## Обратное отображение и обратимые матрицы. Матрица, обратная к данной. Критерий обратимости в терминах её определителя.

**Обратная матрица** - $B$ обратная к $A$, если $AB = BA = E$

**Критерий обратимости квадратной матрицы** Квадратная матрица обратима $\iff |A| \neq 0$, если $|A| \neq 0$, то $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^T$

Доказательство:

1. Пусть $A$ - обратима. Посчитаем
$$\det AA^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \implies$$
$$\implies \det A \neq 0, \ \det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$
2. Умножим присоединённую к $A$ матрицу $(A^{\#})^T$ - матрицу алгебраических дополнений к каждому элементу матрицы $A$ на матрицу $A$, получится матрица, на главной диагонали которой стоят $\det A$. Рассмотрим матрицу, полученную из матрицы $A$ заменой второй строки на первую. Её определитель будет равен нулю Продолжим этот шаг и найдём матрицу
$A(A^{\#})^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E$
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^{\#})^T$$
$(A^{\#})^T A$ - аналогично, т.к. вместо разложения по строке будет разложение по столбцу.
**Свойства обратных матриц**:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$