UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas
Cálculo Numérico en una Variable
Curso 2021/22

Prof. S. Sánchez-Pedreño

Práctica 5

13 de noviembre de 2021

Para realizar esta práctica necesitas descargar algunos script de Octave que he subido al Aula Virtual. Si no lo has hecho ya, descarga el archivo `Practica5Anadir_aBiblioteca.zip`, situado en la carpeta `CodigoPracticas` de los Recursos del AV. Descomprímelo y guarda su contenido en la carpeta `Biblioteca` que debe estar contenida en tu carpeta de trabajo con Octave de tu ordenador personal.

El objetivo general de esta práctica es experimentar en la aproximación de derivadas e integrales, en casos sencillos. Para ello, en `Biblioteca` dispones de las funciones siguientes

- `aproxDeriv3.m`, devuelve la aproximación de la derivada de una función en un punto mediante el método de evaluación en tres puntos, es decir, mediante el método de interpolación en tres puntos (véase la página 87 de las notas de clase). Requiere cuatro argumentos: la función `f` a derivar, el punto `x` donde aproximar $f'(x)$, el paso `h` que determina los puntos donde interpolar y, finalmente una cadena de caracteres `pos`: si `pos='i'` se aproxima la derivada evaluando en x, $x+h$ y $x+2h$; si `pos='d'` se aproxima evaluando en $x-2h$, $x-h$ y x; en cualquier otro caso se utilizan las diferencias centrales (evaluando en $x-h$ y $x+h$).
- `aproxDeriv3Vect.m`, sus argumentos son dos vectores `x` e `y`. El vector y debe ser el vector de imágenes de una función f, es decir `y=f(x)`. La función devuelve la aproximación de la derivada de f en los puntos del vector `x`.
- `aproxSegundaDeriv3.m`, espera tres argumentos `f`, `x` y `h`, devuelve la aproximación a la derivada segunda $f''(x)$ utilizando la fórmula $(f(x-h)-2f(x)+f(x+h))/h^2$.
- `trapecio.m`, devuelve la aproximación a la integral de una función en un intervalo calculada mediante la regla compuesta del trapecio. Sus argumentos son: la función `f` a integrar, los extremos del intervalo `a` y `b` donde se integra y el número de subintervalos `N` de la regla compuesta.
- `trapecioVect.m`, devuelve la aproximación a la integral mediante la regla del trapecio compuesta. Los argumentos son dos vectores `x` e `y`. El vector `y` debe ser `f(x)` donde f es la función a integrar. Los extremos de integración serán la primera y la última de las componentes de `x`, y se espera que estas componentes esté equiespaciadas.
- `simpson.m`, es lo análogo a `trapecio.m` pero para la regla compuesta de Simpson.
- `simpsonVect.m`, es lo análogo a `trapecioVect.m` pero para la regla compuesta de Simpson: el vector de abscisas `x` debe tener longitud impar.
- `gaussLegendreSimple.m`, calcula una aproximación a la integral de la función `g` (el primer argumento) en el intervalo $[-1,1]$ mediante la regla de Gauss-Legendre en un número de puntos dado por el segundo argumento `nG`. Los valores posibles para `nG` son 1, 2, 3, 4, 5 o 10 (aquellos para los que he incluido los puntos y pesos de la regla). No es una función para utilizar directamente, en su lugar utiliza la siguiente.
- `gaussLegendre.m`, calcula una aproximación a la integral de la función `f` (el primer argumento) en el intervalo de extremos `a` y `b` mediante la regla compuesta de Gauss-Legendre en `N` subintervalos. El último argumento, `nG`, tiene el mismo significado que el último argumento de `gaussLegendreSimple.m`, que es utilizada por `gaussLegendre.m`.

Antes de utilizar cualquiera de estas funciones, asegúrate de entender qué argumentos espera, su tipo y significado, así como qué salidas produce, su significado, orden y formato.

1. La aproximación de derivadas es extraordinariamente sensible a pequeñas variaciones en el valor de la función. En este ejercicio vamos a comprobar cómo puede influir en el cálculo de estas aproximaciones el hecho de que los valores de una función puedan estar perturbados por cierto «ruido» debido a los procedimientos de medida experimentales, por ejemplo. Para ello tomamos como modelo la perturbación de una función suave por ruido aleatorio con frecuencia elevada.

   Considera la función $\operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. La función `randn(n,m)` de Octave crea una matriz de tamaño $n \times m$ con coeficientes que son valores aleatorios con distribución normal de media 0 y varianza 1. Así vamos a considerar la función perturbada del seno:

   ```
   (1+m*rand(1,1))*sin(x)
   ```

   donde `m=0.01`. También puedes evaluarla en forma vectorial mediante

   ```
   (1+m*rand(1,L)).*sin(x)
   ```

   donde `L` debe ser la longitud del vector `x`.

   Para ambas funciones, el seno y su perturbada, calcula la función derivada aproximando por tres puntos utilizando un paso `h=m`.

   Calcula, y muestra en salida, el máximo de la diferencia del seno y de su perturbación, así como el de las derivadas aproximadas de ambas funciones. Dibuja en sendas ventanas las dos funciones y sus derivadas aproximadas.

   Puedes variar después los valores de `m` y `h` para realizar distintas experiencias.

   La lección a aprender de esta experiencia es que la derivación numérica no debería aplicarse a datos experimentales sin antes proceder a un «filtrado» que elimine el posible «ruido». Existen métodos para este filtrado que nosotros no estudiaremos.

2. Dibuja en una misma ventana las gráficas de $f(x) = x\cos(x^2)$ en el intervalo $[0, 10]$ y de su derivada $f'(x)$ aproximada mediante el método de los tres puntos.

   Añade una segunda ventana que dibuje la gráfica de la aproximación de $\int_0^x f(t)\,dt$, para $x \in [0, 10]$. Utiliza distintas reglas de cuadratura para aproximar esta función primitiva. También hay al menos dos estrategias para hacerlo, no distintos métodos de aproximación... sino estrategias para aproximar numéricamente. ¿Se te ocurre de qué estrategias se puede tratar? Utiliza ambas y compara gráficamente los resultados

   Para comparar los resultados de la aproximación de integrales con «los valores reales» puedes utilizar las funciones de Octave: `integral(f,a,b)` y `quad(f,a,b)`. Ambas aproximan la integral de `f` en el intervalo `[a,b]` utilizando métodos más sofisticados que los que nosotros hemos aprendido hasta ahora.

3. Programa una función `trapecioCorr.m` que implemente la aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la regla del trapecio corregida del ejercicio 3.9, en una versión de la regla compuesta. La función debe tener como argumentos: la función a integrar `f`; los extremos del intervalo donde integrar `a` y `b`; el número de subdivisiones del intervalo `N`; y las derivadas de `f` en el extremo izquierdo, `pi`, y en el derecho, `pf`. Puedes utilizar, si lo crees conveniente, la función `trapecio.m`.

   Guarda la función en la carpeta `Biblioteca`.

   a) Vamos a aproximar mediante la regla del trapecio compuesta corregida anterior la integral $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \pi$. Muestra en una tabla de salida los errores en la regla del trapecio y del trapecio corregida al tomar el número de subintervalos `N` igual a $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{12}$. Realiza también una tabla que muestre los cocientes de los errores sucesivos, en ambos métodos, para intentar aproximar el orden de precisión del método (algo similar a lo que hicimos en el ejemplo 3.10 de las notas del curso).

   b) Realiza la misma tarea anterior para la integral $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \pi$.
   Claramente los resultados son idénticos para ambas reglas, ¿comprendes por qué? Los errores en este caso son sorprendentemente pequeños, ¿alguna conjetura sobre el porqué?

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: pedreno@um.es