21. Сопряженное отображение. Свойства сопряженного отображения. Единственность сопряженного отображения.

Сопряженное отображение Пусть L_1 и L_2 - пространства со скалярным произведением. Пусть $f : L_1 \mapsto L_2$ - некоторая функция. Говорят, что Функция $g : L_2 \mapsto L_1$ сопряжена с функцией f, если для любой пары векторов x и y имеет место $(f(x), y) = (x, g(y))$.
Сопряжённую к f функцию принято обозначать f^*.

Теорема о единственности сопряжённой функции
Если для функции f существует сопряжённая функция g, то g - единственна.
Доказательство
От противного. Пусть сопряжённых функций две: g_1 и g_2. Тогда
$\forall x, y : (f(x), y) = (x, g_1(y)),\ (f(x), y) = (x, g_2(y))$. Тогда
$(x, g_1(y)) = (x, g_2(y)) \implies (x, g_1(y)) - (x, g_2(y)) = 0$. Тогда $(x, g_1(y) - g_2(y)) = 0$. Но так как это выполняется для всех x, то значения g_1 и g_2 совпадают на всей области определения.

Теорема о линейности сопряжённой функции
Если у функции f существует сопряжённая g, то g - линейная

Доказательство
$\forall x, y : (f(x), y) = (x, g(y))$. Проверяем свойства линейности:

1. $\forall y_1, y_2 \in L_2$ покажем, что $g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$. $f \forall x \in L_1 (f(x), y_1 + y_2) = (x, g(y_1 + y_2))$. Тогда $(f(x), y_1 + y_2) = (f(x), y_1 + y_2) = (f(x), y_1) + (f(x), y_2) = (x, g(y_1)) + (x, g(y_2))$. Поскольку это имеет место для любого x, то $g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$
2. Расин сказал проверить самостоятельно. Я услышал: "киньте в меня пулл реквестом".

Теорема: свойства сопряжения
Пусть f, g, h - линейные операторы из конечномерного пространства L_1 в L_2, и α - скаляр. Тогда

1. $(f + g)^* = f^* + g^*$
2. $(\alpha f)^* = \overline{\alpha} f^*$
3. $(fh)^* = h^* f^*$

Доказательство
3) $(fh(x), y) = (h(x), f^*(y)) = (x, h^* f^*(y))$