Теорема Безу

Если $f(x) \in F[x]$ и $c \in F$, то остаток от деления $f(x)$ на $(x - c)$ равен $f(c)$

Доказательство

$f(x) = q(x)(x - c) + r$. Остаток имеет степень меньше, чем $\deg q(x)$. Подставим вместо x c:

$f(c) = q(c)(c - c) + r = r$

Корень многочлена

Число $c \in F$ называется корнем многочлена $f(x) \in F[x]$, если $f(x) = 0$

Основная теорема алгебры

Любой многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени не меньше, чем 1, имеет корень.

Следствие из основной теоремы алгебры

Если $f(x) \in F[x]$ имеет степень n, то $f(x)$ имеет ровно n корней над полем $\mathbb{C}$ (с учетом кратности).

Теорема о виде рациональных корней

Число $\dfrac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, если $q \mid a_n$ и $p \mid a_0$

Доказательство

Пусть $\dfrac{p}{q}$ является корнем (p и q - взаимно просты). Подставим $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = a_n(\dfrac{p}{q})^n + \cdots + a_1\left(\dfrac{p}{q}\right) + a_0 = 0$.
Заметим, что правая часть делится на $p \implies a_0$ делится на p. Домножим на q^n, a_n аналогично делится на q.