40. Цилиндрические поверхности.

Цилиндрические поверхности Пусть в пространстве заданы кривая l и ненулевой вектор $\vec{a}$.
Поверхность образованная прямыми, проходящими через всевозможные точки кривой l и коллинеарными вектору $\vec{a}$, называется **цилиндрической**.
Направляющая - кривая l
Образующие - прямые из определения.

Замечание Любая цилиндрическая поверхность имеет направляющую, являющуюся плоской кривой.

Теорема Произвольная цилиндрическая поверхность может быть задана в подходящей системе координат общим уравнением вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ - некоторая функция от двух переменных. Обратно, уравнение вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ - произвольная функция от двух переменных, задает в пространстве цилиндрическую поверхность.
Доказательство

1. Пусть σ - цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны вектору $\vec{a}$. Обозначим через m произвольную прямую, коллинеарную вектору $\vec{a}$, а через O - произвольную точку на этой прямой. Возьмем точку O в качестве начала координат. Далее проведем через точку O плоскость $\pi \perp m$, выберем в этой плоскости произвольный базис, векторы которого обозначим через $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Посмотрим как выглядит уравнение поверхности σ в системе координат $(O; \vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$. Обозначим через l кривую, по которой плоскость π пересекает поверхность σ. Ясно, что l - плоская кривая, являющаяся направляющей поверхности σ. Эта кривая задается в плоскости π некоторым общим уравнением $F(x, y) = 0$.
   Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ - произвольная точка пространства. Проведем через M прямую коллинеарную $\vec{a}$, и обозначим через M' точку пересечения этой прямой с плоскостью Oxy. Ясно, что точка M' имеет координаты $(x_0, y_0, 0)$. При этом $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $M' \in l$, - тогда и только тогда, когда $F(x_0, y_0) = 0$ Таким образом, точка M принадлежит σ тогда и только тогда, когда её координаты удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. первое доказали.
2. Предположим что поверхность σ имеет в некоторой системе координат уравнение $F(x, y) = 0$. Обозначим через l пересечение σ с плоскостью Oxy и положим $\vec{a} = (0, 0, 1)$. Произвольная точка пространства M лежит на $\sigma \iff$ координаты её проекции на плоскость Oxy удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0 \implies \sigma$ - цилиндрическая поверхность с направляющей l, образующие которой коллинеарны вектору $\vec{a}$
   Эллиптический цилиндр $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$
   Гиперболический цилиндр $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$
   Параболический цилиндр $y^2 = 2px, p > 0$