20. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел и кольцом целых чисел. Критерий Эйзенштейна.

Теорема: признак Эйзенштейна

Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ и существует такое простое число p, что:

1. p не делит a_n
2. p делит все остальные a_i $(i = 0, 1, \dots, n-1)$
3. p^2 не делит a_0

Тогда $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$./

Доказательство

Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ и пусть выполняется условие признака. Тогда предположим, что $f(x)$ - разложим, то есть $f(x) = g(x)h(x)$, где $g(x) = b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0$ и $h(x) = c_m x^m + \dots + c_1 x + c_0$.
Тогда p^2 не делит $c_0 \implies$ либо $p \mid c_0$ и p не делит b_0, либо наоборот. Пусть $p \mid c_0$ и p не делит b_0. Тогда $a_1 = b_1 c_0 + c_1 b_0$, отсюда, т.к. $p \mid a_1$, то $p \mid c_1$, далее, $a_2 = b_2 c_0 + c_1 b_1 + c_2 b_0$, отсюда $p \mid c_2$. Продолжая эти рассуждения, получаем что $a_m = b_m c_0 + c_m b_1 + \dots + c_m b_0$, то есть $p|c_m$, то есть $p \mid a_n$ - противоречие.