26. Сингулярное представление линейного отображения.

Рассмотрим два подпространства со скалярным произведением U, V и линейный оператор $\mathcal{A} : U \to V$

Теорема Фредгольма Если $\mathcal{A} : U \to V$ - линейный оператор пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, mo \quad (\mathrm{Im}\mathcal{A})^{\perp} = KerA^{*}$

Доказательство

Пусть $y \in Ker\mathcal{A}^{*}$, т.е. $\mathcal{A}^{*}y = 0$. Чтобы доказать, что $y \in (\mathrm{Im}\mathcal{A})^{\perp}$, возьмем любой вектор $x \in \mathrm{Im}\mathcal{A}$ и проверим, что $y \perp x$. Поскольку $x = \mathcal{A}u$ для некоторого вектора $u \in U$ имеем

$$xy = \mathcal{A}uy = uA^{*}y = 0$$

Обратно, пусть $y \in (\mathrm{Im}\mathcal{A})^{\perp}$ тогда $xy = 0$ ля любого вектора $x \in \mathrm{Im}\mathcal{A}$ поэтому для произвольного вектора $u \in U$ имеем

$$0 = \mathcal{A}uy = u\mathcal{A}^{*}y$$

Вектор $A^{*}y$ ортогонален произвольному вектору $u \in U$ и поэтому он нулевой. Отсюда $y \in KerA^{*}$

Доказали

Теорема Фредгольма даёт ортогональное разложение пространства V:

$V = Ker\mathcal{A}^{*} \oplus \mathrm{Im}\mathcal{A}$

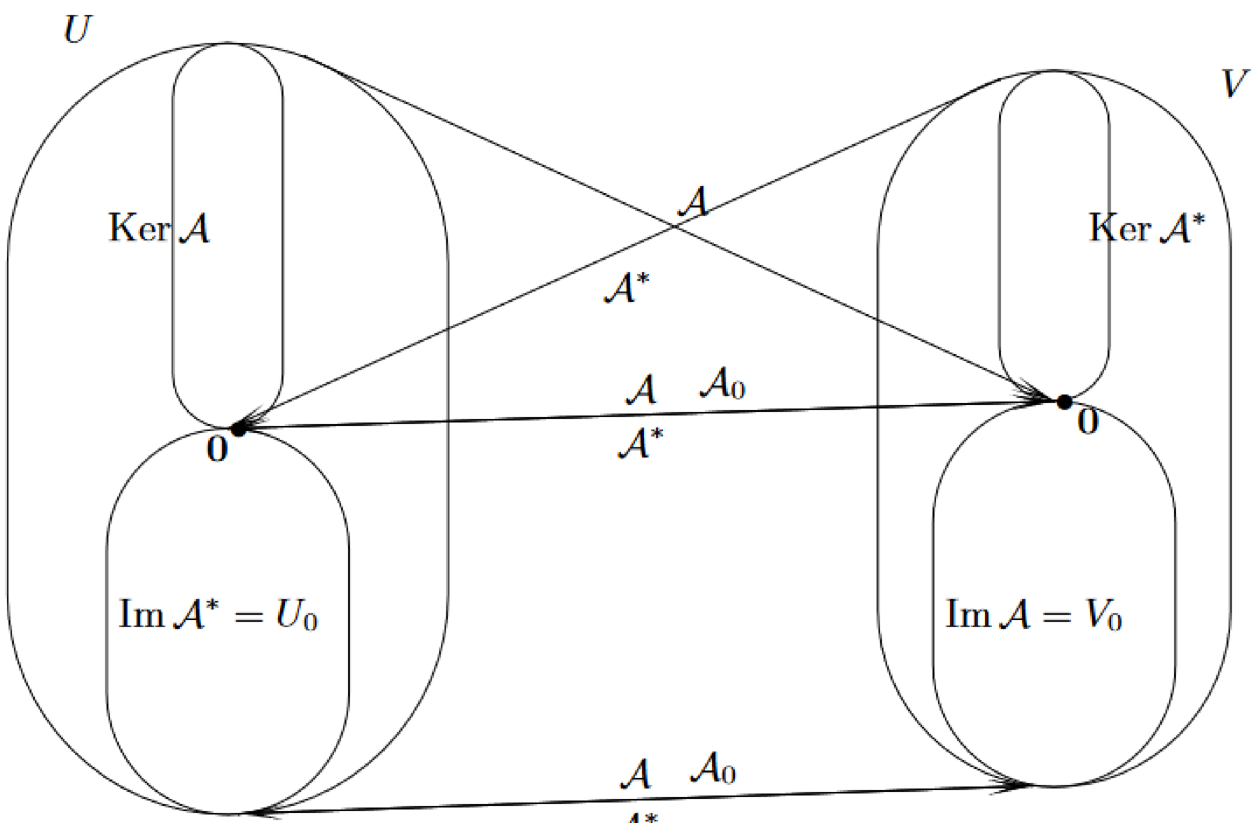
Применяя ту же теорему к сопряженному оператору $\mathcal{A}^{*} : V \to U$ получим ортогональное разложение пространства U:

$U = Ker\mathcal{A} \oplus \mathrm{Im}\mathcal{A}^{*}*$

Положим $U_0 := \mathrm{Im}\mathcal{A}^{*}, V_0 := \mathrm{Im}\mathcal{A}$ и обозначим через A_0 ограничение оператора $\mathcal{A}$ на U_0. Это обозначает что вектор A_0x определен, только если $x \in U_0$ в этом случае $A_0x := \mathcal{A}x$

Предложение $\mathcal{A}_0$ - изоморфизм пространства U_0 на V_0

Конфигурация из предложения



Предложение $Ker\mathcal{A} = Ker\mathcal{A}\mathcal{A}^{*}$

Доказательств не будет, потому что там много..

Теорема сингулярное представление линейного оператора

Для любого линейного оператора $\mathcal{A} : U \to V$ пространств со скалярным произведением в U и V можно выбрать ортонормированные базисы, в которых его матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_r & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

, где r - ранг $\mathcal{A}$, а $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ - положительные действительные числа определяемые однозначно с точностью до порядка.

Доказательство

Осталось доказать только то, что если матрица оператора $\mathcal{A}$ в каких-то ортонормированных матрицах имеет вид из теоремы, то диагональные элементы этой матрицы определен однозначно с точностью до порядка.

Действительно, если B_U и B_V - какие-то ортонормированные базисы U и V, а A - матрица оператора $\mathcal{A}$ в этих базисах, то матрица сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ в тех же базисах есть A^*.

Если A имеет вид из теоремы, то $A^* = A^T$. Поэтому матрица оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ в базисе B_U - квадратная диагональная матрица с ненулевыми элементами диагонали равными $\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_r^2$ Если матрица оператор в некотором базисе диагональна, то на диагонали стоят его собственные значения. Значит $\mu_1^2, \mu_2^2, \dots \mu_r^2$ - собственные значения оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, а следовательно $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ есть в точности сингулярные числа оператора $\mathcal{A}$ и не зависят от базисов B_U и B_V