Определитель произведения матриц

Если A, B - квадратные матрицы размера $n \times n$, то $|AB| = |A| \cdot |B|$

Доказательство

Построим специальную матрицу $D = \begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}$, где $-E$ - единичная матрица размера $n \times n$, у которой на главной диагонали стоят -1, а остальные элементы - нули. Очевидно, что D - транспонированная к полураспавшейся, и её определитель $|D| = |A| \cdot |B|$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Начнём обнулять позиции, где есть элементы b_{ij}. Далее к $n+1$-му столбцу прибавим второй столбец, умноженный на b_{21}. Далее к $n+1$-му столбцу прибавим n-ый, умноженный на b_{n1}. Таким образом, в первых n строках получившейся матрицы расположен первый столбец матрицы $A \cdot B$. Проделывая аналогичные действия со $n+2$-м столбцом, далее - с $2n$ столбцом, получим следующую матрицу: $\begin{vmatrix} A & C \\ -E & 0 \end{vmatrix}$. Переставим $n+1$-й столбец с 1-м, $n+2$-й - со 2-м, и так далее.

Получим определитель следующего вида: $(-1)^n \begin{vmatrix} C & A \\ O & -E \end{vmatrix}$