17. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Теорема

Многочлен $f(x)$ степени n однозначно определяется своими значениями в $n+1$ попарно различных точках.

Доказательство

Единственность: пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют степень n и совпадают в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Тогда если $f(x) = g(x)$, то $h(x) = f(x) - g(x)$ равен 0 в этих точках. Но тогда это многочлен степени не выше n, и он имеет как минимум $n+1$ корень. Но т.к. ненулевой многочлен не может иметь корней больше, чем его степень, то $h(x) = 0 \implies f(x) = g(x)$

Существование: можно показать, что

$$f(x) = f(x_0) \cdot \left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} \right) +$$

$$+ f(x_1) \cdot \left(\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} \right) +$$

$$+ f(x_2) \cdot \left(\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x_3-x_0)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} \right) + \ldots$$

Найдём $f(x_0)$: в первом слагаемом все скобки сократятся и останется $f(x_0)$, а остальные слагаемые обнулятся из-за множителя $(x - x_0)$.
Когда подставляется $x = x_1$, остаётся только второе слагаемое, равное $f(x_1)$, остальные обнуляются.
Получаем многочлен, который в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ совпадает со значениями $f(x)$, и поэтому равен $f(x)$.

Многочлен, построенный в доказательстве теоремы, называется интерполяционным многочленом Лагранжа.