31. Закон инерции вещественных квадратичных форм.

Теорема: закон инерции квадратичных форм

Если квадратичная форма над R приведена двумя различными невырожденными преобразованиями к каноническому виду, то полученные формы имеют одинаковое число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов при квадратах.

Доказательство

Предположим, что мы привели квадратичную форму $f = X^T AX$ к каноническому виду $g = Y^T DY$. Пусть замена имеет вид $X = TY$, где матрица T ортогональна (метод приведения к главным осям). В этом случае $f - Y^T T^T ATY$, $g = Y^T DY$. Таким образом, $D = T^T AA^T$. Ранги матриц A и D совпадают, поэтому $r(AB) \leq \min\ r(A)\, r(B)$. Поэтому количество нулевых коэффициентов совпадает.

Предположим теперь, что форма f приводится к каноническому виду невырожденной линейной заменой $x = Ty$:

$$f(y_1, \dots, y_n) = t_1 y_1^2 + \dots + t_k y_k^2 - t_{k+1} y_{k+1}^2 - \dots - t_{k+1} y_{k+1}^2,$$
$$t_i > 0,\ i = 1, \dots, k + l$$

Предположим теперь, что форма f приводится к каноническому виду другой невырожденной линейной заменой $x = Sz$:

$$f(y_1, \dots, y_n) = s_1 z_1^2 + \dots + s_p z_p^2 - s_{p+1} z_{p+1}^2 - \dots - s_{p+1} z_{p+1}^2,$$
$$s_i > 0,\ i = 1, \dots, p + q$$

Таким образом, у нас $k + l = p + q$. Будем считать, что $k < p$. Замены переменных в общем виде:

$$x = Ty: \quad \begin{cases} x_1 = b_{11} y_1 + \dots + b_{1n} y_n \\ \dots \\ x_n = b_{n1} y_1 + \dots + b_{nn} y_n \end{cases} \implies y = T^{-1} x$$

$$x = Sz: \quad \begin{cases} x_1 = c_{11} z_1 + \dots + c_{1n} z_n \\ \dots \\ x_n = c_{n1} z_1 + \dots + c_{nn} z_n \end{cases} \implies y = S^{-1} Y$$

$$\begin{cases} y_1 = d_{11} x_1 + \dots + d_{1n} x_n \\ \dots \\ y_n = d_{n1} x_1 + \dots + d_{nn} x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = f_{11} x_1 + \dots + f_{1n} x_n \\ \dots \\ z_n = f_{n1} x_1 + \dots + f_{nn} x_n \end{cases}$$

Покажем, что существует ненулевой набор переменных $x_1, \dots, x_n$ такой, что $y_1 = y_2 = \dots = y_k = z_{p+1} = z_{p+2} = \dots = z_n = 0$.
Таким образом, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + \dots + d_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ d_{k1}x_1 + \dots + d_{kn}x_n = 0 \\ f_{p+11}x_1 + \dots + f_{p+1n}x_n = 0 \\ \dots \\ f_{n1}x_1 + \dots + f_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

В этой системе $k + n - p < n$ уравнений, она однородна $\implies$ их бесконечно много, то есть существует ненулевое решение $x'_1, \dots, x'_n$. Такому решению однородной системы соответствуют решения

$$\begin{cases} x'_1 = c_{11}z_1 + \dots + c_{1n}z_n \\ \dots \\ x'_n = c_{n1}z_1 + \dots + c_{nn}z_n \end{cases} \implies y = S^{-1}Y$$

$$\begin{cases} x'_1 = b_{11}y_1 + \dots + b_{1n}y_n \\ \dots \\ x'_n = b_{n1}y_1 + \dots + b_{nn}y_n \end{cases} \implies y = T^{-1}x$$

По предположению выше:

$$y_1 = y_2 = \dots = y_k = z_{p+1} = z_{p+2} = \dots = z_n = 0$$

А значит

$$y'_1 = y'_2 = \dots = y'_k = z'_{p+1} = z'_{p+2} = \dots = z'_n = 0$$

Тогда

$$f(x'_1, \dots, x'_n) = f(y'_1, \dots, y'_n) = t_1(y_1)^2 + \dots + t_n(y_n)^2 =$$

$$= -t_{k+1}(y_1)^2 - \dots - t_{k+1}(y_n)^2$$

$$f(x'_1, \dots, x'_n) = f(z'_1, \dots, z'_n) = s_1(z_1)^2 + \dots - s_n(z_n)^2 =$$

$$= s_1(z_1)^2 + \dots + s_p(z_p)^2$$

Таким образом, мы получили противоречие: при одинаковом наборе переменных получились числа разных знаков, которые по предположению должны быть равны.