30. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. Приведение формы к каноническому виду.

Канонический вид Квадратичная форма имеет канонический вид, если её матрица диагональна (или в самой квадратичной форме есть только квадраты.)

Канонический вид Форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. если при $i \neq j$ все коэффициенты при $x_i x_j = 0$
Нормальный вид, если она имеет канонический вид и ненулевые коэффициенты при квадратах имеют модуль 1.

Теорема о приведении к квадратичной форме

Из любой квадратичной формы с помощью невырожденной замены переменных можно получить квадратичную форму в каноническом виде.

Метод Лагранжа. Доказательство.

1 случай. $a_{11} \neq 0$. Тогда собираем всё с x_1 и получаем
$f(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 +$
$+ \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$
Выделяем полный квадрат:
$f(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + f'(x_2, \dots x_n) =$

Собираем все с x_1

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

$$f'(x_2, \dots, x_n) = a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + f'(x_2, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2x_1(a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 + \dots + 2a_{1n}x_n) + f'(x_2, \dots, x_n) =$$
$$= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right) + \left(\frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2 - \left(\frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2\right) + f'(x_2, \dots, x_n) =$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2x_1(a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_n) + f'(x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right) + \left(\frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2 - \left(\frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2\right) + f'(x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2 - \frac{(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}} + f'(x_2, \ldots, x_n) =$$

$$a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2 + g(y_2, \ldots, y_n) =$$

где $g(y_2, \ldots, y_n) = -\dfrac{(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n)^2}{a_{11}} + f'(x_2, \ldots, x_n)$

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

далее аналогично раскладываем $g(y_2, \ldots, y_n)$

и получаем y_2

и т.д.

2 случай. $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0$. Тогда получаем квадрат перед x_1: делаем замену $x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_1 + y_2, x_3 = y_3, \ldots, x_n = y_n$. Получаем квадратичную форму, у которой первая переменная в квадрате. Приходим к случаю 1.

Указанная замена будет невырожденной, так как $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. Её определитель равен двум.