UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas
Cálculo Numérico en una Variable
Curso 2021/22

Prof. S. Sánchez-Pedreño

Práctica 7. Aproximación de ceros

29 de noviembre de 2021

El objetivo general de esta práctica es el de realizar distintas experiencias con la aproximación de raíces de ecuaciones $f(x) = 0$, fundamentalmente con los métodos de Newton y de la secante. También se introducen en el primer ejercicio dos variantes del método de Newton, adecuadas al caso en que las raíces no son simples.

Estás invitado a realizar variaciones sobre los ejercicios planteados, en particular a utilizar los métodos de la bisección y de la regula falsi.

Funciones ya programadas en Octave

Para realizar esta práctica necesitas descargar algunos script de Octave que he subido al Aula Virtual. Si no lo has hecho ya, descarga el archivo `Practica7Anadir_aBiblioteca.zip`, situado en la carpeta `CodigoPracticas` de los Recursos del AV. Descomprímelo y guarda su contenido en la carpeta `Biblioteca` que debe estar contenida en tu carpeta de trabajo con Octave de tu ordenador personal.

Una vez realizada la tarea anterior, en `Biblioteca` dispones de las funciones siguientes.

- `biseccion.m`, para utilizar el método de la bisección. La función requiere los siguientes argumentos: `f`, la función $f(x)$, `a`, `b` los extremos del intervalo inicial para el método; una precisión o tolerancia `tol` y una argumento final `imprime`. Si la llamada se realiza asignando valor `1` al argumento `imprime`, la función irá imprimiendo los extremos de los intervalos de bisección sucesivos y los valores de la función en dichos extremos. La función devuelve una terna `[x,fx,npasos]`, donde `x` es la aproximación buscada a la raíz, `fx` es el valor de la función evaluada en `x` y `npasos` es el número de iteraciones del método que se han realizado antes de que se cumplan los criterios de parada. La función calcula internamente el número máximo de iteraciones (`maxit`) que garantizan la longitud del intervalo inferior a `tol` (véase la página 121 de las notas de clase) y se detiene una vez realizado dicho número de iteraciones.
- `regulaFalsi.m`, devuelve los mismos valores que `biseccion.m`. Sus argumentos son `f`, `a`, `b`, `tol`, `maxit`, `imprime` con el mismo significado que en el caso anterior (excepto que, ahora, `maxit` debemos enviarlo como argumento).
- `newton.m`, devuelve la misma terna que los casos anteriores. Los argumentos son `f`, `df`, `x0`, `tol`, `maxit`, `imprime`, donde `df` es la función derivada $f'(x)$ y `x0` es el punto inicial donde comienza el método de Newton. El resto de argumentos tienen el mismo significado que en los casos anteriores.
- `secante.m`, devuelve la misma terna y sus argumentos son `f`, `x0`, `x1`, `tol`, `maxit`, `imprime`, todos con el mismo significado, excepto `x0` y `x1` que son los dos puntos iniciales para el método de la secante.
- `newtonTabla.m`, es una función que utiliza el método de Newton, de la misma forma que `newton.m` pero que nos devuelve un vector con las abscisas calculadas en todas las iteraciones realizadas. El objetivo es poder manipular dichas abscisas, como haremos, por ejemplo, en el tercer ejercicio. La función devuelve `[x,fx,npasos,valores]`, los tres primeros son los de los casos anteriores y `valores` es el vector de abscisas. Sus argumentos son los mismos que los de `newton.m` excepto `imprime`, que ya no tiene realmente sentido.
- `secanteTabla.m`, es lo análogo a `newtonTabla.m` pero para el método de la secante.

- `muller.m`, devuelve la misma terna que el resto de funciones (excepto `*Tabla.m`). Sus argumentos son `f`, `x0`, `x1`, `x2`, `tol`, `maxit`, `imprime`, donde `x0`, `x1` y `x2` son los tres puntos iniciales para el método de Muller.

Antes de utilizar cualquiera de estas funciones, asegúrate de entender qué argumentos espera, su tipo y significado, así como qué salidas produce, su significado, orden y formato.

Ejercicios

1. Considera las funciones $f(x) = e^{-x/60}$ y $g(x) = \cos(\pi x)$. Queremos encontrar los puntos donde las gráficas de ambas funciones se cortan.

   a) Dibuja en una ventana las gráficas de ambas funciones en el intervalo $[1, 4]$.

   b) Pensando en el método de Newton y el teorema global de convergencia de este método (teorema 4.14 de los apuntes), ¿eres capaz de detectar una cierta regularidad en los puntos de corte que te permita intuir cómo elegir los puntos iniciales para el método de Newton? Si no lo ves claro, dibuja en otra ventana la gráfica de $f(x) - g(x)$.

   c) Determina, usando el método de Newton, los 100 primeros puntos positivos de corte de las gráficas. Una vez determinados, incluye en el gráfico de las dos funciones una marca en dichos puntos de corte.

2. La distribución normal estándar está definida por

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

   Recuerda que $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

   a) Aproxima el valor de $\overline{x}$ tal que $\Phi(\overline{x}) = 0.9757$. Si tienes tiempo, realiza la aproximación al menos con dos métodos distintos. Compara los resultados y el tiempo de ejecución (`tic`...`toc`).

   b) Tal y como están programados nuestros algoritmos de búsqueda de raíces, en el apartado anterior habrás tenido que realizar muchos cálculos innecesarios, pues para aproximar por ejemplo $\Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n)$ debes haber calculado la integral desde 0 hasta x_{n+1} y también desde 0 hasta x_n, mientras que teniendo en cuenta que

$$\Phi(x_{n+1}) = \Phi(x_n) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-t^2/2} dt$$

   hubiera bastado con calcular sólo la integral de x_n a x_{n+1}.

   Programa en este mismo ejercicio el método de Newton para este caso particular directamente, utilizando los incrementos en el valor de la integral que acabamos de comentar. Utilízalo para aproximar $\overline{x}$ y compara los tiempos de ejecución con los del apartado anterior.

3. Tratamos de aproximar un cero $\overline{x}$ de $f(x) = 0$ con f de clase $\mathscr{C}^2$. Según los teoremas que hemos estudiado (o estudiaremos), si $\overline{x}$ es un cero simple, los métodos de Newton y la secante para aproximación de una raíz de $f(x) = 0$ tienen orden de convergencia al menos 2 y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Más aún, se conocen las constantes asintóticas del error:

   - para el método de Newton

$$\lim_n \frac{|\overline{x} - x_{n+1}|}{|\overline{x} - x_n|^2} = \left| \frac{f''(\overline{x})}{2f'(\overline{x})} \right|;$$

   - para el método de la secante

$$\lim_n \frac{|\overline{x} - x_{n+1}|}{|\overline{x} - x_n|^p} = \left| \frac{f''(\overline{x})}{2f'(\overline{x})} \right|^{1/p}$$

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: pedreno@um.es

donde p es el número áureo y estamos suponiendo $f''(\overline{x}) \neq 0$ (en caso contrario el orden sería mayor).

Cuando $\overline{x}$ no es un cero simple los resultados anteriores no son ciertos, aunque ambos métodos exhiben convergencia al menos lineal.

Consideramos las funciones $f(x) = 1 - e^{1-x}$ y $g(x) = 1 - xe^{1-x}$. Ambas tienen un cero en $\overline{x} = 1$, en el primer caso el cero es simple, en el segundo es doble.

a) Para el método de Newton y el de la secante aplicados a $f(x) = 0$, con tolerancia $\frac{1}{2}10^{-10}$, calcula los cocientes

$$\frac{|\overline{x} - x_{n+1}|}{|\overline{x} - x_n|^m}$$

con $m = 2$ y $m = p$ respectivamente. Calcula las constantes asintóticas previstas y hazte una idea de la aproximación a estas constantes.

b) Realiza el mismo cálculo con la ecuación $g(x) = 0$. Comprueba que los valores obtenidos crecen lo que indica que los límites considerados son infinitos. Compara el número de iteraciones que se necesitan para cada una de las dos funciones (puede que para tener convergencia necesites rebajar la tolerancia para el caso de la función $g(x)$).

c) El ejercicio 4.11 nos indica que si $\overline{x}$ es un cero de multiplicidad $q \geq 1$ de $g(x)$ entonces es un cero simple de $h(x) = g(x)/g'(x)$, por tanto podemos aplicar los métodos a esta nueva función. Realiza los mismos cálculos anteriores con ambos métodos aplicados a la función $h(x)$. Comprueba que ahora el orden de convergencia vuelve a ser el correspondiente para ceros simples en cada método.

d) Una modificación del método de Newton es eficaz para aproximar raíces múltiples, aunque requiere conocer a priori la multiplicidad de la raíz (lo que es desconocido, en general). Esta modificación es la siguiente: si $\overline{x}$ es un cero de f de multiplicidad q (es decir, $f'(\overline{x}) = f''(\overline{x}) = \cdots = f^{(q-1)}(\overline{x}) = 0$ y $f^{(q)}(\overline{x}) \neq 0$, entonces calculamos las iteraciones en la forma:

$$x_{n+1} = x_n - q\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Modifica la función `newtonTabla.m` para que implemente este método. Guarda la modificación en `/Biblioteca` con el nombre `newtonMultipleTabla`. Debe tener como argumentos los mismos que `newtonTabla` y, además, el valor de la multiplicidad q y devolver los mismos valores que `newtonTabla`.

Utiliza dicha modificación para hacer los mismos cálculos que en los aprtados anteriores para la función $g(x)$ con este nuevo método de Newton modificado.

4. Realiza el ejercicio 4.12 de las notas de clase: aproximar la única raíz positiva de $x^6 - x - 1$ mediante el método de Muller, con los datos iniciales $x_0 = 2$, $x_1 = 1.5$ y $x_2 = 1$. Volver a realizar la misma tarea con las condiciones iniciales $x_0 = 2$, $x_1 = 1.7$ y $x_2 = 1.5$ comprobando que en este último caso los cálculos intermedios se realizan en el campo complejo.

Departamento de Matemáticas. Campus de Espinardo. 30100 Espinardo Murcia
e-mail: pedreno@um.es