32. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Теорема о каноническом виде положительно определённой формы

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ положительно определена $\iff$ в любом её каноническом виде $t_1x_1^2 + \dots + t_nx_n^2$ $(t_1 > 0, \dots, t_n > 0)$

Доказательство

$\implies$. Если форма приводится к такому каноническому виду заменой $X = TY$

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n) = t_1y_1^2 + \dots + t_ny_n^2$$

то получается положительно определённая квадратная форма

$\impliedby$ f - положительна определена, но при этом получаем $t_n < 0$.

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n) = t_1y_1^2 + \dots + t_ny_n^2$$

при наборе $y_1 = \dots = y_{n-1} = 0, y_n = 1$ положительно определена.

$$f(0, 0, \dots, 1) < 0$$

$$\begin{cases} y_1 = d_{11}x_1 + \dots + d_{1n}x_n \\ \dots \\ y_n = d_{n1}x_1 + \dots + d_{nn}x_n \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} d_{11}x_1 + \dots + d_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ d_{n1}x_1 + \dots + d_{nn}x_n = 1 \end{cases}$$

Поскольку в силу невырожденности замены определитель системы не равен 0, то она имеет некоторое решение - $(x_1', \dots, x_n')$

$f(x_1', \dots, x_n') = f(0, \dots, 1) < 0$

Угловой минор Пусть A - квадратная матрица, для каждого k миноры, расположенные в первых k столбцах, называются угловыми минорами.

Теорема: критерий Сильвестра

Квадратичная форма является положительно определённой $\iff$ все угловые миноры её матрицы положительны.

Доказательство из википедии

Пусть $q(x)$ — положительно определённая квадратичная форма. Тогда j-й диагональный элемент положителен, так как $q(e_j) > 0$, где e_j - вектор со всеми нулевыми координатами, кроме j-й При приведении матрицы к каноническому виду в силу невырожденности угловых миноров стро́ки не нужно будет переставлять, поэтому в итоге знаки главных миноров матрицы не изменятся. А в каноническом виде диагональные элементы положительны, а значит и миноры положительны; следовательно, (так как их знак не менялся при преобразованиях) у положительно определённой квадратичной формы в любом базисе главные миноры матрицы положительны.

$\impliedby$. Дана симметричная квадратичная форма, все угловые миноры которой положительны. Рассмотрим сначала первый диагональный элемент в каноническом виде: его знак определяется первым угловым минором. Далее, знак числа $\dfrac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i}$ определяет знак $(i+1)$-го элемента в диагональном виде. Получается, что в каноническом виде все элементы на диагонали положительные, то есть квадратичная форма определена положительно.