39. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду.

Теорема

Всякая квадрика на плоскости является либо

- Эллипсом
- Гиперболой
- Параболой
- Парой прямых
- Точкой
- Пустым множеством

Примечание: доказательство этой теоремы - весь билет. Однако вся эта теорема практическое приложение приведения квадрики к каноническому виду.

Доказательство

Введём уравнение квадрики на плоскости $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \quad (1)$, где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$

Пусть в системе координат Oxy квадрика l задается уравнением (1) разделим доказательство на 3 шага.

Шаг 1 Приведем квадратичную форму (1) к каноническому виду ортогональным преобразованием (поворот осей координат)

Шаг 2 Избавимся от двух из трех слагаемых с помощью переноса начала координат.

Так же выделим полные квадраты.

Шаг 3 Исследуем то что получилось и приводим к каноническому виду квадрики.

Проверим. Является ли квадрика центральная. Квадрика центральная если

Центральная квадрика

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Преобразуем к каноническому виду с помощью поворота, выделение квадратов, линейных замен(переноса начала точки отсчёта) и запишем как:

$$Ax''^2 + By''^2 + C = 0$$

Тогда можно выделить два подслучая:

Подслучай 1 $C \neq 0$, тогда можно переписать уравнение в виде

$$\frac{x''^2}{-\frac{C}{A}} + \frac{y''^2}{-\frac{C}{B}} = 1$$

Отсюда можно выделить ещё 3 варианта

1. $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B} > 0$ Введем обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}, b = \sqrt{-\frac{C}{B}}$ мы получаем уравнение $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$. Получится **эллипс**

2. $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B}$ - имеют разные знаки, введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{C}{A}}, b = \sqrt{\frac{C}{B}}$ получим уравнение $\dfrac{x''^2}{a^2} - \dfrac{y''^2}{b^2} = 1$. Получится **гипербола**
3. $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B} < 0$. Тогда это **пустое множество**

Подслучай 2 $C = 0$, тогда получится уравнения вида:

$$Ax''^2 + By''^2 = 0$$

Тогда возможны два варианта:

1. Числа A и B имеют одинаковый знак - тогда $x'' = y'' = 0$ тогда это **точка**
2. Числа A и B имеют разные знаки. Введем обозначения $a = \sqrt{A}, b = \sqrt{-B}$ получим уравнение $a^2x''^2 - b^2y''^2 = 0$ можно его переписать в виде $(ax'' + by'')(ax'' - by'') = 0$ Тогда это **Пара пересекающихся прямых**

Нецентральная квадрика

Если же определитель равен нулю. То уравнение примет вид

$$Dy''^2 + 2Ex'' + F = 0$$

Подслучай 1 $E \neq 0$ получится **парабола**
Подслучай 2 $E = 0$ уравнение $y''^2 = -\frac{F}{D}$ возможны 3 варианта

1. $-\frac{F}{D} > 0$ Тогда $a = \sqrt{-\frac{F}{D}}$ получим уравнение $y''^2 = a^2$ это **пара параллельных прямых**
2. $-\frac{F}{D} = 0$ **Пара совпадающих прямых**
3. $-\frac{F}{D} < 0$ **Пустое множество**