Перестановки, подстановки, четность, нечетность. Свойства.

Перестановка - любая последовательность длины n на множестве $1, 2, \ldots, n$, в которой каждое число от 1 до n входит **один** раз

Подстановка - биекция (взаимно однозначное отображение) на множестве чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ в $\{1, 2, \ldots, n\}$

Число инверсий перестановки- количество пар вида (i, j), где $i < j$, j имеет меньший индекс чем i

Число инверсий подстановки - сумма чисел инверсии в верхнем и нижнем ряду.

Чётность перестановки/подстановки- чётная если число инверсий четное и наоборот.

Теорема о смене чётности перестановки: пусть g - перестановка. Тогда при перестановке любой пары элементов чётность подстановки меняется.

Доказательство: Пусть g имеет m инверсий.

1. Переставляем соседние элементы. $g = (i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n)$. Если $i_k < i_{k+1}$, то образуется ровно одна новая инверсия.
2. $(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_{s-1}, i_s, \ldots, i_n)$. Мы переставляем i_k и i_s.
   - $(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, , i_{k+2} \ldots, i_k, i_s, \ldots, i_n)$. Мы сделаем $s - 1 - k$ перестановок соседних элементов, тогда чётность поменяется $ s - 1 - k$ раз.
   - Просто переставляем i_k и i_s. $(i_1, \ldots, i_{k+1}, \ldots, i_{k+2}, \ldots, i_s, i_k, \ldots, i_n)$. Чётность меняется на 1.
   - Ведём i_s назад на то место, где сейчас находится i_{k+1}, на которой вначале стоял i_k. Снова после $s - 1 - k$ перестановок чётность поменяется.

     Осталось заметить, что чётность поменялась нечётное количество раз.

Теорема о чётность подстановок:

1. Любая подстановка может быть представлена в каноническом виде
2. Чётность подстановки не зависит от упорядочения верхнего ряда

   Доказательство:

1. Просто записываем подстановку по порядку. Очевидно, что ей соответствует то же самое отображение
2. $\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_i & \ldots & a_k & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_i & \ldots & b_k & \ldots & b_n \end{pmatrix}$. Переставим в этой подстановке i-й и k-й элементы. При этом сама подстановка не изменится. При этом по предыдущей теореме чётность не изменилась, т.к. одновременно изменились чётности верхнего и нижнего ряда.

Единичная подстановка - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$

Обратная подстановка - для $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$, подстановка имеет такую же чётность как и исходная.