23. Изометрические отображения и их свойства.

Изометрическое отображение Линейное отображение $f : L_1 \mapsto L_2$ называется изометрическим, если $\forall x, y : (x, y) = (f(x), f(y))$

Теорема: критерий изометричности отображения
Линейное отображение $f : L_1 \mapsto L_2$ изометрично $\iff \forall x \in L_1 : |f(x)| = |x|$.
--Доказательство==
$\implies$. $(x, x) = (f(x), f(x)) \iff |x|^2 = |f(x)|^2 \iff |x| = |f(x)|$.
$\impliedby$. Пусть $\forall x \in L_1 : |f(x)| = |x|$, то есть $(f(x), f(x)) = (x, x)$. Подставим вместо x вектор $x + y$. Получим, что $(f(x + y), f(x + y)) = (x + y, x + y)$. Воспользуемся свойством линейности:
$(f(x) + f(y), f(x) + f(y)) = (x + y, x + y)$. $(f(x), f(x)) + (f(x), f(y)) + (f(y), f(x)) + (f(y), f(y))$
$= (x, x) + (x, y_+(y, x) + (y, y)$. Приводим подобные: $(f(x), f(y)) + (f(y), f(x)) = (x, y) + (y, x)$. Рассмотрим два случая:

1. Пространство евклидово. Тогда $(a, b) = (b, a)$. Получаем $2(f(x), f(y)) = 2(x, y)$, что фактически является определением изометричности.
2. Пространство унитарно. Вместо x подставим вектор ix. Получим
   $(f(ix), f(y)) + (f(y), f(ix)) = (ix, y) + (y, ix)$. $i(f(x), f(y)) - \bar{i}(f(y), f(x)) = i(x, y) + \bar{i}(y, x)$.
   $(f(x), f(y)) - (f(y), f(x)) = (x, y) - (y, x)$. Получаем систему уравнений $$\begin{cases} (f(x), f(y)) - (f(y), f(x)) = (x, y) - (y, x) \ (f(x), f(y)) - (f(y), f(x)) = (x, y) + (y, x)\end{cases}

$$\textit{Тогда}\$2(f(x), f(y)) = 2(x, y) \implies (f(x), f(y)) = (x, y)\$$$

Теорема: второй критерий изометричности
Линейное отображение $f : L_1 \mapsto L_2$ изометрично $f^* \cdot f : L_1 \mapsto L_1$ - тождественное отображение.
Доказательство
$\implies$. $\forall x, y : (x, y) = (f(x), f(y)) = (x, f^* f(y)) \implies f^* f = y$, т.е. отображение тождественно.

какая-то Теорема

1. Если f - изометрическое отображение из L_1 в L_2, то любую ортонормированную систему векторов пространства L_1 отображение f переводит в ортонормированную систему в L_2.
2. Если f - линейное отображение из L_1 в L_2 и оно переводит некоторый ОНБ в ОНБ, то оно изометрично.
   Доказательство
3. Следует из определения изометричности. $(x, y) = (f(x), f(y)) = 0$
4. $u_1, u_2, \ldots, u_n$ - ОНБ в L_1. $v_1 = f(u_1), v_2 = f(u_2), \ldots, v_n = f(u_n)$ - ОНБ в L_2. Возьмём вектор $x = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$. $|x| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$ (так как $u_1, \ldots, u_n$ - ОНБ). В силу линейности $f(x) = f(a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n) == a_1 f(u_1) + \cdots + a_n f(u_n) = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. $|f(x)| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$, т.к. $v_1, \ldots, v_n$ - ОНБ. Получаем, что $|x| = |f(x)|$, что является условием изометричности.

Свойства изометрического отображения

- $|Av| = |v| \forall v \in V$
- $(Au, Av) = (u, v), \forall u, v \in V$
- Оператор A переводит ортонормированные базисы в ортонормированные,
- Матрица a оператора A в ортонормированном базисе ортогональная, тоесть $A^T A = E$
- $A^* A = id$ сопряженный оператор к A является его обратным