VID46 INTRODUKTION AV DIFFERENTIAL

den 28 juli 2024 20:53

$F(x,y)$ differentierbar i (x,y) om

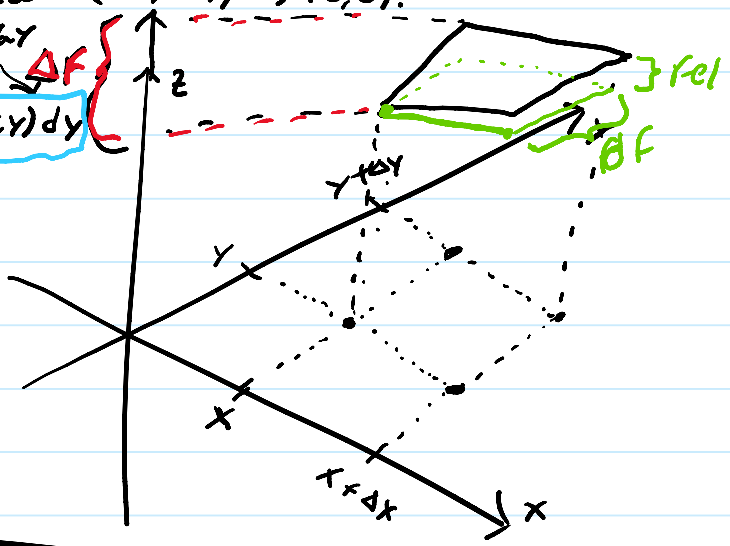
$$\underbrace{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}_{\Delta f} = \underbrace{f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y}_{df} + \underbrace{\rho(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}_{\text{Felet}}$$

där $\rho(\Delta x, \Delta y) \to 0$ då $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

deltax deltaY

$$\boxed{df = f'(x,y)dx + f'_y(x,y)dy}$$

differentialen av f i punkten (x,y).



$$\boxed{df = f'(x,y)dx + f'_y(x,y)dy}$$

Ex: $f(x,y) = \ln|x^2+xy|$

$$df = \frac{2x+y}{x^2+xy}dx + \frac{x}{x^2+xy}dy$$

Vi vill approximera skillnaden mellan $f(2,1)$ och $f(2.01, 1.03)$

Exakt: Sätter $(x,y) = (2,1)$
$(\Delta x, \Delta y) = (0.01, 0.03)$

riktig diff: $\Delta f = f(2.01, 1.03) - f(2,1) =$
svår att räkna $= \ln|(2.01)^2 + 2.01 \cdot 1.03| -$
(utan räknare) $\ln|2^2+2\cdot 1| \approx \underline{0.0182}$

Approximation: $(x,y) = (2,1)$, $(dx,dy) = (0.01, 0.03)$

Approximation: $(x,y)=(2,1)$, $(dx,dy)=(0.01,0.03)$

$$df=\frac{2\cdot 2+1}{2^2+2\cdot 1}\cdot 0.01+\frac{2}{2^2+2\cdot 1}\cdot 0.03=$$

$$=\frac{5}{6}\,0{,}01+\frac{2}{6}\cdot 0.03=\frac{11}{6}\,0.01\approx 0.0183$$

Approximationen nära.

VID47 TAYLORUTVECKLING

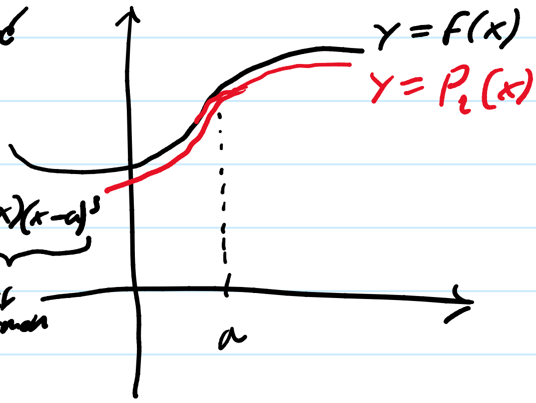
den 29 juli 2024 07:48

Taylorutveckling

Endim:

Begränsad x nära a

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \cdots}_{\text{Taylorpolynomet Ordning 2, } P_2(x)} + \underbrace{B(x)(x-a)^3}_{\text{rest termen}}$$



$$\boxed{x = a + h} \iff x - a = h$$

Begränsad nära 0

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \tilde{B}(h)h^3}$$

Flerdim: Approx. av $f(x,y)$ nära $(x,y) = (a,b)$

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\right)}_{Q(h,k)}$$

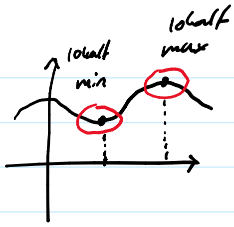
$$+ B(h,k)\underbrace{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3}_{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

VID48 LOKALA EXTREMPUNKTER

den 29 juli 2024 08:00

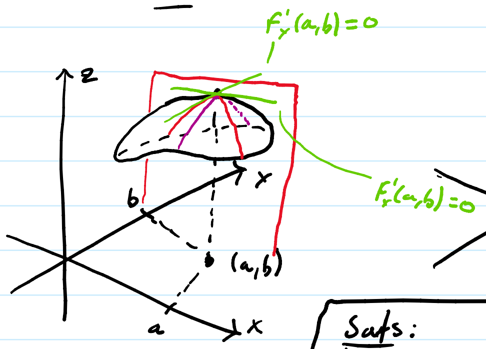
Lokala extrempunkter

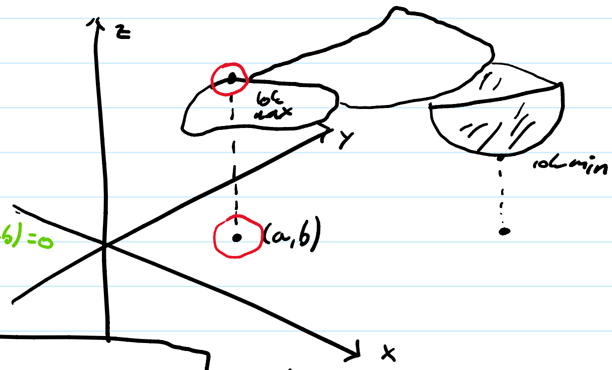
Lokala max/min.



Endim teckenstudie
innan och efter punkt
går inte i flerdim,
utan man använder andraderivatan

Flerdim: $f(x,y)$



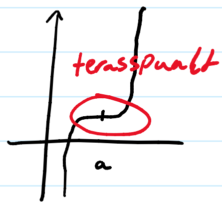


Sats:
(a,b) lok. extrempunkt
(a,b) inre punkt } $\Rightarrow (\text{grad } f)(a,b) = (0,0) = \bar{0}$

$\text{grad } f(a,b) = (f'_x(a,b), f'_y(a,b))$

Stationär punkt

OBS! Stationär punkt ⇏ lok. extrempunkt

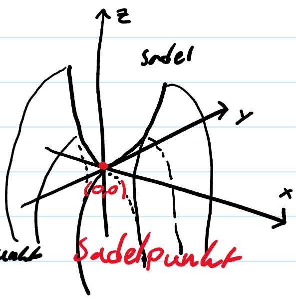


Ex: $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = -2y = 0 \end{cases}$$

(0,0) stat. p

(0,0) ej lok. extrempunkt



VID49 STATIONÄRA PUNKTER

den 29 juli 2024 19:54

Ex: Bestäm alla stationära punkter till

$$f(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^2.$$

$$\begin{cases} f'_x = 2x(1+y)^3 = 0 & (1) \\ f'_y = 3x^2(1+y)^2 + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

(1): $x = 0$ eller $y+1=0$

Sätt in i (2): $\underline{x=0}$: $2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (0,0) stationär punkt

$\underline{y=-1}$: $-2=0$ saknar lösning

Ex: $f(x,y) = -2y^2 - 4xy - x^4.$

$$\begin{cases} f'_x = -4y - 4x^3 = 0 \\ f'_y = -4y - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 & (1) \\ y = -x & (2) \end{cases}$$

$-x^3 = -x \Leftrightarrow x^3 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2-1) \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$

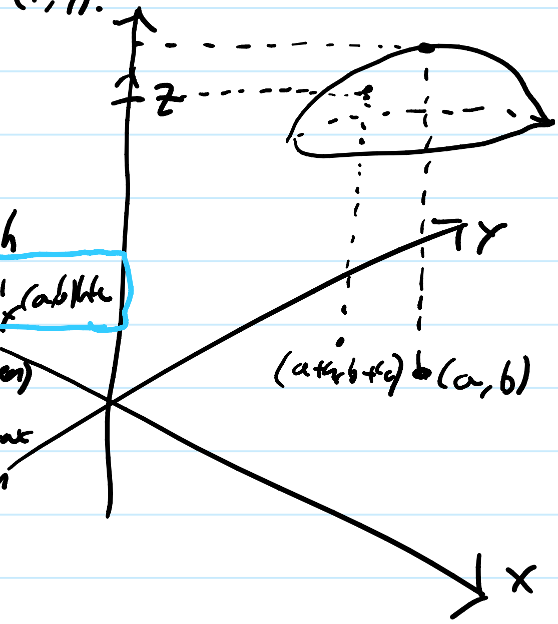
$\Leftrightarrow x = 0$ eller $x = \pm 1$

$\underline{y=-x}$: $(0,0), (1,-1), (-1,1)$ stationära punkter

VID50 KVADRATISK FORM Q(h,k), INTRODUKTION

den 29 juli 2024 20:02

Antag att (a,b) är en stationär punkt till $f(x,y)$.



Taylorutveckling.

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \underbrace{f'_x(a,b)}_{=0}h + \underbrace{f'_y(a,b)}_{=0}k + \frac{1}{2}\underbrace{\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\right)}_{\to Q(h,k)} + \text{Restterm (liten)}$$

$$\underbrace{f(a+h,b+k) - f(a,b)}_{\to\ <0 \text{ max},\ >0 \text{ min}} = \underbrace{\frac{1}{2}Q(h,k)}_{<0 \text{ max},\ >0 \text{ min}} + \text{Restterm}$$

$$\boxed{Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2}$$

I) $Q(h,k) > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$
positivt definit $\Rightarrow$ (a,b) lokalt min

II) $Q(h,k) < 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$
negativt definit $\Rightarrow$ (a,b) lokalt max

III) $Q(h,k)$ antar både positiva o negativa värden
<u>indefinit</u> $\Rightarrow$ (a,b) sadelpunkt

IV) $Q(h,k) \geq 0$ (≤ 0) och $Q(h,k) = 0$ för något $(h,k) \neq (0,0)$
<u>positivt semidefinit.</u> $\Rightarrow$ ingen slutsats kan dras

(negativt semidefinit)

VID51 BESTÄMNING AV LOKALA EXTREMPUNKTER, EX 1

den 29 juli 2024 20:16

Ex: Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^2$.

$f''_{xx} = 2(1+y)^3$

$f''_{xy} = 6x(1+y)^2$

$f''_{yy} = 6x^2(1+y) + 2$

Lösning:

$$\begin{cases} f'_x = 2x(1+y)^3 = 0 & ① \\ f'_y = 3x^2(1+y)^2 + 2y = 0 & ② \end{cases}$$

I)

①: $x = 0$ eller $y = -1$

Sätt in i ②: $\underline{x=0}$: $2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ stat. punkt $\boxed{(0,0)}$

$\underline{y=-1}$: $-2 = 0$ saknar lösning

II) $\underline{(0,0)}$: $Q(h,k) = f''_{xx}(0,0)h^2 + 2f''_{xy}(0,0)hk + f''_{yy}(0,0)k^2 =$

$= 2h^2 + 2\cdot 0\cdot h\cdot k + 2k^2 = 2h^2 + 2k^2 \geq 0$

med likhet endast då $(h,k) = (0,0)$

pos. def $\Rightarrow (0,0)$ lok. min.

VID52 - KVADRATISK FIM Q(h,k), EXEMPEL

den 2 augusti 2024 12:34

$$\boxed{Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2}$$

a) $Q(h,k) = h^2 + hk + k^2$ kvad. kompl.

$$= \left(h + \tfrac{1}{2}k\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}k\right)^2 + k^2 =$$

$$= \underset{+}{\left(h + \tfrac{1}{2}k\right)^2} + \tfrac{3}{4}\underset{+}{k^2} \geq 0$$ med likhet endast $(h,k) = (0,0)$

pos. def.

b) $Q(h,k) = h^2 + 2hk + k^2 =$

$$= (h+k)^2 \geq 0$$ med likhet t.ex då $(h,k) = (1,-1)$ (och typ alla värden på samma sätt $(x,-x), (y,-y)$)

positivt semidefinit.

c) $Q(h,k) = -h^2 + 4hk - 3k^2 = -(h^2 - 4hk + 3k^2) =$

$$= -\left((h-2k)^2 - (2k^2)^2 + 3k^2\right) = -(h-2k)^2 + k^2$$

indefinit.

VID53 BESTÄMNING AV LOKALA EXTREMPUNKTER, EX 2

den 2 augusti 2024 12:58

Ex: Bestäm alla lok. extremp. till

$f(x,y) = -2y^2 - 4xy - x^4$

Lösning: Stat punkter:

$$\begin{cases} f'_x = -4y - 4x^3 = 0 \iff y = -x^3 \\ f'_y = -4y - 4x = 0 \iff y = -x \end{cases}$$

$-x^3 = -x \iff x^3 - x = 0 \iff x(x-1)(x+1) = 0$

$\iff x = 0$ eller $x = \pm 1$

stat. punkter $(0,0), (1,-1), (-1,1)$

$$Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2$$

$f''_{xx} = -12x^2$

$f''_{xy} = -4$

$f''_{yy} = -4$

$(0,0)$: $Q(h,k) = \cancel{0h^2} - 8hk - 4k^2 =$

$= -4(k^2 + 2hk) = -4((k+h)^2 - h^2) =$

$= -4(k+h)^2 + 4h^2$ indefinit

sadelp. (ej lok. extremp)

$(1,-1)$: $Q(h,k) = -12h^2 - 8hk - 4k^2 = -4(3h^2 + 2hk + k^2) =$

$= -4((k+h)^2 - h^2 + 3h^2) = -4(k+h)^2 - 8h^2 \leq 0$

↳ likhet omm $(h,k) = (0,0)$

lokal maxpunkt neg. definit

$(-1,1)$: Samma $Q(h,k)$ för $(1,-1) \Rightarrow$ lok maxpunkt

VID54 LOKALA EXTREMPUNKTER AV FLER ÄN TVÅ VARIABLER

den 2 augusti 2024 13:11

$\boxed{f(x,y,z)}$

f'_x — $=0$

f'_y — $=0$

f'_z — $=0$

$$\boxed{Q(h,k,L) = f''_{xx}(a,b)h^2 + f''_{yy}(a,b)k^2 + f''_{zz}(a,b)L^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + 2f''_{xz}(a,b)hL + 2f''_{yz}(a,b)kL}$$

$$Q(h,k,L) = h^2 + 2k^2 + 6L^2 + 2hk + 4hL + 6kL$$

$$= (h+(k+2L))^2 - (k+2L)^2 + 2k^2 + 6L^2 + 6kL$$

$$= (h+k+2L)^2 + k^2 + 2kL + 2L^2 =$$

$$= (h+k+2L)^2 + (k+L)^2 - L^2 + 2L^2$$

$$= (h+k+2L)^2 + (k+L)^2 + L^2 \geq 0$$

pos. def

=> lok. min