Práctica 2

Fecha de entrega: 11/1/2016

La ecuación de Burgers con disipación viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned}\partial_t u - u\partial_x u =& -\nu\partial_x^2 u \quad \text{en } [a,b]\times[0,T]\\ u(x,0) =& u^0(x),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}u\ :& [a,b]\times[0,T]\to\mathbb{R}\\ &(x,t)\to u(x,t),\end{aligned}$$

ν es una constante positiva y $u^0(x)$ es el dato inicial. Se trata de una ecuación diferencial en derivadas parciales y aparece con gran frecuencia modelando distintos fenómenos físicos. Podemos interpretarla de la siguiente manera: sabemos que cierta cantidad u a tiempo $t=0$ es $u^0(x)$, entonces la solución de la ecuación nos dice como será la cantidad u en el futuro en cada punto del espacio x. La resolución numérica de esta EDP se puede reducir a la resolución de un sistema de $ODE's$ como los que hemos estudiado este curso. El procedimiento es el siguiente:

La primera derivada con respecto de x la podemos aproximar por la diferencia finita

$$\partial_x u(x,t)\sim\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}$$

y la segunda derivada por

$$\partial_x^2 u(x,t)\sim\frac{u(x+2\Delta x,t)-2u(x,t)+u(x-2\Delta x,t)}{4\Delta x^2}.$$

Si llamamos

$$u_m(t)=u(x_m,t)$$

con $x_m=a+m\Delta x$ y $\Delta x=\frac{b-a}{M}$ podemos aproximar la EDP por

$$\begin{aligned}(1)\quad \partial_t u_m(t) =& u_m(t)\frac{u_{m+1}(t)-u_{m-1}(t)}{2\Delta x}-\nu\frac{u_{m+2}(t)-2u_m(t)+u_{m-2}(t)}{4\Delta x^2}\\ u_m(0) =& u^0(x_m),\quad m=0,...,M\end{aligned}$$

que es un sistema acoplado de $M+1$ ecuaciones diferenciales para el vector $(M+1)$-dimensional $(u_0,...,u_M)$. Nótese que hay un problema debido a que, por ejemplo, en la ecuación $\partial_t u_0(t)$ aparece $u_{-1}(t)$ y $u_{-2}(t)$. Sin embargo, a nuestra EDP aún tenemos que darle condiciones de frontera. En este caso vamos a imponer condiciones de contorno periodicas, es decir, $u(x,t)=u(x+2\pi k,t)$ para todo $x\in[-\pi,\pi]$ y k entero. Esto se traduce en las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}u_M(t) &= u_0(t) & &\\ u_{-1}(t) &= u_{M-1}(t) & u_{M+1} &= u_1(t)\\ u_{-2}(t) &= u_{M-2}(t) & u_{M+2} &= u_2(t),\end{aligned}$$

de manera que (1) se reduce a un sistema de M-ecuaciones diferenciales ordinarias para el vector M-dimensioneal $(u_0(t), ..., u_{M-1}(t))$.

Resolver numéricamente la ecuación

$$\begin{aligned} \partial_t u - u\partial_x u = & -\nu\partial_x^2 u \quad \text{en } [-\pi, \pi] \times [0, T] \\ u(x, 0) = & \sin(x), \end{aligned}$$

con condiciones de contorno periódicas, $\nu = 0.1$, $T = 20$ y $M = 200$.

Para la integración temporal utilizar los solvers de matlab ode45, ode23s y ode23t.

Hay que presentar (y es lo único que hay que entregar):

(1) La solución obtenida

$$(x_m, u_m(t)), \quad m = 0, ..., M - 1$$

en los tiempos $t = 0, 2, 4, 6, ..., 20$ con cada uno de los solvers (todo en una misma figura).

(2) Calular el tiempo que tarda en resolver cada uno de los solvers la ecuación para $T = 2, 4, 6, ..., 20$. Representar este tiempo de computación frente a T. Cómo es el problema, stiff, no stiff o moderadamente stiff? Ayuda: help cputime.