1 Критерий Коши для несобственных интегралов

Пусть $f(x)$ определена на $[a, w)$ и интегрируема на $\forall [a, b] \subset [a, w)$.

Интеграл $\int\limits_a^w f(x)dx$ сходится $\iff \forall \varepsilon < 0 \exists b \in [a, w) : \forall b', b'' \in [a, w)(b', b'' > b \Rightarrow |\int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx| < \varepsilon)$

Доказательство

По определению несобственный интеграл сходится $\iff$ $\exists$ конечный предел функции

$$F(R) = \int\limits_a^R f(x)\, dx, R \to +\infty$$

По критерию Коши существования конечного предела функции необходимо и достаточно чтобы:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists b \in [a, w) > a : \forall b' > b, \forall b'' > b \implies |F(b'') - F(b')| < \epsilon$$

Подставим выражение для $F(R)$ и получим

$$\forall \epsilon > 0\ \exists b \in [a, w) > a : \forall b' > b, \forall b'' > b \implies \left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)\, dx \right| < \epsilon$$

Сделаем вывод. Сходимость интеграла будет тогда и только тогда, когда существует конечный предел функции $F(R)$, что и дает условие Коши.

2 Признаки сравнения для несобственных интегралов

1 признак *общий признак сравнения*

Пусть f и $g \geqslant 0$ на $[a, w)$, $f(x) \leqslant g(x), x \in [a, w)$

Тогда $\int\limits_a^w g(x)\, dx$ сходится $\Rightarrow \int\limits_a^w f(x)\, dx$ сходится, и наоборот, из расходимости интеграла $\int\limits_a^w f(x)\, dx \implies \int\limits_a^w g(x)\, dx$ -расходится

2 признак *(aka Телековский* 9.10.4 *)*

Пусть $f, g > 0$ на $[a, w)$ и $\exists c_1, c_2 > 0$ такие, что $c_1 \cdot g \leq f \leq c_2 \cdot g$ на $[a, w)$. Тогда $\int\limits_a^w f(x)\, dx$ и $\int\limits_a^w g(x)\, dx$ сходятся или расходятся одновременно

3 признак(в предельной форме)

Если $\lim\limits_{x \to w} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C > 0$, то $\int\limits_a^w f$ и $\int\limits_a^w g$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

1 признак

Пусть интеграл $\int\limits_a^w g(x)\, dx$ сходится, тогда по критерию Коши:

$$\forall \epsilon > 0 \exists b \in [a, w) > a : \forall b' > b, \forall b'' > b \implies \left| \int\limits_{b'}^{b''} g(x)\, dx \right| < \epsilon$$

Из заданного в условии неравенства следует, что:

$$\left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)\, dx \right| \leq \left| \int\limits_{b'}^{b''} g(x)\, dx \right|$$

Для функции $f(x)$ можно записать, что:

$$\forall \epsilon > 0\, \exists b \in [a, w) : \forall b' > b, \forall b'' > b \implies \left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)\, dx \right|$$

Это значит что по критерию Коши интеграл $\int\limits_a^w f(x)\, dx$ - сходится

В обратную сторону также.

2 признак

1. Предположим, что $\int\limits_a^w f(x)\, dx$ сходится. Воспользуемся оценкой $c_1 \cdot g \leq f$. По первому признаку $\int\limits_a^w f(x)\, dx$ сходится, поэтому $\int\limits_a^w g(x)\, dx$ сходится
2. Пусть $\int\limits_a^w f(x)\, dx$ расходится. Используем правую оценку и первый признак сравнения
3.
4.

> **Error**
>
> доделать 3 и 4 пункт

3 признак

Пусть $|\dfrac{f}{g} - C| < \epsilon$. Тогда $\epsilon = \frac{C}{2}$

$$-\frac{C}{2} < \frac{f}{g} - C < \frac{C}{2} \implies \frac{C}{2} < \frac{f}{g} < \frac{3}{2}C$$

при этом $x \in O(w)$. Доказано по второму признаку сравнения

3 Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов

Признак Дирихле

Пусть f непрерывна на $[a, w)$, ее первообразная F ограничена на $[a, w)$.
Пусть g непрерывно дифференцируема на $[a, w)$.
Пусть $g \to 0$ и $x \to w$.

Тогда $\lim\limits_a^w fg$ сходится.

Доказательство

$\int\limits_a^\omega f \cdot g = \int\limits_a^\omega F' \cdot g = Fg\Big|_a^\omega - \int\limits_a^\omega F \cdot g'$. Нужно доказать, что $\int\limits_a^\omega F' \cdot g$ сходится. Рассмотрим $\lim\limits_{b \to \omega} F(a)g(b) - F(a)g(a)$. Этот предел равен нулю. Теперь рассмотрим второй интеграл $\int\limits_a^\omega F \cdot g'$. Пусть F ограничена константой M. Тогда

$$-M \left| \int\limits_a^\omega g' \right| \leq \int\limits_a^\omega F \cdot g' \leq M \cdot \left| \int\limits_a^\omega g' \right|$$

$$\int\limits_a^\omega g' = g(\omega) - g(a) = \lim_{b \to \omega} g(b) = 0$$

$$-M\,|g(a)| \leq \cdots \leq M\,|g(a)|$$

Признак Абеля

Пусть f непрерывна на $[a, w)$ и $\int\limits_a^w$ сходится. Пусть g непрерывно дифференцируема на $[a, w)$, монотонна и ограничена на этом же промежутке. Тогда $\int\limits_a^w fg$ сходится

Доказательство

$\int\limits_a^\omega f \cdot g$. f непр. $\implies$ есть первообразная F. Тогда $\int\limits_a^\omega = F(\omega) - F(a)$. Теперь нужно показать, что первообразная ограничена. По условию этот интеграл сходится, поэтому $F(\omega)$ - конечно. $\lim\limits_{b \to \omega} F(b)$. Заметим, что F - непр. как интеграл с переменным верхним пределом. Тогда на любом промежутке $[a, b]$ F - ограничена. (разбиваем промежуток $[a, \omega)$) на промежуток $[a, b]$ и $[b, \omega)$. На $[b, \omega]$ F ограничена по определению предела. Поэтому F огр. на $[a, \omega)$. Поэтому f удовлетворяет условию признака Дирихле. g - монотонна и ограничена $\implies \exists \lim\limits_{b \to \omega} g(b)$ = С. Рассмотрим $h(x) = g(x) - C$. Понятно, что h - непр.дифф. и $h \to 0$, когда $x \to \omega$, поэтому h тоже удовлетворяет условиям признака Дирихле.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^\omega f \cdot g == \int\limits_a^\omega f(g - c) + \int\limits_a^\omega f \cdot c$ - сходится по признаку Дирихле $\implies$ данный интеграл сходится.

4 Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля сходимости знакопеременных рядов

5 Перестановка членов в абсолютно сходящихся рядах

6 Теорема Римана

7 Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда