

Построение кольца многочленов. Простейшие свойства многочленов.

Многочлен над полем F выражение вида $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, где $a_i \in F$, а x - переменная.

Степень многочлена - Наибольшее n такое, что $a_n \neq 0$ обозначается $\deg f$

Степень нулевого многочлена $= -\infty$

Операции над многочленами:

1. Сложение
2. Умножение на число
3. Умножение многочленов (свойство: $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$)

$F[x]$ является коммутативным кольцом с 1

Доказательство

$+$ - ассоциативно и коммутативно, если нейтральный 0

\cdot - ассоциативно и коммутативно, есть нейтральный 1

Определение Элемент a кольца F с единицей называется обратимым, если для него существует $a^{-1} \in K$ такое что $a \cdot a^{-1} = 1$

Для множества многочленов над полем F обратимы являются только многочлены нулевой степени

Ассоциированные многочлены **Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ называются ассоциированными** ($f(x) \sim g(x)$), если $f(x) = cg(x)$, где c = некоторое постоянное число (или многочлен степени 0). Они часто имеют схожие свойства.

Все многочлены нулевой степени ассоциированы с $e(x)=1$

Пример ассоциированных многочленов

$$2x^2 + x + 1 \sim x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$