46. Приведение поверхностей второго порядка к каноническому виду.

План исследования уравнение 2-й степени от трёх переменных

Глобально ничего не поменялось:

1. Приведем квадратичную форму $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ к каноническому виду ортогональным преобразованием
2. Избавимся от трёх из четырёх остальных слагаемых с помощью ортогонального преобразования или переноса начала координат
3. Исследуем полученную квадрику

Рассмотрим определитель квадратичной формы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\star)$$

Центральная квадрика

Если $(\star) \neq 0$

Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$

Квадратичная форма приводится преобразованем к каноническому виду:

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$, собственно уравнение квадрики преобразовать подставив нужные замены которые получлись.

Переносим начала координат.

Упрощенное уравнение будет иметь вид:

$Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 + D = 0$

Подслучай 1 $D \neq 0$ В этом случае уравнение квадрики можно переписать в виде:

$\frac{x''^2}{-\frac{D}{A}} + \frac{y''^2}{-\frac{D}{B}} + \frac{z''^2}{-\frac{D}{C}} = 1$

Возможны 4 варианта:

1. $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C} > 0, a = \sqrt{-\frac{D}{A}}, b = \sqrt{-\frac{D}{B}}, c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$ получим $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$ - **эллипсоид**
2. Среди чисел $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C}$ два положительны и одно отрицательны. проведя замены: $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$ - **однополостный гиперболоид**
3. Среди чисел $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C}$ одно положительно и два отрицательны. проведя замены: $-\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1 \iff \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = -1$ - **двуполостный гиперболоид**
4. $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C} < 0$ **мнимый эллипсоид(пустое множество)**

Подслучай 2 $D = 0$ Уравнение будет иметь вид: $Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 = 0$

1. Числа A, B, C - имеют один и тот же знак, тогда уравнение имеет единственное решение $x = 0, y = 0, z = 0$ и это точка, соответствующая квадрика **мнимый конус**
2. Числа A, B, C имеют разные знаки, введя замены $a = \sqrt{\frac{1}{A}}, b = \sqrt{\frac{1}{B}}, c = \sqrt{-\frac{1}{C}}$ получим уравнение $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 0$ - **Конус**

   ### Нецентральная квадрика

   Теперь нужно составить матрицу из квадратичной формы снова, и посмотреть ранг этой матрциы.

Ранг 2

После замен и преобразований: $Ax''^2 + B''^2 + 2Cz'' + D = 0$

Если $C = 0$ уравнение сводится к $Ax''^2 + By''^2 + D = 0$ - цилиндрическая квадрика.

Делаем замену $x'' = x''', y'' = y''', z'' = z''' - \frac{D}{2C}$

$Ax'''^2 + By'''^2 + 2Cz''' = 0$

Возможны 2 варианта

3. Числа $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B}$ имеют одинаковый знак. Введем обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}, b = \sqrt{-\frac{C}{B}}$ полуим уравнение $\frac{x'''^2}{a^2} + \frac{y'''^2}{b^2} = 2z$ **эллиптический парабалоид**
4. Числа $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B}$ имеют разные знаки. Введя такие же обозначения(почти, смотри на знаки, считай что одно положительно другое отрицательно). Получим уравнение $\frac{x'''^2}{a^2} - \frac{y'''^2}{b^2} = 2z$ **Гиперболический параболоид**

Ранг 1

После преобразований и замен: $Ax''^2 + 2By'' + 2Cz'' + D = 0$

Если $C = 0$, уравнение задает **цилиндрическую квадрику**, если же $C \neq 0$ выполним ортогональное преобразование с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{B^2+c^2}} & -\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} \\ 0 & \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} & \frac{B}{\sqrt{B^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

Уравнение преобразуется в $Ax'''^2 + \sqrt{B^2 + C^2}y''' + D = 0$ значит и при $c \neq 0$ оно задает **цилиндрическую квадрику**

Итак мы доказали теорему классификации пространственных квадрик:

Уравнение второй степени от 3ёх переменных задает одну из 17 квадрик:

- Одну из 9 цилиндрических
- Эллипсоид
- Мнимый эллипсоид
- Однополостный гиперболоид
- Двуполостный гиперболоид
- Конус
- Мнимый конус
- Эллиптический параболоид
- Гиперболический параболоид