13. Взаимно простые многочлены и их свойства.

Многочлены взаимно просты если их наибольшим общим делителем является многочлен нулевой степени.

Критерий взаимной простоты многочленов

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно простыми $\iff \exists u(x), v(x) \in F[x]$ такие, что $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$

Доказательство

1. $\implies$ - очевидено, следует из предыдущей теоремы.
2. $\impliedby$. От противного. Пусть $d(x) = \text{НОД}(f(x),\ g(x))$ и $\deg(d(x)) \geq 1$. Тогда, поскольку $d(x)$ делит левую часть равенства, то $d(x) \mid 1$, но это невозможно, т.к. $\deg d(x) > 1$. Противоречие.

Свойства взаимно простых многочленов

1. Если $f(x) \mid h(x)$ и $g(x) \mid h(x)$, то $(f(x)g(x)) \mid h(x)$
2. Если $f(x) \mid (g(x)h(x))$, то $f(x) \mid h(x)$

Доказательство

Пусть $f(x) = a(x)h(x), g(x) = b(x)h(x)$. По критерию взаимной простоты $\exists u(x), g(x) : f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$. Домножим на $h(x)$:

$$f(x)h(x)u(x) + g(x)h(x)v(x) = h(x)$$

$$f(x)b(x)g(x)u(x) + g(x)a(x)f(x)v(x) = h(x)$$

$$(f(x)g(x))(b(x)u(x) + a(x)v(x)) = h(x)$$

$\implies (f(x)g(x)) \mid h(x)$