Prof. S. Sánchez-Pedreño

Práctica 3

25 de octubre de 2021

Para realizar esta práctica necesitas descargar algunos script de Octave que he subido al Aula Virtual. Si no lo has hecho ya, descarga el archivo `Practica4Anadir_aBiblioteca.zip`, situado en la carpeta `CodigoPracticas` de los Recursos del AV. Descomprímelo y guarda su contenido en la carpeta `Biblioteca` que debe estar contenida en tu carpeta de trabajo con Octave de tu ordenador personal.

El objetivo general de esta práctica es experimentar con la interpolación polinomial, tanto de Lagrange como de Hermite, con diversas funciones. Para ello, en `Biblioteca` dispones de las funciones relacionadas a continuación.

Para comprender bien las funciones, en particular, sus variables de entrada y salida debes tener en cuenta que para estas funciones construidas en Octave, un spline se identifica con los nodos en los que interpola $(x_0, \ldots, x_n)$ y los coeficientes de los distintos polinomios cúbicos que lo componen:

$$p_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

donde $p_i(x)$ es la pieza polinomial que forma el spline definida en $[x_i, x_{i+1}]$. Si el spline es sujeto necesitas proporcionar además los valores de la derivada en los puntos extremos x_0 y x_n. Ten en cuenta, finalmente, que para evaluar un spline en una abscisa se deben conocer los nodos, pues la evaluación necesita conocer en qué intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se encuentra dicha abscisa.

- `splineNatural.m`, devuelve los coeficientes b_i, c_i, d_i de los polinomios cúbicos que componen el spline natural.
- `splineSujeto.m`, devuelve los coeficientes b_i, c_i, d_i de los polinomios cúbicos que componen el spline sujeto. Se le suministra como variables, naturalmente, a demás de las coordenadas de los puntos que se interpolan, la derivada en los puntos inicial y final.
- `splineEval.m`, devuelve la evaluación de un spline en una abscisa (que puede ser un vector de abscisas).
- `splineTabla.m`, es una función auxiliar, en general innecesaria, que únicamente produce una salida impresa de los polinomios que componen el spline: necesita por tanto todos los datos que lo definen.

Antes de utilizar cualquiera de estas funciones, asegúrate de entender qué argumentos espera, su tipo y significado, así como qué salidas produce, su significado, orden y formato. Importante: ¡los nodos deben pasarse ordenados!

1. *Ejemplos sencillos*

   a) Considera la lista de puntos $\{(0, 1), (3, 0), (2, 2), (1, 4)\}$. Representa en un panel de dibujo el spline cúbico natural que interpola los puntos de la lista. ¿Serías capaz de dibujar de distinto color cada una de las tres piezas que componen el spline?

   b) Representa en otra ventana gráfica los splines cúbicos sujetos $S(x)$ que interpolan los mismos puntos y que tienen derivadas en los extremos $S'(0) = a, S'(3) = b$, para distintos valores de $(a, b) = (0, -1), (1, 5), (-2, -5)$ y $(-5, -1)$.

c) Considera los puntos $\{(0,0),(1,2),(2,4),(5,10)\}$. ¿Qué función spline natural debes encontrar que interpole dichos puntos? Responde a la cuestión antes de verificarlo con un pequeño programa... Es una forma de verificar que el programa de cálculo de splines funciona correctamente.

d) Responde a la misma pregunta anterior para un spline sujeto que interpola los puntos $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,8)$, $(3,27)$ y tiende derivada 0 en $x = 0$ y 27 en $x = 3$.

2. *Curvas "suaves" en el plano obtenidas mediante el cálculo de splines: aproximar una espiral de Arquímedes mediante splines cúbicos*

a) Consideramos una partición $\{\theta_i\}_{i=0}^{19}$ de 20 puntos equidistribuidos en el intervalo $[0, 4\pi]$. Calculamos los 20 puntos correspondientes en la espiral arquimediana, que tiene por ecuación en coordenadas polares $\rho = 2\theta$, con $\theta \in [0, 4\pi]$. Así, las ecuaciones cartesianas de la espiral son:

$$x(\theta) = 2\theta \cos\theta, \quad y(\theta) = 2\theta \operatorname{sen}\theta.$$

b) Con las listas de puntos $\{(\theta_i, x(\theta_i))\}$ y $\{(\theta_i, y(\theta_i)\}$ calculamos sendos splines cúbicos naturales, que llamaremos $x(\theta)$, $y(\theta)$.

c) Ahora representaremos en un panel gráfico la propia espiral arquimediana anterior y su aproximación por splines $(x(\theta), y(\theta))$.

d) Realiza ahora la misma tarea con splines sujetos, añadiendo derivadas en los extremos: $x'(0) = 2$, $x'(4\pi) = 2$, $y'(0) = 0$, $y'(4\pi) = 8\pi$.

e) Realiza la misma tarea con la cardioide (girada) de ecuación, en coordenadas polares, $\rho = 2(1 - \cos\theta)$. Ajusta el valor de las derivadas en el extremo para el spline sujeto.

3. El error en la aproximación por splines sujetos está dado por el teorema 2.8, que proporciona una acotación de este error en términos de h^4, siendo $h = \text{máx}\{x_{i+1} - x_i : i = 0, \ldots, n-1\}$. Sin embargo este teorema asume que la función aproximada es de clase $\mathscr{C}^4$. Este ejercicio intenta explorar cómo se comporta el error según las propiedades de la función y la distribución de nodos, en relación a dicha función.

a) Consideramos las funciones e^{-x} y $x^{5/2}$ sobre le intervalo $[0, 1]$, la segunda de las cuales no es de clase $\mathscr{C}^4$.

b) Para $n = 11$, calcula los splines naturales y sujetos correspondientes a ambas funciones en los n nodos siguientes:

1) $x_i = \frac{i-1}{n-1}$, $i = 1, \ldots, n$ (equidistribuidos).

2) $x_i = \left(\frac{i-1}{n-1}\right)^2$, $i = 1, \ldots, n$.

c) Para estimar el error, calcularemos el máximo del error en una muestra de puntos tomados en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Concretamente, calula el valor $e(i) = \text{máx}_j\{|f(x_{i,j}) - S(x_{i,j})|\}$ donde

$$x_{i,j} = x_i + \frac{j-1}{N-1}\Delta x_i$$

donde $N = 51$ y $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, para ambas familias de nodos del apartado anterior.

d) Comenta los resultados: ¿son los splines naturales menos precisos que los sujetos cerca de los extremos del intervalo? ¿Mejora la precisión de la aproximación en los nodos del segundo caso para $x^{5/2}$? ¿Encuentras una razón para esta mejora?

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: pedreno@um.es