Свойства определителя квадратной матрицы. Разложение определителя

1. При умножении строки определителя на число, весь определитель умножается на это число
2. Если определитель содержит нулевую строку, то он равен нулю.
3. Если в определителе поменять местами две строки, то он поменяет знак.
4. Если в определителе есть одинаковые строки, то он равен нулю.
5. Если в определите есть пропорциональные строки, то он равен нулю.
6. Разложение определителя в сумму определителей. $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & b_{1k}+c_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{tn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk-1} & b_{mk}+c_{mk} & a_{mk+1} & \dots & a_{tn} \\ dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & b_{nk}+c_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
7. Если к одной строке определителя прибавить другую строку, умноженную на число, то значение определителя не изменится.
8. Разложение по строке: $|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kn}A_{kn}$
9. Сумма произведений алгебраических дополнений элементов одной строки на алгебраические дополнения другой строки равна нулю
10. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов
11. Любой определитель можно вычислить приведением к треугольному виду.

Доказательство:

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{k1} & ta_{k2} & \dots & t_a kn \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{g \in S_n} (-1)^g a_{1g(1)} \dots t(a_{kg(k)}) \dots a_{ng(n)}$. По свойству определителя каждое слагаемое умножится на t, поэтому значение определителя уможится на t
3. Следует из 2).
4. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{k1} & ta_{k2} & \dots & t_a kn \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{g \in S_n} (-1)^g a_{1g(1)} \dots t(a_{kg(k)}) \dots a_{ng(n)}$. Если переставить местами строки, в каждом слагаемом поменяется чётность подстановки, то есть слагаемому будет соответствовать оно же со знаком $-$.
5. Следует из свойства 4, т.к. если переставить эти строки местами, то он должен поменять знак, но сам определитель не изменится, поэтому он равен нулю.
6. Из свойств 2) и 5)
7. $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & b_{1k}+c_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{tn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk-1} & b_{mk}+c_{mk} & a_{mk+1} & \dots & a_{tn} \\ dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & b_{nk}+c_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} == \sum_{g \in S_n} (-1)^g a_{1g(1)} (b_{g(k)k} + c_{g(k)k}) \dots a_{g(n)n} +$

8. Добавим к m-й строке k-ю, умноженную на t

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+ta_{k1} & a_{m2}+ta_{k2} & \dots & a_{mn}+ta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{k1} & ta_{k2} & \dots & ta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Во втором определителе имеем пропорциональные строки, т.е. он равен нулю, т.е. исходный определитель не изменился.

9. Достаточно доказать для разложения по первой строке. Рассмотрим определение определителя. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{g \in S_n} (-1)^g a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)} = a_{11}R_1 + a_{12}R_2 + \dots + a_{1n}R_n$. R_i - все слагаемые, куда входит a_{1i}. Покажем, что $R_i = (-1)^{1+i} M_{1i}$. Очевидно, что слагаемые в R_i и $(-1)^{1+i} M_{1i}$ одни и те же, поскольку при раскрытии определителя мы выбираем по одному слагаемому в каждой строке и в каждом столбце. Осталось показать, что слагаемые входят с правильным знаком. Возьмём элемент $a_{1k} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$. Ему соответствует подстановка $g' = \begin{pmatrix} 2 & \dots & n \\ g(2) & \dots & g(n) \end{pmatrix}$, где $g(i) \neq k$. Пусть чётность этой подстановки равна $i(g')$. В g k стоит на первом месте и вносит дополнительно $kg'((k-1))$, поэтому $i(g) = k - 1 + i(g')$, поэтому каждому слагаемому из $M_{1k} a_{2g} \dots ang(n)$ соответствует слагаемое $a_{1k} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$, которое в A различается на $(-1)^{k-1} = (-1) = (-1)^{k+1} (i(g')$ - число инверсий для исходного слагаемого). Поэтому все элементы из M_{1k} нужно умножить на $(-1)^{k+1}$, из чего получается формула разложения по строке.

10. $a_{k1}A_{m1} + ak2A_{m2} + \dots + a_{kn}A_{mn} =$ В алгебраических дополнениях A_{ms} нет m-й строки, т.е. получить такую сумму - то жке самое, что взять определитель матрицы, у которой m-я строка совпадает с k-й и разложить по m-й строке.

11. $\begin{vmatrix} a_{11} & a12 & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Необходимо разложить определитель по первому столбцу. Получаем a_{11} на такой же определитель, кроме первой строки. Повторим этот шаг n раз. Очевидно, что определитель разложится в произведение диагональных элементов.

12. Следствие свойств 8 и 11

Все свойства определителя справедливые для строк остаются справедливыми для столбцов и наоборот