Производная многочлена и ее свойства. Кратные множители многочлена. Алгоритм выделения кратных множителей.

Производная многочлена производной многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ называется многочлен $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \dots + 2a_2 x + a_1$

Свойства производной многочлена

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) + g'(x)$
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. $(Cf(x))' = cf'(x)$

Кратный корень

Число c является корнем многочлена $f(x)$ кратности k, если множитель $(x-c)$ входит в разложение $f(x)$ в точности k раз.

Теорема о кратности корня производной

Пусть число c является корнем многочлена $f(x)$ кратности $k \geq 1$, тогда число c является корнем многочлена $f'(x)$ кратности $k-1$.

Доказательство

$$f(x) = (x-c)^k g(x)\$, приэтом\$(x-c)\$неделит\$g(x)$$

$$f'(x) = k(x-c)^{k-1}g(x) + (x-c)^k g'(x)$$

В обратную сторону: пусть c является корнем кратности m. По доказанному, c - корень кратности $m-1$ для $f'(x)$. Отсюда получаем, что $k = m$

Другая теорема про кратные множители

Пусть $d(x) = \text{НОД}(f(x),\ f'(x))$. Тогда $d(x)$ содержит все кратные множители многочлена $f(x)$

Доказательство

Разложим многочлен над полем $\mathbb{C}$. Очевидно, что кратные корни, и только она входят в $f(x)$ и $f'(x)$