Gọi f\_ij là số cách cho i người và chỉ nhìn thấy j người khi xếp. Đương nhiên có i >= j.

Kết quả cần tìm là f\_nm

Nhận xét với j = 1, tức chỉ nhìn thấy 1 người trong hàng, khi đó người cao nhất đứng đầu dãy, các người phía sau xếp ngẫu nhiên, do đó dễ dàng có: f(i)(1) = (i-1)!

Với j > 1, để đưa về bài toán nhỏ hơn, ta cần xếp người cao nhất trước, giả sử đã chọn được vị trí cho người cao nhất là i, khi đó cần xếp i-1 người còn lại vào trước và sau người này. Những người xếp vào sau thì sẽ bị che hết, do đó f\_ij lúc này phụ thuộc vào cách xếp f(k)(j-1) người đứng trước i (k ngươi đứng trước cần nhìn thấy j-1 người vì những người xếp sau i bị che hết)

Nhận thấy k thằng đứng trước i luôn lùn hơn i, và chiều cao của k thằng này là phân biệt (do ban đầu n người là phân biệt chiều cao). Thứ 2 điều kiện của k là:

* k >= j-1 : cần tối thiểu j-1 thằng
* k <= i-1 : tối đa được i-1 thằng

Do đó có C\_k\_(i-1) cách chọn k thằng này với C\_k\_n là tổ hợp chập k của n.

Với mỗi cách chọn k, có f\_k\_(j-1) cách xếp, ngoài ra nhân thêm cách xếp i-k-1 thằng còn lại sau i là (i-k-1)! cách nữa.

Trước hết có công thức QHĐ để tính f\_ij là:

f(i)(j) = sum( C(k)(i-1) \* f(k)(j-1) \* (i-k-1)! )

Tuy nhiên đến đây thì chưa để giải được trong O(N^2) vì để tính i,j phải tốn thêm O(N) nữa để tính, do đó tốn O(N^3)

Biến đổi thêm tí nữa:

C(k)(i-1) \* (i-k-1)! = (i-1)! / [k! \* (i-1-k!)] \* (i-k-1)!

= (i-1)! / k!

==> f(i)(j) = sum ( f(k)(j-1) \* (i-1)! / k! )

= (i-1)! \* sum ( f(k)(j-1) / k! )

Tới đây có thể tính được f\_ij trong O(1) vì đã rút được (i-1)! ra ngoài, và sum( ... ) có thể tính được trong quá trình tính i

Tuy nhiên có phép chia trong biểu thức, do đó mod sẽ bị sai, dùng định lý **Fermat** cho bước này nữa là OK:

Định lý Fermat: cho p là số nguyên tố thì a^(p-1) % p = 1

Có số mod = 1e9+7 là số nguyên tố nên là:

f(i)(j) = (i-1)! \* sum ( f(k)(j-1) / k! ) % mod

= (i-1)! \* sum ( f(k)(j-1) \* (k!)^-1 ) % mod

= (i-1)! \* sum ( f(k)(j-1) \* (k!)^-1 \* (k!)^(p-1) ) % mod

= (i-1)! \* sum ( f(k)(j-1) \* (k!)^(p-2) ) % mod

Sol:

<https://ideone.com/Yka1Ip>