Del A - 1a

den 20 augusti 2024 18:22

$P: (1,1,2)$

$x^2 + xyz + z^3 = 11$

Tangentplanet ges av

$F'_x(x,y,z)(x-a) + F'_y(x,y,z)(y-b) + F'_z(x,y,z)(z-c)$

sätter $F(x,y,z) = x^2 + xyz + z^3 - 11$

$F'_x = 2x + yz$

$F'_y = xz$

$F'_z = xy + 3z^2$

$F'_x(1,1,2) = 2 + 1\cdot 2 = 4$

$F'_y(1,1,2) = 1\cdot 2 = 2$

$F'_z(1,1,2) = 1\cdot 1 + 3\cdot 2^2 = 1 + 3\cdot 4 = 13$

Så tangentplanet ges av

$4(x-1) + 2(y-1) + 13(z-2) =$

$= 4x - 4 + 2y - 2 + 13z - 26 =$

$= 4x + 2y + 13z - 32$

Svar: $4x + 2y + 13z - 32 = 0$

2p

Del A - 1b

den 20 augusti 2024 19:42

$g(x,y) = y^2 \cdot \arcsin(x)$

$P: \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$

Riktningsderivatan ges av

$f'_v = \text{grad } g \cdot v$ i riktningen v

så $\text{grad } g = \left(y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ 2y\arcsin(x)\right)$

$$\text{grad } g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right) = \left(2^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1/2}}, 2 \cdot 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{4}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}, 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{4}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}, 4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{1/2}}, \pi\right)$$

maximal riktningsderivata i P

fås av $|\text{grad } g(P)|$

dvs

$$\left|\text{grad } g\left(\frac{4}{\sqrt{1/2}}, \pi\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{1/2}}\right)^2 + \pi^2} = \sqrt{\frac{16}{1/2} + \pi^2} = \sqrt{32 + \pi^2}$$

(1p ?)

Del A - 1c

den 20 augusti 2024 19:50

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 10$$

$\Leftrightarrow$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + z^2 = 10$$

$\Leftrightarrow$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 15$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{(x-1)^2}{15} + \frac{(y-2)^2}{15} + \frac{z^2}{15} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{\sqrt{15}}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{\sqrt{15}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{15}}\right)^2 = 1$$

cirkel med origo i $(1,2,0)$ och halvaxlar $\sqrt{15}$

svar: $(1,2,0)$ centrum, radie $\sqrt{15}$

2p

Del A - 1d

den 20 augusti 2024 19:55

$$\iint_D x^2 e^{x^2 y}\,dx\,dy$$

$$D = \{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \tfrac{1}{x}\}$$

$$\iint_D x^2 e^{x^2 y}\,dx\,dy = \iint_D x^2 e^{x^2 y}\,dx\,dy$$

$$\Leftrightarrow x^2 \int_1^2 \Big(\underbrace{\int_0^{\frac{1}{x}} e^{x^2 y}\,dy}_{(*)} \Big) dx = x^2 \int_1^2$$

$$(*): \left[\frac{e^{x^2 y}}{x^2} \right]_0^{\frac{1}{x}} = \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 \int_1^2 \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^2 e^x - 1\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 e^x\,dx - \underbrace{\int_1^2 1\,dx}_{= 2-1=1}$$

$$\Rightarrow \left[e^x \right]_1^2 = e^2 - e - 1$$

Så $I = e^2 - e - 1$

(2p)

Del A - 1e

den 20 augusti 2024 20:08

$F(x,y) = (xy, \frac{x^2}{2})$

Om F är ett
potentialfält så finns en
potential U sådan att

$\text{grad}\, U = F$

Så $\int xy\,dx = y\int x\,dx = y\frac{x^2}{2} + g(y)$

För någon funktion g.
deriverar med avseende på y
och får att
$\frac{x^2}{2} + g'(y)$

så $g(y) = C$

En potential ges av $U = y\frac{x^2}{2} + C$ (ty $\text{grad}\, U = (xy, \frac{x^2}{2}) = F$)

Alltså är F ett potentialfält. □

(2p)

Del B - 2

den 20 augusti 2024 20:14

$$\iiint_K \sin(z)\,dxdydz$$

$$K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq \frac{\pi^2}{4}, z \geq 0\}$$

studerar rand: $x^2+y^2+z^2 = \frac{\pi^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2}{\pi^2} + \frac{4y^2}{\pi^2} + \frac{4z^2}{\pi^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\pi/2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\pi/2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\pi/2}\right)^2 = 1$$

Halvaxlar $\frac{\pi}{2}$, centrum origo

$$z = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - (x^2+y^2)} \overset{z\geq 0}{\Leftrightarrow} z^2 = \frac{\pi^2}{4} - r^2 \Leftrightarrow r \overset{r\geq 0}{=} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - z^2}$$

$$E_z = \{(r,\varphi) : 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - z^2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

Så

$$\iiint_K \sin(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z) \underbrace{\left(\iint_{E_z} r\,dr\,d\varphi\right)}_{(*)} dz$$

$$(*): \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-z^2}} r\,dr\right)}_{(i)} d\varphi =$$

$$(i): \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-z^2}} = \left(\frac{\frac{\pi^2}{4} - z^2}{2} - 0\right) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{z^2}{2}$$

2π

$$(*) = 2\pi\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{z^2}{2}\right) = \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - z^2\right)$$

Så $\int^{\frac{\pi}{2}}$ $\left(\pi^2 \quad \right)$ Part.int

5a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z)\cdot\pi\cdot\left(\frac{\pi^2}{4}-z^2\right)dz =$$

Part.int

$$= \left[-\cos(z)\cdot\pi\cdot\left(\frac{\pi^2}{4}-z^2\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2z\cos(z)\,dz =$$

$$= \frac{\pi^3}{4} + \pi\Big[-2z\sin(z)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z)\,dz$$

$$= \frac{\pi^3}{4} + \pi\left(\left(-2\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) - 0\right) + 2\pi\Big[-\cos(z)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi^3}{4} - \pi^2 + 2\pi\cdot\big(0-(-1)\big) =$$

$$= \frac{\pi^3}{4} - \pi^2 + 2\pi$$

Del B - 3

den 21 augusti 2024 11:51

$F(x,y) = xy^2 + e^{xy}$

Hitta lok max / lok min

e^{xy}

$e^{xy} \cdot x$

$\text{grad } F = (y^2 + ye^{xy}, 2xy + xe^{xy})$

Söker grad $F(a,b) = 0$

$$\begin{cases} y^2 + ye^{xy} = 0 \\ 2xy + xe^{xy} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(y + e^{xy}) = 0 \\ x(2y + e^{xy}) = 0 \end{cases}$$

så $(0,0)$ är en intressant punkt

Om $y \neq 0$ så kollar vi ekv 1

Där vi ser att

$y + e^{xy} = 0 \iff y = -e^{xy}$. Insättning

ger $x(2y + (-y)) \iff e^{xy} = -y$

$= xy = 0$ $=$ sätter vi in $x = 0$ i

$y = -e^{xy} \Rightarrow y = -1$

så $y = -1$ en till punkt

DVS punkter $(0,0)$ och $(0,-1)$

$Q(h,k): F''_{xx}(a,b)h^2 + 2F''_{xy}(a,b)hk + F''_{yy}(a,b)k^2$

$F''_{xx} = 0 + y^2 e^{xy}$

$F''_{xy} = 2y + e^{xy} + xye^{xy}$

$F''_{yy} =$

$$\left[\begin{array}{ll} g(x) = x & \text{så } g'_y(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'_y(x) = \\ h(x) = e^{xy} & = 0 \cdot e^{xy} + x \cdot xe^{xy} = x^2 e^{xy} \\ g'_y(x) = 0 & \\ h'_y(x) = x e^{xy} & \end{array}\right]$$

$F''_{yy} = 2x + x^2 e^{xy}$

så $Q(h,k) = y^2 e^{xy} h^2 + 2(2y + e^{xy} + xye^{xy})hk + (2x + x^2 e^{xy})k^2$

$(0,0): 0h^2 + 2(1)hk + 0k^2 =$

$= 2hk$ som är både positiv

$(0,0): 0h^2 + 2(1)hk + 0k^2 =$

$= 2hk$ som är både positiv och negativ för alla $(h,k) \neq (0,0)$ dvs en sadelpunkt (indefinit)

$(0,-1): (-1)^2 \cdot 1h^2 + 2\left(2\cdot(-1) + 1 + 0\right)hk + 0k^2 =$

$= h^2 - 2hk$

$h(h-2k)$

Om $h=1$ och $k=1$ så får vi negativt värde

om $h=1$ och $k=-1$ så får vi positivt värde.

Alltså har vi att h^2-2hk antar både positiva och negativa värden för alla $(h,k) \neq (0,0)$

en till sadelpunkt (indefinit)

Svar: $(0,0)$
$(0,-1)$ båda sadelpunkter

Del B - 4

den 21 augusti 2024 12:32

$F(x,y) = x^2y + y$

$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Sätter $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

Vill optimera F med bivillkoret g.

$\text{grad } F = (2xy, x^2 + 1)$

$\text{grad } g = (2x, 2y)$

Använder Lagranges multiplikatormetod och sätter

$\text{grad } F = \lambda \text{ grad } g$:

$$\begin{cases} 2xy = \lambda 2x \\ x^2 + 1 = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$2xy = \lambda 2x$ om $x = 0$ så $y = -1, 1$

$\Leftrightarrow \lambda = y$

Det ger att

$x^2 + 1 = 2y^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 2y^2 - 1$

insätt $x^2 = 2y^2 - 1$ i ekv ger

$2y^2 - 1 + y^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3y^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

så $x^2 + \frac{2}{3} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

så vi har följande koordinater:

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), (0,1), (0,-1)$

Vill bestämma värdet:

$$f(x_1, y_1) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$f(x_2, y_2) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$f(x_3, y_3) = f(0, 1) = 0 + 1 = \boxed{1}$$

$$f(x_4, y_4) = f(0, -1) = 0 - 1 = \boxed{-1}$$

Svar:

största värde $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

minsta värde $-\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

$$\frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{3\sqrt{3}}{9} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{9} < 1$$

$$-\frac{5\sqrt{3}}{9} > -1$$

(räknefel)

Del B - 5a

den 21 augusti 2024 13:06

$K = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le 3\}$

$F(x,y,z) = \left(x^2 + z^3\cos(y^2),\ \arctan(3x+e^2),\ \frac{z^2}{2(1+x^2)(1+(y-x)^2)}\right)$

<u>Gauss sats</u>

$\iiint_K \operatorname{div} F\, dx\,dy\,dz$

$\operatorname{div} F = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)$

$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{2z}{2(1+x^2)(1+(y-x)^2)}$

$\operatorname{div} F = 2x + 0 + \frac{2z}{2(1+x^2)(1+(y-x)^2)}$

så $\iiint_K 2x + \frac{z}{((1+x^2)(1(y-x)^2)}\ dx\,dy\,dz = \iiint_K 2x\,dx\,dy\,dz + \iiint_K \frac{z}{\cdots}\ dx\,dy\,dz$

räknar term för term

$\int_0^3 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x 2x\,dy\right) dx\right) dz =$

$= \int_0^3 \left(\int_0^1 2x^2\,dx\right) dz =$

$= \int_0^3 \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 dz = \int_0^3 \frac{2}{3}\,dz = \underline{\underline{2}}$

$\int_0^3 \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{z}{(1+x^2)(1+(y-x)^2)}\,dy\right) dx\right) dz =$

$= \int_0^3 \left(\int_0^1 \frac{z}{(1+x^2)} \left(\int_0^x \frac{1}{1+(y-x)^2}\,dy\right)^{(i)} dx\right) dz$

(i): $\left[\arctan(y-x)\right]_0^x = \left(\arctan(x-x) - \underbrace{\arctan(0-x)}_{-\arctan(x)}\right) = \arctan(x)$

$= (0 + \arctan(x))$

så

$\int_0^3 \left(\int_0^1 \frac{z\arctan(x)}{1+x^2}\,dx\right) dz =$

$$\int_0^3 \left(\int_0^1 \frac{z \arctan(x)}{1+x^2} \, dx \right) dz =$$

$$= \int_0^3 z \left(\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2} \, dx \right) dz =$$

(*)

$$= \left[\begin{array}{l} u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4} \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^3 z \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} dz = \int_0^3 z \left(\frac{\frac{\pi^2}{16}}{2} \right) dz =$$

$$= \frac{\pi^2}{32} \int_0^3 z \, dz = \frac{\pi^2}{32} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^3 = \frac{\pi^2}{32} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9\pi^2}{64}$$

Så svar: $I = 2 + \frac{9\pi^2}{64}$

Del B - 5b

den 21 augusti 2024 13:34

$D = \{(x,y) : x^2+e^y \le 4, x^2+y^2-y^3 \ge 0\}$

D sluten är uppenbart då
likhet tillåten. Dvs rand ingår.
Låt oss kontrollera om D är
begränsad:

$x^2+e^y \le 4$, x^2 alltid positiv
e^y alltid positiv
Om vi antar e^y nära 0
kan vi studera
$x^2 \le 4$, och ser då att
$-2 \le x \le 2$ dvs x begränsad.

$x^2+y^2-y^3 \ge 0$,
Vi antar $x=0$ och studerar
$y^2-y^3 \ge 0 \iff y^2(1-y) \ge 0$
Som är 0 då $y=0$ eller $y=1$.
Vi sätter in $x=\pm 2$ och får

$$y^2-y^3 \ge -4$$

så $y^2(1-y) \ge -4$.

Om $y=-1$ så $1 \cdot 2 = 2 \ge -4$
$y=2$ så $4 \cdot -1 = -4 \ge -4$
$y=3$ så $9 \cdot -2 = -18 \not\ge -4$
högsta värde i $y=2$
$y=-2$ så $4(1+2) = 4 \cdot 3 \ge -4$
Dvs $y \to -\infty$ tillåtet.
Alltså är y inte begränsad
så mängden D är sluten och obegränsad

så mängden D är sluten och obegränsad
i y-led

randpunkt innehör en punkt tillhörande
likheten, så vi kan ta
$x^2+y^2-y^3=0$
$\Rightarrow (0,0)$ en randpunkt.
Vi vill visa att varje cirkelskiva med
centrum i $(0,0)$ tillhör D.
Då $(0,0)$ tillhör D så kommer
varje sådan skiva innehålla minst den
punkten.

Del B - 6

den 21 augusti 2024 13:50

$x f'_x + y f'_y + f = 1 \quad , x>0, y>0$

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow x^{-y} \Leftrightarrow x^{-1} \cdot x^{y} \Rightarrow (x^{-1}y)' = -\frac{y}{x^2}$$

<u>kedjeregeln:</u>

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u \cdot 2x + f'_v \cdot -\frac{y}{x^2}$$

$$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u \cdot 2y + f'_v \cdot \frac{1}{x}$$

$$x\left(f'_u \cdot 2x + f'_v\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right) + y\left(f'_u \cdot 2y + f'_v \cdot \frac{1}{x}\right) + f = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$2f'_u x^2 - \underbrace{\frac{y}{x}}_{v} f'_v + 2f'_u y^2 + f'_v \underbrace{\frac{y}{x}}_{v} + f = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$2f'_u \underbrace{(x^2 + y^2)}_{u} + f'_v \underbrace{(v - v)}_{0}$$

$\Leftrightarrow$

$$2f'_u \cdot u + f = 1 \overset{/2u}{\Leftrightarrow} f'_u + \frac{1}{2u} f = \frac{1}{2u}$$

$$f'(u) + P(u) f(u) = Q(u)$$

så integrerande faktor

$$E(u) = e^{\int P(u)du} = e^{\int \frac{1}{2u}du} = e^{\frac{1}{2}\ln(u)} = e^{\ln(u^{1/2})} = \sqrt{u}$$

så

$$\sqrt{u} f'_u + \sqrt{u} \frac{1}{2u} f = \frac{\sqrt{u}}{2u}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sqrt{u} f'_u + \frac{1}{2\sqrt{u}} f = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{d}{du}\left(\sqrt{u} f\right) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\int \frac{d}{du}\left(\sqrt{u} f\right) du = \int \frac{1}{2\sqrt{u}} du =$$

$$\int \frac{d}{du}\left(\sqrt{u}\,F\right) du = \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\, du =$$

$$= \sqrt{u}\,F = \sqrt{u} + c$$

så $F = 1 + \frac{c}{\sqrt{u}}$

för en konstant c