Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τηλεπικοινωνιών

Διπλωματική εργασία:

Αρχές αβεβαιότητας στην Ανάλυση Fourier με εφαρμογές στην ανακατασκευή σήματος.

Συγγραφέας: Παναγιώτης Παπαδόπουλος

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικόλαος Ατρέας

Title in English:

Uncertainty Principles in Fourier Analysis with applications in signal reconstruction.

Author: Panagiotis Papadopoulos.

Supervisor: Nikolaos Atreas.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θέλω να ευχαριστήσω από καρδιάς τον καθηγητή μου Νικόλαο Ατρέα. Οι συναντήσεις μας υπήρξαν, τουλάχιστον για εμένα, άκρως δημιουργικές και ευχάριστες. Ήταν πάντα εκεί για μένα με τον καλύτερο τρόπο κάθε φορά που τον χρειάστηκα. Με βοήθησε και με στήριξε περισσότερο από ό,τι θα μπορούσα να ελπίζω.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τους γονείς μου, χάρις στους οποίους βρίσκομαι εδώ σήμερα.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ αξίζει και στους αδερφούς μου, Γιάννη και Μιχάλη, για όλα αυτά που μου έχουν προσφέρει.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την κοπέλα μου, Αλκμήνη. Είναι η μεγαλύτερη πηγή δύναμης και έμπνευσής μου τα τελευταία τέσσερα χρόνια.

Abstract

The uncertainty principle is a famous principle of (quantum) physics and shows up in various ways in Fourier analysis with applications in signal reconstruction. The aim of this thesis is the study of such uncertainty relations and the connections between them as well as their applications in signal reconstruction. The text is divided in four chapters. In the first chapter we present a synopsis of Lebesgue measure, Lebesgue integration and L_p theory. In chapter two we present the classical Heisenberg uncertainty principle along with two more recent uncertainty principles on the real line: (a) the Landau-Pollak uncertainty principle and (b) the well known result that a function $f \in L_2(\mathbb{R})$ cannot be timelimited and bandlimited simultaneously. We further show that the uncertainty principle gives rise to applications in signal reconstruction. In chapter three we present an uncertainty principle on the circle and we show that it is connected to the Heisenberg uncertainty principle by a limit process. Subsequently, we present an inhomogenous uncertainty principle for low pass filters and we generalize it. In the fourth and last chapter of this thesis we prove an uncertainty principle for the discrete Fourier transform in two ways, including a simple original one and we also prove the discrete analog of an uncertainty principle on the real line.

Περίληψη

Η αρχή αβεβαιότητας είναι μια από τις διάσημες αρχές της (κβαντικής) φυσικής και εμφανίζεται με διάφορες παραλλαγές στην ανάλυση Fourier με εφαρμογές στην επεξεργασία σημάτων. Μια απλή μη αυστηρή ερμηνεία της είναι ότι εν γένει υπάρχει μια ασάφεια στη φύση, ένα θεμελιώδες όριο κάτω από το οποίο δεν μπορούμε να μετρήσουμε ταυτόχρονα και με απόλυτη ακρίβεια κάποιες ποσότητες. Πράγματι, το 1927, ο Werner Heisenberg ισχυρίσθηκε ότι η ταυτόχρονη και ακριβής μέτρηση της θέσης και ορμής ενός ηλεκτρονίου με χρήση ενός φωτονίου φωτός δεν είναι εφικτή. Έτσι, κατά τη μελέτη προσδιορισμού της θέσης ενός ηλεκτρονίου, διαπίστωσε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα του φωτονίου, τόσο ακριβέστερη είναι η πρόγνωση της θέσης πρόσκρουσης του φωτονίου με το ηλεκτρόνιο, αλλά απ' την άλλη μεριά τόσο μεγαλύτερη γίνεται και η διαταραχή του ηλεκτρονίου, διότι κατά την πρόσκρουση με το φωτόνιο, το ηλεκτρόνιο απορροφά τυχαία ποσότητα ενέργειας καθιστώντας τη μέτρηση της ορμής του ασταθή. Απέδειξε δε ένα μέτρο αυτής της αβεβαιότητας του ταυτόχρονου προσδιορισμού της θέσης και ορμής του ηλεκτρονίου:

$$\sigma_x \, \sigma_p \geq \frac{h}{4\pi},$$

όπου σ_x και σ_p είναι οι τυπικές αποκλίσεις της θέσης x και ορμής p του ηλεκτρονίου την ίδια χρονική στιγμή και $h = 6,62607004 \cdot 10^{-34} \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg/s}$ είναι η σταθερά του Planck. Λόγω της αμελητέας τιμής της σταθεράς αυτής, σε μακροσκοπική κλίμακα η αρχή αβεβαιότητας δεν γίνεται αντιληπτή και μόνον σε μικροσκοπική κλίμακα παίζει σημαντικό ρόλο. Από τα παραπάνω, μπορεί κάποιος (και όχι άδικα) να συνδέσει ή και να ταυτίσει την αρχή αβεβαιότητας με το φαινόμενο του παρατηρητή, με βάση το οποίο οι μετρήσεις ορισμένων συστημάτων δεν μπορούν να γίνουν χωρίς να επηρεασθούν τα συστήματα. Ωστόσο, όπως θα δούμε σ' αυτή τη διπλωματική εργασία, η αρχή αβεβαιότητας είναι εγγενής στην ανάλυση Fourier (η οποία είναι ένα σημαντικό εργαλείο μελέτης των ιδιοτήτων κυματοειδών συστημάτων) και έτσι εμφανίζεται και στην κβαντική μηχανική συνεπεία της κυματικής φύσης των κβαντικών αντικειμένων.

Στόχος λοιπόν της παρούσης διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη αρχών αβεβαιότητας στην ανάλυση Fourier με εφαρμογές στην ανακατασκευή σημάτων. Η μελέτη μας καλύπτει αρχές αβεβαιότητας από το ολοκλήρωμα Fourier, τις σειρές Fourier έως και και το διακριτό μετασχηματισμό Fourier πάνω σε χώρους σημάτων πεπερασμένης ενέργειας. Η εργασία απαρτίζεται από 4 κεφάλαια.

Στο κεφάλαιο 1 παραθέτουμε χρήσιμες εισαγωγικές έννοιες. Πιο συγκεκριμένα, παραθέτουμε βασικά στοιχεία θεωρίας των χώρων $L_2(X)$ τετραγωνικά ολοκληρώσιμων ή τετραγωνικά αθροίσιμων συναρτήσεων, όπου $X = \mathbb{R}$, ή $X = [-\pi, \pi]$, ή $X = \{0, ..., N-1\}$. Οι χώροι αυτοί είναι σημαντικοί, διότι είναι διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert (δηλαδή έχουν αριθμήσιμη βάση) και συνεπώς τα στοιχεία τους έχουν μια ποικιλία αναπαραστάσεων, είτε ολοκληρωτικών, κυρίως όμως διακριτών ως προς κάποια βάση του χώρου. Στη συνέχεια παραθέτουμε βασικά στοιχεία

θεωρίας που αφορούν την Ανάλυση Fourier πάνω στο χώρο $L_2(\mathbb{R})$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στην πραγματική ευθεία.

Στο κεφάλαιο 2 μελετούμε αρχές αβεβαιότητας όσον αφορά το ολοκλήρωμα Fourier στο $\mathbb{R}$. Στο θεώρημα 2.1 της παραγράφου 2.1 του κεφαλαίου αυτού, μελετούμε την κλασσική αρχή αβεβαιότητας σύμφωνα με την οποία δεν είναι ποτέ δυνατόν μια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και ο μετασχηματισμός Fourier αυτής να είναι ταυτόχρονα συγκεντρωμένες με κάποια έννοια. Δίνοντας διάφορες ερμηνείες στην έννοια της συγκέντρωσης μιας συνάρτησης εξάγουμε μαθηματικές ανισότητες που εκφράζουν αντίστοιχες αρχές αβεβαιότητας (βλέπε θεωρήματα 2.2-2.4) και επιτυγχάνουμε και πρωτότυπα αποτελέσματα (βλέπε θεώρημα 2.4. Παραθέτουμε επίσης και εφαρμογές ανακατασκευής σημάτων που είναι εφικτές λόγω της ισχύος κάποιας αρχής αβεβαιότητας. Στο θεώρημα 2.5 της παραγράφου 2.2, μελετούμε υπολογισμούς Landau-Pollak, οι οποίοι (με μια μη αυστηρή ερμηνεία) δίνουν ένα μέτρο του κατά πόσο συγκεντρωμένος μπορεί να είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης σ΄ ένα διάστημα $[-\Omega, \Omega]$ $(\Omega > 0)$ της πραγματικής ευθείας, δοθείσης της συγκέντρωσης της συνάρτησης σε κάποιο διάστημα $[-T, T]$ $(T > 0)$ στο χρόνο.

Στο κεφάλαιο 3 περνούμε από τη μελέτη αρχών αβεβαιότητας στο $\mathbb{R}$ σε αρχές αβεβαιότητας για συναρτήσεις πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Έτσι, στο θεώρημα 3.1 της παραγράφου 3.1 παρουσιάζουμε μια αρχή αβεβαιότητας για περιοδικές συναρτήσεις, έτσι ώστε η κλασσική αρχή αβεβαιότητας Heisenberg στην πραγματική ευθεία να προκύπτει ως οριακή περίπτωση της περιοδικής αρχής αβεβαιότητας, ακριβώς όπως το ολοκλήρωμα Fourier προκύπτει ως όριο μιας σειράς Fourier με μια έννοια. Στο θεώρημα 3.3 της παραγράφου 3.2, παρουσιάζουμε μια αρχή αβεβαιότητας για χαμηλοπερατά φίλτρα με την έννοια ότι δεν υπάρχει παραγωγίσιμη περιοδική συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο που να προσεγγίζει το ιδανικό φίλτρο αποκοπής με κάποια έννοια. Κατόπιν, γενικεύουμε αυτήν την αρχή αβεβαιότητας σε μία μεγαλύτερη κλάση (όχι κατ΄ ανάγκη χαμηλοπερατών) φίλτρων.

Τέλος, στο κεφάλαιο 4 μελετούμε δυο αρχές αβεβαιότητας για το διακριτό μετασχηματισμό Fourier, σύμφωνα με τις οποίες δεν είναι δυνατόν μία ακολουθία πεπερασμένου μήκους και ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier αυτής να έχουν ταυτόχρονα οσοδήποτε πολλούς μηδενικούς όρους (βλέπε θεώρημα 4.1) ή πιο γενικά, δεν είναι δυνατόν να είναι οσοδήποτε συγκεντρωμένες ταυτόχρονα με κάποια έννοια (βλέπε θεώρημα 4.2). Τέλος, κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό (και την εργασία) με μια απλούστερη απόδειξη του θεωρήματος 4.1.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγικές έννοιες.

Στο εξής συμβολίζουμε με $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, τα σύνολα των φυσικών, ακεραίων, πραγματικών και μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα.

Προς διευκόλυνση του αναγνώστη, στο κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε βασικά στοιχεία θεωρίας των χώρων $L_p(X)$, όπου $X = \mathbb{R}$, ή $X = [-\pi, \pi]$, ή $X = \{0, ..., N-1\}$. Για να ορίσουμε τους χώρους αυτούς, θα χρειασθούμε αρχικά την έννοια των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων και στη συνέχεια την έννοια του ολοκληρώματος Lebesgue, το οποίο είναι μια επέκταση του ολοκληρώματος Riemann με μια έννοια. Στη συνέχεια παραθέτουμε βασικά στοιχεία θεωρίας που αφορούν την Ανάλυση Fourier πάνω στο χώρο $L_2(\mathbb{R})$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στην πραγματική ευθεία.

1.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις. Το ολοκλήρωμα Lebesgue στην πραγματική ευθεία.

Εστω $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ είναι το δυναμοσύνολο της πραγματικής ευθείας και $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ είναι η σ-άλγεβρα Borel στο $\mathbb{R}$, δηλαδή το μικρότερο σύνολο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που περιέχει όλα τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}$ και είναι κλειστό ως προς την αριθμήσιμη ένωση συνόλων και ως προς το συμπλήρωμα συνόλου (σε σχέση με το $\mathbb{R}$). Εξ ορισμού, η Borel σ-άλγεβρα $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ περιλαμβάνει και όλα τα κλειστά σύνολα του $\mathbb{R}$ καθώς επίσης και όλες τις αριθμήσιμες τομές ανοικτών και αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε **το σύνηθες μέτρο Borel στο** $\mathbb{R}$ μέσω της συνολοσυνάρτησης

$$l : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty] : l(I) = |I|,$$

όπου ο συμβολισμός $|I|$ υπονοεί ότι το μέτρο $l(I)$ πάνω σ΄ ένα σύνολο $I \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ορίζεται έτσι ώστε αν $I = [a, b]\,(a < b)$, τότε

$$l(I) = b - a.$$

Παρ΄ όλα αυτά, ο παραπάνω ορισμός του μέτρου πάνω στη σ-άλγεβρα Borel δεν επαρκεί. Στην ανάλυση απαντώνται πολλές φορές πολύπλοκα (μη Borel) σύνολα, που π.χ. ορίζονται ως όρια συνόλων με κάποια έννοια. Έτσι, θέλουμε να επεκτείνουμε το παραπάνω μέτρο Borel πάνω σε μια νέα άλγεβρα. Αποδεικνύεται (βλέπε [8]) ότι υπάρχει ένα τέτοιο μέτρο που καλείται **μέτρο Lebesgue** στο $\mathbb{R}$ της μορφής

$$\mu : \mathscr{M}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty],$$

το οποίο ορίζεται πάνω στη σ-άλγεβρα $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ των λεγόμενων **Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων της πραγματικής ευθείας** $\mathbb{R}$, η οποία περιέχει τη Borel άλγεβρα $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, έτσι ώστε

$$\mu(A) = l(A) = |A|$$

για κάθε Borel σύνολο A. Κάθε σύνολο της σ-άλγεβρας $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ καλείται Lebesgue **μετρήσιμο σύνολο** ή πιο απλά **μετρήσιμο σύνολο** (βλέπε [8]). Σημειώνουμε ότι για κάθε σύνολο $X \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, ορίζεται η υπο-άλγεβρα $\mathscr{M}(X) =$

$\{X \cap F : F \in \mathscr{M}(\mathbb{R})\}$ και κατ΄ επέκταση το μέτρο Lebesgue πάνω στην υποάλγεβρα $\mathscr{M}(X)$ ως εξής:

$$\mu_X : \mathscr{M}(X) \to [0, +\infty] : \mu_X(A) = \mu(A \cap X).$$

Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στο μέτρο Lebesgue παραπέμπουμε στο σύγγραμμα [8]. Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το μέτρο Lebesgue διότι είναι πιο ευέλικτο όσον αφορά τις πράξεις με όρια και με τη χρήση του ορίζεται και το ολοκλήρωμα Lebesgue που αποτελεί επέκταση του ολοκληρώματος Riemann. Οσον αφορά την ορολογία, στο εξής θα αναφερόμαστε σε μετρήσιμα σύνολα, υπενθυμίζοντας ότι όλα τα Borel σύνολα είναι μετρήσιμα κατά Lebesgue όπως επίσης και όλα τα σύνολα μηδενικού μέτρου.

Σημείωση 1.1. *Όσον αφορά την εργασία αυτή, ο μη εξοικειωμένος αναγνώστης μπορεί αντί της έννοιας του μετρήσιμου συνόλου να θεωρεί για απλότητα την έννοια του Borel συνόλου (δηλαδή ανοικτά και κλειστά σύνολα καθώς επίσης και αριθμήσιμες ενώσεις και τομές ανοικτών και κλειστών συνόλων) χωρίς να υπάρξει κάποιο ουσιώδες πρόβλημα στα θεωρήματα και στις αποδείξεις.*

Κάθε συνάρτηση $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ καλείται επεκτεταμένη πραγματική συνάρτηση. Καλούμε **φορέα** της f το σύνολο

$$\operatorname{supp} f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Καλούμε **ουσιώδη φορέα** της f το σύνολο

$$\operatorname{esssupp} f = \{x \in X : \exists\ \delta_x > 0 : f(x) \neq 0\ \forall x \in (x - \delta, x + \delta) \cap X\}.$$

Ορισμός 1.1. *Έστω X είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $\mathscr{M}(X)$ είναι η σ-υποάλγεβρα όλων των μετρήσιμων υποσυνόλων του X ως προς το μέτρο Lebesgue μ_X όπως ορίσθηκε παραπάνω και $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μια επεκτεταμένη πραγματική συνάρτηση. Η f καλείται* **Lebesgue μετρήσιμη (ή πιο απλά μετρήσιμη) συνάρτηση στο** X*, αν η αντίστροφη εικόνα*

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$$

κάθε ανοικτού συνόλου $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμο σύνολο, δηλαδή $f^{-1}(V) \in \mathscr{M}(X)$.

Πρακτικά, αποδεικνύεται ότι για τη μετρησιμότητα της f αρκεί να δειχθεί ότι το σύνολο $f^{-1}(a, +\infty]$ είναι μετρήσιμο για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι μία συνάρτηση $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο X αν και μόνον αν η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοικτού συνόλου είναι ανοικτό σύνολο, οπότε προκύπτει άμεσα ότι:

<u>Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο X είναι μετρήσιμη στο X.</u>

Ορισμός 1.2. *Εστω E είναι μετρήσιμο υποσύνολο της πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$. Καλούμε τη συνάρτηση*

$$\chi_E : \mathbb{R} \to \{0, 1\} : \chi_E(t) = \begin{cases} 1 & , t \in E \\ 0 & , t \in \mathbb{R} - E \end{cases},$$

χαρακτηριστική συνάρτηση *του συνόλου E.*

Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι μη συνεχής αλλά μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$, διότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, όλα τα σύνολα της μορφής

$$\chi_E^{-1}(a,+\infty) = \begin{cases} \varnothing, & a > 1 \\ E, & 0 < a \leq 1 \\ X, & a \leq 0 \end{cases},$$

είναι μετρήσιμα στο $\mathbb{R}$. Σημειώνουμε εδώ ότι γραμμικοί συνδυασμοί μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, όπως επίσης και το γινόμενο και το πηλίκο μετρησίμων συναρτήσεων στο κοινό πεδίο ορισμού τους. Ετσι, έχουμε τον ακόλουθο:

Ορισμός 1.3. *Κάθε συνάρτηση*

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ \ \phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x),$$

όπου $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $a_i \neq a_j$ και $E_1, ..., E_n$ είναι μη κενά, ξένα μεταξύ τους ανά δύο Lebesgue μετρήσιμα σύνολα με $\mu(E_n) < \infty$ καλείται **απλή συνάρτηση** *και είναι προφανώς μετρήσιμη. Ειδικότερα, αν τα παραπάνω σύνολα $E_1, ..., E_n$ είναι διαστήματα της πραγματικής ευθείας, τότε η ϕ καλείται* **κλιμακωτή συνάρτηση.**

Αν $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση στο X και αν

$$g(x) = f(x) \ \text{σχεδόν παντού στο } X,$$

δηλαδή αν οι f, g ταυτίζονται παντού στο X πληνενός συνόλου το οποίο έχει Lebesgue μέτρο ίσο με μηδέν, τότε και η g είναι μετρήσιμη στο X, διότι σύνολα μηδενικού μέτρου είναι μετρήσιμα, συνεπώς με όποιον τρόπο κι αν ορίσουμε τη g πάνω σε σύνολο μηδενικού μέτρου παραμένει μετρήσιμη (αρκεί να θεωρήσουμε ότι $0 \cdot \infty = 0$). Με την ίδια λογική, αν η f ορίζεται σχεδόν παντού στο X, θα θεωρούμε ότι η f είναι μετρήσιμη στο X. Αρα, **συναρτήσεις συνεχείς σχεδόν παντού (σ.π.) στο X είναι μετρήσιμες**.

Σημείωση 1.2. *Με βάση τα παραπάνω, όλες οι πραγματικές συναρτήσεις με αριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας στο X είναι μετρήσιμες στο X (και όχι μόνον). Στο εξής, όποτε μιλούμε για μετρήσιμη συνάρτηση, ο μη εξοικειωμένος αναγνώστης μπορεί για απλότητα να θεωρεί συναρτήσεις με το πολύ αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών χωρίς να υπάρχει κάποια ουσιώδης επίπτωση στις αποδείξεις.*

Αποδεικνύεται ότι αν $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις στο X, τότε και οι συναρτήσεις

(α) $\max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f(x), g(x)\}$,

(β) $f^+ : X \to \mathbb{R} : f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$, (γ) $f^- : X \to \mathbb{R} : f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0 \\ 0, & f(x) > 0 \end{cases}$,

είναι μετρήσιμες στο X. Το σημαντικότερο όμως είναι ότι το όριο μετρήσιμων συναρτήσεων παραμένει μετρήσιμη συνάρτηση, κάτι το οποίο δεν ισχύει π.χ. για το όριο συνεχών ή και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Με άλλα λόγια, η μετρησιμότητα συμπεριφέρεται πολύ καλά όσον αφορά τη δράση του ορίου κάνοντας την έννοια αυτή εξαιρετικά χρήσιμη. Πράγματι, αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 1.1. *[8] Έστω $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $(n = 1, 2, ...)$ είναι μια ακολουθία μετρησίμων πραγματικών συναρτήσεων πάνω στο X, έτσι ώστε*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x), \text{ σχεδόν παντού στο } \Xi.$$

Τότε και η οριακή συνάρτηση f είναι επίσης μετρήσιμη στο X.

Αποδεικνύεται ότι κάθε πεπερασμένη σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue στο X μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι όριο μιας ακολουθίας απλών συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, μπορούμε να επεκτείνουμε το ολοκλήρωμα Riemann ορίζοντας ένα νέο ολοκλήρωμα, το ολοκλήρωμα *Lebesgue* της f στο X. Θα σκιαγραφήσουμε τη γενική φιλοσοφία γύρω από τη θεμελίωση του ολοκληρώματος αυτού παραλείποντας λεπτομέρειες και αποδείξεις. Για περισσότερες λεπτομέρεις, παραπέμπουμε στο σύγγραμα [8]. Η γενική φιλοσοφία του ολοκληρώματος Lebesgue βασίζεται στη διαμέριση του πεδίου τιμών της f αντί της διαμέρισης του πεδίου ορισμού της f στην οποία στηρίζεται το ολοκλήρωμα Riemann. Ετσι, έστω $f(x) \in [0, M]$ για κάποιο $0 < M < +\infty$. Για κάθε $n = 1, 2, ...$, ορίζουμε μια ακολουθία διαμερίσεων

$$\Delta_n = \left\{ \frac{k}{2^n}, \, k = 0, ..., M \, 2^n \right\}$$

του πεδίου τιμών της f και στη συνέχεια ορίζουμε τα σύνολα

$$E_{k,n} = \left\{ x \in X : \; \frac{k}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^n} \right\},$$

τα οποία είναι μετρήσιμα, διότι εξ ορισμού η f είναι μετρήσιμη. Εστω

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{M \, 2^n - 1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{k,n}}$$

είναι μια ακολουθία απλών συναρτήσεων. Τότε, αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_{n \to +\infty} \phi_n(x) = f(x), \; \forall x \in \mathrm{supp}(f)$$

και ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της μη αρνητικής συνάρτησης f πάνω σε σύνολο X πεπερασμένου μέτρου ως εξής:

$$\int_X f(x) d\mu_X = \lim_{n \to +\infty} \int_X \phi_n(x) d\mu_X.$$

Μάλιστα, αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή η τιμή του ορίου είναι ανεξάρτηση από την επιλογή της ακολουθίας απλών συναρτήσεων (ϕ_n). Αν τώρα η f είναι μη αρνητική και σχεδόν παντού πεπερασμένη συνάρτηση πάνω σ' ένα μη κατ' ανάγκη φραγμένο μετρήσιμο σύνολο X, τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f στο X ως εξής:

$$\int_X f\, d\mu_X = \sup_{0\leq g\leq f} \int_X g\, d\mu_X,$$

όπου g είναι οποιαδήποτε φραγμένη συνάρτηση g πάνω σε φραγμένο φορέα. Αν E είναι οποιοδήποτε μετρήσιμο υποσύνολο του X, τότε ορίζουμε

$$\int_E f\, d\mu_X = \int_X g\chi_E\, d\mu_X.$$

Σημειώνουμε ότι οι τιμές των παραπάνω ολοκληρωμάτων μπορεί να είναι μη πεπερασμένες. Αν όμως είναι πεπερασμένες, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο σύνολο X, συμβολικά

$$f \in L_1(X) \Leftrightarrow \int_X f\, d\mu_X < +\infty.$$

Τέλος, αν η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε μια τουλάχιστον εκ των μη αρνητικών συναρτήσεων f^+ ή f^- να είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο X, ορίζουμε

$$\int_X f d\mu_X = \int_X f^+ d\mu_X - \int_X f^- d\mu_X.$$

Αν η τιμή του παραπάνω ολοκληρώματος είναι πεπερασμένη, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο σύνολο X. Με άλλα λόγια

$$f \in L_1(X) \Leftrightarrow \int_X |f| d\mu_X < +\infty.$$

Σημείωση 1.3. *Αποδεικνύεται ότι αν μια συνάρτηση f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο X, τότε είναι και Riemann ολοκληρώσιμη στο X. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Ετσι, πρακτικά στην ολοκλήρωση Lebesgue εργαζόμαστε χρησιμοποιώντας τις συνήθεις τεχνικές του ολοκληρώματος Riemann, θεωρώντας ότι έχουμε ένα ευέλικτο ολοκλήρωμα Riemann που συμπεριφέρεται καλά ως προς τις εναλλαγές ορίου και ολοκλήρωσης. Γι' αυτό το λόγο, στο εξής θα γράφουμε για απλότητα dx αντί $d\mu_X$.*

Αναφέρουμε το ακόλουθο πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα εναλλαγής ορίου και ολοκλήρωσης.

Πρόταση 1.2. *[8]**(Κυριαρχούμενης σύγκλισης)** Εστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $X \subseteq \mathbb{R}$ που συγκλίνει σημειακά σχεδόν παντού στο X σε μια συνάρτηση f. Αν υπάρχει μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση g τέτοια ώστε*

$$|f_n(x)| \leq |g(x)| \quad \forall x \in X,$$

τότε και η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο X και επιπλέον

$$\int_X \lim_{n\to+\infty} f_n dx = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n dx.$$

1.2 Οι χώροι $L_p(X)$.

Εστω $X \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Για κάθε

$$p \in (1, +\infty),$$

συμβολίζουμε με $L_p(X)$ το μιγαδικό διανυσματικό χώρο όλων των μετρήσιμων p-ολοκληρώσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$, με την έννοια

$$L_p(X) = \Big\{ f : X \to \mathbb{C} : \int_X |f|^p(x)dx < +\infty \Big\}.$$

Αποδεικνύεται ότι ο $L_p(X)$ είναι νορμικός χώρος με νόρμα $\| \cdot \|$ που δίνεται από τη σχέση

$$\|f\|_{L_p(X)} = \left(\int_X |f|^p(x)dx \right)^{1/p},$$

με την προϋπόθεση κάθε στοιχείο f του χώρου αυτού να θεωρείται ως ένας αντιπρόσωπος μια κλάσης ισοδυναμίας που περιλαμβάνει όλες τις Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις g που ταυτίζονται με την f σχεδόν παντού στο X (ως προς το μέτρο Lebesgue στο X). Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι ο $L_p(X)$ είναι ένας **πλήρης** νορμικός χώρος (ή αλλιώς είναι χώρος Banach), δηλαδή κάθε Cauchy ακολουθία στοιχείων του $L_p(X)$ συγκλίνει σε στοιχείο του $L_p(X)$.

Για $p = +\infty$, συμβολίζουμε με $L_\infty(X)$ το μιγαδικό χώρο όλων των μετρήσιμων και ουσιωδώς φραγμένων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$, δηλαδή

$$L_\infty(X) = \{ f : X \to \mathbb{C} : \ \exists C > 0 : \ |f(x)| \leq C \text{ σχεδόν παντού στο } X \},$$

με νόρμα

$$\|f\|_{L_\infty(X)} = \inf\{ C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ σχεδόν παντού στο } X \}.$$

Σημείωση 1.4. *Στο εξής όταν ο χώρος είναι σαφής, θα γράφουμε απλά L_p αντί $L_p(X)$.*

Ορισμός 1.4. *Εστω $1 \leq p, q \leq \infty$. Οι p, q καλούνται συζυγείς ή δυϊκοί εκθέτες αν*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ας θυμηθούμε ορισμένες χρήσιμες ανισότητες στους χώρους L_p.

Λήμμα 1.1. ***(Ανισότητα Young)*** *Εστω $a, b \geq 0$ και p, q είναι συζυγείς εκθέτες όπως παραπάνω. Τότε*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Απόδειξη. Η ανισότητα ισχύει προφανώς για $a = 0$ ή $b = 0$. Για $a, b > 0$, η λογαριθμική συνάρτηση ln είναι κοίλη και αύξουσα, άρα

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) = \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\ln b^q$$
$$= \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln(ab) \Rightarrow \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

□

Πρόταση 1.3. *[9]* ***(Ανισότητα Hölder)*** *Εστω $1 \leq p, q \leq \infty$ είναι συζυγείς εκθέτες όπως παραπάνω. Αν $f \in L_p(X)$ και $g \in L_q(X)$, τότε $fg \in L_1(X)$ και*

$$\|f\,g\|_{L_1(X)} \leq \|f\|_{L_p(X)}\|g\|_{L_q(X)}.$$

Απόδειξη. Αρκεί να μελετήσουμε την περίπτωση $\|f\|_{L_p(X)}, \|g\|_{L_q(X)} \neq 0$. Εστω $1 < p, q < \infty$. Αν

$$F = \frac{f}{\|f\|_{L_p(X)}} \quad \text{και} \quad G = \frac{g}{\|g\|_{L_q(X)}},$$

αρκεί να δείξουμε ότι $\|FG\|_{L_1(X)} \leq 1$. Από την ανισότητα Young για $a = |F(x)|$ και $b = |G(x)|$, $x \in X$ παίρνουμε

$$|F(x)G(x)| \leq \frac{1}{p}|F(x)|^p + \frac{1}{q}|G(x)|^q \;\; \forall x \in X$$
$$\Rightarrow \int_X |F(x)G(x)|dx \leq \frac{1}{p}\int_X |F(x)|^p dx + \frac{1}{q}\int_X |G(x)|^q dx = 1$$

δηλαδή $\|FG\|_{L_1(X)} \leq 1$.

Για την περίπτωση $p = \infty\,, q = 1$ θεωρούμε τα σύνολα $A = \{x \in X : |f(x)| \leq \|f\|_{L_\infty(X)}\}$ και $B = X - A$. Από τον ορισμό της $\|\cdot\|_{L_\infty(X)}$ έπεται ότι $\mu(B) = 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\|fg\|_{L_1(X)} &= \int_X |f(x)g(x)|dx = \int_A |f(x)g(x)|dx + \int_B |f(x)g(x)|dx \\ &\leq \int_A \|f\|_{L_\infty(X)}|g(x)|dx + \int_B \sup\{f(x)g(x) : x \in B\}dx \\ &\leq \|f\|_{L_\infty(X)}\int_X |g(x)|dx = \|f\|_{L_\infty(X)}\|g\|_{L_1(X)}.\end{aligned}$$

Αντίστοιχα αποδεικνύεται και η περίπτωση $p = 1$, $q = \infty$. □

Σημείωση 1.5. *Η ανισότητα Hölder αποτελεί γενίκευση της ανισότητας Cauchy-Schwarz, με την έννοια ότι η δεύτερη προκύπτει άμεσα από την πρώτη θέτοντας $p = q = 2$.*

Πρόταση 1.4. *[1]* ***(Ανισότητα Minkowski)*** *Αν $1 \leq p \leq \infty$ και $f, g \in L_p(X)$, τότε*

$$\|f + g\|_{L_p(X)} \leq \|f\|_{L_p(X)} + \|g\|_{L_p(X)}.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε την περίπτωση $1 \leq p < \infty$ (η περίπτωση $p = +\infty$ είναι εύκολη). Εστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Τότε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (p-1)q = p$ και

$$\begin{aligned} \left(\int_X \left| (f+g)^{p-1} \right|^q dx \right)^{1/q} &= \left(\int_X |f+g|^{q(p-1)} dx \right)^{1/q} \\ = \left(\int_X |f+g|^p dx \right)^{1/q} &= \|f+g\|_{L_p(X)}^{p/q} < \infty \Rightarrow (f+g)^{p-1} \in L_q(X). \end{aligned}$$

Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} & \int_X |f(x)+g(x)|^p dx \leq \int_X |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} dx \\ + & \int_X |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} dx = \|f(f+g)^{p-1}\|_{L_1(X)} + \|g(f+g)\|_{L_1(X)} \\ \leq & \|f\|_{L_p(X)} \|(f+g)^{p-1}\|_{L_q(X)} + \|g\|_{L_p(X)} \|(f+g)^{p-1}\|_{L_q(X)} \\ \Rightarrow & \|f+g\|_{L_p(X)}^p \leq \|f\|_{L_p(X)} \|f+g\|_{L_p(X)}^{p/q} + \|g\|_{L_p(X)} \|f+g\|_{L_p(X)}^{p/q} \\ \xRightarrow{p/q=p-1} & \|f+g\|_{L_p(X)} \leq \|f\|_{L_p(X)} + \|g\|_{L_p(X)}. \end{aligned}$$

□

Τέλος, σημειώνουμε ότι αν το X είναι σύνολο πεπερασμένου μέτρου, τότε ισχύει

Πρόταση 1.5. *[1] Εστω $X \subset \mathbb{R}$ έχει πεπερασμένο μέτρο Lebesgue. Τότε, για κάθε $1 \leq p < q \leq +\infty$ ισχύει*

$$L_q(X) \subset L_p(X).$$

Σημείωση 1.6. *Η παραπάνω πρόταση 1.5 δεν ισχύει αν το σύνολο X δεν έχει πεπερασμένο μέτρο Lebesgue.*

1.3 Ο μετασχηματισμός Fourier στο χώρο $L_2(\mathbb{R})$.

Ορισμός 1.5. *Έστω $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ είναι ο χώρος των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση, δηλαδή $f \in L_1(\mathbb{R})$. Τότε ο γραμμικός τελεστής*

$$\widehat{S} : L_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}) : \ \widehat{S}f(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x\gamma}\, dx$$

είναι καλά ορισμένος. Η εικόνα $\widehat{S}f$ καλείται μετασχηματισμός Fourier της f. Στο εξής, για απλότητα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\widehat{f} := \widehat{S}f.$$

Έστω

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) := \big\{ f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \big\},$$

είναι ο υπόχωρος του χώρου $C(\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ που τείνουν στο μηδέν στο άπειρο. Αποδεικνύεται ότι ο τελεστής Fourier $\widehat{S}$ είναι $1-1$ και η εικόνα του είναι εντός του υπόχωρου $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (βλέπε [9]). Αν (για απλότητα) συνεχίσουμε να γράφουμε

$$\widehat{S} : L_1 \cap L_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) : \ \widehat{S}f(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x\gamma}\, dx$$

για τον περιορισμό του τελεστή Fourier $\widehat{S}$ πάνω στον υπόχωρο $L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$, τότε αποδεικνύεται ότι ο $\widehat{S}$ είναι ισομετρία εντός του $L_2(\mathbb{R})$ και μάλιστα η εικόνα του $\widehat{S}$ είναι πυκνή στον $L_2(\mathbb{R})$. Επειδή δε και ο υπόχωρος $L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L_2(\mathbb{R})$, από γνωστό θεώρημα (βλέπε [9, σελ. 186]), προκύπτει ότι ο τελεστής $\hat{S}$ επεκτείνεται με συνεχή (και μοναδικό) τρόπο σ' έναν ισομετρικό ισομορφισμό πάνω στον $L_2(\mathbb{R})$. Με βάση τα παραπάνω, για κάθε $f \in L_2(\mathbb{R})$, αν $(f_N)_N \in L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$, $(N \in \mathbb{N})$ είναι οποιαδήποτε ακολουθία συναρτήσεων τέτοια ώστε $f = \lim_{N\to\infty} f_N$ με την L_2-έννοια, δηλαδή

$$\|f_N - f\|_{L_2} \to 0, \ N \to \infty,$$

τότε, ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της f ως εξής:

$$\widehat{f} = \lim_{N\to\infty} \widehat{S}(f_N) = \lim_{N\to\infty} \widehat{f_N},$$

όπου το παραπάνω όριο εννοείται πάλι με την L_2-έννοια. Στο εξής, για $f \in L_2$ θα συνεχίσουμε να γράφουμε για απλότητα

$$\widehat{f} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot}\, dx,$$

έχοντας όμως πάντα υπόψη ότι αυτός είναι απλά ένας βολικός συμβολισμός για το όριο $\widehat{f}$ που ορίσθηκε πριν. Φυσικά, αν $f \in L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$, τότε το όριο $\widehat{f}$ ταυτίζεται με τον ορισμό 1.5. Επίσης, εφόσον όπως είπαμε παραπάνω ο μετασχηματισμός

Fourier είναι ισομετρικός ισομορφισμός του $L_2(\mathbb{R})$ επί του $L_2(\mathbb{R})$, ισχύει η πολύ σημαντική ταυτότητα του Parseval:

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f}\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{1.1}$$

Σημειώνουμε ότι οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης εξακολουθούν να ισχύουν και για την περίπτωση μιας τετραγωνικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι δεν ισχύει εν γένει ούτε $L_2(\mathbb{R}) \subset L_1(\mathbb{R})$, ούτε $L_1(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$. Εχουμε:

Πρόταση 1.6. *Για κάθε $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier:*

A1. *(Γραμμικότητα) $\widehat{af+bg} = a\widehat{f} + b\widehat{g}$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$.*

A2. *(Μετάθεση στο χρόνο) Αν $f_\tau = f(\cdot - \tau)$, τότε $\widehat{f_\tau} = \widehat{f}\, e^{-2\pi i \tau \cdot}$.*

A3. *(Μετάθεση στις συχνότητες) Για $\omega \in \mathbb{R}$ ισχύει $\widehat{e^{2\pi i \omega \cdot} f} = \widehat{f}(\cdot - \omega)$.*

A4. *(Διαστολή) Για $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ισχύει $\widehat{f(a\cdot)} = \frac{1}{|a|}\widehat{f}(\frac{\cdot}{a})$.*

A5. $\widehat{\widehat{f}}(\gamma) = \overline{\widehat{f}(-\gamma)}$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

A6. *(Αντιπαράγωγος στο χρόνο) Έστω $f \in L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$. Αν $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ και $F \in L_1(\mathbb{R})$, τότε η F είναι απόλυτα συνεχής και*

$$\widehat{F}(\gamma) = \frac{\widehat{f}(\gamma)}{2\pi i \gamma}, \ \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

A7. *(Παράγωγοι στο χρόνο) Αν $f, f', ..., f^{(k)} \in L_2(\mathbb{R})$, τότε*

$$\widehat{f^{(k)}} = (2\pi i \cdot)^k \widehat{f}.$$

A8. *(Παράγωγος στις συχνότητες) Αν f, $xf(x) \in L_2(\mathbb{R})$, τότε η $\widehat{f}$ είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ και*

$$(-2\pi i) \cdot \widehat{f(\cdot)} = \frac{d\widehat{f}}{d\gamma}.$$

A9. *(Συνέλιξη στο χρόνο) Έστω $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt$ είναι η συνέλιξη δύο συναρτήσεων $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Τότε*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\ \widehat{g},$$

υπό την προϋπόθεση ότι $f * g \in L_2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ενδεικτικά τις **A1**, **A7** και **A9**. Οι υπόλοιπες προκύπτουν με παρόμοια μεθοδολογία. Οσον αφορά την **A1** έχουμε:

Εστω $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ και $(f_N)_N, (g_N)_N$ είναι δυο ακολουθίες συναρτήσεων στον $L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$ τέτοιες ώστε

$$\|f_N - f\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0 \text{ και } \|g_N - g\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0. \tag{1.2}$$

Ορίζουμε

$$\widehat{f} = \lim_{N\to\infty} \widehat{f_N} \text{ και } \widehat{g} = \lim_{N\to\infty} \widehat{g_N}$$

με την L_2-έννοια. Προφανώς, $af_N + bg_N \in L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$ $\forall a, b \in \mathbb{C}$ και επιπλέον με χρήση της τριγωνικής ανισότητας και της (1.2) παίρνουμε:

$$\big\|(af_N + bg_N) - (af + bg)\big\|_{L_2} \leq |a|\,\|f_N - f\|_{L_2(\mathbb{R})} + |b|\,\|g_N - g\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0.$$

Ετσι:

$$\widehat{af + bg} = \lim_{N\to\infty} (\widehat{af_N + bg_N}) = a \lim_{N\to\infty} \widehat{f_N} + b \lim_{N\to\infty} \widehat{g_N} = a\widehat{f} + b\widehat{g},$$

όπου το όριο νοείται πάλι με την L_2-έννοια. Οσον αφορά την **A7** έχουμε:

Είναι γνωστό ότι κάθε L_p-συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως γενικευμένη συνάρτηση. Με τον όρο αυτό εννοούμε κάθε στοιχείο του δυϊκού χώρου του χώρου Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ ο οποίος περιλαμβάνει όλες τις απειροδιαφορίσιμες συναρτήσεις με ταχέως φθίνουσες στο άπειρο παραγώγους κάθε τάξης. Σημειώνουμε ότι ο χώρος αυτός είναι πλήρης μετρικός χώρος. Για κάθε $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ έχουμε από τη θεωρία των γενικευμένων συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} & \langle \widehat{f'}, \phi \rangle = \langle f', \widehat{\phi} \rangle = -\langle f, (\widehat{\phi})' \rangle = 2\pi i \langle f, \widehat{\cdot\phi(\cdot)} \rangle = 2\pi i \langle \widehat{f}, \cdot\phi(\cdot) \rangle \\ = \; & 2\pi i \langle \widehat{f}, \cdot\phi(\cdot) \rangle = 2\pi i \langle \cdot\widehat{f}, \phi(\cdot). \rangle \end{aligned}$$

Εφόσον η παραπάνω ισότητα ισχύει $\forall \phi$, προκύπτει ότι $\widehat{f'} = (2\pi i \cdot)\widehat{f}$ που είναι το ζητούμενο για $k = 1$. Η γενίκευση για κάθε φυσικό αριθμό k είναι ανάλογη.

Τέλος, όσον αφορά την **A9**, αν $(f_N), (g_N)$ είναι δυο ακολουθίες συναρτήσεων όπως στην (1.2), τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$\|f_N * g_N - f * g\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0, \;\; N \to \infty,$$

συνεπώς

$$\widehat{f * g} = \lim_{N\to\infty} \widehat{f_N * g_N} = \lim_{N\to\infty} \big(\widehat{f_N}\,\widehat{g_N}\big) = \widehat{f}\,\widehat{g},$$

όπου η σύγκλιση νοείται πάλι με την L_2-έννοια. □

Η σημειακή σύγκλιση του ολοκληρώματος Fourier απεδείχθη ένα ιδιαίτερα δύσκολο πρόβλημα που απασχόλησε τους επιστήμονες για αρκετά χρόνια. Τελικά απεδείχθη από τον Carleson χρησιμοποιώντας νέες προηγμένες ιδέες και τεχνικές (βλέπε μεγιστικούς τελεστές, παρεμβολή σε ασθενείς χώρους $L_p(\mathbb{R})$) το ακόλουθο πολύ σημαντικό

Πρόταση 1.7. (Carleson) *Το ολοκλήρωμα Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_2(\mathbb{R})$ συγκλίνει σημειακά στην f σχεδόν παντού (σ.π.) στο $\mathbb{R}$. Με άλλα λόγια*

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \widehat{f}(\gamma) e^{2\pi i \gamma x}\, d\gamma, \;\; \sigma.\pi. \;\; \sigma\tau o\, \mathbb{R}\, .$$

2 Αρχές αβεβαιότητας για το ολοκλήρωμα Fourier σε χώρους $L_1(\mathbb{R})$ και $L_2(\mathbb{R})$.

Στο Κεφάλαιο αυτό μελετούμε αρχές αβεβαιότητας για το ολοκλήρωμα Fourier ολοκληρώσιμων και τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων πάνω στην πραγματική ευθεία. Στην παράγραφο 2.1 μελετούμε την κλασσική αρχή αβεβαιότητας για τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, σύμφωνα με την οποία δεν είναι ποτέ δυνατόν μια συνάρτηση $f \in L_2(\mathbb{R})$ και ο μετασχηματισμός Fourier αυτής $\widehat{f}$ να είναι ταυτόχρονα συγκεντρωμένοι, (βλέπε θεώρημα 2.1). Δίνοντας διάφορες ερμηνείες στην έννοια της συγκέντρωσης μιας συνάρτησης εξάγουμε άλλου τύπου αρχές αβεβαιότητας. Ετσι το θεώρημα 2.2 μας δίνει το έναυσμα για να δείξουμε στο θεώρημα 2.3 το κλασσικό αποτέλεσμα ότι μια συνάρτηση δε μπορεί ταυτόχρονα χρονοπερατή και ζωνοπερατή. Επίσης, αποδεικνύουμε στο θεώρημα 2.4 μια αρχή αβεβαιότητας για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που βελτιώνει παλαιότερους υπολογισμούς. Τέλος, παραθέτουμε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα ανακατασκευής σημάτων, η οποία είναι εφικτή λόγω της ύπαρξης μιας αρχής αβεβαιότητας. Στην παράγραφο 2.2 μελετούμε υπολογισμούς Landau-Pollack, στους οποίους η αβεβαιότητα μπορεί να ερμηνευθεί από την ύπαρξη ενός άνω φράγματος της ενέργειας που μπορεί να έχει ο μετασχηματισμός Fourier μιας τετραγωνικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης f σε διάστημα $[-\Omega, \Omega]$, $(\Omega > 0)$, δοθείσης της ενέργειας της f σε διάστημα $[-T, T], (T > 0)$.

2.1 Αρχές αβεβαιότητας και ανακατασκευή σημάτων στο $\mathbb{R}$.

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$(1 + |\cdot|)f \in L_2(\mathbb{R}). \tag{2.1}$$

Τότε είναι προφανές ότι f, $\cdot f^2$, $(\cdot f)^2 \in L_1(\mathbb{R})$.

Λήμμα 2.1. *Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια συνάρτηση με παράγωγο f' σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε τόσο η f όσο και η f' ικανοποιούν τη σχέση* (2.1). *Τότε*

(i) $f, f' \in L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$.

(ii) $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$.

Απόδειξη. **(i)** Προφανώς $f, f' \in L_2(\mathbb{R})$ λόγω (2.1). Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} &= \int_{|x|\le 1} |f(x)|dx + \int_{|x|>1} |f(x)|dx \le \sqrt{2}\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} + \int_{|x|>1} \frac{|xf(x)|}{|x|}dx \\ &\le \sqrt{2}\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|\cdot f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\left(\int_{|x|>1} \frac{1}{x^2}dx\right)^{1/2} < +\infty.\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $f' \in L_1(\mathbb{R})$.

(ii) Για $a, x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$. Εφόσον η f' είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, παίρνοντας όρια στην παραπάνω ισότητα συμπεραίνουμε ότι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει και μάλιστα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, αλλιώς η f δεν θα ήταν ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$. Ανάλογη είναι η απόδειξη και για την περίπτωση $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. □

Ορισμός 2.1. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τη* (2.1)*. Καλούμε τον πραγματικό αριθμό*

$$\mu_f = \frac{1}{\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \int_{\mathbb{R}} x|f(x)|^2\, dx$$

κέντρο ή επικρατούσα τιμή *της f. Επίσης, καλούμε το μη αρνητικό αριθμό*

$$\sigma_f = \frac{1}{\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}} \left(\int_{\mathbb{R}} (x-\mu_f)^2|f(x)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

ακτίνα ή τυπική απόκλιση *της f.*

Προφανώς, λόγω της ισχύος της (2.1), οι αριθμοί μ_f και σ_f είναι καλά ορισμένοι.

Σημείωση 2.1. *Οι παραπάνω ορισμοί θυμίζουν ανάλογους ορισμούς της θεωρίας πιθανοτήτων. Αν $|f|^2/\|f\|_2^2$ θεωρηθεί ως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X με αλφάβητο όλο το $\mathbb{R}$, τότε $\mu_f = \mathbb{E}[X]$ και $\sigma_f = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$. Τότε λέμε ότι η f είναι **συγκεντρωμένη** στο σύνολο $[-\sigma_f + \mu_f, \mu_f + \sigma_f]$. Διαισθητικά, όσο πιο μικρό είναι το σ_f, τόσο περισσότερο συγκεντρώνονται οι τιμές της f γύρω απ΄ το σημείο μ_f. Αντιθέτως, όσο πιο μεγάλο είναι το σ_f, τόσο περισσότερο απλώνονται οι τιμές της f εκατέρωθεν του μ_f.*

Θεώρημα 2.1. *[1]**(Αρχή αβεβαιότητας)** Έστω f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε τόσο η f όσο και η f' ικανοποιούν τη σχέση* (2.1)*. Αν $\widehat{f}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της f στον $L_2(\mathbb{R})$ και αν σ_f και $\sigma_{\widehat{f}}$ είναι όπως στον ορισμό 2.1, τότε ισχύει*

$$\sigma_f \; \sigma_{\widehat{f}} \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Με απλά λόγια, το θεώρημα 2.1 μας λέει ότι το γινόμενο των τυπικών αποκλίσεων των f και $\widehat{f}$ είναι κάτω φραγμένο από μία θετική σταθερά και συνεπώς το γινόμενο αυτό δε μπορεί ποτέ να γίνει οσοδήποτε μικρό. Άρα, οι f και $\widehat{f}$ δεν μπορούν ποτέ να είναι οσοδήποτε πολύ συγκεντρωμένες ταυτόχρονα.

Απόδειξη. Από το λήμμα 2.1, διαπιστώνουμε ότι οι προϋποθέσεις της ιδιότητας $A7$ της πρότασης 1.6 ικανοποιούνται, οπότε (και σε συνδυασμό με την ταυτότητα Parseval (1.1)) παίρνουμε

$$\|f'\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\cdot \widehat{f}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{2.2}$$

Άρα ο αριθμός $\sigma_{\widehat{f}}$ είναι καλά ορισμένος. Αντικαθιστώντας τις τιμές των σ_f και $\sigma_{\widehat{f}}$ από τον ορισμό 2.1 παίρνουμε

$$\sigma_f\ \sigma_{\widehat{f}} = \frac{1}{\|f\|_{L_2}\|\widehat{f}\|_{L_2}}\left(\int_{\mathbb{R}}(x-\mu_f)^2|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}(\gamma-\mu_{\widehat{f}})^2|\widehat{f}(\gamma)|^2\,d\gamma\right)^{1/2}.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Parseval $\|f\|_{L_2} = \|\widehat{f}\|_{L_2}$ (βλέπε (1.1)) και στοιχειώδεις πράξεις, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\int_{\mathbb{R}}(x-\mu_f)^2|f(x)|^2\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}}(\gamma-\mu_{\widehat{f}})^2|\widehat{f}(\gamma)|^2\,d\gamma\right) \geq \frac{\|f\|_{L_2}^4}{16\pi^2}. \tag{2.3}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x+\mu_f)e^{-2\pi i x\mu_{\widehat{f}}}.$$

Τότε η g' είναι παραγωγίσιμη σ.π. στο $\mathbb{R}$ και $(1+|\cdot|)g$, $(1+|\cdot|)g' \in L_2(\mathbb{R})$, απ΄ όπου προκύπτει ότι και $(1+|\cdot|)\widehat{g} \in L_2(\mathbb{R})$. Επιπλέον,

$$\widehat{g}(\gamma) = \widehat{f}(\gamma+\mu_{\widehat{f}})e^{-2\pi i(\gamma+\mu_{\widehat{f}})\mu_f},$$

συνεπώς με αλλαγή μεταβλητής στην (2.3) και χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους των g και $\widehat{g}$, αρκεί να δείξουμε την απλούστερη ανισότητα

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|xg(x)|^2\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}}|\gamma\widehat{g}(\gamma)|^2\,d\gamma\right) \geq \frac{\|g\|_{L_2}^4}{16\pi^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τη (2.2) στην παραπάνω ισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|xg(x)|^2\,dx\int_{\mathbb{R}}|\gamma\widehat{g}(\gamma)|^2\,d\gamma &= \int_{\mathbb{R}}|xg(x)|^2\,dx\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{g'}(x)|^2\,dx\\ &= \frac{1}{4\pi^2}\|\cdot g\|_{L_2}^2\ \|\widehat{g'}\|_{L_2}^2 = \frac{1}{4\pi^2}\|\cdot g\|_{L_2}^2\ \|g'\|_{L_2}^2,\end{aligned}$$

λόγω της ταυτότητας του Parseval. Από την εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz και στη συνέχεια της ανισότητας $|z| \geq |\operatorname{Re}(z)|$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi^2}\|\cdot g\|_{L_2}^2\ \|g'\|_{L_2}^2 &\geq \frac{1}{4\pi^2}\left|\int_{\mathbb{R}}xg(x)\overline{g'(x)}dx\right|^2\\ \geq\ \frac{1}{4\pi^2}\left|\operatorname{Re}\left(\int_{\mathbb{R}}xg(x)\overline{g'(x)}dx\right)\right|^2 &= \frac{1}{4\pi^2}\left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}x\frac{d}{dx}|g(x)|^2dx\right|^2\\ =\ \frac{1}{16\pi^2}\left(\cdot|g|^2\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}}|g(x)|^2\,dx\right)^2.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $x|g(x)|^2 \in L_1(\mathbb{R})$ και επιπλέον

$$\|(\cdot|g(\cdot)|^2)'\|_{L_1} \leq \|g\|_{L_2} + \|g\|_{L_2}\|g'\|_{L_2} < +\infty.$$

Έτσι, $\lim_{|x|\to\infty} \left(x|g(x)|^2\right) = 0$ ως συνέπεια του λήμματος 2.1(ii) για τη συνάρτηση $x|g(x)|^2$. Αντικαθιστώντας στην (2.4), παίρνουμε τελικά

$$\int_{\mathbb{R}} |xg(x)|^2\, dx \int_{\mathbb{R}} |\gamma\widehat{g}(\gamma)|^2\, d\gamma \geq \frac{1}{16\pi^2}\left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\, dx\right)^2 = \frac{\|g\|_{L_2}^4}{16\pi^2}$$

και το θεώρημα αποδείχθηκε. □

Σημείωση 2.2. *Η ανισότητα στο θεώρημα 2.1 είναι η βέλτιστη, διότι η ισότητα επιτυγχάνεται για τη συνάρτηση Gauss* $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$, $a > 0$.

Πόρισμα 2.1. *Υπό τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 2.1 ισχύει:*

$$\sigma_f + \sigma_{\widehat{f}} \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου και το θεώρημα 2.1 προκύπτει άμεσα ότι

$$\sigma_f + \sigma_{\widehat{f}} \geq 2\, \sqrt{\sigma_f\sigma_{\widehat{f}}} \geq 2\, \sqrt{\frac{1}{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $f(x) = e^{-\pi x^2}$. □

Το θεώρημα 2.1 χρησιμοποιεί την έννοια της τυπικής απόκλισης σαν ένα μέτρο συγκέντρωσης μιας συνάρτησης γύρω από την επικρατούσα τιμή της. Ας δούμε τώρα έναν άλλο ορισμό της συγκέντρωσης μιας συνάρτησης, βλέπε επίσης [3].

Ορισμός 2.2. *Έστω $T \subset \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο σύνολο και $f \in L_2(\mathbb{R})$. Για κάποιο $0 \leq \epsilon \leq \|f\|_{L_2}$, θα λέμε ότι η f είναι ϵ-**συγκεντρωμένη** στο T, εάν*

$$\|f - f\chi_T\|_{L_2} \leq \epsilon,$$

όπου χ_T είναι η συνήθης χαρακτηριστική συνάρτηση στο T.

Θεώρημα 2.2. *Έστω $T, W \subset \mathbb{R}$ είναι δυο μετρήσιμα σύνολα και $f \in L_2(\mathbb{R})$. Αν η f είναι ϵ_T-συγκεντρωμένη στο T, ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ είναι συνάρτηση ϵ_W-συγκεντρωμένη στο W και $\|f\|_{L_2} = \|\widehat{f}\|_{L_2} = 1$ με $\epsilon_T + \epsilon_W \leq 1$, τότε*

$$\min\left(1, \sqrt{|T|\,|W|}\right) \geq 1 - (\epsilon_T + \epsilon_W),$$

όπου με $|T|, |W|$ συμβολίζουμε το μήκος των T, W αντιστοίχως (με πιο αυστηρή ορολογία, $|T|, |W|$ είναι το μέτρο Lebesgue των T, W).

Για την απόδειξη του του θεωρήματος 2.2 θα χρειασθούμε πρώτα κάποια μικρή προεργασία. Για T, W και f όπως παραπάνω, ορίζουμε τον τελεστή αποκοπής στο χρόνο

$$P_T : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}) :\; P_T(f) = f\chi_T, \tag{2.5}$$

και τον τελεστή μερικής ανακατασκευής της f με αποκοπή συχνοτήτων

$$Q_W := \widehat{S}^{-1}P_W\widehat{S} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}) : \ \big(\widehat{S}^{-1}P_W\widehat{S}\big)(f) := \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\gamma\cdot}\widehat{f}(\gamma)\chi_W(\gamma)d\gamma, \tag{2.6}$$

όπου $\widehat{S}$ είναι ο τελεστής Fourier πάνω στον $L_2(\mathbb{R})$ με αντίστροφο τελεστή $\widehat{S}^{-1} := \widehat{S}^{*}$. Αν $\mathscr{B}$ είναι ο χώρος όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον $L_2(\mathbb{R})$ στον $L_2(\mathbb{R})$, τότε υπενθυμίζουμε ότι η **συνήθης νόρμα τελεστή** $R \in \mathscr{B}$ ορίζεται ως

$$\|R\|_2 = \sup_{f\in L_2(\mathbb{R})} \frac{\|Rf\|_{L_2}}{\|f\|_{L_2}} = \sup_{f\colon \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}=1} \|Rf\|_{L_2}. \tag{2.7}$$

Επιπλέον, αν $H \in \mathscr{B}$, τότε:

$$\|RH\|_2 \le \|R\|_2\|H\|_2. \tag{2.8}$$

Λήμμα 2.2. *Εστω $T, W \subset \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμα σύνολα με τους αντίστοιχους τελεστές P_T και Q_W όπως ορίσθηκαν στις (2.5) και (2.6) αντίστοιχα. Τότε $\|P_T\|_2 \le 1$, $\|Q_W\|_2 \le 1$ και*

$$\|P_TQ_W\|_2 \le \min\big(1, \sqrt{|T|\,|W|}\big),$$

όπου $\|\cdot\|_2$ είναι η συνήθης νόρμα τελεστή όπως ορίσθηκε στην (2.7).

Απόδειξη. Για κάθε $f \in L_2(\mathbb{R})$ έχουμε

$$\|P_T(f)\|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |(f\chi_T)(x)|^2 dx \le \|f\|_{L_2},$$

άρα $\|P_T\|_2 \le 1$. Επίσης

$$\|Q_Wf\|_{L_2} \le \|\widehat{f}\|_{L_2} = \|f\|_{L_2},$$

άρα $\|Q_W\|_2 \le 1$. Τέλος

$$\|P_TQ_Wf\|_{L_2}^2 = \int_T \left| \int_W e^{2\pi i\gamma t}\widehat{f}(\gamma)d\gamma \right|^2 dt \le |T|\,|W|\,\|f\|_{L_2}^2,$$

με εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz. Απ΄ την άλλη μεριά έχουμε

$$\|P_TQ_Wf\|_{L_2} \le \|P_T\|_2\|Q_W\|_2\|f\|_{L_2} \le 1$$

λόγω (2.8). Συνδυάζοντας τις δυο παραπάνω ανισότητες για την $\|P_TQ_Wf\|_{L_2}$ με τον ορισμό της νόρμας τελεστή στην (2.7) προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Απόδειξη θεωρήματος 2.2. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz και το λήμμα 2.2 έχουμε

$$\begin{aligned} & \|f - P_TQ_Wf\|_{L_2} = \|f - P_Tf + P_Tf - P_TQ_Wf\|_{L_2} \le \|f - P_Tf\|_{L_2} \\ + \ & \|P_T(f - Q_Wf)\|_{L_2} \le \|f - P_Tf\|_{L_2} + \|P_T\|_2\|f - Q_Wf\|_{L_2} \\ \le \ & \|f - P_Tf\|_{L_2} + \|f - Q_Wf\|_{L_2} = \|f - P_Tf\|_{L_2} + \|\widehat{f} - P_W\widehat{f}\|_{L_2} \\ \le \ & \epsilon_T + \epsilon_W. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\epsilon_T + \epsilon_W &\geq \|f - P_T Q_W f\|_{L_2} \geq \|f\|_2 - \|P_T Q_W f\|_{L_2} = 1 - \|P_T Q_W f\|_{L_2}\\ &\Rightarrow \|P_T Q_W f\|_{L_2} \geq 1 - (\epsilon_W + \epsilon_T).\end{aligned}$$

Εφόσον $\|P_T Q_W\|_2 \|f\|_{L_2} \geq \|P_T Q_W f\|_2$ και $\|f\|_{L_2} = 1$ παίρνουμε

$$\|P_T Q_W\|_2 \geq \|P_T Q_W f\|_{L_2} \geq 1 - (\epsilon_W + \epsilon_T)$$

ως συνέπεια της παραπάνω ανισότητας. Λαμβάνοντας υπόψη και το λήμμα 2.2 προκύπτει τελικά

$$1 - (\epsilon_T + \epsilon_W) \leq \|P_T Q_W\|_2 \leq \min\left(1, \sqrt{|T|\,|W|}\right). \qquad \square$$

Σημείωση 2.3. *Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος αποτελεί μια βελτίωση ενός σχετικού αποτελέσματος των Donoho-Stark, βλέπε [3].*

Ορισμός 2.3. *Εστω $f \in L_2(\mathbb{R})$ και $T, W \subset \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμα και φραγμένα σύνολα. Τότε η f καλείται T-**χρονοπερατή**, εάν $f(t) = 0\ \forall t \notin T$. Επίσης, η $\widehat{f}$ καλείται W-**ζωνοπερατή**, εάν $\widehat{f}(\gamma) = 0\ \forall \gamma \notin W$.*

Με βάση τον ορισμό αυτό και στηριζόμενοι στο θεώρημα 2.2, μπορούμε άμεσα να συνάγουμε το ακόλουθο

Πόρισμα 2.2. *Με τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 2.2, εάν $|T|\,|W| < 1$, τότε καμία συνάρτηση $f \in L_2(\mathbb{R})$ δε μπορεί να είναι ταυτόχρονα T-χρονοπερατή και W-ζωνοπερατή.*

Απόδειξη. Αν η f είναι ταυτόχρονα T-χρονοπερατή και W-ζωνοπερατή με $|T||W| < 1$, τότε από τον ορισμό 2.2 έπεται ότι $\epsilon_T = \epsilon_W = 0$. Τότε όμως η ισχύς του θεωρήματος 2.2 υπονοεί ότι $|T||W| \geq 1$, άτοπο. $\square$

Το πόρισμα 2.2 γενικεύεται ως εξής:

Θεώρημα 2.3. ***(Αρχή αβεβαιότητας για χρονοπερατές και ζωνοπερατές συναρτήσεις)*** *Δεν υπάρχει συνάρτηση $f \in L_2(\mathbb{R})$ που να είναι ταυτόχρονα T-χρονοπερατή και W-ζωνοπερατή.*

Απόδειξη. Αν υπήρχε τέτοια συνάρτηση, τότε από το θεώρημα Paley-Wiener η f επεκτείνεται σε μια ολόμορφη συνάρτηση F στο άνω ημιεπίπεδο, βλέπε [9]. Έτσι οι ρίζες της F είναι απομονωμένα σημεία του $\mathbb{C}$, άρα αναγκαστικά η f δε μπορεί να έχει φραγμένο φορέα T, διότι η F θα είχε ρίζες στο σύνολο $\mathbb{R} - T$ που θα περιείχε διάστημα, δηλαδή οι ρίζες της F θα ήταν μη απομονωμένα σημεία. $\square$

Η αρχή αβεβαιότητας του θεωρήματος 2.2 ερμηνεύεται καλύτερα με χρήση της τριπλής ανισότητας

$$1 - (\epsilon_T + \epsilon_W) \leq \|P_T Q_W\|_2 \leq \min\left(1, \sqrt{|T|\,|W|}\right)$$

που εμφανίζεται ενδογενώς στην απόδειξη του θεωρήματος αυτού. Έτσι, θεωρούμε ως αβεβαιότητα τη νόρμα $\|P_T Q_W\|_2$ που μετρά την ελάχιστη και (κυρίως) τη μέγιστη ενέργεια που μπορεί να έχει μια οποιαδήποτε W-ζωνοπερατή συνάρτηση θεωρώντας τη T-χρονοπερατή. Για παράδειγμα, αν $|T|\,|W| = \frac{1}{3}$, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier καμίας W-ζωνοπερατής συνάρτησης δε μπορεί να έχει πάνω από το $\frac{1}{3}$ της ενέργειάς του στο σύνολο T.

Έως τώρα η αρχή της αβεβαιότητας φαίνεται να είναι ένα μάλλον αρνητικό αποτέλεσμα. Παρακάτω θα δούμε δυο παραδείγματα προς τη θετική κατεύθυνση, όπου η παραπάνω αρχή αβεβαιότητας χρησιμοποιείται για να δείξει ότι είναι εφικτή η πλήρης ανάκτηση ενός σήματος, έστω κι αν κατά την αναμετάδοση κάποιο τμήμα της πληροφορίας έχει απωλεσθεί.

Έστω W-ζωνοπερατό σήμα $s \in L_2(\mathbb{R})$ το οποίο μεταδίδεται σε έναν δέκτη, ο οποίος γνωρίζει ότι το s είναι W-ζωνοπερατό, δηλαδή ότι ο φορέας του $\widehat{s}$ είναι κάποιο φραγμένο σύνολο W. Με άλλα λόγια,

$$Q_W s = s,$$

όπου Q_W είναι τελεστής όπως στη (2.6). Έστω ότι ο δέκτης έλαβε το σήμα

$$r(t) = \begin{cases} s(t) + n(t), & t \notin T \\ n(t), & t \in T, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

όπου $T \subset \mathbb{R}$ είναι κάποιο μετρήσιμο και φραγμένο υποσύνολο της πραγματικής ευθείας και $n = n(t)$ είναι θόρυβος. Ο δέκτης θέλει να ανακατασκευάσει το s από το r γνωρίζοντας επακριβώς το σύνολο T από το οποίο λείπει παντελώς η πληροφορία για το s. Παρότι αυτό φαίνεται αδύνατο, θα δούμε ότι η ανακατασκευή είναι υπό προϋποθέσεις εφικτή. Πρώτα όμως, ας μελετήσουμε διαισθητικά πώς η ανακατασκευή του s θα ήταν ανέφικτη. Αν υπήρχε μια W-ζωνοπερατή συνάρτηση h η οποία ήταν και T-χρονοπερατή, τότε το ληφθέν σήμα r δε θα περιείχε καμιά πληροφορία για την h, άρα ο δέκτης δε θα είχε κανένα τρόπο να ξεχωρίσει το σήμα s από ένα σήμα της μορφής $s + ah$, $(a \in \mathbb{C})$, και έτσι η αβεβαιότητα της ανακατασκευής του σήματος s θα ήταν ίση με

$$\|s - (s + ah)\|_{L_2} = |a|\,\|h\|_{L_2},\ a \in \mathbb{C},$$

δηλαδή τεράστια, διότι η σταθερά a θα μπορούσε να επιλεγεί αυθαίρετα μεγάλη. Στην ακόλουθη πρόταση δείχνουμε εμμέσως ότι εάν $|T|\,|W| < 1$, τέτοια συνάρτηση h δεν υπάρχει. Αντιθέτως, υπάρχει γραμμικός τελεστής ανακατασκευής U, έτσι ώστε

$$\|s - Ur\|_{L_2} \leq C\|n\|_{L_2},$$

για κάποια θετική σταθερά C και για συνάρτηση θορύβου n. Απουσία θορύβου, προφανώς θα ισχύει $s = Ur$ βάσει της παραπάνω.

Πρόταση 2.1. *[3] Έστω T, W είναι δυο μετρήσιμα και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε*

$$|T|\,|W| < 1,$$

P_T, Q_W είναι τελεστές όπως ορίσθηκαν στις (2.5) και (2.6) αντιστοίχως και I είναι ο συνήθης ταυτοτικός τελεστής. Τότε, ο τελεστής

$$U : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}) : U = (I - P_T Q_W)^{-1}$$

είναι καλά ορισμένος. Έστω $s \in L_2(\mathbb{R})$ είναι W-ζωνοπερατό σήμα και r είναι σήμα (που εξαρτάται από το σήμα s και το σύνολο T) όπως ορίσθηκε στην (2.9) με $n \in L_2(\mathbb{R})$ να είναι θόρυβος. Τότε

$$\|s - Ur\|_2 \leq \frac{\|n\|_2}{1 - \sqrt{|T|\,|W|}}.$$

Απόδειξη. Από το λήμμα 2.2 και την υπόθεση, έχουμε $\|P_T Q_W\|_2 \leq \sqrt{|T|\,|W|} < 1$. Έτσι, $\|I - P_T Q_W\|_2 > 1 - \sqrt{|T|\,|W|} = c > 0$, συνεπώς ο τελεστής $I - P_T Q_W$ είναι 1-1 και επί του $L_2(\mathbb{R})$, άρα είναι αντιστρέψιμος στον $L_2(\mathbb{R})$ και επιπλέον από [4] ισχύει

$$\|U\|_2 = \left\|\left(I - P_T Q_W\right)^{-1}\right\|_2 \leq (1 - \|P_T Q_W\|_2)^{-1} \leq \frac{1}{1 - \sqrt{|T|\,|W|}}. \qquad (2.10)$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε W-ζωνοπερατό σήμα s ισχύει $Q_W s = s$. Με χρήση αυτής της παρατήρησης, ο ορισμός της r στην (2.9) γράφεται ως εξής

$$r = (I - P_T)s + n = (I - P_T Q_W)s + n = U^{-1}s + n.$$

Έτσι

$$s - Ur = s - U(U^{-1}s + n) = -Un,$$

συνεπώς

$$\|s - Ur\|_2 = \|Un\|_2 \leq \|U\|_2 \|n\|_{L_2},$$

από την οποία και με χρήση της (2.10) προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. □

Λαμβάνοντας υπόψη το ανάπτυγμα

$$(I - P_T Q_W)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (P_T Q_W)^k = I + P_T Q_W + (P_T Q_W)^2 + ...,$$

(με τη σύγκλιση να ορίζεται κατά νόρμα), μπορούμε αλγοριθμικά να υπολογίσουμε το s χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο

$$s^{(n)} = \begin{cases} r, & n = 0 \\ r + P_T Q_W s^{(n-1)}, & n = 1, 2, ... \end{cases}.$$

Στο νιοστό βήμα, με δράση του τελεστή Q_W μερικής ανακατασκευής με αποκοπή συχνοτήτων εκτός του συνόλου W και με τη μετέπειτα δράση του τελεστή αποκοπής P_T, το σήμα εισόδου $s^{(n-1)}$ μετατρέπεται σε ένα νέο σήμα το οποίο αθροιζόμενο με το αρχικό σήμα r ορίζει το σήμα $s^{(n)}$. Ισχύει δε

$\lim_{n\to\infty} s^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty}(P_TQ_W)^k r = Ur$ με την L_2-έννοια. Εφόσον, όπως είδαμε στην παραπάνω Πρόταση 2.1 ισχύει $Ur = s$, απουσία θορύβου n, χρησιμοποιώντας την παραπάνω αναδρομική σχέση που είναι γνωστή ως **μέθοδος εναλλασσόμενων προβολών**, μπορούμε να ανακατασκευάσουμε πλήρως το αρχικό σήμα μας s.

Είναι χρήσιμο να εξαγάγουμε αρχές αβεβαιότητας και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Ορισμός 2.4. *Έστω W είναι μετρήσιμο και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $Q_W : L_1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ είναι τελεστής όπως στη (2.6). Για $f \in L_1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $\|Q_W(f)\|_{L_1(\mathbb{R})} < \infty$ και για κάποιο $0 \le \epsilon_W \le \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}$, λέμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ της f είναι συνάρτηση ϵ_W-**συγκεντρωμένη** στο W, εάν*

$$\|f - Q_W f\|_{L_1(\mathbb{R})} \le \epsilon_W.$$

Ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα διότι

$$\|\widehat{f} - \widehat{f}\chi_W\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \|\widehat{f} - \widehat{Q_W f}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \|f - Q_W f\|_{L_1(\mathbb{R})} \le \epsilon_W.$$

Δείχνουμε τώρα το ακόλουθο

Θεώρημα 2.4. *Έστω f είναι όπως στον ορισμό 2.4. Επιπλέον, αν $\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} = 1$ και αν η f είναι ϵ_T-συγκεντρωμένη σε κάποιο μετρήσιμο υποσύνολο T της πραγματικής ευθείας με $\epsilon_T + \epsilon_W \le 1$, τότε*

$$|T|\ |W| \ge 1 - (\epsilon_T + \epsilon_W).$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι τροποποίηση της απόδειξης του θεωρήματος 2.2 που βελτιώνει ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα στην εργασία [3]. Οι πιο σημαντικές διαφοροποιήσεις στην απόδειξη του θεωρήματος 2.4 αφορούν τη δράση των τελεστών P_T και Q_W και το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης είναι απλά μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο χώρο $C_0(\mathbb{R})$ που ορίσθηκε στο κεφάλαιο 1.

Απόδειξη θεωρήματος 2.4. Έστω $C(\mathbb{R})$ είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη sup-νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ και $P_T : C(\mathbb{R}) \to L_1(\mathbb{R})$, $Q_W : L_1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ είναι τελεστές με τύπους όπως ορίσθηκαν στις (2.5) και (2.6) αντίστοιχα. Για $f, Q_W f \in L_1(\mathbb{R})$, προφανώς $\|P_T f\|_{L_1(\mathbb{R})} \le \|f\|_{L_1(\mathbb{R})}$ και

$$\begin{aligned} \|P_T Q_W f\|_{L_1(\mathbb{R})} &= \int_T \left| \int_W e^{2\pi i\gamma t} \widehat{f}(\gamma) d\gamma \right| dt \le |T|\,|W|\,\|\widehat{f}\|_\infty \\ &\le |T|\,|W|\,\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} = |T|\,|W|. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Εργαζόμαστε όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 2.2 χρησιμοποιώντας όμως $L_1(\mathbb{R}) := L_1$-νόρμα και παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\|f - P_T Q_W f\|_{L_1} = \|f - P_T f + P_T f - P_T Q_W f\|_{L_1} \le \|f - P_T f\|_{L_1} \\ + \;\; &\|P_T(f - Q_W f)\|_{L_1} \le \|f - P_T f\|_{L_1} + \|f - Q_W f\|_{L_1} \le \epsilon_W + \epsilon_T. \end{aligned}$$

Απ΄ την άλλη μεριά

$$\begin{aligned} &\epsilon_W + \epsilon_T \geq \|f - P_T Q_W f\|_{L_1} \geq \|f\|_{L_1} - \|P_T Q_W f\|_{L_1} = 1 - \|P_T Q_W f\|_{L_1} \\ \Rightarrow \quad &\|P_T Q_W f\|_{L_1} \geq 1 - (\epsilon_W + \epsilon_T) \geq 0. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ανισότητα με την (2.11) παίρνουμε άμεσα τη ζητούμενη ανισότητα. □

Σημείωση 2.4. *Η (2.11) ισχύει για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R})$ με $\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} = 1$, επομένως για τη νόρμα*

$$\|P_T Q_W\|_1 := \sup_{f \in L_1(\mathbb{R})} \frac{\|P_T Q_W f\|_{L_1(\mathbb{R})}}{\|f\|_{L_1(\mathbb{R})}} = \sup_{f \in L_1(\mathbb{R}),\, \|f\|_{L_1(\mathbb{R})=1}} \|P_T Q_W f\|_{L_1(\mathbb{R})}$$

ισχύει

$$\|P_T Q_W\|_1 \leq |W||T|. \tag{2.12}$$

Ας εξετάσουμε το ακόλουθο πρόβλημα ανακατασκευής σήματος συνεχούς χρόνου. Στέλνουμε ένα W-ζωνοπερατό σήμα s σε δέκτη, ο οποίος λαμβάνει τέλεια το σήμα πλην ενός μετρήσιμου συνόλου T, όπου έχει προστεθεί θόρυβος n. Το σύνολο T είναι άγνωστο στο δέκτη και η μόνη παραδοχή που κάνουμε για το θόρυβο n είναι ότι $n \in L_1(\mathbb{R})$. Εν ολίγοις, ο δέκτης λαμβάνει το σήμα

$$r = s + P_T n.$$

Στόχος μας είναι η ανακατασκευή του s. Θα αποδείξουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 2.2. *[3] Έστω W, T είναι μετρήσιμα και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αν*

$$|W||T| < \frac{1}{2},$$

τότε

$$\arg\min_{\tilde{s} \in B_1(W)} \|r - \tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})} = s \quad \forall n \in L_1(\mathbb{R}),$$

όπου $B_1(W)$ είναι ο υπόχωρος όλων των W-ζωνοπερατών συναρτήσεων του $L_1(\mathbb{R})$.

Η πρόταση 2.2 μας λέει με απλά λόγια, ότι για κατάλληλα W, T μπορούμε να ανακτήσουμε το s βρίσκοντας συνάρτηση εντός του $B_1(W)$ που έχει την ελάχιστη απόσταση από το r με την $L_1(\mathbb{R})$-έννοια. Θα αποδείξουμε αρχικά ένα χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα 2.3. *Έστω W, T είναι μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $|W||T| < \frac{1}{2}$. Αν $n(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R} - T$, τότε*

$$\arg\min_{\tilde{s} \in B_1(W)} \|n - \tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})} = 0 \quad \forall n \in L_1(\mathbb{R}).$$

Απόδειξη. Κάνοντας χρήση της (3.1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|P_T \tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})} &= \|P_T Q_W \tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq \|P_T Q_W\|_1 \|\tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq |W||T| \|\tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})} \\ &< \frac{1}{2}\|\tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})} = \frac{1}{2}\|(P_T + P_{\mathbb{R}-T})\tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})} = \frac{1}{2}\|P_T \tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})} + \frac{1}{2}\|P_{\mathbb{R}-T}\tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

επομένως
$$\|P_T\tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})} < \|P_{\mathbb{R}-T}\tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})}.$$
Έτσι, για $\tilde{s} \in B_1(W)$, $\tilde{s} \neq 0$ έχουμε
$$\begin{aligned}\|n-\tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})} &= \|P_T(n-\tilde{s})\|_{L_1(\mathbb{R})} + \|P_{\mathbb{R}-T}(n-\tilde{s})\|_{L_1(\mathbb{R})}\\ &\geq \|P_Tn\|_{L_1(\mathbb{R})} - \|P_T\tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})} + \|P_{\mathbb{R}-T}\tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})}\\ &> \|P_Tn\|_{L_1(\mathbb{R})} = \|n\|_{L_1(\mathbb{R})},\end{aligned}$$
άρα πράγματι η $\|n-\tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})}$ ελαχιστοποιείται για $\tilde{s}=0$. □

Απόδειξη πρότασης 2.2. Η περίπτωση $s=0$ αποδείχθηκε στο λήμμα 2.3. Για $s \neq 0$ έχουμε
$$\begin{aligned}\arg\min_{\tilde{s}\in B_1(W)} \|r-\tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})} &= \arg\min_{\tilde{s}\in B_1(W)} \|s+P_Tn-\tilde{s}\|_{L_1(\mathbb{R})}\\ &= \arg\min_{\tilde{s}\in B_1(W)} \|P_Tn-(\tilde{s}-s)\|_{L_1(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$
Αλλά $\tilde{s}-s \in B_1(W)$, οπότε από το Λήμμα 2.3 το ζητούμενο ελάχιστο επιτυγχάνεται για $\tilde{s}-s=0 \Rightarrow \tilde{s}=s$. □

2.2 Αποκοπή στο χρόνο και στις συχνότητες. Υπολογισμοί Slepian-Landau-Pollak.

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι μια συνάρτηση δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα χρονοπερατή και ζωνοπερατή. Παρ΄ όλα αυτά, στην καθημερινή ζωή και σε μεγάλο πλήθος πρακτικών εφαρμογών, ένα χρονοπερατό σήμα αναμεταδίδεται με αποκοπή των συχνοτήτων του πάνω από κάποιο όριο. Ένα εύλογο ερώτημα αφορά τη μελέτη του σφάλματος ανακατασκευής μέσω αυτής της διαδικασίας. Για απλότητα, έστω $I_T = [-T, T]$ και $I_\Omega = [-\Omega, \Omega]$ είναι δυο διαστήματα με $T, \Omega > 0$ και $P_{I_T}, \widehat{Q_{I_\Omega}}$ είναι τελεστές αποκοπής στο χρόνο I_T και μερικής ανακατασκευής με αποκοπή συχνοτήτων πέραν του συνόλου I_Ω αντιστοίχως, όπως ορίσθηκαν στις σχέσεις (2.5) και (2.6).

Ορισμός 2.5. *Συμβολίζουμε με*

$$\mathcal{T}_{I_T} := \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \ \ f(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} - I_T \right\}$$

τον υπόχωρο όλων των I_T-χρονοπερατών συναρτήσεων και με

$$\mathcal{B}_{I_\Omega} := \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \ \ \widehat{f}(\gamma) = 0 \ \ \forall \gamma \in \mathbb{R} - I_\Omega \right\}$$

τον υπόχωρο όλων των I_Ω-ζωνοπερατών συναρτήσεων.

Τότε, η παραπάνω διαδικασία αναμετάδοσης με αποκοπή στο χρόνο και στις συχνότητες μοντελοποιείται με χρήση του τελεστή $Q_{I_\Omega} P_{I_T}$ και η μελέτη του σφάλματος ανακατασκευής ανάγεται στην εύρεση ενός άνω φράγματος της ποσότητας

$$\frac{\|Q_{I_\Omega} P_{I_T} f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}{\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \leq \|Q_{I_\Omega} P_{I_T}\|_2, \tag{2.13}$$

δηλαδή στην εύρεση ενός άνω φράγματος της συνήθους νόρμας του τελεστή $Q_{I_\Omega} P_{I_T}$. Αλλά

$$\begin{aligned} & \|Q_{I_\Omega} P_{I_T} f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \langle Q_{I_\Omega} P_{I_T} f, \, Q_{I_\Omega} P_{I_T} f\rangle_{L_2(\mathbb{R})} \\ = \ \ & \langle (Q_{I_\Omega} P_{I_T})^* Q_{I_\Omega} P_{I_T} f, \, f\rangle_{L_2(\mathbb{R})}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

όπου $(Q_{I_\Omega} P_{I_T})^*$ είναι ο συζυγής τελεστής (adjoint operator) του $Q_{I_\Omega} P_{I_T}$. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι για κάθε τελεστή $U : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ ορίζεται (συνεπεία του θεωρήματος αναπαράστασης Riesz, βλέπε [8]) ο **συζυγής τελεστής του** $U^* : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ από τη σχέση

$$\langle Uf, g\rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle f, U^* g\rangle_{L_2(\mathbb{R})}, \forall f, g \in L_2(\mathbb{R}).$$

Αν $U = U^*$, τότε ο U καλείται **ερμιτιανός τελεστής** και αποτελεί τη γενίκευση της έννοιας του ερμιτιανού πίνακα σε χώρους που δεν έχουν πεπερασμένη διάσταση. Στην προκειμένη περίπτωση, για κάθε $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ έχουμε

$$\begin{aligned} & \langle Q_{I_\Omega} P_{I_T} f, g\rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle \widehat{Q_{I_\Omega} P_{I_T}} f, \widehat{g}\rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle \widehat{P_{I_T} f} \chi_{I_\Omega}, \widehat{g}\rangle_{L_2(\mathbb{R})} \\ = \ \ & \langle \widehat{P_{I_T} f}, \widehat{g}\chi_{I_\Omega}\rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle \widehat{P_{I_T} f}, \widehat{Q_{I_\Omega} g}\rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle P_{I_T} f, Q_{I_\Omega} g\rangle_{L_2(\mathbb{R})} \\ = \ \ & \langle f \chi_{I_T}, Q_{I_\Omega} g\rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle f, Q_{I_\Omega} g \chi_{I_T}\rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle f, P_{I_T} Q_{I_\Omega} g\rangle_{L_2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

άρα
$$(Q_{I_\Omega}P_{I_T})^* = P_{I_T}Q_{I_\Omega} \tag{2.15}$$
και έτσι η (2.14) παίρνει τη μορφή
$$\|Q_{I_\Omega}P_{I_T}f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \langle P_{I_T}Q_{I_\Omega}Q_{I_\Omega}P_{I_T}f,\, f\rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}f,\, f\rangle_{L_2(\mathbb{R})}.$$
Είναι εύκολο τώρα να δούμε ότι ο τελεστής $P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}$ είναι ερμιτιανός και
$$\langle P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}f,\, f\rangle_{L_2(\mathbb{R})} \geq 0, \ \ \forall f \in L_2(\mathbb{R}).$$
Επίσης, αν λ είναι μια ιδιοτιμή του και f είναι η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση με $\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$, τότε
$$P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}f = \lambda f \Rightarrow \|P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}f\|_{L_2(\mathbb{R})} = |\lambda|\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}$$
$$\Rightarrow |\lambda| = \|P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}f\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \|P_{I_T}\|_2\|Q_{I_\Omega}\|_2\|P_{I_T}\|_2\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1.$$
Από τα παραπάνω έπεται ότι ο τελεστής αυτός έχει μόνον πραγματικές ιδιοτιμές και μάλιστα
$$\sigma(P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}) \subseteq [0,1],$$
όπου με $\sigma(\cdot)$ συμβολίζουμε το σύνολο των ιδιοτιμών τελεστή.

Λήμμα 2.4. *Έστω $Q_{I_\Omega}P_{I_T}$ και $P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}$ είναι όπως παραπάνω. Τότε $\sigma(Q_{I_\Omega}P_{I_T}) = \sigma(P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T})$.*

Απόδειξη. Έστω λ είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή $Q_{I_\Omega}P_{I_T}$ και f είναι μια αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση. Τότε έχουμε
$$Q_{I_\Omega}P_{I_T}f = \lambda f \Rightarrow P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}f = \lambda P_{I_T}f \xRightarrow{P_{I_T}=P^2_{I_T}} P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}(P_{I_T}f) = \lambda(P_{I_T}f),$$
επομένως η λ είναι και ιδιοτιμή του τελεστή $P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}$ με ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $P_{I_T}f$. Ετσι
$$\sigma(Q_{I_\Omega}P_{I_T}) \subseteq \sigma(P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}). \tag{2.16}$$
Έστω τώρα μ είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή $P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}$ και g είναι μια αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση. Τότε
$$P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}g = \mu g \Rightarrow P^2_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}g = \mu P_{I_T}g \xRightarrow{P^2_{I_T}=P_{I_T}} P_{I_T}Q_{I_\Omega}(P_{I_T}g) = \mu(P_{I_T}g),$$
άρα η μ είναι και ιδιοτιμή του τελεστή $Q_{I_\Omega}P_{I_T}$ με ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $P_{I_T}g$. Συνεπώς
$$\sigma(P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}) \subseteq \sigma(P_{I_T}Q_{I_\Omega})$$
και σε συνδυασμό με τις (2.15) και (2.16) συμπεραίνουμε ότι
$$\sigma(P_{I_T}Q_{I_\Omega}) = \sigma(Q_{I_\Omega}P_{I_T}) \subseteq \sigma(P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T}) \subseteq \sigma(P_{I_T}Q_{I_\Omega}). \tag{2.17}$$
Αναγκαστικά λοιπόν παίρνουμε $\sigma(Q_{I_\Omega}P_{I_T}) = \sigma(P_{I_T}Q_{I_\Omega}P_{I_T})$. □

Επιπλέον, το $\sigma(Q_{I_\Omega}P_{I_T})$ είναι αριθμήσιμο σύνολο συνεπεία του φασματικού θεωρήματος για συμπαγείς τελεστές (είναι γνωστό ότι ο τελεστής Q_{I_Ω} είναι συμπαγής ως τελεστής συνέλιξης $Hilbert - Schmidt$, άρα από θεωρία και ο $Q_{I_\Omega}P_{I_T}$ είναι επίσης συμπαγής τελεστής). Έστω λ_0, $\lambda_1, ...$ είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή $Q_{I_\Omega}P_{I_T}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι

$$1 > \lambda_0 > ... > \lambda_n > ... \geq 0.$$

Εφόσον $\|Q_{I_\Omega}P_{I_T}\|_2 \leq \lambda_0$, ο υπολογισμός της ιδιοτιμής λ_0 (ο οποίος γίνεται αριθμητικά) μας δίνει ένα άνω φράγμα της (2.13).

Σημειώνουμε ότι οι ιδιότητες των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή $Q_{I_\Omega}P_{I_T}$αυτού είναι γνωστές. Πράγματι, ισχύει η ακόλουθη

Πρόταση 2.3. *[10] Εστω $Q_{I_\Omega}P_{I_T}$ είναι τελεστής πάνω στον $L_2(\mathbb{R})$ με ιδιοτιμές $\lambda_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις ψ_n όπως παραπάνω. Τότε:*

(α) Οι ιδιοσυναρτήσεις ψ_n ορίζουν μία ορθοκανονική βάση του χώρου $\mathcal{B}_{I_\Omega}$, δηλαδή $\langle \psi_n, \psi_k \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \delta_{n,k}$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$ και έτσι κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{B}_{I_\Omega}$ γράφεται ως

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \psi_n \rangle_{L_2(\mathbb{R})} \psi_n,$$

με την $L_2(\mathbb{R})$-έννοια.

(β) Οι συναρτήσεις $P_{I_T}\psi_n$ ορίζουν μία ορθογώνια βάση του χώρου $\{P_{I_T}f : f \in \mathcal{B}_{I_\Omega}\}$. Πιο συγκεκριμένα,

$$\langle P_{I_T}\psi_n, P_{I_T}\psi_k \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \lambda_n \delta_{n,k}, \ \forall n, k \in \mathbb{N}$$

και

$$P_{I_T}f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\langle f, P_{I_T}\psi_n \rangle_{L_2(\mathbb{R})}}{\lambda_n} P_{I_T}\psi_n$$

για κάθε $f \in \mathcal{B}_{I_\Omega}$, με την $L_2(\mathbb{R})$-έννοια.

(γ) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Για $f \in L_2(\mathbb{R})$ και $T, \Omega > 0$, έστω

$$\alpha^2(T) = \frac{\int_{I_T} |f(t)|^2 dt}{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}, \quad \beta^2(\Omega) = \frac{\int_{I_\Omega} |\widehat{f}(\gamma)|^2 d\gamma}{\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\gamma)|^2 d\gamma},$$

είναι τα ποσοστά ενέργειας των f και $\widehat{f}$ εντός των διαστημάτων $I_T = [-T, T]$ και $I_\Omega = [-\Omega, \Omega]$ αντιστοίχως. Για απλότητα στο εξής γράφουμε $\alpha := \alpha(T)$ και $\beta := \beta(\Omega)$. Οι Landau-Pollak υπολόγισαν επακριβώς τα επιτρεπτά ζεύγη (α, β) ποσοστών ενέργειας. Πράγματι, ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα 2.5. *[11]* **Pollack-Landau** *Έστω λ_0 είναι η μέγιστη ιδιοτιμή του τελεστή $Q_{I_\Omega}P_{I_T}$ όπως ορίσθηκε παραπάνω. Τότε υπάρχει συνάρτηση $f \in L_2(\mathbb{R})$ με $\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1, \|P_{I_T}f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \alpha$ και $\|Q_{I_\Omega}f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|P_{I_\Omega}\widehat{f}\|_{L_2(\mathbb{R})} = \beta$ αν και μόνον αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

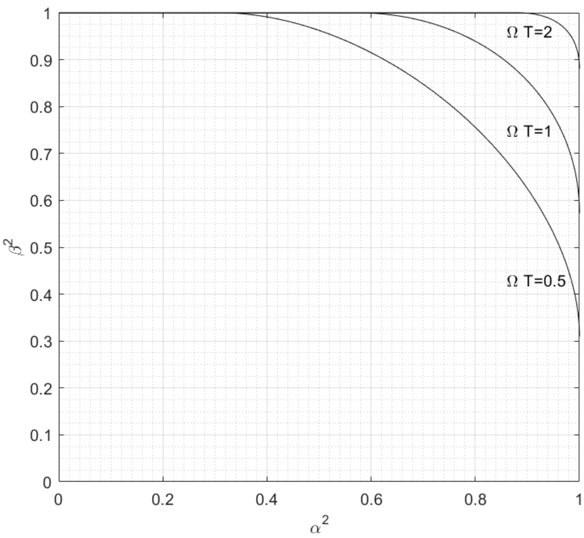
1. *Όταν* $\alpha = 0$, *τότε* $0 \le \beta < 1$.

2. *Όταν* $0 < \alpha \le \sqrt{\lambda_0}$, *τότε* $0 \le \beta \le 1$.

3. *Όταν* $\sqrt{\lambda_0} < \alpha < 1$, *τότε* $0 \le \beta \le \sqrt{\lambda_0}\,\alpha + \sqrt{1-\lambda_0}\,\sqrt{1-\alpha^2}$.

4. *Όταν* $\alpha = 1$, *τότε* $0 < \beta \le \sqrt{\lambda_0}$.

Μια μη αυστηρή αρμηνεία του παραπάνω αποτελέσματος είναι η εξής: η τιμή $\sqrt{\lambda_0}$ αποτελεί ένα κατώφλι, με την έννοια ότι ποσοστά ενέργειας στο χρόνο άνω της τιμής $\sqrt{\lambda_0}$ επιτρέπουν μόνον συγκεριμένα άνω όρια όσον αφορά τα αντίστοιχα ποσοστά ενέργειας στις συχνότητες. Αντιθέτως, ποσοστά ενέργειας στο χρόνο κάτω του $\sqrt{\lambda_0}$ επιτρέπουν όλα τα ποσοστά ενέργειας στις συχνότητες. Τα παραπάνω παριστάνονται και γραφικά ως εξής:



Απόδειξη. Η απόδειξη είναι κατασκευαστική. Εστω

$$\mathcal{G}_\alpha = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1,\ \|P_{I_T} f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \alpha \right\},\quad \alpha \in [0,1].$$

Για κάθε τιμή του α, υπολογίζουμε το

$$\sup_{f \in \mathcal{G}_\alpha} \|Q_{I_\Omega} f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \sup_{f \in \mathcal{G}_\alpha} \beta$$

και κατασκευάζουμε $f \in \mathcal{G}_\alpha$ με $\|P_{I_\Omega} \widehat{f}\|_{L_2(\mathbb{R})} = \beta$ για κάθε τιμή του β μικρότερη από το supremum αυτό. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\alpha = 0$. Τότε δεν υπάρχει $f \in \mathcal{G}_0$ με $\beta = 1$, διότι αν υπήρχε, τότε θα έπρεπε $f \in \mathcal{B}_{I_\Omega}$, οπότε η f θα ήταν αναλυτική και μηδενική για $|t| < T$, άρα $f \equiv 0$, άτοπο. Για να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{G}_\alpha$ περιέχει συναρτήσεις f με $\beta = \|P_{I_\Omega} \widehat{f}\|_{L_2(\mathbb{R})}$ οσοδήποτε κοντά στο 1, θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n^* = \frac{\psi_n - P_{I_T}\psi_n}{\sqrt{1-\lambda_n}} \in \mathcal{T}_{I_T} + \mathcal{B}_{I_\Omega},$$

όπου λ_n είναι ιδιοτιμή του τελεστή $Q_{I_\Omega}P_{I_T}$ και ψ_n είναι η αντίστοιχη μοναδιαία ιδιοσυνάρτησή της όπως στην πρόταση 2.3. Τότε $f_n^* \in \mathcal{G}_0$, διότι αφενός

$$\begin{aligned}
\|f_n^*\|_{L_2}^2 &= \frac{\langle \psi_n - P_{I_T}\psi_n, \psi_n - P_{I_T}\psi_n \rangle}{1-\lambda_n} = \frac{1}{1-\lambda_n}\big(\langle \psi_n, \psi_n\rangle \\
&- \langle \psi_n, P_{I_T}\psi_n\rangle - \langle P_{I_T}\psi_n, \psi_n\rangle + \langle P_{I_T}\psi_n, P_{I_T}\psi_n\rangle\big) \\
&= \frac{1}{1-\lambda_n}\cdot(1-\lambda_n-\lambda_n+\lambda_n) = 1
\end{aligned}$$

και αφετέρου

$$P_{I_T}f_n^* = P_{I_T}\left(\frac{\psi_n - P_{I_T}\psi_n}{\sqrt{1-\lambda_n}}\right) = \frac{P_{I_T}\psi_n - P_{I_T}^2\psi_n}{\sqrt{1-\lambda_n}} = 0,$$

διότι ο P_{I_T} είναι ταυτοδύναμος. Τότε

$$\begin{aligned}
\beta_n^2 = \|Q_{I_\Omega}f_n^*\|_{L_2}^2 &= \left\langle Q_{I_\Omega}\left(\frac{\psi_n - P_{I_T}\psi_n}{\sqrt{1-\lambda_n}}\right), Q_{I_\Omega}\left(\frac{\psi_n - P_{I_T}\psi_n}{\sqrt{1-\lambda_n}}\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{Q_{I_\Omega}\psi_n - Q_{I_\Omega}P_{I_T}\psi_n}{\sqrt{1-\lambda_n}}, \frac{Q_{I_\Omega}\psi_n - Q_{I_\Omega}P_{I_T}\psi_n}{\sqrt{1-\lambda_n}}\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\psi_n - \lambda_n\psi_n}{\sqrt{1-\lambda_n}}, \frac{\psi_n - \lambda_n\psi_n}{\sqrt{1-\lambda_n}}\right\rangle = (1-\lambda_n)\langle\psi_n,\psi_n\rangle = 1-\lambda_n,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\beta_n = \sqrt{1-\lambda_n}. \tag{2.18}$$

Από την πρόταση 2.3, υπάρχουν ιδιοτιμές λ_n οσοδήποτε κοντά στο 0 για αρκετά μεγάλο n, συνεπώς λόγω της (2.18) υπάρχουν συναρτήσεις στο $\mathcal{G}_0$ με β οσοδήποτε κοντά στο 1. Για να βρούμε συναρτήσεις για όλες τις τιμές του β μεταξύ των τιμών β_n, θεωρούμε για $r \in \mathbb{R}$ τη συνάρτηση $e^{i2\pi r\cdot}f_n^*$ που επίσης ανήκει στο σύνολο $\mathcal{G}_0$, διότι $\|e^{i2\pi r\cdot}f_n^*\|_{L_2} = \|f_n^*\|_{L_2} = 1$ και $\|P_{I_T}(e^{i2\pi r\cdot}f_n^*)\|_{L_2} = \|P_{I_T}f_n^*\|_{L_2} = \alpha = 0$. Από την ταυτότητα του Parseval και την ιδιότητα A3 της Πρότασης 1.6 του κεφαλαίου 1 έχουμε

$$\beta^2(r) = \|Q_{I_\Omega}(e^{i2\pi r\cdot}f_n^*)\|_{L_2}^2 = \|P_{I_\Omega}\widehat{f_n^*}(\cdot - r)\|_{L_2}^2 = \int_{-r-\Omega}^{-r+\Omega} |\widehat{f_n^*}(\gamma)|^2 d\gamma.$$

Παρατηρούμε ότι η β είναι συνεχής (διότι $\psi_n \in L_1(\mathbb{R})$) και θετική συνάρτηση του r, με $\beta(0) = \beta_n$ για συγκεκριμένο n και $\beta(r) \xrightarrow{r\to\infty} 0$, αφού $\widehat{f_n^*} \in L_2(\mathbb{R})$. Επομένως η συνάρτηση $\beta = \beta(r)$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεγαλύτερη του μηδενός και μικρότερη του 1 (για $n, r \to +\infty$). Τέλος, στο παράρτημα 2.2.1 και πιο συγκεκριμένα στην απόδειξη του λήμματος 2.6, αποδεικνύεται ότι υπάρχει συνάρτηση g ορθογώνια στον υπόχωρο $\mathcal{B}_{I_\Omega} + \mathcal{T}_{I_T}$ (μάλιστα υπάρχει τουλάχιστον αριθμήσιμο πλήθος τέτοιων συναρτήσεων). Τότε η g ικανοποιεί την ισότητα $\alpha = \beta = 0$, διότι είναι ορθογώνια με τα στοιχεία χ_{I_T} και $\widehat{\mathrm{sinc}(\Omega\cdot)}$ του χώρου $\mathcal{B}_{I_\Omega} + \mathcal{T}_{I_T}$. Έτσι η περίπτωση 1 απεδείχθη.

Περίπτωση 2: $0 < \alpha \le \sqrt{\lambda_0} \Leftrightarrow \lambda_0 \ge \alpha^2$. Από την πρόταση 2.3(γ), οι ιδιοτιμές του τελεστή $Q_{I_\Omega} P_{I_T}$ ικανοποιούν τη σχέση $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, άρα υπάρχει φυσικός n_0 έτσι ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει $\lambda_n < \alpha^2$. Εστω ψ_n είναι η αντίστοιχη μοναδιαία ιδιοσυνάρτηση που ανήκει στο χώρο $\mathcal{B}_{I_\Omega}$ των I_Ω-ζωνοπερατών συναρτήσεων. Για κάθε $n > n_0 \ge 1$ ορίζουμε την ακολουθία των I_Ω-ζωνοπερατών συναρτήσεων

$$f^*_{n,\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n}\psi_0 + \sqrt{\lambda_0 - \alpha^2}\psi_n}{\sqrt{\lambda_0 - \lambda_n}}.$$

Η ακολουθία $(f^*_{n,\alpha}) \subset \mathcal{G}_\alpha$, διότι αφενός

$$\begin{aligned}\|f^*_{n,\alpha}\|^2_{L_2} &= \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_n} \cdot \left((\alpha^2 - \lambda_n)\|\psi_0\|^2_{L_2} + (\lambda_0 - \alpha^2)\|\psi_n\|^2_{L_2} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_n} \cdot (\alpha^2 - \lambda_n + \lambda_0 - \alpha^2) = 1,\end{aligned}$$

(βλέπε Πρόταση 2.3(α)) και αφετέρου

$$\begin{aligned}\|P_{I_T} f^*_{n,\alpha}\|^2_{L_2} &= \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_n} \cdot \big((\alpha^2 - \lambda_n)\|P_{I_T}\psi_0\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + (\lambda_0 - \alpha^2)\|P_{I_T}\psi_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \big) \\ &= \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_n} \cdot \big((\alpha^2 - \lambda_n)\lambda_0 + (\lambda_0 - \alpha^2)\lambda_n \big) = \alpha^2,\end{aligned}$$

(βλέπε Πρόταση 2.3(β)). Εφόσον $f^*_{n,\alpha} \in \mathcal{B}_{I_\Omega}$, έχουμε

$$\|Q_{I_\Omega} f^*_{n,\alpha}\|^2_{L_2} = \|f^*_{n,\alpha}\|^2_{L_2} = 1.$$

Ετσι $\beta = 1$. Για τις υπόλοιπες τιμές του β, θεωρούμε πάλι μια οικογένεια συναρτήσεων της μορφής $e^{i2\pi r\cdot} f^*_{n,\alpha}$, $(r \in \mathbb{R})$ και δείχνουμε όπως παραπάνω ότι η συνάρτηση

$$\beta^2(r) = \|Q_{I_\Omega}(e^{i2\pi r\cdot} f^*_{n,\alpha})\|^2_{L_2}$$

είναι συνεχής και θετική, με $\beta(0) = 1$ και $\beta(r) = 0 \; \forall |r| \ge 2\Omega$. Ετσι και η περίπτωση 2 απεδείχθη.

Περιπτώσεις 3 και 4: $\sqrt{\lambda_0} < \alpha \le 1$. Εστω $f \in \mathcal{G}_\alpha$. Τότε

$$f = \lambda P_{I_T} f + \mu Q_{I_\Omega} f + g, \; (\lambda, \mu \in \mathbb{C}) \tag{2.19}$$

με την g να είναι ορθογώνια στις $P_{I_T} f$ και $Q_{I_\Omega} f$ (βλέπε παράρτημα 2.2.1, απόδειξη λήμματος 2.6). Παίρνοντας στη (2.19) εσωτερικό γινόμενο και στα δυο μέλη με τις f, $P_{I_T} f$, $Q_{I_\Omega} f, g$ αντιστοίχως, παίρνουμε

$$\begin{cases} 1 = \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 + \langle g, f\rangle \\ \alpha^2 = \lambda\alpha^2 + \mu\langle Q_{I_\Omega} f, P_{I_T} f\rangle \\ \beta^2 = \lambda\langle P_{I_T} f, Q_{I_\Omega} f\rangle + \mu\beta^2 \\ \langle f, g\rangle = \langle g, g\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 + \|g\|^2_{L_2} \\ \alpha^2 = \alpha^2\lambda + z\mu \\ \beta^2 = \overline{z}\lambda + \mu\beta^2 \end{cases},$$

όπου

$$z = \langle P_{I_T} f, Q_{I_\Omega} f\rangle.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\alpha\beta = \|P_{I_T}\|_{L_2}\|Q_{I_\Omega}\|_{L_2} > |\langle P_{I_T}f, Q_{I_\Omega}f\rangle_{L_2}| \Rightarrow \alpha^2\beta^2 - |z|^2 > 0.$$

Η παραπάνω ανισότητα είναι αυστηρή, αφού αν ίσχυε η ισότητα, τότε $P_{I_T}f = c\cdot Q_{I_\Omega}f$, $c \in \mathbb{C} \Rightarrow P_{I_T}f = Q_{I_\Omega}f \equiv 0$, άτοπο δότι $\|P_{I_T}f\|_{L_2} = \alpha > 0$. Επιλύοντας ως προς λ και μ τις δυο τελευταίες ισότητες του παραπάνω συστήματος και αντικαθιστώντας τις τιμές των λ, μ στην πρώτη ισότητα, παίρνουμε

$$\begin{cases} 1 = \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 + \|g\|_{L_2}^2 \\ \lambda = \frac{\alpha^2\beta^2 - \beta^2 z}{\alpha^2\beta^2 - |z|^2} \\ \mu = \frac{\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\overline{z}}{\alpha^2\beta^2 - |z|^2} \end{cases} \Rightarrow 1 = \frac{\alpha^2\beta^2 - \beta^2 z}{\alpha^2\beta^2 - |z|^2}\alpha^2 + \frac{\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\overline{z}}{\alpha^2\beta^2 - |z|^2}\beta^2 + \|g\|_{L_2}^2$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha^2\beta^2 - |z|^2 = (\alpha^2\beta^2 - \beta^2 z)\alpha^2 + (\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\overline{z})\beta^2 + (\alpha^2\beta^2 - |z|^2)\|g\|_{L_2}^2 \\ &\Rightarrow \alpha^2\beta^2 - |z|^2 = \alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2(z + \overline{z}) + (\alpha^2\beta^2 - |z|^2)\|g\|_{L_2}^2 \end{aligned}$$

και για $\beta \neq 0$, διαιρώντας και τα δυο μέλη της παραπάνω ισότητας με $\alpha^2\beta^2$ παίρνουμε

$$1 - \frac{|z|^2}{\alpha^2\beta^2} = \alpha^2 + \beta^2 - 2\,\mathrm{Re}(z) + \left(1 - \frac{|z|^2}{\alpha^2\beta^2}\right)\|g\|_{L_2}^2,$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{|\langle P_{I_T}f, Q_{I_\Omega}f\rangle|^2}{\alpha^2\beta^2}\right) &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle P_{I_T}f, Q_{I_\Omega}f\rangle \\ &+ \left(1 - \frac{|\langle P_{I_T}f, Q_{I_\Omega}f\rangle|^2}{\alpha^2\beta^2}\right)\|g\|_{L_2}^2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Θέτουμε

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\langle P_{I_T}f, Q_{I_\Omega}f\rangle}{\|P_{I_T}f\|_{L_2}\|Q_{I_\Omega}f\|_{L_2}} = \frac{\mathrm{Re}\langle P_{I_T}f, Q_{I_\Omega}f\rangle}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\langle P_{I_T}f, Q_{I_\Omega}\rangle = \alpha\beta\cos\theta.$$

Τότε, από το Λήμμα 2.5 συνάγουμε ότι

$$\theta \geq \cos^{-1}\left(\sqrt{\lambda_0}\right). \tag{2.21}$$

Εφόσον $\mathrm{Re}\langle P_{I_T}f, Q_{I_\Omega}\rangle = \alpha\beta\cos\theta$ όπως είδαμε παραπάνω, έχουμε

$$\alpha\beta\cos\theta = \mathrm{Re}\langle P_{I_T}f, Q_{I_\Omega}f\rangle \leq |\langle P_{I_T}f, Q_{I_\Omega}f\rangle|,$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $\langle P_{I_T}f, Q_{I_\Omega}\rangle > 0$. Τότε,

$$1 - \frac{|\langle P_{I_T}f, Q_{I_\Omega}f\rangle|^2}{\alpha^2\beta^2} \leq 1 - \cos^2\theta \tag{2.22}$$

και επιπλέον

$$\beta^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle P_{I_T}f, Q_{I_\Omega}f\rangle_{L_2} = \beta^2 - 2\alpha\beta. \tag{2.23}$$

Λόγω των (2.22), (2.23) και του γεγονότος ότι

$$\Big(1 - \frac{|\langle P_{I_T} f, Q_{I_\Omega} f\rangle_{L_2(\mathbb{R})}|^2}{\alpha^2\beta^2}\Big)\|g\|_{L_2}^2 \geq 0$$

(με την ισότητα να ισχύει για $g = 0$), η (2.20) δίνει

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta \leq 1 - \cos^2\theta \Rightarrow (\beta - \alpha\cos\theta)^2 \leq (1-\alpha^2)\sin^2\theta \\
\Rightarrow &\beta - \alpha\cos\theta \leq \sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta \Rightarrow \beta \leq \alpha\cos\theta + \sqrt{1-\alpha^2}\sin\theta \\
&\Rightarrow \beta \leq \cos\big(\cos^{-1}\alpha\big)\cos\theta + \sqrt{1-\cos^2(\cos^{-1}\alpha)}\sin\theta \\
&\Rightarrow \beta \leq \cos\big(\cos^{-1}\alpha\big)\cos\theta + \sin\big(\cos^{-1}\alpha\big)\sin\theta \\
&\Rightarrow \beta \leq \cos\big(\theta - \cos^{-1}\alpha\big),
\end{aligned}$$

με την ισότητα να ισχύει ανν $g = 0$ και $\langle P_{I_T} f, Q_{I_\Omega} f\rangle_{L_2} > 0$, όπως ήδη σημειώσαμε παραπάνω. Λαμβάνοντας υπόψη και τη (2.21) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
0 < \beta &\leq \cos\Big(\cos^{-1}\sqrt{\lambda_0} - \cos^{-1}\alpha\Big) \\
&= \cos\Big(\cos^{-1}\sqrt{\lambda_0}\Big)\cos\big(\cos^{-1}\alpha\big) + \sin\Big(\cos^{-1}\sqrt{\lambda_0}\Big)\sin\big(\cos^{-1}\alpha\big) \\
&= \sqrt{\lambda_0}\,\alpha + \sqrt{1-\cos^2(\cos^{-1}\sqrt{\lambda_0})}\sqrt{1-\cos^2(\cos^{-1}\alpha)} \\
&= \sqrt{\lambda_0}\,\alpha + \sqrt{1-\lambda_0}\sqrt{1-\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η ισότητα επιτυγχάνεται για τη συνάρτηση

$$f^* = p\psi_0 + qP_{I_T}\psi_0,$$

όπου

$$p = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{1-\lambda_0}} \quad \text{και} \quad q = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_0}} - \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{1-\lambda_0}}$$

είναι σταθερές που επιλέγονται έτσι ώστε $f^* \in \mathcal{G}_\alpha$. Πράγματι, προφανώς $f^* \in \mathcal{B}_{I_\Omega} \subset \mathcal{B}_{I_\Omega} + \mathcal{T}_{I_T} \Rightarrow g \equiv 0$ και

$$\begin{aligned}
\langle P_{I_T} f, Q_{I_\Omega} f\rangle &= \langle pP_{I_T}\psi_0 + qP_{I_T}\psi_0, pQ_{I_\Omega}\psi_0 + qQ_{I_\Omega}P_{I_T}\psi_0\rangle \\
&= \langle (p+q)P_{I_T}\psi_0, (p+q\lambda_0)\psi_0\rangle \\
&= (p+q)(p+q\lambda_0)\langle P_{I_T}\psi_0, \psi_0\rangle \\
&= (p+q)(p+q\lambda_0)\lambda_0 > 0.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, για τις παραπάνω τιμές των σταθερών p, q, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\|f^*\|_{L_2}^2 &= \langle p\psi_0 + qP_{I_T}\psi_0, p\psi_0 + qP_{I_T}\psi_0\rangle = p^2 + 2pq\lambda_0 + q^2\lambda_0^2 \\
&= \frac{1-\alpha^2}{1-\lambda_0} + 2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_0}} - \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{1-\lambda_0}}\right)\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{1-\lambda_0}}\lambda_0 \\
&+ \left(\frac{\alpha^2}{\lambda_0} - 2\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_0}}\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{1-\lambda_0}} + \frac{1-\alpha^2}{1-\lambda_0}\right)\lambda_0 \\
&= \frac{1-\alpha^2}{1-\lambda_0} - \lambda_0\frac{1-\alpha^2}{1-\lambda_0} + \alpha^2 = 1
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\|P_{I_T}f^*\|_2^2 &= \langle pP_{I_T}\psi_0 + qP_{I_T}\psi_0, pP_{I_T}\psi_0 + qP_{I_T}\psi_0\rangle \\ &= (p+q)^2\lambda_0 = \frac{\alpha^2}{\lambda_0}\lambda_0 = \alpha^2.\end{aligned}$$

Ετσι η περίπτωση 4 της εκφώνησης του θεωρήματος αυτού απεδείχθη. Για $\alpha < 1$, θεωρούμε τη συνάρτηση $e^{i2\pi 2\Omega \cdot}f^*$. Τότε $e^{i2\pi 2\Omega \cdot}f^* \in \mathcal{G}_\alpha$ και επιπλέον

$$\|Q_{I_\Omega}(e^{i2\pi 2\Omega \cdot}f^*_{n,\alpha})\|_{L_2}^2 = 0.$$

Ετσι και η περίπτωση 3 απεδείχθη.

□

2.2.1 Παράρτημα.

Για να είναι η απόδειξη του θεωρήματος 2.5 πλήρως ολοκληρωμένη, στο παράρτημα αυτό παραθέτουμε την απόδειξη δύο λημμάτων που χρησιμοποιούνται για την απόδειξή του. Εστω $\mathcal{T}_{I_T}$ και $\mathcal{B}_{I_\Omega}$ είναι οι υπόχωροι των I_T-χρονοπερατών και I_Ω-ζωνοπερατών συναρτήσεων του $L_2(\mathbb{R})$ όπως στον ορισμό 2.5. Το ακόλουθο λήμμα 2.5 υπολογίζει την ελάχιστη γωνία μεταξύ μιας χρονοπερατής και μιας ζωνοπερατής συνάρτησης, ενώ το δεύτερο λήμμα 2.6 του παραρτήματος αυτού διασφαλίζει ότι ο υπόχωρος $\mathcal{B}_{I_\Omega} + \mathcal{T}_{I_T}$ είναι ένας γνήσιος υπόχωρος Banach του $L_2(\mathbb{R})$. Στο εξής συμβολίζουμε με

$$\theta(f,g) = \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{Re}\langle f,g\rangle_{L_2(\mathbb{R})}}{\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}\,\|g\|_{L_2(\mathbb{R})}}\right), \quad 0 \le \theta \le \pi$$

τη **γωνία** μεταξύ δυο τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων f, g. Έστω $f \in \mathcal{B}_{I_\Omega}$ και $g \in \mathcal{T}_{I_T}$ είναι δυο συναρτήσεις, καμία εκ των δύο ταυτοτικά ίση με 0. Τίθεται το ερώτημα πόσο μικρή μπορεί να γίνει η γωνία μεταξύ τους. Προφανώς, η γωνία αυτή δε μπορεί να ισούται με 0, διότι τότε θα είχαμε $f = cg$ για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$, το οποίο είναι άτοπο διότι $\mathcal{B}_{I_\Omega} \cap \mathcal{T}_{I_T} = \{0\}$. Μπορεί, παρ' όλα αυτά, η $\theta(f,g)$ να γίνει αυθαίρετα μικρή; Η απάντηση είναι πως όχι, όπως δείχνει το ακόλουθο

Λήμμα 2.5. *Για κάθε $f \in \mathcal{B}_{I_\Omega}$ και $g \in \mathcal{T}_{I_T}$ ισχύει*

$$\min_{(f,g)\in\mathcal{B}_{I_\Omega}\times\mathcal{T}_{I_T}} \theta(f,g) = \cos^{-1}\left(\sqrt{\lambda_0}\right) = \theta(\psi_0, P_{I_T}\psi_0),$$

όπου λ_0 είναι η μέγιστη ιδιοτιμή του τελεστή $Q_{I_\Omega}P_{I_T}$ και ψ_0 είναι η μοναδιαία ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή αυτή.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε δυο βήματα. Στο πρώτο βήμα θα δείξουμε ότι

$$\min_{(f,g)\in\mathcal{B}_{I_\Omega}\times\mathcal{T}_{I_T}} \theta(f,g) = \min_{f\in\mathcal{B}_{I_\Omega}} \cos^{-1}\left(\frac{\|P_{I_T}f\|_2}{\|f\|_2}\right).$$

Στο δεύτερο βήμα θα δείξουμε ότι η ζητούμενη ελάχιστη τιμή ισούται με $\cos^{-1}\sqrt{\lambda_0}$.

1ο βήμα: Εστω $f \in \mathcal{B}_{I_\Omega}$. Θα δείξουμε ότι

$$\min_{g\in\mathcal{T}_{I_T}} \theta(f,g) = \cos^{-1}\left(\frac{\|P_{I_T}f\|_{L_2}}{\|f\|_{L_2}}\right) = \theta(f, P_{I_T}f) > 0.$$

Για κάθε $g \in \mathcal{T}_{I_T}$ ισχύει

$$\mathrm{Re}\langle f,g\rangle \leq |\langle f,g\rangle| = |\langle f, P_{I_T}g\rangle| = |\langle P_{I_T}f, g\rangle| \leq \|P_{I_T}f\|_{L_2}\cdot\|g\|_{L_2}.$$

Διαιρώντας και τα δυο μέλη της παραπάνω ανισότητας με $\|f\|_{L_2}\|g\|_{L_2}$ παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{Re}\langle f,g\rangle}{\|f\|_{L_2}\cdot\|g\|_{L_2}} \leq \frac{\|P_{I_T}f\|_{L_2}}{\|f\|_{L_2}},$$

και επειδή το πρωτεύον τόξο συνημιτόνου $\cos^{-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $[0,\pi]$, έπεται ότι

$$\theta(f,g) = \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{Re}\langle f,g\rangle}{\|f\|_{L_2}\cdot\|g\|_{L_2}}\right) \geq \cos^{-1}\left(\frac{\|P_{I_T}f\|_{L_2}}{\|f\|_{L_2}}\right) = \theta(f, P_{I_T}f).$$

Τελικά

$$\min_{g\in\mathcal{T}_{I_T}} \theta(f,g) = \cos^{-1}\left(\frac{\|P_{I_T}f\|_2}{\|f\|_2}\right),$$

άρα:

$$\min_{(f,g)\in\mathcal{B}_{I_\Omega}\times\mathcal{T}_{I_T}} \theta(f,g) = \min_{f\in\mathcal{B}_{I_\Omega}}\min_{g\in\mathcal{T}_{I_T}} \theta(f,g) = \min_{f\in\mathcal{B}_{I_\Omega}} \cos^{-1}\left(\frac{\|P_{I_T}f\|_2}{\|f\|_2}\right).$$

2ο βήμα: Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, λαμβάνοντας υπόψη και το βήμα 1, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\min_{f\in\mathcal{B}_{I_\Omega}} \cos^{-1}\left(\frac{\|P_{I_T}f\|_{L_2(\mathbb{R})}}{\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}}\right) \geq \cos^{-1}\left(\sqrt{\lambda_0}\right).$$

Από την πρόταση 2.3(α) και (β) με χρήση της ταυτότητας Parseval παίρνουμε

$$\|f\|_{L_2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 \text{ και } \|P_{I_T}f\|_{L_2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\lambda_n.$$

Ετσι

$$\begin{aligned}
\cos^{-1}\left(\frac{\|P_{I_T}f\|_{L_2}}{\|f\|_{L_2}}\right) &= \cos^{-1}\left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\lambda_n}{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \cos^{-1}\left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\lambda_0}{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \cos^{-1}\left(\sqrt{\lambda_0}\right),
\end{aligned}$$

(διότι $\lambda_n \leq \lambda_0\ \forall n \geq 1$, όπως έχουμε υποθέσει παραπάνω). Η ισότητα στην παραπάνω σχέση επιτυγχάνεται αν και μόνον αν $a_n = 0$, $\forall n \geq 1$, δηλαδή για $f = c\cdot\psi_0$ και $g = c\cdot P_{I_T}\psi_0$, $c \in \mathbb{R}$. □

Λήμμα 2.6. *Ο $\mathcal{B}_{I_\Omega} + \mathcal{T}_{I_T}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $L_2(\mathbb{R})$ και δεν ταυτίζεται με τον $L_2(\mathbb{R})$.*

Απόδειξη. Οσον αφορά την κλειστότητα, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του $\mathcal{B}_{I_\Omega} + \mathcal{T}_{I_T}$ συγκλίνει σε στοιχείο του $\mathcal{B}_{I_\Omega} + \mathcal{T}_{I_T}$. Δηλαδή, αν $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια Cauchy ακολουθία συναρτήσεων της μορφής $f_n = t_n + b_n$, όπου $t_n \in \mathcal{T}_{I_T}$ και $b_n \in \mathcal{B}_{I_\Omega}$ για κάθε n, τότε η οριακή συνάρτηση f είναι της μορφής $t + b$, όπου $t \in \mathcal{T}_{I_T}$ και $b \in \mathcal{B}_{I_\Omega}$. Γράφουμε

$$f_n = (P_{I_T} b_n + t_n) + (b_n - P_{I_T} b_n) = P_{I_T}(b_n + t_n) + P_{\mathbb{R}-I_T} b_n.$$

Ετσι

$$\langle P_{I_T}(b_n + t_n), P_{\mathbb{R}-I_T} b_n \rangle = 0, \tag{2.24}$$

και με χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_{L_2}^2 &= \|P_{\mathbb{R}-I_T}(b_n - b_m)\|_{L_2}^2 + \|P_{I_T}((b_n + t_n) - (b_m + t_m))\|_{L_2}^2 \\ &\geq \|P_{\mathbb{R}-I_T}(b_n - b_m)\|_{L_2}^2, \end{aligned}$$

συνεπώς η $\{P_{\mathbb{R}-I_T} b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy (εφόσον η $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι εξ υποθέσεως ακολουθία Cauchy.) Εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο για τη (b_n) και έχουμε

$$b_n = P_{I_T} b_n + P_{\mathbb{R}-I_T} b_n.$$

Προφανώς ισχύει η καθετότητα (2.24) για τη (b_n) και στη συνέχεια πάλι με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος παίρνουμε

$$\|b_n - b_m\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \|P_{I_T}(b_n - b_m)\|_{L_2}^2 + \|P_{\mathbb{R}-I_T}(b_n - b_m)\|_{L_2}^2. \tag{2.25}$$

Από την απόδειξη του 2ου βήματος του λήμματος 2.5 ισχύει

$$\cos^{-1}\left(\frac{\|P_{I_T}(b_n - b_m)\|_{L_2}}{\|b_n - b_m\|_{L_2}}\right) \geq \cos^{-1}\left(\sqrt{\lambda_0}\right)$$

$$\Rightarrow \|P_{I_T}(b_n - b_m)\|_{L_2} \leq \sqrt{\lambda_0}\|b_n - b_m\|_{L_2},$$

οπότε η (2.25) δίνει

$$\|b_n - b_m\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{\|P_{\mathbb{R}-I_T}(b_n - b_m)\|_{L_2}^2}{1 - \lambda_0}.$$

Αλλά η $\{P_{\mathbb{R}-I_T} b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy όπως δείξαμε λίγο παραπάνω, άρα και η $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy, συνεπώς υπάρχει $b \in \mathcal{B}_{I_\Omega}$ τέτοια ώστε

$$\|b - b_n\|_{L_2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \|t_n - (f - b)\|_{L_2} &= \|f_n - b_n - (f - b)\|_{L_2} = \|f_n - f + b - b_n\|_{L_2} \\ &\leq \|f_n - f\|_{L_2} + \|b - b_n\|_{L_2(\mathbb{R})} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

άρα η $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει με την $L_2(\mathbb{R})$-έννοια σε μια συνάρτηση $t \in \mathcal{T}_{I_T}$ (διότι ο $\mathcal{T}_{I_T}$ είναι κλειστός) για την οποία $f = b + t$.

Οι συναρτήσεις

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & T+n \le |t| \le T+n+1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \qquad , n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.26}$$

δεν ανήκουν στο $\mathcal{B}_{I_\Omega} + \mathcal{T}_{I_T}$. Πράγματι, εάν $f_n = \tilde{t}_n + \tilde{b}_n$, όπου $\tilde{t}_n \in \mathcal{T}_{I_T}$ και $\tilde{b}_n \in \mathcal{B}_{I_\Omega}$, τότε

$$\tilde{b}_n = f_n - \tilde{t}_n,$$

άρα η παραπάνω ισότητα υπονοεί ότι η $\tilde{b}_n$ είναι ταυτόχρονα I_{T+n+1}-χρονοπερατή και I_Ω-ζωνοπερατή το οποίο είναι άτοπο. Έστω $b_n + t_n \in \mathcal{B}_{I_\Omega} + \mathcal{T}_{I_T}$ είναι η ορθογώνια προβολή της f_n στον υπόχωρο $\mathcal{B}_{I_\Omega} + \mathcal{T}_{I_T}$. Τότε $\epsilon_n \in \left(\mathcal{B}_{I_\Omega} + \mathcal{T}_{I_T}\right)^\perp$, όπου τα στοιχεία

$$\epsilon_n = f_n - b_n - t_n$$

αποτελούν άπειρα παραδείγματα συναρτήσεων που είναι ορθογώνιες στο $\mathcal{B}_{I_\Omega} + \mathcal{T}_{I_T}$. □

Σημείωση 2.5. *Αντί για τις συναρτήσεις της (2.26) θα μπορούσαμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε συνάρτηση*

$$f \in \left(\bigcup_{\Omega'>\Omega} \mathcal{B}_{I_{\Omega'}}\right) \cup \left(\bigcup_{T'>T} \mathcal{T}_{I_{T'}}\right).$$

3 Αρχές αβεβαιότητας για περιοδικές συναρτήσεις.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε δυο αρχές αβεβαιότητας που αφορούν περιοδικές συναρτήσεις. Στην παράγραφο 3.1 του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζουμε το περιοδικό ανάλογο της κλασσικής αρχής αβεβαιότητας Heisenberg του θεωρήματος 2.1 του κεφαλαίου 2, με την έννοια ότι η κλασσική αρχή αβεβαιότητας Heisenberg στην πραγματική ευθεία προκύπτει ως οριακή περίπτωση της περιοδικής αρχής αβεβαιότητας του θεωρήματος 3.1 του κεφαλαίου αυτού, ακριβώς όπως το ολοκλήρωμα Fourier προκύπτει ως όριο μιας σειράς Fourier με μια έννοια. Στην παράγραφο 3.2 του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζουμε μια αρχή αβεβαιότητας για χαμηλοπερατά φίλτρα, με την έννοια ότι δεν υπάρχει παραγωγίσιμη περιοδική συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο που να προσεγγίζει το ιδανικό φίλτρο αποκοπής με κάποια έννοια. Με τους τρόπους αυτούς περνάμε από τη μελέτη αρχών αβεβαιότητας στο $\mathbb{R}$ στη μελέτη αρχών αβεβαιότητας για συναρτήσεις πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.

3.1 Η αρχή αβεβαιότητας Heisenberg ως οριακή περίπτωση μιας αρχής αβεβαιότητας στο μοναδιαίο κύκλο.

Ξεκινούμε με την αρχή αβεβαιότητας Heisenberg στην πραγματική ευθεία. Αρχικά δείχνουμε κάποιες χρήσιμες ταυτότητες για τη διακύμανση (τόσο στο χρόνο όσο και στις συχνότητες) που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να εξαγάγουμε μια αρχή αβεβαιότητας για περιοδικές συναρτήσεις.

Για $(1+|\cdot|)f \in L_2(\mathbb{R})$, έστω

$$\mu_f = \frac{1}{\|f\|_{L_2}^2} \int_{\mathbb{R}} x|f(x)|^2\,dx$$

και

$$\sigma_f = \frac{1}{\|f\|_{L_2}} \left(\int_{\mathbb{R}} (x-\mu_f)^2 |f(x)|^2\,dx \right)^{1/2}$$

είναι το κέντρο και η τυπική απόκλιση της κατανομής $|f|^2/\|f\|_{L_2}^2$. Στο εξής θεωρούμε ότι

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\gamma} dt$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας Lebesgue ολοκληρώσιμης συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$, ο οποίος επεκτείνεται σ΄ έναν ισομετρικό ισομορφισμό πάνω στον $L_2(\mathbb{R})$ κατά τα γνωστά. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή, για $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, η ταυτότητα Parseval γράφεται ως εξής:

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Ετσι

$$\mu_f = \frac{\langle \cdot f(\cdot),\ f\rangle}{\|f\|^2_{L_2}} = \frac{\langle f,\ \cdot f(\cdot)\rangle}{\|f\|^2_{L_2}},$$

συνεπώς

$$\begin{aligned}
\sigma_f^2 &= \frac{\|(\cdot - \mu_f)f\|^2_{L_2}}{\|f\|^2_{L_2}} = \frac{\langle(\cdot - \mu_f)f,\ (\cdot - \mu_f)f\rangle}{\|f\|^2_{L_2}} \\
&= \frac{\langle \cdot f(\cdot),\ \cdot f(\cdot)\rangle + \mu_f^2\langle f,\ f\rangle - \mu_f\langle \cdot f(\cdot),\ f\rangle - \mu_f\langle f,\ \cdot f(\cdot)\rangle}{\|f\|^2_{L_2}} \\
&= \frac{\|\cdot f(\cdot)\|^2_{L_2}}{\|f\|^2_{L_2}} + \mu_f^2 - \mu_f^2 - \mu_f^2 = \frac{\|\cdot f(\cdot)\|^2_{L_2}}{\|f\|^2_{L_2}} - \mu_f^2 \\
&= \frac{\|\cdot f(\cdot)\|^2_{L_2}}{\|f\|^2_{L_2}} - \frac{\big(\langle \cdot f(\cdot), f\rangle\big)^2}{\|f\|^4_{L_2}}. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Εργαζόμενοι με παρόμοιο τρόπο και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\mu_{\widehat{f}} = \frac{\langle \cdot \widehat{f}(\cdot),\ \widehat{f}\rangle}{\|\widehat{f}\|^2_{L_2}} = \frac{\langle f,\ \cdot \widehat{f}(\cdot)\rangle_{L_2}}{\|\widehat{f}\|^2_{L_2}},$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\sigma_{\widehat{f}}^2 &= \frac{\|(\cdot - \mu_{\widehat{f}})\widehat{f}\|^2_{L_2}}{\|\widehat{f}\|^2_{L_2}} = \frac{\|\cdot \widehat{f}(\cdot)\|^2_{L_2}}{\|\widehat{f}\|^2_{L_2}} - \mu_{\widehat{f}}^2 = \frac{\|f'\|^2_{L_2}}{\|f\|^2_{L_2}} - \frac{\big(\langle \cdot \widehat{f}(\cdot), \widehat{f}\rangle\big)^2}{\|\widehat{f}\|^4_{L_2}} \\
&= \frac{\|f'\|^2_{L_2}}{\|f\|^2_{L_2}} - \frac{\big(-i\langle f', f\rangle\big)^2}{\|f\|^4_{L_2}} = \frac{\|f'\|^2_{L_2}}{\|f\|^2_{L_2}} - \frac{\big(-i\langle f', f\rangle\big)^2}{\|f\|^4_{L_2}}. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Τέλος, εργαζόμενοι με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 1 του Κεφαλαίου 2 (με τη μικρή διαφοροποίηση όσον αφορά τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier) παίρνουμε ότι το **γινόμενο αβεβαιότητας**

$$U_f(\mathbb{R}) = \sigma_f \sigma_{\widehat{f}} \qquad (3.3)$$

ικανοποιεί την ανισότητα

$$U_f(\mathbb{R}) \geq \frac{1}{2}.$$

Έστω τώρα $D = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος και $F : D \to \mathbb{C} : F = F(z)$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Τότε

$$F = F(e^{it}),\ t \in \mathbb{T} := [-\pi, \pi].$$

Κάθε τέτοια συνάρτηση F αντιστοιχεί σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση της μορφής

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} :\ f(t) = F(e^{it}).$$

Στο εξής συμβολίζουμε με $L_2(\mathbb{T})$ το χώρο Hilbert όλων των Lebesgue μετρήσιμων 2π-περιοδικών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}dt$$

και νόρμα

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{T})} := \|f\|_2 = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες όσον αφορά το χώρο $L_2(\mathbb{T})$ και το μετασχηματισμό Fourier στον $L_2(\mathbb{T})$, παραπέμπουμε στο κεφάλαιο 1, παραγράφους 1.2 και 1.3, βλέπε επίσης [5].

Εστω τώρα f είναι μια συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $\frac{|f|^2}{\|f\|_2^2}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια κατανομή μάζας πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Ορίζουμε το σημείο

$$\tau(f) := \frac{1}{2\pi\|f\|_2^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it}\, |f(t)|^2 dt \tag{3.4}$$

να είναι το **κέντρο μάζας** της κατανομής $\frac{|f|^2}{\|f\|_2^2}$. Επίσης, ορίζουμε τη **συγκέντρωση** $C(f)$ της κατανομής αυτής γύρω από το κέντρο μάζας $\tau(f)$ να είναι

$$C(f) := \frac{1}{2\pi\|f\|_2^2}\int_{-\pi}^{\pi} |e^{it} - \tau(f)|^2\, |f(t)|^2 dt. \tag{3.5}$$

Εφόσον

$$|e^{it} - \tau(f)|^2 = 1 - e^{it}\overline{\tau(f)} - e^{-it}\tau(f) + |\tau(f)|^2,$$

αντικαθιστώντας στην (3.5) και λαμβάνοντας υπόψη την (3.4) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} C(f) &= 1 - \frac{\overline{\tau(f)}}{2\pi\|f\|_2^2}\int_{\mathbb{T}} e^{it}|f(t)|^2 dt - \frac{\tau(f)}{2\pi\|f\|_2^2}\int_{\mathbb{T}} e^{-it}|f(t)|^2 dt + |\tau(f)|^2 \\ &= 1 - |\tau(f)|^2| - |\tau(f)|^2 + |\tau(f)|^2 = 1 - |\tau(f)|^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Υπό μια έννοια, η $C(f)$ είναι ένα μέτρο συγκέντρωσης της κατανομής γύρω από το κέντρο μάζας. Για παράδειγμα, αν η $|f|^2/\|f\|_2^2$ είναι Dirac μάζα σε σημείο $t_0 \in \mathbb{T}$, τότε $\tau(f) = e^{it_0}$ (με την έννοια των κατανομών) και έτσι $1 - |\tau(f)|^2 = 0$.

Ορίζουμε τη **γωνιακή διασπορά (στο χρόνο)** της κατανομής $|f|^2/\|f\|_2^2$ να είναι

$$var_A(f) := \frac{C(f)}{1 - C(f)} = \frac{1 - |\tau(f)|^2}{|\tau(f)|^2} \tag{3.7}$$

(πιθανώς $\mathrm{var}_A(f) = \infty$ αν $\tau(f) = 0$). Ακολουθώντας τον τύπο (3.2), αν $f, f' \in L_2(\mathbb{T})$, ορίζουμε τη **διασπορά στις συχνότητες** της κατανομής $|f|^2/\|f\|_2^2$ να είναι:

$$\mathrm{var}_F(f) := \frac{\|f'\|_2^2}{\|f\|_2^2} - \frac{\big(-i\langle f', f\rangle\big)^2}{\|f\|_2^4}, \quad \big(-i\langle f', f\rangle \in \mathbb{R}\big). \tag{3.8}$$

Τότε ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα 3.1. *[6]* **(Αρχή αβεβαιότητας για τον κύκλο.)** *Εστω $f, f' \in L_2(\mathbb{T})$, όχι της μορφής ce^{ikx} ($c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$) και $\mathrm{var}_A(f)$, $\mathrm{var}_F(f)$ είναι όπως στις (3.7) και (3.8) αντιστοίχως. Τότε*

$$U_{\mathbb{T}}(f) := \sqrt{\mathrm{var}_A(f)\mathrm{var}_F(f)} \geq \frac{1}{2}.$$

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\|f\|_2 = 1$. Έστω $\tau(f)$, $\mathrm{var}_A(f)$ και $\mathrm{var}_F(f)$ είναι όπως παραπάνω. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned}
& \mathrm{var}_A(f)\mathrm{var}_F(f) = \frac{1-|\tau(f)|^2}{|\tau(f)|^2} \cdot \frac{\|f'\|_2^2\|f\|_2^2 - (-i\langle f', f\rangle)^2}{\|f\|_2^4} \geq \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & |\tau(f)|^2\|f\|_2^4 \leq 4\big(1-|\tau(f)|^2\big)\big(\|f'\|_2^2\|f\|_2^2 - (-i\langle f', f\rangle)^2\big) \\
\Leftrightarrow \quad & |\tau(f)|^2 \leq 4\big(1-|\tau(f)|^2\big)\big(\|f'\|_2^2 - (-i\langle f', f\rangle)^2\big). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$1 - |\tau(f)|^2 = \|(e^{i\cdot} - \tau(f))f\|_2^2$$

συνεπεία των (3.5) και (3.6). Επίσης, για ευκολία θέτουμε $\nu = -i\langle f', f\rangle \in \mathbb{R}$, οπότε

$$\|f'\|_2^2 - (-i\langle f', f\rangle)^2 = \|f'\|_2^2 - \nu^2 = \|if' + \nu f\|_2^2.$$

Τελικά, αντικαθιστώντας τις δυο παραπάνω ισότητες στην (3.9) και παίρνοντας στη συνέχεια τετραγωνική ρίζα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$|\tau(f)| \leq 2\,\|(e^{i\cdot} - \tau(f))f\|_2\,\|if' + \nu f\|_2. \qquad (3.10)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
e^{it}f(t) &= -i\Big[(e^{i\cdot} - \tau(f))f\Big]'(t) + i(e^{it} - \tau(f))f'(t) \\
&= \Big\{-i\Big[(e^{i\cdot} - \tau(f))f\Big]'(t) - \nu(e^{it} - \tau(f))f(t)\Big\} \\
&+ \Big\{\nu(e^{it} - \tau(f))f(t) + i(e^{it} - \tau(f))f'(t)\Big\}
\end{aligned}$$

και πολ/ζοντας εσωτερικά και τα δυο μέλη της παραπάνω ισότητας με f παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= \langle e^{i\cdot}f, f\rangle = \Big\langle -i\Big[(e^{i\cdot} - \tau(f))f\Big]' - \nu(e^{i\cdot} - \tau(f))f,\, f\Big\rangle \\
&+ \Big\langle \nu(e^{i\cdot} - \tau(f))f + i(e^{i\cdot} - \tau(f))f',\, f\Big\rangle \\
&:= A + B. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Για το εσωτερικό γινόμενο A έχουμε

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \Big\{-i\Big[(e^{i\cdot} - \tau(f))f\Big]'(t) - \nu(e^{it} - \tau(f))f(t)\Big\}\overline{f}(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} -i\Big[(e^{i\cdot} - \tau(f))f\Big]'(t)\overline{f}(t)dt - \frac{\nu}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(e^{it} - \tau(f))|f(t)|^2dt \\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(e^{it} - \tau(f))f\overline{f'}(t)dt - \frac{\nu}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(e^{it} - \tau(f))|f|(t)^2dt \\
&= \langle(e^{i\cdot} - \tau(f))f,\, -if'\rangle + \langle(e^{i\cdot} - \tau(f))f,\, -\nu f\rangle \\
&= -\langle(e^{i\cdot} - \tau(f))f,\, if' + \nu f\rangle,
\end{aligned}$$

άρα:

$$|A| \leq \|(e^{i\cdot} - \tau(f))\|_2\,\|if' + \nu f\|_2.$$

Για το εσωτερικό γινόμενο B διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$B = \langle if' + \nu f, \, (e^{-i\cdot} - \overline{\tau(f)})f \rangle.$$

Αρα:

$$|B| \leq \|if' + \nu f\|_2 \, \|(e^{-i\cdot} - \overline{\tau(f)})\|_2 = \|if' + \nu f\|_2 \|(e^{i\cdot}\tau(f))\|_2.$$

Αντικαθιστώντας τις εκτιμήσεις των A και B στην (3.11) παίρνουμε

$$|\tau(f)| \leq 2\|if' + \nu f\|_2 \, \|(e^{-i\cdot} - \overline{\tau(f)})\|_2$$

που είναι η ζητούμενη ανισότητα (3.10). □

Το θεώρημα 3.1 φαίνεται κατ΄ αρχήν να είναι ένα μάλλον θεωρητικό αποτέλεσμα χωρίς μια τουλάχιστον προφανή φυσική ερμηνεία. Παρακάτω θα δείξουμε μια σύνδεση μεταξύ των αρχών αβεβαιότητας στην πραγματική ευθεία και τον κύκλο. Πιο συγκεκριμένα, για μια κλάση συναρτήσεων που ορίζουμε ευθύς αμέσως (την κλάση των αποδεκτών συναρτήσεων), θα δείξουμε ότι η κλασσική αρχή αβεβαιότητας στην πραγματική ευθεία προκύπτει ως οριακή περίπτωση της αρχής αβεβαιότητας του θεωρήματος 3.1. Κατ΄ αρχήν χρειαζόμαστε τον ακόλουθο

Ορισμός 3.1. *Έστω $f, f' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συναρτήσεις τέτοιες ώστε:*

$$|f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{\gamma}}, \ \left|f'(x)\right| \leq \frac{D}{(1+|x|)^{\beta}}, \ \left|\widehat{f}(\omega)\right| \leq \frac{L}{(1+|\omega|)^{\delta}}, \ \forall x, \omega \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

για σταθερές C, $D, L > 0$ και για εκθέτες $\beta, \delta > 1$, και $\gamma > \frac{3}{2}$. Τότε λέμε ότι η f είναι **αποδεκτή** *συνάρτηση. Στο εξής συμβολίζουμε με $\mathscr{A}$ την κλάση των αποδεκτών συναρτήσεων.*

Για $f \in \mathscr{A}$ και $\alpha > 0$, συμβολίζουμε με

$$f_a(t) := \sqrt{a}\, f(at)$$

τη **διαστολή** της f και με

$$f_a^{\mathrm{per}}(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_a(t + 2\pi n) = \sqrt{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(a(t + 2\pi n)), \ t \in (-\pi, \pi], \tag{3.13}$$

τη 2π-**περιοδικοποίηση** της f_a. Λόγω της ισχύος της (3.12) όσον αφορά το ρυθμό με τον οποίο φθίνουν τόσο η f όσο και η f' στο άπειρο, προκύπτει εύκολα ότι η παραπάνω σειρά συγκλίνει απόλυτα για κάθε t και μάλιστα ομοιόμορφα σε μια παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση f_a^{per} με παράγωγο

$$(f_a^{\mathrm{per}})'(t) := \sqrt{a^3} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(a(t + 2\pi n)), \ t \in (-\pi, \pi].$$

Θα δείξουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 3.2. *[7] Έστω $f \in \mathscr{A}$ είναι μια αποδεκτή συνάρτηση όπως στον ορισμό 3.1 και f_a^{per} είναι η 2π-περιοδικοποίηση της διαστολής $f_a = \sqrt{a}f(a\cdot)$ της f όπως στην* (3.13)*. Τότε*

$$\lim_{a\to+\infty} U_{\mathbb{T}}(f_a^{\text{per}}) = U_{\mathbb{R}}(f),$$

όπου $U_{\mathbb{T}}(f)$ είναι το γινόμενο αβεβαιότητας στον κύκλο όπως στο θεώρημα 3.1 και $U_{\mathbb{R}}(f)$ είναι το γινόμενο αβεβαιότητας στο $\mathbb{R}$ όπως στην (3.3)*.*

Απόδειξη. Για $f \in \mathscr{A}$, έστω $\text{var}_A(f)$ και $\text{var}_F(f)$ είναι όπως στις (3.7) και (3.8) αντιστοίχως. Τότε η f_a^{per} είναι μια συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση όπως είπαμε λίγο παραπάνω και

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to+\infty} U_{\mathbb{T}}(f_a^{\text{per}}) &= \lim_{a\to+\infty} \sqrt{\text{var}_A(f_a^{\text{per}})\text{var}_F(f_a^{\text{per}})} \\
&= \lim_{a\to+\infty} \sqrt{\big(a^2\text{var}_A(f_a^{\text{per}})\big)\cdot\big(\frac{1}{a^2}\text{var}_F(f_a^{\text{per}})\big)} \\
&= \lim_{a\to+\infty} \sqrt{a^2\text{var}_A(f_a^{\text{per}})}\cdot \lim_{a\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{a^2}\text{var}_F(f_a^{\text{per}})}.
\end{aligned}$$

Εάν

$$\lim_{a\to+\infty} a^2\text{var}_A(f_a^{\text{per}}) = \sigma_f^2$$

και

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{\text{var}_F(f_a^{\text{per}})}{a^2} = \sigma_{\widehat{f}}^2,$$

όπου σ_f και $\sigma_{\widehat{f}}$ είναι όπως στις (3.1) και (3.2) αντιστοίχως, τότε προκύπτει άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα. Πράγματι, θα δείξουμε στις ακόλουθες δυο προτάσεις την ισχύ των δυο αυτών ισοτήτων. □

Με βάση τα παραπάνω, η απόδειξη του θεωρήματος 3.2 ανάγεται στην απόδειξη των δύο ακόλουθων προτάσεων.

Πρόταση 3.1. *Έστω $f \in \mathscr{A}$ είναι μία αποδεκτή συνάρτηση και f_a^{per} είναι η 2π-περιοδικοποίηση της διαστολής f_a όπως στον ορισμό* (3.13)*. Τότε*

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{\text{var}_F(f_a^{\text{per}})}{a^2} = \sigma_{\widehat{f}}^2,$$

όπου οι var_F και $\sigma_{\widehat{f}}^2$ είναι όπως στις (3.8) *και* (3.2) *αντιστοίχως.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της var_F στην (3.8) για τη 2π-περιοδική συνάρτηση f_a^{per} και διαιρώντας και τα δυο μέλη με $a^2 > 0$ παίρνουμε

$$\frac{\text{var}_F(f_a^{\text{per}})}{a^2} = \frac{\frac{1}{a^2}\big\|(f_a^{\text{per}})'\big\|_2^2}{\|f_a^{\text{per}}\|_2^2} + \frac{\frac{1}{a^2}\big(\big\langle (f_a^{\text{per}})', f_a^{\text{per}}\big\rangle\big)^2}{\|f_a^{\text{per}}\|_2^4}.$$

Σημειώνουμε εδώ ότι εφόσον $f \in \mathscr{A}$, τότε $\big|\widehat{f}(\omega)\big| \leq \frac{L}{(1+|\omega|)^\delta}$ όπου $\delta > 1$ και L είναι μια θετική σταθερά, άρα $\omega\widehat{f}(\omega) \in L_1(\mathbb{R})$, συνεπώς $f' \in C(\mathbb{R})$ και εφόσον η σειρά συναρτήσεων $\sqrt{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(a(t+2\pi n))$ συγκλίνει απόλυτα για κάθε t και μάλιστα ομοιόμορφα (διότι εξ υποθέσεως $\left|f'(t)\right| \le \frac{D}{(1+|t|)^\beta}$ όπου $\beta > 1$ και D είναι μια θετική σταθερά), η $(f_a^{\mathrm{per}})'$ είναι μια συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, άρα και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $(-\pi, \pi]$. Ετσι, η παραπάνω ισότητα περιέχει όρους καλά ορισμένους. Παίρνοντας και στα δύο μέλη όριο για $a \to +\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{a\to+\infty} \frac{\mathrm{var}_F(f_a^{\mathrm{per}})}{a^2} &= \lim_{a\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{a^2}\left\|(f_a^{\mathrm{per}})'\right\|_2^2}{\|f_a^{\mathrm{per}}\|_2^2} + \frac{\frac{1}{a^2}\left(\left\langle (f_a^{\mathrm{per}})', f_a^{\mathrm{per}}\right\rangle\right)^2}{\|f_a^{\mathrm{per}}\|_2^4} \right) \\ &= \frac{\|f'\|_{L_2(\mathbb{R})}^2}{\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2} + \frac{\langle f', f\rangle_{L_2(\mathbb{R})}^2}{\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^4} = \sigma_{\widehat{f}}^2.\end{aligned}$$

Για να δείξουμε την παραπάνω ισότητα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{a\to+\infty} \left\|f_a^{\mathrm{per}}\right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2, \tag{3.14}$$

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{a^2}\left\|\left(f_a^{\mathrm{per}}\right)'\right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\left\|f'\right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \tag{3.15}$$

και

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{a}\left\langle \left(f_a^{\mathrm{per}}\right)', f_a^{\mathrm{per}}\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle f', f\rangle_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{3.16}$$

Θα δείξουμε πρώτα την (3.14). Για $f_a = \sqrt{a} f(a\cdot)$ $(a > 0)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|f_a^{\mathrm{per}}\|_2^2 &= \left\langle f_a^{\mathrm{per}}, f_a^{\mathrm{per}}\right\rangle = \Big\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_a(\cdot+2\pi n), \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_a(\cdot+2k\pi)\Big\rangle \\ =\ & \langle f_a, f_a\rangle + \sum_{k\neq 0}\left\langle f_a, f_a(\cdot+2k\pi)\right\rangle + \sum_{n\neq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle f_a(\cdot+2\pi n), f_a(\cdot+2k\pi)\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Για κάθε $n \neq 0$, με χρήση της (3.12) όσον αφορά το ρυθμό με τον οποίο φθίνει η f στο άπειρο και της ανισότητας

$$\min(|2n+1|, |2n-1|) \ge |2n| - 1$$

παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|f_a(\cdot+2\pi n)\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f_a(x+2\pi n)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{(2n-1)a\pi}^{(2n+1)a\pi} |f(x)|^2 dx \\ \le& \frac{C^2}{2\pi}\int_{(2n-1)a\pi}^{(2n+1)a\pi} \frac{1}{(1+|x|)^{2\gamma}} dx \le \frac{C^2}{\pi^{2\gamma}a^{2\gamma-1}} \cdot \frac{1}{(2|n|-1)^{2\gamma}},\end{aligned}$$

οπότε

$$\sum_{n\neq 0} \|f_a(\cdot+2\pi n)\|_{L_2(\mathbb{T})} \le \frac{2C}{\pi^\gamma a^{\gamma-\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^\gamma} \xrightarrow{a\to+\infty} 0, \tag{3.18}$$

διότι εξ υποθέσεως ισχύει $\gamma > 3/2$ και επομένως $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-\gamma} < \infty$ και $\lim\limits_{a\to+\infty} a^{1/2-\gamma} = 0$. Απ΄ την άλλη μεριά έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{a\to+\infty} \|f_a\|^2_{L_2(\mathbb{T})} &= \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} a|f(ax)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\lim_{a\to+\infty}\int_{-a\pi}^{a\pi}|f(x)|^2dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Ετσι, παίρνοντας όριο $a \to +\infty$ και στα δυο μέλη της (3.17) και λαμβάνοντας υπόψη την (3.18) και την παραπάνω ισότητα, διαπιστώνουμε ότι

$$\lim_{a\to+\infty}\left\|f_a^{\mathrm{per}}\right\|_2^2 = \lim_{a\to+\infty}\left\|f_a\right\|^2_{L_2(\mathbb{T})} + 0 + 0 = \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})},$$

διότι

$$\Big|\sum_{k\neq 0}\big\langle f_a, f_a(\cdot{+}2\pi k)\big\rangle\Big| \leq \|f_a\|_{L_2(\mathbb{T})}\cdot\sum_{k\neq 0}\|f_a(\cdot{+}2\pi k)\|_{L_2(\mathbb{T})} \xrightarrow{a\to+\infty} \frac{\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}}{\sqrt{2\pi}}\cdot 0 = 0$$

και

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n\neq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big\langle f_a(\cdot+2\pi n), f_a(\cdot+2\pi k)\big\rangle\Big| &\leq \sum_{n\neq 0}\|f_a(\cdot+2\pi n)\|_{L_2(\mathbb{T})} \\ \cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|f_a(\cdot+2\pi k)\|_{L_2(\mathbb{T})} &\xrightarrow{a\to+\infty} 0\cdot\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0.\end{aligned}$$

Ετσι η ισότητα (3.14) έχει αποδειχθεί.

Παρομοίως, εφόσον $(f_a^{\mathrm{per}})' \in C(\mathbb{T}) \subset L_2(\mathbb{T})$ όπως είδαμε παραπάνω, εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο για να δείξουμε την (3.15). Έτσι, για $n \neq 0$, κάνοντας χρήση της (3.12) όσον αφορά το ρυθμό με τον οποίο φθίνει η f' στο άπειρο, έχουμε

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^2}\left\|f_a'(\cdot+2\pi n)\right\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi a^2}\int_{\mathbb{T}}|f_a'(x+2\pi n)|^2dx \\ = \;& \frac{1}{2\pi}\int_{a(2n-1)\pi}^{a(2n+1)\pi}|f'(x)|^2dx \leq \frac{aD^2}{(a\pi(2|n|-1))^{2\beta}} = \frac{D^2a^{1-2\beta}}{\pi^{2\beta}}\cdot\frac{1}{(2|n|-1)^{2\beta}},\end{aligned}$$

συνεπώς

$$\frac{1}{a}\sum_{n\neq 0}\left\|f_a'(\cdot+2\pi n)\right\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \frac{2Da^{\frac{1}{2}-\beta}}{\pi^{\beta}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{\beta}} \xrightarrow{a\to+\infty} 0. \tag{3.19}$$

Απ΄ την άλλη μεριά,

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a^2}\|f_a'\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi}\lim_{a\to+\infty}\int_{-a\pi}^{a\pi}|f'(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\|f'\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Ετσι

$$\frac{1}{a^2}\|(f_a^{\rm per})'\|_2^2 = \frac{1}{a^2}\big\langle (f_a^{\rm per})', (f_a^{\rm per})'\big\rangle = \frac{1}{a^2}\big\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_a'(\cdot + 2\pi n), \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_a'(\cdot+2\pi k)\big\rangle$$
$$= \frac{1}{a^2}\langle f_a', f_a'\rangle + \frac{1}{a^2}\sum_{k\neq 0}\big\langle f_a', f_a'(\cdot+2\pi k)\big\rangle + \frac{1}{a^2}\sum_{n\neq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big\langle f_a'(\cdot+2\pi n), f_a'(\cdot+2\pi k)\big\rangle. \tag{3.20}$$

Παίρνοντας όρια για $a \to +\infty$ και στα δυο μέλη της (3.20) και εργαζόμενοι όπως στην (3.17), διαπιστώνουμε ότι

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a^2}\big\|(f_a^{\rm per})'\big\|_2^2 = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a^2}\big\|f_a'\big\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 + 0 + 0 = \|f'\|_{L_2(\mathbb{R})}^2,$$

λόγω της ισχύος της (3.19). Ετσι και η (3.15) έχει αποδειχθεί. Τέλος,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\Big\langle (f_a^{\rm per})', f_a^{\rm per}\Big\rangle &= \frac{1}{a}\Bigg\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_a'(\cdot+2\pi n), \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_a(\cdot+2\pi k)\Bigg\rangle\\ &= \frac{1}{a}\langle f_a', f_a\rangle + \frac{1}{a}\sum_{k\neq 0}\big\langle f_a', f_a(\cdot+2\pi k)\big\rangle\\ &+ \frac{1}{a}\sum_{n\neq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big\langle f_a'(\cdot+2\pi n), f_a(\cdot+2\pi k)\big\rangle.\end{aligned}$$

Παίρνοντας όριο $a \to +\infty$ και στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας και λαμβάνοντας υπόψη τις (3.18) και (3.19), δείχνουμε ότι

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a}\Big\langle (f_a^{\rm per})', f_a^{\rm per}\Big\rangle = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a}\langle f_a', f_a\rangle_{L_2(\mathbb{T})} + 0 + 0 = \frac{1}{2\pi}\langle f', f\rangle_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Έτσι και η σχέση (3.16) απεδείχθη. Τελικά δείξαμε την ισχύ και των τριών ορίων (3.14),(3.15) και (3.16), που υπονοεί ότι η απόδειξη της πρότασης έχει ολοκληρωθεί. □

Πρόταση 3.2. *Έστω $f \in \mathscr{A}$ είναι μια αποδεκτή συνάρτηση και $f_a^{\rm per}$ είναι η 2π-περιοδικοποίηση της διαστολής f_a όπως στον ορισμό (3.13). Τότε*

$$\lim_{a\to+\infty} a^2\,{\rm var}_A(f_a^{\rm per}) = \sigma_f^2,$$

όπου σ_f και var_A είναι όπως στις (3.1) και (3.7) αντιστοίχως.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον τύπο της γωνιακής διακύμανσης ${\rm var}_A$ του λήμματος 3.1 του παραρτήματος 3.1.1 για τη 2π-περιοδική συνάρτηση $f_a^{\rm per}$ και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη του τύπου αυτού με a^2 ($a > 0$), παίρνουμε

$$a^2{\rm var}_A(f_a^{\rm per}) = \frac{2a^2A(f_a^{\rm per})\|f_a^{\rm per}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - a^2A^2(f_a^{\rm per}) + a^2B^2(f_a^{\rm per})}{\big(\|f_a^{\rm per}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 - A(f_a^{\rm per})\big)^2 - B^2(f_a^{\rm per})}.$$

Παίρνοντας και στα δύο μέλη όριο για $a \to +\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{a\to+\infty} a^2 \mathrm{var}_A(f_a^{\mathrm{per}}) = \lim_{a\to+\infty} \frac{2a^2 A(f_a^{\mathrm{per}}) \|f_a^{\mathrm{per}}\|^2_{L_2(\mathbb{T})} - a^2 A^2(f_a^{\mathrm{per}}) + a^2 B^2(f_a^{\mathrm{per}})}{\left(\|f_a^{\mathrm{per}}\|^2_{L_2(\mathbb{T})} - A(f_a^{\mathrm{per}})\right)^2 - B^2(f_a^{\mathrm{per}})}$$
$$= \frac{\|\cdot f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} - \langle \cdot f, f\rangle^2_{L_2(\mathbb{R})}}{\|f\|^4_{L_2(\mathbb{R})}} = \sigma_f^2. \tag{3.21}$$

Κατ΄ αρχήν θα δείξουμε ότι

$$\lim_{a\to+\infty} 2a^2 A(f_a^{\mathrm{per}}) = \frac{1}{2\pi}\|\cdot f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{3.22}$$

Από το λήμμα 3.1 έχουμε

$$\begin{aligned}
&2a^2 A(f_a^{\mathrm{per}}) = 4a^2 \big\langle |\sin(\cdot/2)|\, f_a^{\mathrm{per}}, |\sin(\cdot/2)|\, f_a^{\mathrm{per}} \big\rangle \\
=\;& 4a^2 \Big\langle |\sin(\cdot/2)| \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_a(\cdot + 2\pi n), |\sin(\cdot/2)| \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_a(\cdot + 2\pi k) \Big\rangle \\
=\;& 4a^2 \langle |\sin(\cdot/2)|\, f_a, |\sin(\cdot/2)|\, f_a \rangle \\
+\;& 4a^2 \sum_{k\neq 0} \big\langle |\sin(\cdot/2)|\, f_a, |\sin(\cdot/2)|\, f_a(\cdot + 2\pi k) \big\rangle \\
+\;& 4a^2 \sum_{n\neq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \big\langle |\sin(\cdot/2)|\, f_a(\cdot + 2\pi n), |\sin(\cdot/2)|\, f_a(\cdot + 2\pi k) \big\rangle.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&4a^2 \||\sin(\cdot/2)|\, f_a(\cdot + 2\pi n)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \frac{4a^2}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sin^2(x/2)|f_a(x+2\pi n)|^2 dx \\
=\;& \frac{1}{2\pi}\int_{(2n-1)\pi a}^{(2n+1)\pi a} \big(4a^2 \sin^2(x/(2a))\big)|f(x)|^2 dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{(2n-1)a\pi}^{(2n+1)a\pi} |xf(x)|^2 dx \\
\le\;& \frac{C^2}{2\pi}\int_{(2n-1)a\pi}^{(2n+1)a\pi} \frac{x^2}{(1+|x|)^{2\gamma}} dx \le \frac{C^2}{\pi^{2\gamma} a^{2\gamma-1}(2\gamma-1)} \cdot \frac{1}{(2|n|-1)^{2\gamma-1}},
\end{aligned} \tag{3.24}$$

οπότε

$$4a^2 \sum_{n\neq 0} \||\sin(\cdot/2)| f_a(\cdot + 2\pi n)\|_{L_2(\mathbb{T})} \le \frac{2C'}{\pi^\gamma a^{\gamma-\frac12}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{\gamma-\frac12}} \xrightarrow{a\to+\infty} 0, \tag{3.25}$$

διότι εξ υποθέσεως ισχύει $\gamma > 3/2$ και επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-\gamma+1/2} < \infty$ και $\lim_{a\to+\infty} a^{1/2-\gamma} = 0$. Απ΄ την άλλη μεριά έχουμε

$$\lim_{a\to+\infty} 4a^2 \langle |\sin(\cdot/2)|\, f_a, |\sin(\cdot/2)|\, f_a\rangle = \lim_{a\to+\infty} 2a^2 A(f_a) = \frac{1}{2\pi}\|\cdot f\|^2_{L_2(\mathbb{R})},$$

όπως δείξαμε στο λήμμα 3.2(i). Παίρνοντας όριο $a \to +\infty$ και στα δυο μέλη της (3.24) και λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω ισότητα διαπιστώνουμε ότι

$$\lim_{a\to+\infty} 2a^2 A(f_a^{\mathrm{per}}) = \lim_{a\to+\infty} 4a^2 \langle |\sin(\cdot/2)|\, f_a, |\sin(\cdot/2)|\, f_a\rangle + 0 + 0 = \frac{1}{2\pi}\|\cdot f\|^2_{L_2(\mathbb{R})},$$

διότι από την (3.25) έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left|4a^2\sum_{k\neq 0}\big\langle|\sin(\cdot/2)|\,f_a,|\sin(\cdot/2)|\,f_a(\cdot+2\pi k)\big\rangle\right|\\
\leq\quad & \||\sin(\cdot/2)|f_a\|_{L_2(\mathbb{T})}\cdot\Big(4a^2\sum_{k\neq 0}\||\sin(\cdot/2)|f_a(\cdot+2\pi k)\|_{L_2(\mathbb{T})}\Big)\\
\leq\quad & \|f_a\|_{L_2(\mathbb{T})}\cdot\Big(4a^2\sum_{k\neq 0}\||\sin(\cdot/2)|f_a(\cdot+2\pi k)\|_{L_2(\mathbb{T})}\Big)\\
\xrightarrow{a\to+\infty}\quad & \frac{\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}}{\sqrt{2\pi}}\cdot 0=0
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
&\left|4a^2\sum_{n\neq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big\langle|\sin(\cdot/2)|f_a(\cdot+2\pi n),|\sin(\cdot/2)|f_a(\cdot+2\pi k)\big\rangle\right|\\
\leq\quad & \Big(4a^2\sum_{n\neq 0}\||\sin(\cdot/2)|f_a(\cdot+2\pi n)\|_{L_2(\mathbb{T})}\Big)\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}}\||\sin(\cdot/2)|f_a(\cdot+2\pi k)\|_{L_2(\mathbb{T})}\\
\xrightarrow{a\to+\infty}\quad & 0\cdot\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}=0.
\end{aligned}$$

Ετσι η ισότητα (3.22) έχει αποδειχθεί. Χρησιμοποιώντας τη (3.22) παίρνουμε άμεσα ότι

$$\lim_{a\to+\infty}A(f_a^{\mathrm{per}})=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2a^2}\left(2a^2A(f_a^{\mathrm{per}})\right)=0\cdot\frac{1}{2\pi}\|\cdot f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=0. \tag{3.26}$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι

$$\lim_{a\to+\infty}aB(f_a)=\frac{i}{2\pi}\langle\cdot f,f\rangle_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{3.27}$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.1 του παραρτήματος 3.1.1 γράφουμε

$$B(f_a^{\mathrm{per}})=i(B_1(f_a^{\mathrm{per}})+B_2(f_a^{\mathrm{per}})),$$

όπου

$$B_1(f_a^{\mathrm{per}}):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,|f_a^{\mathrm{per}}|^2dx=\big\langle\sqrt{\sin(\cdot)}\chi_{[0,\pi]}\,f_a^{\mathrm{per}},\ \sqrt{\sin(\cdot)}\chi_{[0,\pi]}\,f_a^{\mathrm{per}}\big\rangle$$

και

$$B_2(f_a^{\mathrm{per}})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\sin x)|f_a^{\mathrm{per}}|^2dx=\big\langle\sqrt{-\sin(\cdot)}\chi_{[-\pi,0]}\,f_a^{\mathrm{per}},\ \sqrt{-\sin(\cdot)}\chi_{[-\pi,0]}\,f_a^{\mathrm{per}}\big\rangle.$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο όπως παραπάνω και παίρνουμε την (3.27). Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\lim_{a\to\infty}B(f_a^{\mathrm{per}})=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\left(aB(f_a^{\mathrm{per}})\right)=0\cdot\frac{i}{2\pi}\langle\cdot f,f\rangle_{L_2(\mathbb{R})}=0. \tag{3.28}$$

Αντικαθιστώντας τις (3.22), (3.26),(3.27) και (3.28) στην (3.21) παίρνουμε το ζητούμενο. □

3.1.1 Παράρτημα

Στο παράρτημα αυτό παραθέτουμε δυο τεχνικά λήμματα που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη της πρότασης 3.2.

Λήμμα 3.1. *Εστω $f \in L_2(\mathbb{T})$ και*

$$A(f) := \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{T}} |e^{it}-1|^2 |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \sin^2(t/2)\,|f(t)|^2\,dt$$

$$B(f) := \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{T}} (e^{it}-1)(e^{-it}+1)|f(t)|^2 dt = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sin t\,|f(t)|^2\,dt.$$

Αν $\tau_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{it}|f(t)|^2 dt \neq 0$ και $var_A(f) = \frac{\|f\|_2^4 - |\tau_0(f)|^2}{|\tau_0(f)|^2}$ είναι η γωνιακή διακύμανση της κατανομής $\frac{|f|^2}{\|f\|_2^2}$ όπως ορίσθηκε στην παράγραφο 3.1, τότε

$$var_A(f) = \frac{2A(f)\|f\|_2^2 - A^2(f) + B^2(f)}{\big(\|f\|_2^2 - A(f)\big)^2 - B^2(f)}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$2\|f\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\tau_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (2 - e^{it} - e^{-it})|f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |e^{it}-1|^2|f(t)|^2 dt,$$

άρα

$$\operatorname{Re}\tau_0(f) = \|f\|_2^2 - A(f). \tag{3.29}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\tau_0(f) = \frac{\tau(f) - \overline{\tau(f)}}{2i} &= \frac{-i}{4\pi}\int_{\mathbb{T}} (e^{it} - e^{-it})|f(t)|^2 dt \\ &= \frac{-i}{4\pi}\int_{\mathbb{T}} (e^{it}-1)(e^{-it}+1)|f(t)|^2 dt,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\operatorname{Im}\tau_0(f) = -iB(f). \tag{3.30}$$

Από τις (3.29) και (3.30) παίρνουμε

$$|\tau_0(f)|^2 = (\operatorname{Re}\tau_0(f))^2 + (\operatorname{Im}\tau_0(f))^2 = \big(\|f\|_2^2 - A(f)\big)^2 - B^2(f).$$

Αντικαθιστώντας την ισότητα αυτή στον ορισμό $\mathrm{var}_A(f) = \frac{\|f\|_2^4 - |\tau_0(f)|^2}{|\tau_0(f)|^2}$ προκύπτει η ζητούμενη ισότητα. □

Λήμμα 3.2. *Έστω $f \in \mathscr{A}$ είναι μία αποδεκτή συνάρτηση όπως στον ορισμό 3.1 και $f_a = \sqrt{a}f(a\cdot)$, $(a > 0)$. Αν $A(f), B(f)$ είναι όπως στο λήμμα 3.1, τότε*

(i)

$$\lim_{a\to+\infty} 2a^2 A(f_a) = \frac{1}{2\pi}\|\cdot f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2.$$

(ii)

$$\lim_{a\to+\infty} aB(f_a) = \frac{i}{2\pi}\langle \cdot f, f\rangle_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Απόδειξη. **(i):** Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Heine, βλέπε [12, Th. 3.62, page 115]. Εστω τυχαία πραγματική ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Λαμβάνοντας υπόψη το λήμμα 3.1 παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} 2a_n^2 A(f_{a_n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{4a_n^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x/2)a_n|f(a_nx)|^2dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-a_n\pi}^{a_n\pi} \big(2a_n\sin(x/(2a_n))\big)^2|f(x)|^2dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\pi a_n,\pi a_n]}(x)\big(2a_n\sin(x/(2a_n))\big)^2|f(x)|^2dx.
\end{aligned}$$

Αλλά

$$\Big|\chi_{[-\pi a_n,\pi a_n]}(x)\big(2a_n\sin(x/(2a_n))\big)^2|f(x)|^2\Big| \le x^2|f(x)|^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{[-\pi a_n,\pi a_n]}(x)\big(2a_n\sin(x/(2a_n))\big)^2|f(x)|^2 = x^2|f(x)|^2,$$

και επειδή $\cdot|f(\cdot)|\in L_1(\mathbb{R})$ (διότι η f είναι αποδεκτή), από το θεώρημα κυριαρχούμενης σύγκλισης, βλέπε πρόταση 1.2, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} 2a_n^2 A(f_{a_n}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\|\cdot f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Αφού η (a_n) είναι τυχαία ακολουθία με όριο το $+\infty$, παίρνουμε το ζητούμενο.

(ii): Κατ΄ αρχήν σημειώνουμε ότι $\forall x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$|a(e^{ix/a}-1)| = |2a\sin(x/(2a))| \le |x| \ \ \forall a\ne 0, \quad \lim_{a\to+\infty} a(e^{ix/a}-1) = ix,$$

$$|e^{-ix/a}-1| \le 2 \ \ \forall a>0, \quad \lim_{a\to\infty}(e^{-ix/a}+1) = 2.$$

Εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση **(i)**. Εστω πραγματική ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Από το λήμμα 3.1 έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_nB(f_{b_n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{4\pi}\int_{\mathbb{T}} (e^{ix}-1)(e^{-ix}+1)b_n|f(b_nx)|^2dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi b_n}^{\pi b_n} b_n(e^{ix/b_n}-1)(e^{-ix/b_n}+1)|f(x)|^2dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\pi b_n,\pi b_n]}(x)b_n(e^{ix/b_n}-1)(e^{-ix/b_n}+1)|f(x)|^2dx.
\end{aligned}$$

Αλλά

$$\big|\chi_{[-\pi b_n,\pi b_n]}(x)b_n(e^{ix/b_n}-1)(e^{-ix/b_n}+1)|f(x)|^2\big| \le 2|x||f(x)|^2$$

και

$$\lim_{n\to+\infty} \chi_{[-\pi b_n,\pi b_n]}(x) b_n (e^{ix/b_n} - 1)(e^{-ix/b_n} + 1)|f(x)|^2 = 2ix|f(x)|^2,$$

οπότε πάλι από το θεώρημα κυριαρχούμενης σύγκλισης έπεται ότι

$$\lim_{n\to+\infty} b_n B(f_{b_n}) = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x|f(x)|^2 dx = \frac{i}{2\pi}\langle \cdot f, f\rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Καθώς τα παραπάνω ισχύουν για κάθε πραγματική ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, από το κριτήριο του Heine παίρνουμε ότι

$$\lim_{a\to+\infty} aB(f_a) = \frac{i}{2\pi}\langle \cdot f, f\rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

□

3.2 Μια αρχή αβεβαιότητας για χαμηλοπερατά φίλτρα.

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε μια αρχή αβεβαιότητας για χαμηλοπερατά φίλτρα, με την έννοια ότι δεν υπάρχει παραγωγίσιμη περιοδική συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο που να προσεγγίζει το ιδανικό φίλτρο αποκοπής μισής ζώνης με την έννοια που το ορίζουμε λίγο παρακάτω.

Ορισμός 3.2. *Έστω $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$. Λέμε ότι μια φραγμένη συνάρτηση $h : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι ένα* ***χαμηλοπερατό φίλτρο****, εάν*

$$\lim_{\gamma \to 0} h(\gamma) = 1 \;\; \textit{και} \;\; \lim_{\gamma \to \pi} h(\gamma) = 0.$$

Στο εξής λέμε ότι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο h είναι ***υλοποιήσιμο****, εάν η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{T}$ και έχει τμηματικά συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{T}$ (άρα και $h' \in L_2(\mathbb{T})$). Στο εξής συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$ το σύνολο των υλοποιήσιμων χαμηλοπερατών φίλτρων.*

Ορισμός 3.3. *Ορίζουμε το* ***ιδανικό φίλτρο μισής ζώνης*** *I να είναι η συνάρτηση*

$$I(\gamma) := \begin{cases} 1 & , \textit{αν } \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & , \textit{αλλού} \end{cases}, \;\; \gamma \in \mathbb{T}.$$

Στο εξής επεκτείνουμε τον ορισμό των χαμηλοπερατών φίλτρων σ' όλη την πραγματική ευθεία θεωρώντας τις περιοδικές επεκτάσεις αυτών στο $\mathbb{R}$.

Για υλοποιήσιμο χαμηλοπερατό φίλτρο h και για το ιδανικό φίλτρο μισής ζώνης I, ορίζουμε το **συναρτησιακό κόστους** U του φίλτρου h να είναι

$$U : \mathcal{F} \to [0, +\infty) : U(h) = \|h - I\|_{L_2(\mathbb{T})} \|h'\|_{L_2(\mathbb{T})}. \tag{3.31}$$

Στο θεώρημα που ακολουθεί δείχνουμε ότι το U είναι κάτω φραγμένο από την τιμή $1/2$. Η νόρμα $\|h - I\|_{L_2(\mathbb{T})}$ είναι ένα μέτρο της απόστασης μεταξύ των h και το I. Με απλά λόγια μας δίνει μία αίσθηση του πόσο μοιάζουν αυτά τα δύο φίλτρα. Στη νόρμα $\|h'\|_{L_2(\mathbb{T})}$ εμπεριέχονται δύο χαρακτηριστικά του φίλτρου, αφενός το πόσο ταχεία είναι η αποκοπή του και αφετέρου το κατά πόσο παρουσιάζει κυματώσεις. Η αβεβαιότητα έγκειται στο γεγονός ότι αυτές οι δύο νόρμες δεν μπορούν να είναι ταυτοχρόνως οσοδήποτε μικρές, το οποίο σημαίνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε ένα υλοποιήσιμο φίλτρο που να μοιάζει πολύ στο I (με κάποια έννοια) και να έχει ταυτόχρονα απότομη αποκοπή και λίγες ή μικρές κυματώσεις.

Θεώρημα 3.3. *[2] Εστω $h \in \mathcal{F}$ και $U(h)$ είναι το συναρτησιακό κόστους όπως στην (3.31). Τότε*

$$U(h) \geq \frac{1}{2} + \left| h\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \right|^2 + \left| h\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \right|^2.$$

Επιπλέον, δεν υπάρχει συνάρτηση $h \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $U(h) = 1/2$.

Απόδειξη. Εφόσον $h \in \mathcal{F}$, η συνάρτηση $(I-h)h'$ είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{T}$, όπου I είναι όπως στον ορισμό 3.3. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned} U(h) &\geq \int_{\mathbb{T}} |h(\gamma)-I(\gamma)||h'(\gamma)|d\gamma \\ &= \Big(\int_{-\pi}^{-\pi/2}+\int_{-\pi/2}^{0}+\int_{0}^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}\Big)|h(\gamma)-I(\gamma)||h'(\gamma)|d\gamma. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση $|h|^2$ είναι συνεχής στο $\mathbb{T}$ και έχει τμηματικά συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{T}$. Παρομοίως, η $|I-h|^2$ είναι επίσης συνεχής στο $\mathbb{T}$. Παρακάτω χρησιμοποιούμε τις ανισότητες $|z| \geq Re(z)$, $|z| \geq -Re(z)$ και $|z| \geq \mathrm{Re}(\overline{z})$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Υπενθυμίζουμε ότι $I(\gamma)=0$ στο $[-\pi,-\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$, συνεπώς

$$\begin{aligned} &\Big(\int_{-\pi}^{-\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}\Big)|h(\gamma)-I(\gamma)||h'(\gamma)|d\gamma = \Big(\int_{-\pi}^{-\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}\Big)|h(\gamma)||h'(\gamma)|d\gamma \\ \geq\ & \mathrm{Re}\left[\Big(\int_{-\pi}^{-\pi/2}-\int_{\pi/2}^{\pi}\Big)h(\gamma)\overline{h'(\gamma)}d\gamma\right] = \mathrm{Re}\left[\Big(\int_{-\pi}^{-\pi/2}-\int_{\pi/2}^{\pi}\Big)\frac{1}{2}\frac{d}{d\gamma}|h(\gamma)|^2\right] \\ =\ & \frac{1}{2}\Big|h\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big|^2+\frac{1}{2}\Big|h\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big|^2. \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} &\Big(\int_{-\pi/2}^{0}+\int_{0}^{\pi/2}\Big)|h(\gamma)-I(\gamma)||h'(\gamma)|d\gamma \\ \geq\ & \mathrm{Re}\left[\Big(-\int_{-\pi/2}^{0}+\int_{0}^{\pi/2}\Big)(h(\gamma)-1)\overline{h'(\gamma)}d\gamma\right] \\ =\ & \mathrm{Re}\left[\Big(-\int_{-\pi/2}^{0}+\int_{0}^{\pi/2}\Big)\frac{1}{2}\frac{d}{d\gamma}|h(\gamma)-1|^2\right] \\ =\ & \frac{1}{2}\Big|h\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)-1\Big|^2+\frac{1}{2}\Big|h\Big(\frac{\pi}{2}\Big)-1\Big|^2. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη και συνδυάζοντας με την (3.32), παίρνουμε

$$U(h) \geq \frac{1}{2}\left[\Big|h\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big|^2+\Big|h\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big|^2+\Big|h\Big(\frac{\pi}{2}\Big)-1\Big|^2+\Big|h\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)-1\Big|^2\right].$$

Εφαρμόζοντας δύο φορές τον κανόνα του παραλληλογράμμου στο δεξί μέλος της ανισότητας, παίρνουμε

$$U(h) \geq \frac{1}{2}+\Big|h\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)-\frac{1}{2}\Big|^2+\Big|h\Big(\frac{\pi}{2}\Big)-\frac{1}{2}\Big|^2.$$

Από την παραπάνω ανισότητα, προφανώς έπεται ότι $U(h) \geq 1/2$ για κάθε $h \in \mathcal{F}$ με $h\big(-\frac{\pi}{2}\big) = h\big(\frac{\pi}{2}\big) = \frac{1}{2}$. Θα δείξουμε ότι η περίπτωση της ισότητας είναι αδύνατη. Έστω ότι υπάρχει $h_0 \in \mathcal{F}$ έτσι ώστε

$$U(h_0) = \frac{1}{2} + \left|h_0\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) - \frac{1}{2}\right|^2 + \left|h_0\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - \frac{1}{2}\right|^2.$$

Τότε, με βάση τα παραπάνω θα πρέπει να ισχύει

$$\mathrm{Re}\langle h_0 - I, sh_0'\rangle = |\langle h_0 - I, sh_0'\rangle_{L_2(\mathbb{T})}| = \|h_0 - I\|_{L_2(\mathbb{T})}\|h_0'\|_{L_2(\mathbb{T})}, \qquad (3.33)$$

όπου s είναι συνάρτηση τέτοια ώστε

$$s(\gamma) := \begin{cases} 1 & ,\gamma \in [-\pi, -\pi/2) \cup [0, \pi/2) \\ -1 & ,\gamma \in [-\pi/2, 0) \cup [\pi/2, \pi) \end{cases}.$$

Η (3.33) ισχύει μόνον όταν υπάρχει $\lambda > 0$, τέτοιο ώστε $sh_0' = \lambda(h_0 - I)$ σχεδόν παντού, οπότε για $\pi/2 < \gamma \leq \pi$ έχουμε

$$h_0'(\gamma) = -\lambda h_0(\gamma) \Rightarrow h_0(\gamma) = h_0(\pi)e^{-\lambda(\gamma-\pi)} = 0.$$

Απ΄ την άλλη μεριά, για $0 < \gamma \leq \pi/2$ έχουμε

$$h_0'(\gamma) = \lambda(h_0(\gamma) - 1) \Rightarrow h_0(\gamma) = (h_0(0) - 1)e^{\lambda\gamma} + 1 = 1$$

αντικρούοντας τη συνέχεια της h_0 στο $\gamma = \pi/2$. Επομένως δεν υπάρχει $h_0 \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $U(h_0) = 1/2$. □

Παρακάτω, δίνουμε μια γενίκευση του θεωρήματος 3.3. Ξεκινούμε δίνοντας τον ακόλουθο

Ορισμός 3.4. *Έστω $E = \cup_{i=1}^n E_i \subset \mathbb{T}$, όπου $\{E_i\}_{i=1}^n$ είναι μια ακολουθία κλειστών διαστημάτων του $\mathbb{T}$ έτσι ώστε*

$$M_i := \max\{t : t \in E_i\} < m_{i+1} := \min\{t : t \in E_{i+1}\}, \forall i \leq n-1.$$

*Καλούμε μια φραγμένη συνάρτηση $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ως **φίλτρο ζώνης** E, εάν*

(i) $\lim_{\gamma \to \frac{m_i+M_i}{2}} h(\gamma) = 1 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$.

(ii) $\forall \xi_i \in \{\min E_i, \max E_i\}$ *ισχύει* $\lim_{\gamma \to \xi_i} h(\gamma) = 0$.

(iii) $\lim_{\gamma \to \pi} h(\gamma) = 0$.

*Στο εξής λέμε ότι ένα τέτοιο φίλτρο ζώνης h είναι **υλοποιήσιμο**, εάν η συνάρτηση h είναι συνεχής και έχει τμηματικά συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{T}$ (άρα και $h' \in L_2(\mathbb{T})$). Στο εξής συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_E$ το σύνολο των υλοποιήσιμων φίλτρων ζώνης E.*

Ορισμός 3.5. *Εστω E είναι κλειστό σύνολο όπως στον ορισμό 3.4. Ορίζουμε το **ιδανικό φίλτρο μισής ζώνης** E να είναι η συνάρτηση*

$$I_E(\gamma) := \begin{cases} 1 & , \textit{αν } \gamma \in \cup_{i=1}^{n} \left[\frac{m_i+M_i}{2} - \frac{M_i-m_i}{4}, \frac{m_i+M_i}{2} + \frac{M_i-m_i}{4}\right] \\ 0 & , \textit{αλλού} \end{cases}, \ \gamma \in \mathbb{T},$$

την οποία επεκτείνουμε περιοδικά στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 3.3. *Εστω κλειστό σύνολο $E = \cup_{i=1}^{n} E_i \subset \mathbb{T}$ με την αντίστοιχη κλάση $\mathcal{F}_E$ όλων των E-υλοποιήσιμων φίλτρων να είναι όπως στον ορισμό 3.4. Για κάθε $h \in \mathcal{F}_E$, έστω*

$$U_E(h) = \|h - I_E\|_{L_2(\mathbb{T})} \|h'\|_{L_2(\mathbb{T})}$$

είναι το αντίστοιχο συναρτησιακό κόστους, όπου I_E είναι το ιδανικό φίλτρο μισής ζώνης όπως παραπάνω. Τότε

$$U_E(h) \geq \frac{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} \left[\left| h\left(\frac{3m_i + M_i}{4}\right) - \frac{1}{2} \right|^2 + \left| h\left(\frac{m_i + 3M_i}{4}\right) - \frac{1}{2} \right|^2 \right],$$

όπου $m_i = \min E_i$ και $M_i = \max E_i$ $\forall i = 1, ..., n$.

Απόδειξη. Τροποποιούμε την απόδειξη του θεωρήματος 3.3. Πράγματι, για $\gamma_i = \frac{m_i+M_i}{2}$, $\xi_i = \frac{3m_i+M_i}{4}$ και $\psi_i = \frac{m_i+3M_i}{4}$, έχουμε

$$\begin{aligned} U_E(h) &\geq \int_{\mathbb{T}} |h(\gamma) - I_E(\gamma)||h'(\gamma)| d\gamma \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{m_i}^{\xi_i} + \int_{\xi_i}^{\gamma_i} + \int_{\gamma_i}^{\psi_i} + \int_{\psi_i}^{M_i} \right) |h(\gamma) - I_E(\gamma)||h'(\gamma)| d\gamma \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(|h(\xi_i)|^2 + |h(\psi_i)|^2 + |h(\xi_i) - 1|^2 + |h(\psi_i) - 1|^2 \right) \\ &= \frac{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\left| h(\xi_i) - \frac{1}{2} \right|^2 + \left| h(\psi_i) - \frac{1}{2} \right|^2 \right). \end{aligned}$$

□

Σημείωση 3.1. *Θέτοντας $h \mapsto 1 - h$ στην πρόταση 3.3, παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα και για E-υψιπερατά φίλτρα.*

4 Αρχές αβεβαιότητας για το διακριτό μετασχηματισμό Fourier.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε δυο αρχές αβεβαιότητας για το διακριτό μετασχηματισμό Fourier, σύμφωνα με τις οποίες δεν είναι δυνατόν μία ακολουθία πεπερασμένου μήκους και ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier αυτής να έχουν ταυτόχρονα οσοδήποτε πολλούς μηδενικούς όρους (βλέπε θεώρημα 4.1) ή πιο γενικά, δεν είναι δυνατόν να είναι οσοδήποτε συγκεντρωμένες ταυτόχρονα με κάποια έννοια που θα δούμε παρακάτω (βλέπε θεώρημα 4.2). Δίνουμε μια απλούστερη απόδειξη του θεωρήματος 4.1 και κλείνουμε το κεφάλαιο και την εργασία αυτή με το διακριτό ανάλογο του θεωρήματος 2.2 του κεφαλαίου 2.

4.1 Αρχές αβεβαιότητας για διακριτά σήματα.

Θεώρημα 4.1. *[3] Έστω $x = (x_t)_{t=0}^{N-1}$ είναι μια μιγαδική ακολουθία με N όρους και $\widehat{x} = (\widehat{x}_w)_{w=0}^{N-1}$ είναι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier αυτής, δηλαδή*

$$\widehat{x}_w = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} x_t \, e^{-2\pi i w t/N}, \quad w = 0, ..., N-1.$$

Αν N_t και N_w είναι το πλήθος των μη μηδενικών όρων της x και $\widehat{x}$ αντίστοιχως, τότε

$$N_t \cdot N_w \geq N.$$

Πρώτα θα δείξουμε το ακόλουθο

Λήμμα 4.1. *Έστω x και $\widehat{x}$ είναι όπως στο θεώρημα 4.1. Αν η x έχει N_t μη μηδενικούς όρους, τότε η $\widehat{x}_w$ δεν μπορεί να έχει N_t διαδοχικούς μηδενικούς όρους.*

Απόδειξη. Έστω $b_j = x_{\tau_j}, j = 1, ..., N_t$ είναι όλοι οι μη μηδενικοί όροι της x. Για ευκολία θέτουμε $z_j = e^{-2\pi i \tau_j/N}$ $\forall 1 \leq j \leq N_t$ και για κάποιο φυσικό αριθμό m_0 ορίζουμε την ακολουθία

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N_t} b_j z_j^{m_0+k}, \; k = 1, 2, ..., N_t. \tag{4.1}$$

Εφόσον $g_k = \widehat{x}_{m_0+k}$, αρκεί να δείξουμε ότι $g_k \neq 0$ για κάποιο $k \in \{1, ..., N_t\}$. Ορίζουμε το $N_t \times N_t$ πίνακα Z με στοιχεία

$$Z_{k,j} = \frac{z_j^{m_0+k}}{\sqrt{N}}$$

και τα διανύσματα στήλες $g = (g_k)_{k=1}^{N_t}$ και $b = (b_j)_{j=1}^{N_t}$ αντίστοιχως. Τότε η (4.1) παίρνει τη μορφή

$$g = Zb,$$

οπότε αρκεί να δειχθεί ότι $g \neq (0,...,0)$. Αυτό όμως ισχύει πάντα, διότι $b \neq (0,...,0)$ και

$$\det Z = \frac{1}{N^{\frac{N_t}{2}}} \prod_{k=1}^{N_t} z_k^{m+1} \prod_{1 \leq i < j \leq N_t} (z_j - z_i) \neq 0.$$

□

Απόδειξη θεωρήματος 4.1. Θα εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση $N = kN_T$ για κάποιο φυσικό k. Διαμερίζουμε το σύνολο $I_N = \{0, 1, ..., N-1\}$ σε $k = N/N_t$ το πλήθος ξένα μεταξύ τους ανά δύο υποσύνολα $I_1, ..., I_k$ ιδίου μήκους N_t, που το καθένα περιέχει διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Από το λήμμα 4.1, σε κάθε σύνολο I_k η ακολουθία $\widehat{x}$ περιέχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό όρο $\widehat{x}_{w_k}$. Άρα, αν N_w είναι το πλήθος των μη μηδενικών όρων του διακριτού μετασχηματισμού Fourier $\widehat{x}$, τότε το N_w είναι μεγαλύτερο ή ίσο του k, δηλαδή

$$N_w \geq k = N/N_t \Rightarrow N_t \cdot N_w \geq N.$$

Αν $N = kN_t + \upsilon$ με $0 < \upsilon < N_t$, τότε

$$N_w \geq \lceil N/N_t \rceil \geq N/N_t \Rightarrow N_t \cdot N_w \geq N.$$

□

Το θεώρημα 4.1 αποδεικνύεται απλούστερα ως εξής.

Απόδειξη. Έστω $T = \operatorname{supp}(x_t)_{t=0}^{N-1}$ και $W = \operatorname{supp}(\widehat{x}_w)_{w=0}^{N-1}$. Τότε, $|T| = N_t$ και $|W| = N_w$, οπότε λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο

$$x_t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{w \in W} \widehat{x}_w e^{i2\pi wt/N}$$

του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier της $\widehat{x}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{t \in T} |x_t| &= \sum_{t \in T} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{w \in W} \widehat{x}_w e^{i2\pi wt/N} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t \in T} \sum_{w \in W} |\widehat{x}_w| \\
&= \frac{N_t}{\sqrt{N}} \sum_{w \in W} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t \in T} x_t e^{-i2\pi wt/N} \right| \leq \frac{N_t N_w}{N} \sum_{t \in T} |x_t| \\
&\Rightarrow N_t N_w \geq N.
\end{aligned}$$

□

Θα αποδείξουμε τώρα μια αρχή αβεβαιότητας χρησιμοποιώντας την έννοια της συγκέντρωσης μιας ακολουθίας όπως στο θεώρημα 2.2 του κεφαλαίου 2.

Ορισμός 4.1. *Έστω $I_N = \{0, ..., N-1\}$ για κάποιο φυσικό αριθμό N, $T \subseteq I_N$ και $x = (x_t)_{t=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$. Για κάποιο $0 \leq \epsilon_T \leq \|x\|_2$, (όπου η $\|\cdot\|_2$ είναι η συνήθης ευκλείδια νόρμα στο $\mathbb{C}^N$), λέμε ότι η x είναι ϵ_T-**συγκεντρωμένη** στο T, εάν*

$$\|x - x\chi_T\|_2 \leq \epsilon_T,$$

όπου χ_T είναι η συνήθης χαρακτηριστική συνάρτηση στο T.

Θεώρημα 4.2. *[3] Έστω $T, W \subseteq I_N = \{0, ..., N-1\}$ και $x = (x_t)_{t=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$. Αν η x είναι ϵ_T-συγκεντρωμένη στο T και ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier $\widehat{x} = (\widehat{x}_w)_{w=0}^{N-1}$ της x είναι μια ακολουθία ϵ_W-συγκεντρωμένη στο W με $\|x\|_2 = \|\widehat{x}\|_2 = 1$ και $\epsilon_T + \epsilon_W \leq 1$, τότε*

$$\min\left(1, \sqrt{\frac{N_t N_w}{N}}\right) \geq 1 - (\epsilon_T + \epsilon_W).$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 4.2 θα χρειαστούμε μία σύντομη προεργασία. Για $T, W \subseteq I_N$ και x όπως παραπάνω, ορίζουμε τον τελεστή αποκοπής στο χρόνο

$$P_T : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N : \ P_T(x)(n) := x_t(n)\chi_T(n),$$

και τον τελεστή μερικής ανακατασκευής της x με αποκοπή συχνοτήτων

$$Q_W := \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N : \ \big(Q_w x\big)(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{w \in W} \widehat{x}_w e^{i2\pi wt}.$$

Αν $\mathscr{B}$ είναι ο χώρος όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον $\mathbb{C}^N$ στον $\mathbb{C}^N$, τότε σε κάθε τελεστή $R \in \mathscr{B}$ αντιστοιχεί ένας $N \times N$ πίνακας, με τη συνήθη νόρμα του R να ορίζεται ως συνήθως

$$\|R\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{C}^N} \frac{\|Rx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \in \mathbb{C}^N,\, \|x\|_2 = 1} \|Rx\|_2.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\|P_T\|_2 = \|Q_W\|_2 = 1$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\|P_T Q_W x\|_2^2 &= \sum_{t \in T} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{w \in W} \widehat{x}_w e^{i2\pi wt} \right|^2 \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{t \in T} \left(\sum_{w \in W} |\widehat{x}_w|^2 \right) \left(\sum_{w \in W} |e^{i2\pi wt}|^2 \right) \\
&= \frac{N_t N_w}{N} \|\widehat{x}\|_2^2 = \frac{N_t N_w}{N} \|x\|_2^2 = \frac{N_t N_w}{N},
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\|P_T Q_W x\|_2 \leq \sqrt{\frac{N_t N_w}{N}}. \tag{4.2}$$

Επίσης

$$\|P_T Q_W x\|_2 \leq \|P_T\|_2 \|Q_W\|_2 \|x\|_2 = 1. \tag{4.3}$$

Απ΄ την άλλη μεριά

$$\begin{aligned}
\|x - P_T Q_W x\|_2 &= \|x - P_T x + P_T x - P_T Q_W x\|_2 \\
&\leq \|x - P_T x\|_2 + \|P_T(x - Q_W x)\|_2 \\
&\leq \|x - P_T x\|_2 + \|P_T\|_2 \|x - Q_W x\|_2 \\
&\leq \|x - P_T x\|_2 + \|x - Q_W x\|_2 \\
&= \|x - P_T x\|_2 + \|\widehat{x} - \chi_W \widehat{x}\|_2 \leq \epsilon_T + \epsilon_W.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\|x - P_T Q_W x\|_2 \geq \|x\|_2 - \|P_T Q_W x\|_2 = 1 - \|P_T Q_W x\|_2,$$

οπότε

$$\|P_T Q_W x\|_2 \geq 1 - \|x - P_T Q_W x\|_2 \geq 1 - (\epsilon_T + \epsilon_W). \tag{4.4}$$

Από τις (4.2),(4.3) και (4.4) έπεται ότι

$$\min\left(1, \sqrt{\frac{N_t N_w}{N}}\right) \geq \|P_T Q_W x\|_2 \geq 1 - (\epsilon_T + \epsilon_W).$$

$\square$

Αναφορές

[1] Ν. Ατρέας. Αρμονική Ανάλυση (Σημειώσεις), Α.Π.Θ. 2015-2016, 197 σελ.

[2] B. Bodmann, M. Papadakis, Q Sun. An Inhomogeneous Uncertainty Principle for Digital Low-pass Filters. J. Fourier Anal. Appl. 12 (2), 181-211, 2006.

[3] D. L. Donoho, P. B. Stark. Uncertainty Principles and Signal Recovery. SIAM J. Appl. Math., 49, (3), 906-931, 1989.

[4] R. A. Horn, C. R. Johnson. Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York, USA, 1985.

[5] Y. Katznelson. An Introduction to Harmonic Analysis. Dover Publications, 2nd Edition, New York Inc.

[6] J. Prestin, E. Quak. Optimal Functions for a Periodic Uncertainty Principle and Multiresolution Analysis. Proc. Edinburgh Math. Soc., 42 (2), 225-242, 1999.

[7] J. Prestin, E. Quak, H. Rauhut and K. Selig. On the Connection of Uncertainty Principles for Functions on the Circle and on the Real Line. J. Fourier Anal. Appl. ,9 (4), 389-407, 2003.

[8] H. L. Royden. Real Analysis (5th printing). The McMillan Company, New York, 1971.

[9] W. Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw Hill International Editions, 1987.

[10] D. Slepian, H. O. Pollak. Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty - I. The Bell System Technical Journal, January 1961.

[11] H. J. Landau, H. O. Pollak. Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty - II. The Bell System Technical Journal, January 1961.

[12] Karl R. Stromberg. An Introduction to Classical Real Analysis. Wadsworth Intern group, California 1987.