25. Самосопряженные линейные преобразования и их свойства. Строение матрицы самосопряженного линейного преобразования.

Самосопряжённое преобразование Линейное преобразование называется самосопряжённым, если $f = f^*$

Собственный вектор Пусть f - лин. преобразование лин. пространства L над полем F. Вектор $x \in L,\ x \neq 0$ называется собственным, если $\exists a \in F : f(x) = ax$, при этом число a называется собственным значением оператора f.

Нахождение собственных векторов

$$[f] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Перейдём к системе уравнений $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n = ay_1 \\ a_{21}y_1 + \dots + a_{2n}y_n = ay_2 \\ \dots \\ a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n = ay_n \end{cases}$$

Построим матрицу системы:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} - a & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - a & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - a \end{pmatrix}$$

Матрица $C : [f] - aE$ называется характеристической матрицей оператора. Поскольку собственный вектор $y \neq 0$, то система с матрицей имеет ненулевое решение, то есть её определитель навен 0. В противном случае по правилу Крамера система имеет единственное нулевое решение. Таким образом, число a является собственным значением линейного оператора $\iff |[f] - aE| = 0$.

Характеристический многочлен Определитель характеристической матрицы называется характеристическим многочленом.

Теорема о собственных числах
Собственные значения линейного оператора являются корнями его характеристического многочлена. Каждый корень характеристического многочлена - собственное число линейного преобразования f.

Доказательство
$\Longrightarrow$. См. выше - сведение к матрице системы?
$\Longleftarrow$. Пусть A - корень характеристического многочлена. Тогда $|[f] - aE| = 0$. Тогда ранг характеристической матрицы меньше числа неизвестных n. Таким образом, размерность пространства решений равна $n - r$, то есть существует ненулевое решение $y = (y_1, \dots, y_n)$. Это означает, что $f[y] = a[y]$.

Пример нахождения собственных значений и собственных векторов
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Составляем характеристическое уравнение. $\begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^2 - 1 = 0$. Тогда $a_1 = 0, a_2 = 2$.

2. Для каждого собственного значения находим собственный вектор. $(A - a_1E)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Решаем систему, получаем собственнй вектор.

Теорема о независимости хар. многочлена от выбора базиса

Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.

Доказательство

P и Q - базисы. Тогда $[f]_Q = T_{QP}[f]_P T_{PQ} = T^{-1}[f]_P T$.

$$|[f]_Q - aE| = |T^{-1}[f]_P T - aE| = |T^{-1}[f]_P T - aT^{-1}T| = |[f]_P - aE$$

Следствие

Собственные значения и собственне векторы не зависят от выбора базиса, то есть однозначно определяются линейным оператором.

Теорема о корнях характеристического многочлена самосопряжённого оператора

Все корни характеристического многочлена самосопряжённого линейного оператора - действительные числа.

Доказательство

Пусть a - собственное значение, соответствующее вектору y. Тогда $f(y) = ay$.
$a(y, y) = (ay, y) = (f(y), y) = (y, f^*(y)) = (y, f(y)) = (y, ay) = \bar{a}(y, y)$. Тогда $a = \bar{a}$, то есть $a \in \mathbb{R}$.

Теорема: критерий самосопряжённости

Линейное преобразование конечномерного пространства со скалярным произведением самосопряжённое $\iff$ существует ОНБ из собственных векторов, собственные числа которых действительны.

Доказательство

$\implies$. Индукция по размерности пространства. Б.и.: $\dim L = 1$. Возьмём базисный вектор u. Тогда этот базисный вектор - собственный с некторым собственным значением a. Ш.и.: пусть утверждение доказано для размерности $\dim L = n - 1$. Докажем для пространства размерности n. По предыдущей теореме все корни хар. многочлена действительны, значит есть собственное значение a_1, которому соответствует собственный вектор u_1. Рассмотрим подпространство $[u_1]^\perp$ - ортогональное дополнение. По теореме об ортогональном дополнении, $L =< u_1 > \oplus < u_1 >^\perp$. Пусть $x \in [u_1]^\perp$. Тогда $(f(x), u_1) = (x, f^*(u_1)) = (x, f(u_1)) = (x, au_1) = a(x, u_1) = 0$ - т.к. x из ортогонального дополнения. Мы показали, что если $x \in [u_1]^\perp$, то $f(x)$ остаётся в том же пространстве. Таким образом, f на $[u_1]^\perp$ является самосопряжённым линейным оператором. Поскольку $\dim[u_1]^\perp = n - 1$, то по предположению индукции в $[u_1]^\perp$ есть ОНБ $u - 2, \dots, u_n$. Тогда $u_1, \dots, u_n$ - ОНБ в L.

$\impliedby$. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ - ОНБ собственных векторов и $a_1, \dots, a_n$ - собственные значения. $f(u_1) = a_1u_1, f(u_2) = au_2, \dots, f(u_n) = a_nu_n$. Тогда $f(u_1) = a_1u_1 = a_1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n$. Очевидно, что матрица оператора f равна сопряжённо-транспонированной, так как она диагональная и все элементы на главной диагонали действительные. Тогда f - самосопряжённый оператор.