UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas
Cálculo Numérico en una Variable
Curso 2021/22

Prof. S. Sánchez-Pedreño

Entrega de prácticas 2
22 de diciembre de 2021

Para poder corregir de forma adecuada las entregas de prácticas, seguiremos el siguiente proceso.

- Se creará una «Tarea» en el Aula Virtual correspondiente a esta entrega.
- Todos los programas de Octave que crees debes colocarlos en la carpeta `Biblioteca`, si son de propósito general, o bien en una carpeta denominada `Entrega2` si corresponden a programas que utilizan las funciones incluidas en `Biblioteca` y que resuelven distintos apartados concretos de la práctica.
- Una vez hayas terminado tu trabajo, debes crear un archivo `zip` de tu carpeta de trabajo con Octave y de forma que contenga al menos las dos carpetas anteriores. Si quieres incluir algún archivo de texto o pdf con comentarios u otras cuestiones puedes hacerlo en el mismo `zip`, pero fuera de la carpeta de trabajo de Octave.
- Finalmente debes subir este archivo `zip` a la Tarea del Aula Virtual.

Fecha de inicio: 20 de diciembre de 2021
Fecha de entrega: 12 de enero de 2022
Se valorarán positivamente cualquier tipo de comentarios y observaciones acerca de los ejercicios realizados y de los resultados numéricos.

Ejercicio 1

El objetivo de este ejercicio es implementar el cálculo de ceros y coeficientes que permiten utilizar la cuadratura de Gauss-Laguerre para integrales impropias de la forma

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx.$$

1. Los polinomios de Laguerre se pueden definir de forma inductiva mediante las igualdades

$$\begin{aligned} G_0(x) &= 1 \\ G_1(x) &= 1 - x \\ G_n(x) &= \frac{1}{n}\Big((2n-1-x)G_{n-1}(x) - (n-1)G_{n-2}(x)\Big), \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

   Implementa (en `/Biblioteca`) una función `polyLaguerre(n)` que devuelva una matriz con los coeficientes de los polinomios $G_0(x), G_1(x), \ldots, G_n(x)$. Observa que el polinomio $G_k(x)$ es de grado k, por tanto tendrás que igualar a cero los coeficientes de x^j para $j > k$. Como alternativa puedes hacer que devuelva una celda en lugar de una matriz.

2. Recordemos que los polinomios de Laguerre son polinomios ortogonales para el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x)\, dx$$

   y, según la proposición 3.13, todos sus ceros son simples y pertenecen a $(0, +\infty)$. Implementa una función llamada `cerosLaguerre` (en `/Biblioteca`) que utilice el método de Newton para aproximar los siete ceros $x_1 < x_2 < \ldots < x_7$ de $G_7(x)$, procediendo en la forma siguiente:

a) En primer lugar aproxima los ceros x_1 y x_7 (utiliza un resultado del curso que te permita encontrar condiciones iniciales adecuadas para el método de Newton).

b) Si $Q_1(x)$ es el polinomio deflacionado de $G_7(x)$ con respecto a las dos raíces aproximadas anteriores, aproxima la mayor y la menor de las raíces de $Q_1(x)$ y después refina dichas aproximaciones aplicando el método al propio $G_7(x)$.

c) Continúa el proceso hasta aproximar todas las raíces de $G_7(x)$.

3. Utilizando la función creada en el ejercicio 3 de la entrega de prácticas 1, calcula los coeficientes de Lagrange $L_1(x), \ldots, L_7(x)$, correspondientes a los ceros aproximados $x_1, \ldots, x_7$. Si no hiciste este ejercicio en la primera entrega, este es buen momento de retomarlo.

4. Ahora se trata de calcular los pesos de Gauss-Laguerre, es decir, los valores

$$c_k = \int_0^\infty e^{-x} L_k(x)\, dx$$

Para ello, observa que haciendo integración por partes estos pesos se pueden escribir como una combinación lineal de los coeficientes de $L_k(x)$: para ello basta que encuentres una fórmula recurrente para

$$\alpha_k := \int_0^\infty e^{-x} x^k\, dx.$$

5. Finalmente obtén la aproximación de la integral para el método de Gauss-Laguerre (con 7 puntos), mediante:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\, dx \approx \sum_{j=1}^{7} c_j f(x_j).$$

6. Para comprobar los cálculos, verifica el valor que obtienes como aproximación para las integrales:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} x\, dx = 1$$

(en este caso la aproximación debería ser exacta, aunque no lo sea realmente...).

7. Aplica todo lo anterior para aproximar las integrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x \cos(x)\, dx \quad \text{y} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2+x} dx$$

Los apartados 3, 4 y 5 puedes implementarlos en el propio script de este ejercicio o en funciones independientes (ya sea en la carpeta `/Entrega2` o en `/Biblioteca`).

Al final de este documento puedes encontrar una tabla de valores de ceros y pesos en el caso de G_7, para que puedas verificar tus cálculos. En la bibliografía de la página
https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss–Laguerre_quadrature
puedes encontrar tablas para otros polinomios de Laguerre (al final del documento he puesto un gráfico con los valores de los ceros y los pesos).

Voluntariamente puedes implementar los apartados anteriores para un polinomio de Laguerre arbitrario, en lugar de sólo para el de grado siete (en este caso incluye las funciones en `/Biblioteca`).

Ejercicio 2

Sea $D(0,1)$ el disco unidad en $\mathbb{R}^2$, es decir, $D(0,1) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Según el teorema de Fubini, se verifica la igualdad

$$\iint_{D(0,1)} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left(e^{-x^2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-y^2} dy \right) dx.$$

Utiliza dicha igualdad para aproximar el valor de la integral, utilizando al menos dos métodos distintos de aproximación de integrales de tu elección. El proceso consiste en aproximar la función

$$F(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-y^2} dy$$

para después aproximar

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} F(x)\, dx.$$

Ceros y pesos correspondientes a la cuadratura de Gaus-Laguerre para el polinomio G_7:

$n=7$	$n=7$
.19304 36765 60	.40931 89517 01
1.02666 48953 39	.42183 12778 62
2.56787 67449 51	.14712 63486 58
4.90035 30845 26	.(1) 20633 51446 87
8.18215 34445 63	.(2) 10740 10143 28
12.73418 02917 98	.(4) 15865 46434 86
19.39572 78622 63	.(7) 31703 15479 00

Los números entre paréntesis indican el número de ceros que siguen al punto decimal.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: pedreno@um.es