22. Дважды сопряженное отображение. Существование сопряженного отображения.

Теорема о повторном взятии сопряжённой функции

Если f имеет сопряжённую f^*, то $f^{**} = f$.

Доказательство

Надо проверить, что $\forall (x, y) : (f * (y), x) = (y, f(x))$.

$$(f^*(y), x) = \overline{(x, f * (y))} = \overline{(f(x), y)} = \overline{\overline{(y, f(x))}} = (y, f(x))$$

Следствие

Если для функции f существует сопряжённая функция, то f - линейная.

Теорема о сопряжённом отображении в пространстве со скалярным произведением

Если f - линейное отображение из конечномерного пространства L_1 в пространство L_2 со скалярным произведением, то для f существует сопряжённое отображение.

Доказательство

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ - ортонормированный базис в L_1, $v_1, \ldots, v_n$ - ОНБ в L_2. Тогда $\forall x, y : (f(x), y) = [f(x)^T]\overline{[y]} = [f \cdot x]^T\overline{[y]} = [x]^T[f]^T\overline{[y]} = [x]^T[f]^T\overline{[y]} = [x]^T\overline{\overline{[f]^T}}[y] = (x, \overline{[f]^T}[y])$- по формуле скалярного произведения в ОНБ. Тогда $(a, b) = a_1\overline{b}_1 + a_2\overline{b}_2 + \cdots + a_n\overline{b}_n$ $= (a_1, \ldots, a_n)\overline{\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}}$. Мы получили, что линейный оператор с матрицей f имеет сопряжённый оператор, причём, если базисы ортонормированные, матрица сопряжённого оператора является сопряжённо-транспонированной к исходной.