- La función  $x'(t)$  mide la velocidad angular del péndulo.
- La función  $x''(t)$  mide la aceleración angular del péndulo en todo instante  $t$

La ecuación que modeliza este fenómeno es:

$$x''(t) = -\sin x(t) \tag{6}$$

Se trata de una ecuación de *segundo orden* y es una de las más importantes en ciencia.

- Según el orden de las derivadas que aparezcan en la expresión:
  - Primer orden
  - Segundo orden
  - ...
- Según la relación entre la función  $x$  y sus derivadas
  - Lineales
  - No lineales
- Según si aparece explícitamente la variable  $t$  en la ecuación
  - Autónomas
  - No autónomas

### Dependencia del dato inicial

Siempre es necesario conocer un dato inicial a fin de determinar con exactitud la solución de la ecuación. Sin embargo, en ocasiones, pequeños errores al medir este dato inicial pueden dar lugar a grandes cambios en el sistema.

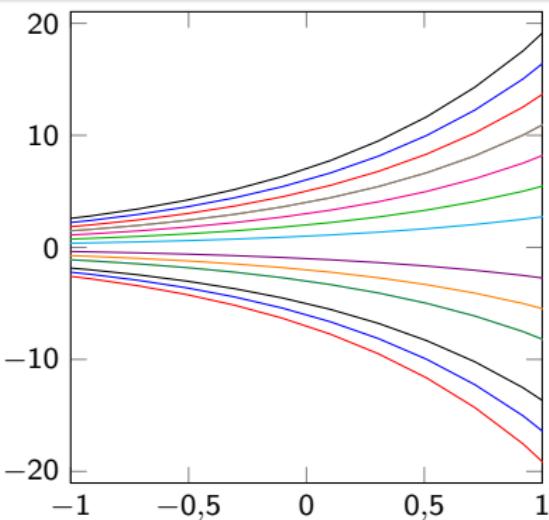


Figura 13: Familia de funciones de la forma  $x(t) = x(0)e^t$

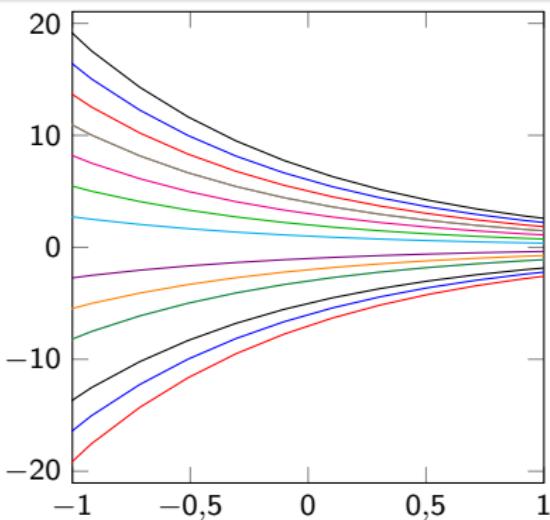
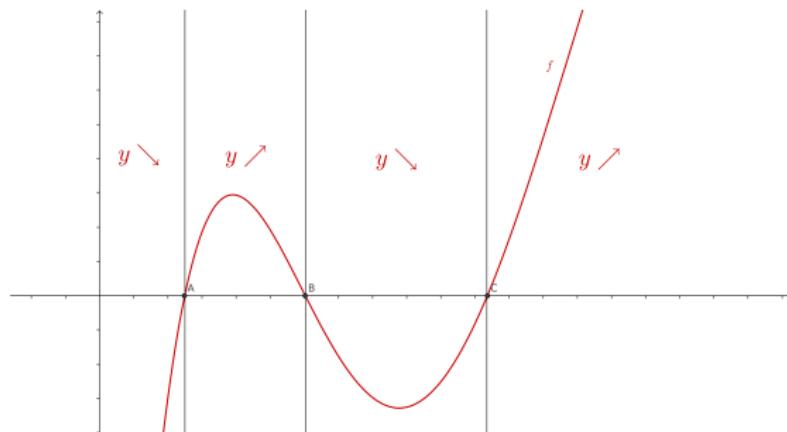


Figura 14: Familia de funciones de la forma  $x(t) = x(0)e^{-t}$

# Espacio de estados/fases

- A menudo no es nada sencillo obtener la solución de una ecuación diferencial.
- En matemáticas hay una asignatura completa dedicada a la comprensión de estas ecuaciones.
- Sin embargo puede estudiarse la tendencia general de la solución.
- Para ello empleamos los **diagrama de fases**

Consideramos un problema general  $y'(t) = f(y(t))$



(2.3, 0.86)



## Example

Consideremos de nuevo la E.D.O. (ecuación diferencial ordinaria):

$$x'(t) = ax(t) \quad (7)$$

Cuya solución era:

$$x(t) = ce^{at} \quad (8)$$

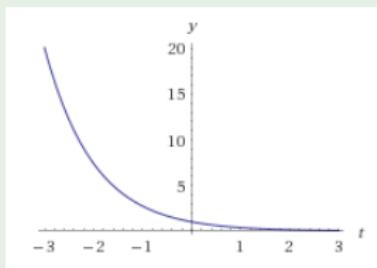


Figura 15: Caso  $a = -1$ :  $x(t) = ce^{-t}$

Error despreciable

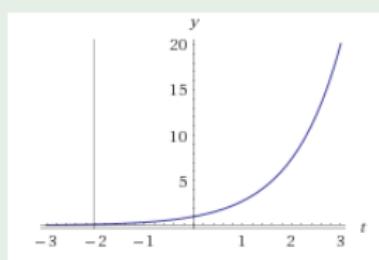


Figura 16: Caso  $a = 1$ :  $x(t) = ce^t$

Error NO despreciable

**Problema:** La mayoría no pueden ser resueltos de manera explícita. Usaremos propiedades cualitativas de las soluciones.

## Example

### Función logística de la población

$$x'(t) = a \cdot x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \quad \text{con } a > 0 \text{ y } K > 0 \quad (9)$$

# Ecuaciones diferenciales no lineales

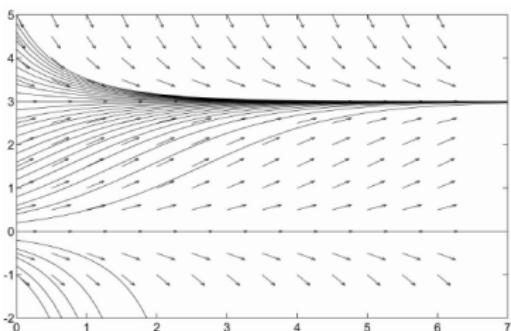


Figura 17: Soluciones de la ecuación logística diferencial

- **Soluciones de equilibrio:**  $x(t) = 0$  y  $x(t) = 1$
- $x(t) = 0$  es un **sumidero** mientras que  $x(t) = 1$  es una **fuente**.
- La población crecerá siempre que la población inicial sea positiva y estrictamente menor que K.
- Las soluciones que corresponden a valores negativos de la población *explotan*. Afortunadamente, no tienen sentido físico.

## Tres conceptos importantes

- Existencia de solución
- Unicidad de la solución
- Dependencia continua  $\neq$  Dependencia *sensible*

**Observación:** La *dependencia sensible* o **efecto mariposa** es la característica más importante de los **sistemas caóticos**.



Figura 18: Un columpio es un sistema disipativo

## Definition (Atractor)

Conjunto hacia el que todas las trayectorias cercanas convergen.

- Es invariante, toda trayectoria que empiece en el conjunto nunca sale de él.
- Existe un conjunto abierto  $U$  que contiene al atractor de modo que toda trayectoria que comience en  $U$  acaba en el atractor.
- Un atractor es el conjunto más pequeño que cumple estas propiedades.

## Example

Si consideramos el sistema bidimensional

$$x'(t) = x(t) - x^3(t)$$

$$y'(t) = -y(t)$$

podemos ver fácilmente que su plano de fases será el mostrado en la figura 19.

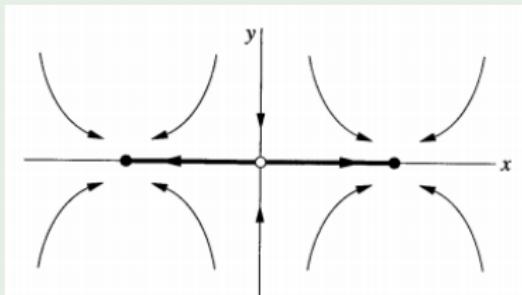


Figura 19: Plano de fases asociado al sistema descrito en el ejemplo

Tendríamos dos **atractores**

$$A_1 = \{(+1, 0)\}$$

$$A_2 = \{(-1, 0)\}$$

## Example (El péndulo)

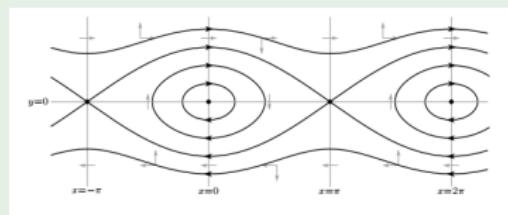


Figura 20: Plano de fases del péndulo simple

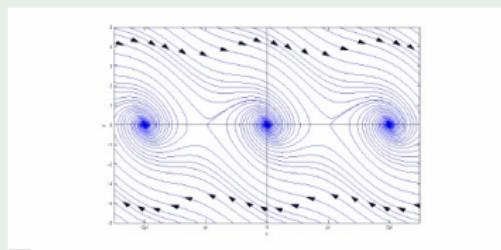


Figura 21: Plano de fases del péndulo amortiguado

## Definition (Compresibilidad de un fluido)

Propiedad para disminuir su volumen al aplicar presión o compresión. Los gases son altamente *compresibles* mientras que los líquidos son altamente *incompresibles*.

Movimiento **estacionario**: Las condiciones de velocidad en un punto no cambian con el tiempo.

- Fluido viscoso
- Baja velocidad de movimiento

Flujo **turbulento** o **caótico**: El movimiento se vuelve irregular y desordenado.

- Alta velocidad del flujo

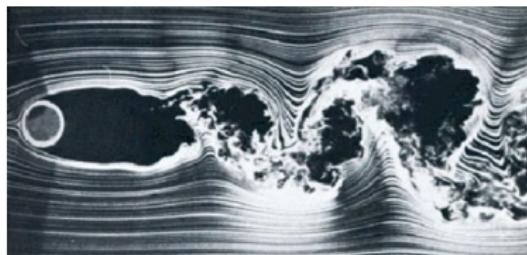


Figura 22: Flujo de un fluido

## Enfoque Optimista

El flujo turbulento es resultado de la ampliación de un movimiento que incluye tantas componentes de frecuencia que parece volverse desordenado y confuso. Existe una **estructura periódica** subyacente pero es demasiado compleja para seguirla.

## Teoría del Caos

El movimiento turbulento tiene un **comportamiento completamente aperiódico**. Deja de ser susceptible de cualquier predicción. En general, 2 partículas que se muevan de forma parecida en el flujo en un tiempo dado pueden hallarse en estados de movimiento totalmente diferentes tras un lapso suficiente de tiempo.

## Definition (Atractores extraños)

Llamamos **atractor extraño** a aquellos con **dimensión de Hausorff no entera** o fractal. También decimos que un atractor es extraño cuando su dinámica es **caótica**.

## Propiedades

- Órbitas irregulares
- Las trayectorias divergen exponencialmente
- El espacio de fases es *acotado*.

# Atractores extraños: caos

## Ejemplos de atractores extraños: Mapa de Henón

### Definition (Mapa de Henón)

Es un sistema dinámico discreto en el tiempo y uno de los más estudiados cuando analizamos comportamientos caóticos.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}\quad \left.\right\}$$



Figura 23: Atractor de Henón para  $a=1.4$  y  $b=0.3$

# Atractores extraños: caos

## Ejemplos de atractores extraños: Mapa de Henón

### Mapa de Henón

Supongamos  $b = 0.3$ :

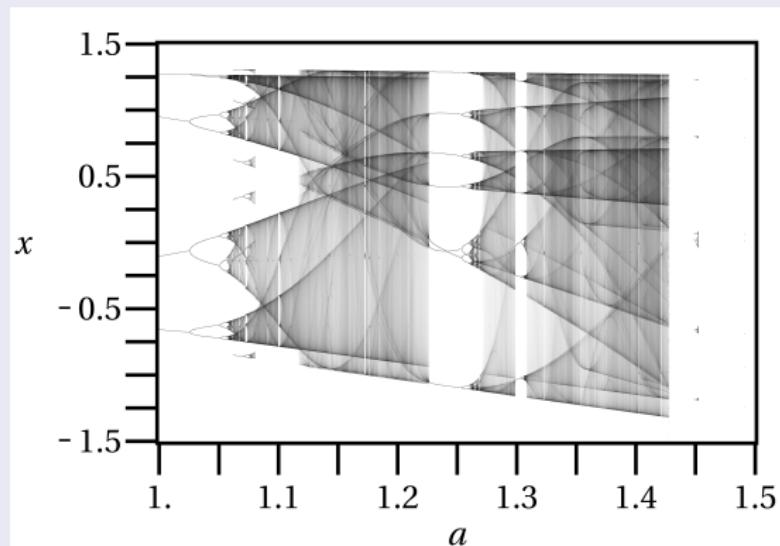


Figura 24: Esquema de órbita para el mapa de Henón con  $b=0.3$

### Ecuaciones de Lorenz

En 1963 Lorenz trató de desarrollar un modelo que permitiera predecir el clima.  
El sistema descrito por Lorenz fue:

$$\begin{aligned}x'(t) &= \sigma(y(t) - x(t)) \\y'(t) &= rx(t) - y(t) - x(t)y(t) \\z'(t) &= x(t)y(t) - bz(t)\end{aligned}$$

donde  $\sigma$  es el **número de Prandtl**, que representa la viscosidad/conductividad térmica,  $r$  es el **número de Rayleigh**, que representa la diferencia de temperatura entre base y tope y  $b$  es la razón entre la longitud y altura del sistema.

- El sistema parecía ser muy simple (y por tanto útil)
- Pero escondía un comportamiento realmente caótico.
- Las soluciones daban lugar a una figura con “forma de mariposa” conocida hoy en día como **atractor extraño**.
- Este atractor es un fractal con dimensión entre 2 y 3.

# Ecuaciones de Lorenz

## Introducción

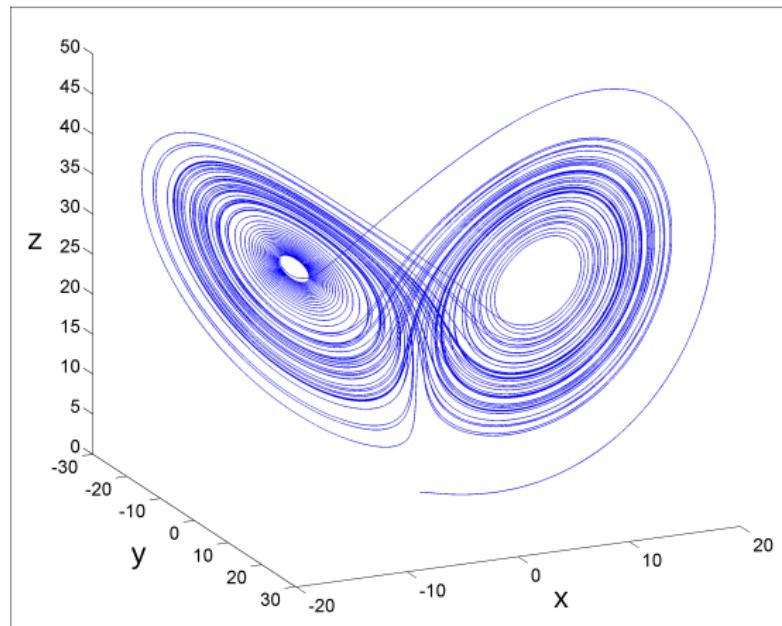


Figura 25: Representación tridimensional de la solución de las ecuaciones de Lorenz

### Aparente paradoja

Lorenz demostró que las soluciones no salían de una cierta región *delimitada* y que, llegado a cierto punto, se veían atraídas hacia un conjunto de volumen cero.

- **No linearidad**
- **Simetría** Es decir, si  $(x(t), y(t), z(t))$  es una solución también lo será  $(-x(t), -y(t), z(t))$ .

$$-x'(t) = -\sigma(y(t) - x(t))$$

$$-y'(t) = -rx(t) + y(t) - x(t)y(t)$$

$$z'(t) = x(t)y(t) - bz(t)$$

### • Puntos fijos

- El  $(0, 0, 0)$  siempre es punto fijo.
- Según los parámetros tenemos el otro punto fijo:

$$\left( \pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right) \text{ para } r > 1$$

- Definimos  $C^+$  y  $C^-$

# Ecuaciones de Lorenz

## Propiedades

- **Contracción de volumen**

El sistema de Lorenz es *dissipativo*: el volumen en el plano de fases se contrae.

## Demostración

Para cualquier sistema n-dimensional consideramos una superficie cerrada con un cierto volumen en el plano de fases.

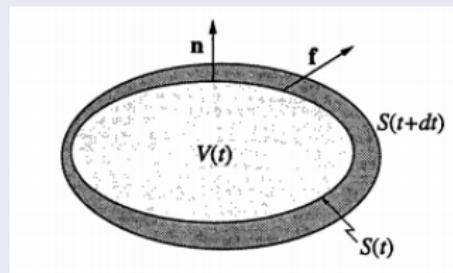


Figura 26: Evolución con el tiempo de la superficie y del volumen contenido en su interior, siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal a la superficie  $S(t)$

El volumen varía según la ecuación:

$$V(t + dt) = V(t) + \int_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dt) \, dA$$

# Ecuaciones de Lorenz

## Propiedades

### Continuación

Puesto que

$$V'(t) = \frac{V(t+dt) - V(t)}{dt} = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

Aplicando el teorema de divergencia podemos reescribir la integral como:

$$V'(t) = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV$$

siendo, para el sistema de Lorenz

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}[\sigma(x-y)] + \frac{\partial}{\partial y}[rx-y-xy] + \frac{\partial}{\partial z}[xy-bz] = -\sigma - 1 - b < 0$$

Puesto que la divergencia es constante, la ecuación de la derivada del volumen queda

$$V'(t) = -(\sigma + 1 + b)V(t) \implies V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$$

con lo que queda claro que el volumen de crece de manera exponencial.

**Respecto a la estabilidad en el origen:**

Respecto a la estabilidad en el origen:

- Estabilidad lineal del origen

### Respecto a la estabilidad en el origen:

- **Estabilidad lineal del origen**

- Sistema linealizado

$$x'(t) = \sigma(y(t) - x(t))$$

$$y'(t) = rx(t) - y(t)$$

$$z'(t) = -bz(t)$$

### Respecto a la estabilidad en el origen:

- Estabilidad lineal del origen

- Sistema linealizado

$$x'(t) = \sigma(y(t) - x(t))$$

$$y'(t) = rx(t) - y(t)$$

$$z'(t) = -bz(t)$$

- Ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

### Respecto a la estabilidad en el origen:

- Estabilidad lineal del origen

- Sistema linealizado

$$x'(t) = \sigma(y(t) - x(t))$$

$$y'(t) = rx(t) - y(t)$$

$$z'(t) = -bz(t)$$

- Ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- La traza de la matriz es  $\tau = -\sigma - 1 < 0$  y el determinante  $\Delta = \sigma(1 - r)$ .

# Ecuaciones de Lorenz

## Propiedades

Respecto a la estabilidad en el origen:

- Estabilidad lineal del origen

- Sistema linealizado

$$x'(t) = \sigma(y(t) - x(t))$$

$$y'(t) = rx(t) - y(t)$$

$$z'(t) = -bz(t)$$

- Ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- La traza de la matriz es  $\tau = -\sigma - 1 < 0$  y el determinante  $\Delta = \sigma(1 - r)$ .
  - Si  $r > 1$  el origen es un *punto de silla* puesto que  $\Delta < 0$

### Respecto a la estabilidad en el origen:

- **Estabilidad lineal del origen**

- Sistema linealizado

$$x'(t) = \sigma(y(t) - x(t))$$

$$y'(t) = rx(t) - y(t)$$

$$z'(t) = -bz(t)$$

- Ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- La traza de la matriz es  $\tau = -\sigma - 1 < 0$  y el determinante  $\Delta = \sigma(1 - r)$ .
- Si  $r > 1$  el origen es un *punto de silla* puesto que  $\Delta < 0$
- Si  $r < 1$  entonces nos encontramos ante un sumidero

# Ecuaciones de Lorenz

## Propiedades

### Respecto a la estabilidad en el origen:

- **Estabilidad lineal del origen**

- Sistema linealizado

$$x'(t) = \sigma(y(t) - x(t))$$

$$y'(t) = rx(t) - y(t)$$

$$z'(t) = -bz(t)$$

- Ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- La traza de la matriz es  $\tau = -\sigma - 1 < 0$  y el determinante  $\Delta = \sigma(1 - r)$ .
  - Si  $r > 1$  el origen es un *punto de silla* puesto que  $\Delta < 0$
  - Si  $r < 1$  entonces nos encontramos ante un sumidero

- **Estabilidad global del origen**

El origen es **globalmente estable** pues toda trayectoria con  $r < 1$  tiende al origen cuando  $t$  lo hace a  $\infty$

# Órbitas caóticas y exponentes de Lyapunov

## Definición

El concepto de equilibrio inestable es muy común en física

### Example

Aunque en teoría podemos colocar una pelota en el pico de una montaña sin que se mueva, en la práctica esto es imposible.

El estado de equilibrio estático es **inestable**

Un comportamiento muy común en algunos sistemas dinámicos es pasar de un estado de equilibrio inestable a otro estable.

### Órbitas caóticas

Las órbitas caóticas son aquellas que permanecen siempre en un estado inestable, sin llegar a converger o ser atraídas hacia ningún estado estático o periódico estable.

Esta irregularidad es cuantificada mediante los **números de Lyapunov** y los **exponentes de Lyapunov**.

### Número de Lyapunov

Informalmente, diremos que el **número de Lyapunov** es la tasa o razón media a la que los puntos divergen a lo largo de la órbita. Diremos que el **exponente de Lyapunov** es el logaritmo natural del número de Lyapunov.

# Órbitas caóticas y exponentes de Lyapunov

## Ejemplo numérico

- Encontramos *caos* cuando los coeficientes de Lyapunov de nuestro sistema dinámico son mayores que 1.

### Exponente de Lyapunov (definición formal)

Dado un dato inicial  $x_0$  consideramos un dato cercano  $x_0 + \epsilon_0$ , como ya hicimos en el ejemplo 1 siendo la separación  $\epsilon_0$  extremadamente pequeña.

Sea  $\epsilon_n$  la separación tras  $n$  iteraciones, si se da la relación  $|\epsilon_n| \approx e^{n \cdot \lambda} |\epsilon_0|$ , decimos que  $\lambda$  es el **exponente de Lyapunov**.

### Example

Vamos a calcular el exponente de Lyapunov para el caso concreto

$$f(x) = \begin{cases} rx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ r - rx, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

De forma genérica tendremos:

$$\epsilon_n = f^n(x_0 + \epsilon_0) - f^n(x_0)$$

y queremos escribir

$$|\epsilon_n| = |\epsilon_0| e^{n\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\epsilon_n}{\epsilon_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \epsilon_0) - f^n(x_0)}{\epsilon_0} \right| = \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)|$$

### Example (Continuación)

donde en el último paso hemos considerado  $\epsilon_0 \rightarrow 0$ .

Aplicando la regla de la cadena podemos escribir

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)$$

Razonando sobre los multiplicadores podemos escribir

$$\ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

En esta ocasión tenemos  $f'(x) = \pm r$  para todo  $x$  lo que nos lleva a

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| = \ln r$$

## 1 Introducción

- Algunas definiciones

## 2 Sistemas discretos

- Ecuaciones en diferencias.
- Ecuación logística
- Procesos de Verhulst.
- Conjuntos de Julia y Mandelbrot
  - Conjunto de Julia
  - Conjunto de Mandelbrot
- Fractales, dimensión de Hausdorff y dimensión fractal
  - Dimensión de Hausdorff y dimensión fractal
  - Ejemplos

## 3 Sistemas continuos

- Sistemas dinámicos deterministas, ecuaciones diferenciales
- Espacio de estados/fases
- Algunos ejemplos

## ● Ecuaciones diferenciales no lineales

### ● Sistemas disipativos: atractores

### ● Flujos, compresibles o no

### ● Atractores extraños: caos

- Ejemplos de atractores extraños: Mapa de Henón

### ● Ecuaciones de Lorenz

- Introducción

- Propiedades

### ● Órbitas caóticas y exponentes de Lyapunov

## 4 Aplicaciones

### ● Generación gráfica de conjuntos de Julia y Mandelbrot

- Códigos

- Imágenes

### ● Caos y criptografía

- Usando una función caótica para encriptar

### ● Compresión fractal

### ● Antenas fractales

### ● Teoría del Caos y Aeronáutica

# Generación gráfica de conjuntos de Julia y Mandelbrot

## Códigos

```
function M=mjcore(z,c,niter)
M=zeros(length(z(:,1)),length(z(1,:)));
for s=1:niter
    mask=abs(z)<2;
    M(mask)=M(mask)+1;
    z(mask)=z(mask).^2+c(mask);
end
M(mask)=0;
end

function M=Julia(zmin,zmax,hpx,niter,c)
vpx=round(hpx*abs(imag(zmax-zmin)/real(zmax-zmin)));
[zRe,zIm]=meshgrid(linspace(real(zmin),real(zmax),hpx),
                     linspace(imag(zmin),imag(zmax),vpx));
z=zRe+i*zIm;
cc=zeros(vpx,hpx)+c;
M=mjcore(z,cc,niter);
end

% To use this function:
% Jc1=Julia(-1.6+1.2i,1.6-1.2i,640,64,-0.75+0.2i)
% imagesc(Jc1)
```

# Generación gráfica de conjuntos de Julia y Mandelbrot

## Códigos

```
function M=mandelbrot(cmin,cmax,hpx,niter)
vpx=round(hpx*abs(imag(cmax-cmin)/real(cmax-cmin)));
z=zeros(vpx,hpx);
[cRe,cIm]=meshgrid(linspace(real(cmin),real(cmax),hpx),
linspace(imag(cmin),imag(cmax),vpx));

c=cRe+i*cIm; % Matrix c contains all points in the plane
M=zeros(vpx,hpx);
for s=1:niter
    mask=abs(z)<2;
    M(mask)=M(mask)+1;
    z(mask)=z(mask).^2+c(mask);
end
M(mask)=0;
end

% To use this function:
% M=mandelbrot(-2.1+1.05i,0.7-1.05i,640,64);
% imagesc(M)
```

# Generación gráfica de conjuntos de Julia y Mandelbrot

## Imágenes

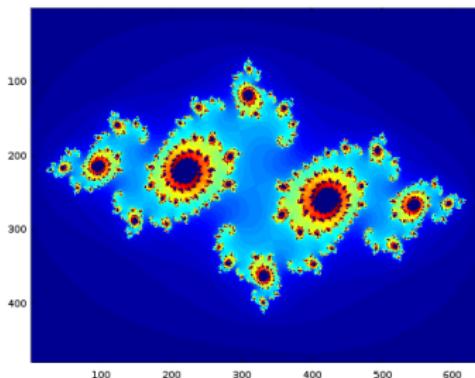


Figura 27: Conjunto de Julia obtenido mediante Octave

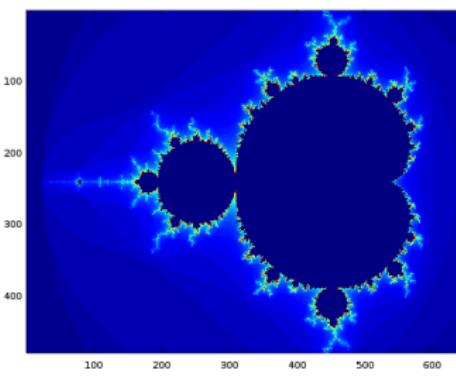


Figura 28: Conjunto de Mandelbrot obtenido mediante Octave

- La criptografía se ocupa de los problemas de la seguridad de la información y sus pertinentes almacenamientos y transferencias.
- Un problema caótico muy sensible a los datos iniciales es interesante para la criptografía.
- Los sistemas caóticos son probabilísticamente difíciles.

## Criptografía fractal

La criptografía fractal o caótica aplica fractales y sistemas caóticos para obtener métodos criptográficos.

# Caos y criptografía

Usando una función caótica para encriptar

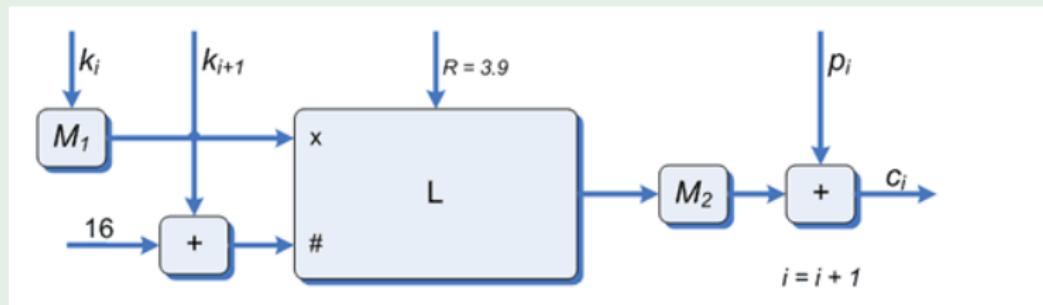
## Conjunto difuso

Un subconjunto difuso, es un conjunto que puede contener elementos de forma parcial, es decir que la propiedad  $x \in A$  puede ser cierta, falsa o solamente posible.

Cada elemento tiene una probabilidad asociada.

## Example (Cifrado por bloques simple)

Este es un algoritmo de cifrado por bloques con una clave secreta. La clave es utilizada para generar un pad que luego es combinado con el texto en claro por bloques de 8 bits.



# Caos y criptografía

Usando una función caótica para encriptar



*Imagen Original*



*Imagen Encriptada Sin  
retroalimentación*



*Imagen Encriptada Con  
Retroalimentación*

Figura 29: Comparación de imagen original con su versión cifrada y su versión con el cifrado mejorado

## Compresión fractal

La idea básica detrás de la compresión fractal de imágenes, es expresar la imagen como un sistema de funciones iteradas (IFS). La imagen puede mostrarse rápidamente, y un zoom proporciona infinitos niveles de detalles fractales (sintéticos).

El problema es cómo generar eficientemente la imagen IFS.

Hay cuatro características de la tecnología IFS que es necesario conocer para entender su situación actual:

- Es un método de compresión que pierde un poco de información (como JPG).
- La resolución al agrandar es poderosa, pero no una forma de comprimir 100:1.
- La compresión es lenta, la descompresión es rápida.
- La tecnología está patentada.

La idea es tomar una imagen y llevarla a un sistema de funciones iterado, que podría generar el original. No obstante este problema aun no se ha resuelto.

## Aproximación a la solución

La idea es tomar una imagen y llevarla a un sistema de funciones iterado, que podría generar el original. No obstante este problema aun no se ha resuelto.

## Aproximación a la solución

- En 1988 Barnsley anuncia que resuelve el problema

La idea es tomar una imagen y llevarla a un sistema de funciones iterado, que podría generar el original. No obstante este problema aun no se ha resuelto.

## Aproximación a la solución

- En 1988 Barnsley anuncia que resuelve el problema
- El programa tardaba unas 100 horas por imagen

La idea es tomar una imagen y llevarla a un sistema de funciones iterado, que podría generar el original. No obstante este problema aun no se ha resuelto.

## Aproximación a la solución

- En 1988 Barnsley anuncia que resuelve el problema
- El programa tardaba unas 100 horas por imagen
- Requería una persona guiando el proceso

La idea es tomar una imagen y llevarla a un sistema de funciones iterado, que podría generar el original. No obstante este problema aun no se ha resuelto.

## Aproximación a la solución

- En 1988 Barnsley anuncia que resuelve el problema
- El programa tardaba unas 100 horas por imagen
- Requería una persona guiando el proceso
- Comprensión total 10.000:1

La idea es tomar una imagen y llevarla a un sistema de funciones iterado, que podría generar el original. No obstante este problema aun no se ha resuelto.

## Aproximación a la solución

- En 1988 Barnsley anuncia que resuelve el problema
- El programa tardaba unas 100 horas por imagen
- Requería una persona guiando el proceso
- Comprensión total 10.000:1
- Posteriormente desarrolla **Sistema de Funciones Iteradas Particionado (PIFS)**

La idea es tomar una imagen y llevarla a un sistema de funciones iterado, que podría generar el original. No obstante este problema aun no se ha resuelto.

## Aproximación a la solución

- En 1988 Barnsley anuncia que resuelve el problema
- El programa tardaba unas 100 horas por imagen
- Requería una persona guiando el proceso
- Comprensión total 10.000:1
- Posteriormente desarrolla **Sistema de Funciones Iteradas Particionado (PIFS)**
- Comprime automáticamente una imagen en un *Sistema de Funciones Iterado Particionado*

La idea es tomar una imagen y llevarla a un sistema de funciones iterado, que podría generar el original. No obstante este problema aun no se ha resuelto.

## Aproximación a la solución

- En 1988 Barnsley anuncia que resuelve el problema
- El programa tardaba unas 100 horas por imagen
- Requería una persona guiando el proceso
- Comprensión total 10.000:1
- Posteriormente desarrolla **Sistema de Funciones Iteradas Particionado (PIFS)**
- Comprime automáticamente una imagen en un *Sistema de Funciones Iterado Particionado*
- Una imagen de colores en 24-bit se comprime a 8:1 ó 50:1

La idea es tomar una imagen y llevarla a un sistema de funciones iterado, que podría generar el original. No obstante este problema aun no se ha resuelto.

## Aproximación a la solución

- En 1988 Barnsley anuncia que resuelve el problema
- El programa tardaba unas 100 horas por imagen
- Requería una persona guiando el proceso
- Comprensión total 10.000:1
- Posteriormente desarrolla **Sistema de Funciones Iteradas Particionado (PIFS)**
- Comprime automáticamente una imagen en un *Sistema de Funciones Iterado Particionado*
- Una imagen de colores en 24-bit se comprime a 8:1 ó 50:1
- Actualmente la técnica de compresión fractal no supera el estándar de compresión de imágenes JPEG ni el JPEG2000.

En la pasada década, los científicos han comenzado a aplicar los fractales a un tema algo *oscuro*: el diseño de las antenas.

- Aunque las antenas parecen simples tienen una base teórica detrás muy compleja.
- Los ingenieros de antenas se basan en el método prueba-error
- Incluso los mejores y más tecnológicos receptores dependen habitualmente de un hilo que no es mejor que el que usó Marconi para la radio hace cien años

## Utilidad de los fractales

- Muchas antenas parecen estar compuestas de una unidad independiente, incluyendo la mayoría de antenas de radar, pero en realidad están compuestas de formaciones de cientos de pequeñas antenas [estructura fractal]
- Colocación de las antenitas en forma fractal combina la robustez de una colocación aleatoria y la eficiencia de una ordenación coherente. [Dwight Jaggard]

"Los fractales son el puente que llena los huecos", comenta Jaggard, "tienen un desorden a corto alcance y un orden a largo alcance".

## Estabilidad vs. Inestabilidad

- Búsqueda de estabilidad, evitando entrar en pérdida.
- Inestabilidad: búsqueda de atractores.



Figura 30: Los aviones vuelan en el límite entre la estabilidad y el caos.

¿Preguntas?