28. Билинейные и квадратичные функции. Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы. Конгруэнтные формы и матрицы.

29. Квадратичные функции и формы. Связь с симметричными билинейными функциями и формами. Конгруэнтность квадратичных функций и форм.

Билинейная функция Пусть L - линейное пространство над F. Тогда отображение $f : L \times L \mapsto F$ называется билинейным, если:

1. $f(\alpha x, y) = f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$
2. $f(x_1 + x_2, y = f(x_1, y) + f(x_2, y)$
3. f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)

   Формой называется однородный многочлен, то есть такой, что $f(nx) = nf(x)$

   Билинейная форма - Многочлен от двух систем переменных, линейный по каждой из этих систем

Теорема о линейном пространстве линейных функций
Линейные функции относительно операций сложения и умножения на элементы поля образуют линейное пространство.

Доказательство

$$\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$$

$$\alpha(f + g)(x, y) = \alpha(f(x, y) + g(x, y)) = \alpha(f(x, y)) + \alpha(g(x, y)) = (\alpha f + \alpha g)(x, y)$$

При этом размерность пространства билинейных функций n^2, где n - количество аргументов.

Квадратичная функция $f : L \mapsto F$ - квадратичная, если $\exists$ билинейная функция g такая, что $f(x) = g(x, x)$. Тогда $f(x) = [x]^t[g][x]$

Теорема
Для любой квадратичной функции существует единственная билинейная функция, из которой она получается
Доказательство

Доказательство. Пусть $g(x)$ – квадратичная функция на пространстве L, $f(x, y)$ – порождающая её билинейная функция. Ясно, что $f(y, x)$ – это тоже билинейная функция.

? Как связаны матрицы функций $f(x, y)$ и $f(y, x)$?

Рассмотрим билинейную функцию $h(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(y, x))$. Ясно, что функция $h(x, y)$ симметрична. Кроме того, $h(x, x) = \frac{1}{2}(f(x, x) + f(x, x)) = f(x, x) = g(x)$.

Пусть теперь $f(x, y)$ – симметрическая билинейная функция, порождающая квадратичную функцию $g(x)$, т.е. $g(x) = f(x, x)$.

? $g(x)$ – функция одной переменной, а получить мы хотим функцию $f(x, y)$ двух переменных. Как этого добиться?

$g(x + y) = f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = g(x) + 2f(x, y) + g(y)$. Значит,

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(g(x + y) - g(x) - g(y)),$$

т.е. функция $f(x, y)$ однозначно восстанавливается по функции $g(x)$. □

Квадратичная форма Однородный многочлен второй степени от одной системы переменных называется квадратичной формой. Матрица квадратичной формы - это матрица симметричной билинейной функции, из которой она получилась.

Матричный вид Легко проверить, что квадратичную форму $f(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n$ можно записать в матричном виде

$$f = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Невыдрожденная замена переменных Даны наборы переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$. Тогда, если $x_1 = b_{11}y_1 + \dots + b_{1n}y_n, x_2 = b_{21}y_1 + \dots + b_{2n}y_n, \dots, x_n = b_{n1} + \dots + b_{nn}y_n$. Тогда мы имеем невырожденную замену $x = By$.

Замечание о невырожденной замене

Если к квадратичной форме $f = X^TAX$ применить невырожденную замену $x = By$, то получим квадратичную форму с матрицей B^TAB.

Доказательство

$f = (BY)^TA(BY) = Y^TB^TABY$

Конгруэнтные матрицы Матрицы A и B конгруэнтны, если существует невырожденная C такая, что $A = C^TBC$. Очевидно, что отношение конгруэнтности является отношением эквивалентности. Таким образом, если одна квадратичная форма получается невырожденной заменой из другой, то их матрицы конгруэнтны.

Замечание о конгруэнтных матрицах

Конгруэнтные матрицы либо имеют определители равные нулю, либо одинаковых знаков.

Доказательство

$|B| = |C^TAC| = |C^T||A||C| = |C||A||C| = |C|^2|A|$