Del A - 1a

den 14 augusti 2024 14:22

1)

a) Beräkna tangentplanet i punkten $(0,-1,1)$ till ytan med ekvationen

$$e^x + yz + x^2y^2z^2 = 0$$

Sätt $f(x,y,z) = e^x + yz + x^2y^2z^2$

Vi har att

Tangentplanets ekvation ges av

$$f'_x(a,b,c)(x-a) + f'_y(a,b,c)(y-b) + f'_z(a,b,c)(z-c) = 0$$

Hittar partiella derivator:

$$f'_x(x,y,z) = e^x + 2xy^2z^2$$

$$f'_y(x,y,z) = z + 2x^2yz^2$$

$$f'_z(x,y,z) = y + 2x^2y^2z$$

Så insättning ger

$$f'_x(0,-1,1) = 1 + 0 = 1$$

$$f'_y(0,-1,1) = 1 + 0 = 1$$

$$f'_z(0,-1,1) = -1 + 0 = -1$$

dvs

$$1\cdot(x-0) + 1\cdot(y-(-1)) - 1\cdot(z-1) =$$

$= x + y + 1 - z + 1 = x + y - z + 2 = 0$

Svar: Tangentplanet i $(0,-1,1)$ ges av

$x + y - z + 2 = 0.$

Del A - 1b

den 14 augusti 2024 14:55

1) b)

Sätt $F(x,y,z) = \sin(x+y^2) + \arctan(z)$. Beräkna riktningsderivatan i riktningen $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ av F i punkten $(0,0,0)$

sätter $v = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

beräknar $\text{grad}\, F(x,y,z)$.

$$\text{grad}\, F(x,y,z) = \left(F'_x, F'_y, F'_z\right)$$

$$F'_x = \cos(x+y^2) \cdot \underset{\uparrow}{\overset{\text{inre}}{1}} = \cos(x+y^2)$$

$$F'_y = \cos(x+y^2) \cdot \overset{\text{inre}}{2y} = 2y\cos(x+y^2)$$

$$F'_z = \frac{1}{1+z^2}$$

så insättning $(0,0,0)$ ger

$$F'_x(0,0,0) = \cos(0) = 1$$

$$F'_y(0,0,0) = \cos(0) \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

$$F'_z(0,0,0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

så $\text{grad}\, F(0,0,0) = (1,0,1)$

Riktningsderivatan ges av skalärprodukten mellan v och $\text{grad}\, F$ i punkten $(0,0,0)$:

Så

$$v \cdot \text{grad}\, F(0,0,0) = (1,0,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) =$$

$$1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{67}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{67}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{67}} = \frac{2}{\sqrt{67}}$$

Svar: $\frac{2}{\sqrt{67}}$.

Del A - 1c

den 14 augusti 2024 15:11

1) c)

För en funktion f av två variabler gäller det att $f'_x(1,2) = \frac{3}{2}$ och $f'_y(1,2) = 4$.
Sätt $g(t) = f(t^2, t+1)$.
Beräkna $g'(1)$.

Använder kedjeregeln:

$$g'(t) = f'_x \cdot g'_x(t) + f'_y \cdot g'_y =$$

$$= f'_x(t^2, t+1) \cdot 2t + f'_y(t^2, t+1) \cdot 1 =$$

insätt 1 ger

$$= f'_x(1,2) \cdot 2 + f'_y(1,2) \cdot 1 =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 3 + 4 = 7$$

Del A - 1d

den 14 augusti 2024 15:22

1) d) Beräkna dubbelintegralen

Räknat på fel gräns
Ska vara $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$

$$\iint_D 2\cdot \sin(x^2)\,dx\,dy, \quad \text{där} \quad D=\left\{(x,y) : 0\le x\le \frac{\sqrt{\pi}}{2}, 0\le y\le x\right\}$$

konst i dy

Vi har att

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\int_0^{x} 2\sin(x^2)\,dx\,dy = 2\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\left(\int_0^x \sin(x^2)\,dy\right)dx =$$

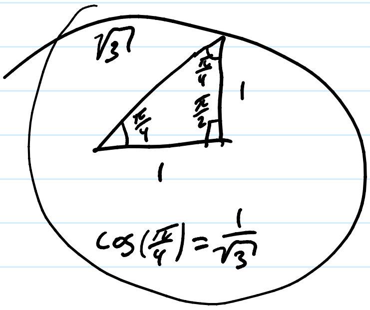
$$= 2\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \sin(x^2)\left(\underbrace{\int_0^x 1\,dy}_{=x}\right)dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \sin(x^2)\cdot x\,dx = \left[\begin{array}{l} u=x^2 \Rightarrow du=2x\,dx \\ x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow u=\frac{\pi}{4}\end{array}\right] =$$

du=2xdx

u=2xdx

$$= 1\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(u)\,du = \Big[\cos(u)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \cos(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Svar: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Del A - 1e wtf?

den 14 augusti 2024 15:43

$F(x,y) = \left(\arctan(y), \frac{x}{1+y^2}\right)$ Beräkna kurvintegralen

$x \frac{1}{1+y^2}$ $\frac{1}{}$

$$\int_\gamma F \cdot dr = \iint_\gamma F(r(t)) \cdot r(t)\, dt$$

där γ är kurvan med parametriseringen

$$r(t) = \left((1-t)e^t + t^3 + t^2 - 1, \frac{3t}{2^t+1}\right), \quad t \in [0,1]$$

$x = (1-t)e^t + t^3 + t^2 - 1)$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} =$

Komplicerad parametrisering.
Svårt. Försöker hitta potentialfunktion.

$r(0) = ((1-1, 0\ 1), \frac{3 \cdot 1}{2^1+1}) =$
$= (0,0)$

$r(1) = (1,1)$

Om U potentialfunktion så

$U'_x(x,y) = \arctan(y)$ och $U'_y = \frac{x}{1+y^2}$

så $U(x,y) = x\arctan(y) + g(x)$ för någon funktion g. $\Rightarrow g(x) = 0$

$$\int_\gamma F \cdot dr = U(r(1)) - U(r(0)) = U(1,1) - U(0,0) = \arctan(1) - 0 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Del B - 2a

den 14 augusti 2024 16:30

4 a) sätt $D_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 + 4^{x+1} \leq 4\}$
Avgör om D_1 är sluten och om D_1 är begränsad. Ge också ett på en inre punkt till D_1.

Om (x,y) tillhör randen till D_1 så gäller $x^2 + y^2 + 4^{x+1} = 1$.

Dessa är tillåtna vilket medför att mängden är sluten.

4^{x+1} kan inte bli negativ. Det medför att $x^2 + y^2 \leq 4$ för alla $(x,y) \in D_1$. Mängden är begränsad.

En inre punkt kan vara exempelvis

$(0,0) \Rightarrow 0^2 + 0^2 + 4^1 \leq 4 \iff 4 \leq 4.$

Del B - 2b

den 14 augusti 2024 18:28

2) b)

Sätt $F(x,y) = e^{-x^2-y^2} + \frac{x^2+y^2}{10}$.

Visa att (0,0) är en stationär punkt till f. Avgör sedan om den är en lokal extrempunkt.

Kontrollerar om $\text{grad } f(0,0) = 0$:

$f(x) = e^x$

$g(x) = -x^2+y^2 \Rightarrow g'(x) - 2x$

$f'_x = -2xe^{-x^2-y^2} + \frac{x}{5}$

$f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$e^{-x^2-y^2} \cdot -2x$

$f'_y = -2ye^{-x^2-y^2} + \frac{y}{5}$

så

$$\text{grad } f(0,0) = (f'_x(0,0), f'_y(0,0)) =$$

$$= (0,0) = 0$$

Eftersom gradienten är 0 har den ingen riktning och är per definition en stationär punkt.

Måste undersöka om den är en lokal extrempunkt.
Använder kvadratisk form:

$$\boxed{Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2}$$

$f'_x = -2xe^{-x^2-y^2} + \frac{x}{5}$

$$f'_x = -2xe \qquad + \frac{x}{5}$$

$$f'_y = -2ye^{-x^2-y^2} + \frac{y}{5}$$

$$f''_{xx} = \left[\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\text{Prod \& kedjeregel}} \\ g(x) = -2x & f''_{xx} = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot g'(x) \\ h(x) = e^{-x^2-y^2} & = -2\cdot e^{-x^2-y^2} + (-2x \cdot -2xe^{-x^2-y^2}) = \\ h'(x) = -2xe^{-x^2-y^2} & = -2e^{-x^2-y^2} + 4x^2e^{-x^2-y^2} \end{array}\right] =$$

$$-2e^{-x^2-y^2} + 4x^2e^{-x^2-y^2} \underset{+\left(\frac{1}{5}\right)}{=} e^{-x^2-y^2}(4x^2-2) + \frac{1}{5}$$

$$f''_{yy} = e^{-x^2-y^2}(4y^2-2) + \frac{1}{5}$$

$$f''_{xy} = 4xye^{-x^2-y^2}$$

$$f''_{xx}(0,0) = 1\cdot(0-2) + \frac{1}{5} = -2 + \frac{1}{5} = -\frac{9}{5}$$

$$f''_{yy}(0,0) = -\frac{9}{5}$$

$$f''_{xy}(0,0) = 0$$

$$Q(h,k) = -\frac{9}{5}k^2 + 0 - \frac{9}{5}h^2 = -\frac{9k^2 + 9h^2}{5}$$

$Q(h,k)$ är alltid < 0 för alla $(h,k) \neq (0,0)$

negativt definit. En lokal maximipunkt i $(0,0)$.

Svar: $(0,0)$ är en stationär punkt och ett lokalt maximum till f. $\square$

Del B - 2c

den 14 augusti 2024 19:36

2) c) Ekvationen

$$2x^2 - 8x + 3y^2 + 6y = -3$$

beskriver en ellips. Rita en skiss av ellipsen.

Steg 1 kvad komp term för term.

$$2(x^2 - 4x) + 3(y^2 + 2y) = -3$$

$$\iff 2\left((x-2)^2 - 4\right) + 3\left((y+1)^2 - 1\right) = -3$$

$$\iff 2(x-2)^2 - 8 + 3(y+1)^2 - 3 = -3$$

$$\iff 2(x-2)^2 + 3(y+1)^2 = -3 + 3 + 8$$

$$\iff 2(x-2)^2 + 3(y+1)^2 = 8$$

$$\iff \frac{2(x-2)^2}{8} + \frac{3(y+1)^2}{8} = 1$$

$$\iff \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{3(y+1)^2}{8} = 1$$

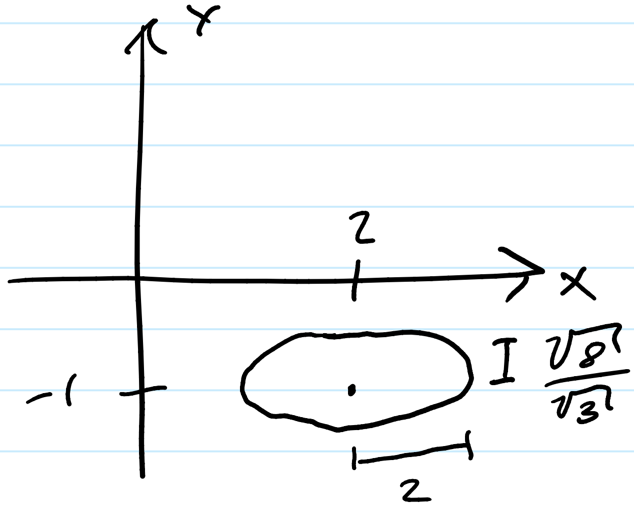
$$\iff \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{\sqrt{8/3}}\right)^2 = 1$$

halvaxlar längd 2 respektive $\sqrt{8/3}$

halvaxlar längd 2 respektive $\sqrt{8/3}$

mittpunkt i $(2, -1)$

Skiss:



Del B - 3

den 14 augusti 2024 20:01

Lös den partiella differentialekvationen

$$f'_x + f'_y + (x^2+y^2)f = 0$$

t.ex genom att införa
de nya variablerna

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x^3 + y^3 \end{cases}$$

$u'_x = 1$
$u'_y = -1$
$v'_x = 3x^2$
$v'_y = 3y^2$

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u + f'_v \cdot 3x^2$$
$$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = -f'_u + f'_v \cdot 3y^2$$

insättning ger

$$(f'_u + f'_v \cdot 3x^2) + (-f'_u + f'_v \cdot 3y^2) + (x^2+y^2) \cdot f = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f'_v 3x^2 + f'_v 3y^2 + (x^2+y^2)f = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f'_v 3x^2 + f'_v 3y^2 = -(x^2+y^2)f$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{3f'_v(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = -f$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3f'_v = -f$$

$\Leftrightarrow f = -3f'v \Leftrightarrow f = -3\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$

$-\frac{1}{3}f = \frac{\partial f}{\partial v}$

$-\frac{1}{3}\ dv = \frac{\partial f}{f}$

integrerande faktor $e^{-\frac{1}{3}}$

$\ln|f| = -\frac{1}{3}v + h(u)$

$f = e^{-\frac{1}{3}v} + e^{h(u)}$

$\Leftrightarrow f = e^{h(u)} \cdot e^{-\frac{1}{3}v} = Ae^{-\frac{v}{3}}$

Där A är godt funktion

Dvs har vi att

svar:

$F(x,y) = Ae^{-\frac{x^3+y^3}{3}}$

Del B - 4

den 14 augusti 2024 21:23

Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

där $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

Vi har att om $x=0$ så

$$y^2 \leq 1 \iff y = \pm 1$$

om $x = 1$ så $y = 0$

Dvs vi har att

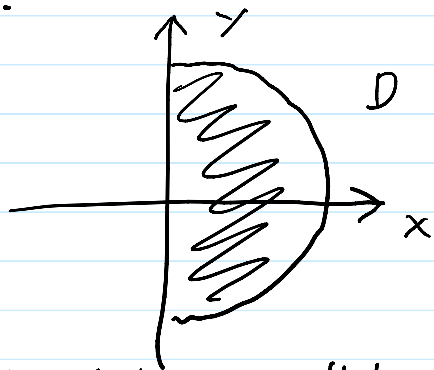
$$\begin{cases} y \to \pm 1 & \text{då } x \to 0 \\ y \to 0 & \text{då } x \to 1 \end{cases}$$

dvs $-1 \leq y \leq 1$, $x \geq 0$ men då olikheten ska gälla kan x vara störst 1.

Alltså

$-1 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$. Vi har våra gränser.

Ritar D:



En halvcirkel. lämpligt med polära koordinater. Vi noterar att $x^2+y^2 = r^2$ i täljaren och får

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad E: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \leftarrow \text{halvcirkel}$$

Det ger att

skalfaktorn

$$\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2}\,dxdy = \iint_E \frac{r\cos\varphi}{1+r^2} \cdot r\,dr\,d\varphi$$

π

$$\iint_D \frac{\ldots}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_E \frac{\ldots}{1+r^2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \Bigg(\underbrace{\frac{r^2}{1+r^2}}_{(i)} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi}_{(ii)} \Bigg) dr$$

$$(ii): \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = \Big[\sin\varphi \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \left(\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right) = 1-(-1) = 2$$

$$(i): \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\,dr = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) dr =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 1\,dr}_{=1-0=1} - \int_0^1 \frac{1}{1+r^2}\,dr =$$

$$= 1 - \Big[\arctan(r)\Big]_0^1 = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

så vi har

$$2\cdot\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Svar: Integralen blir $2-\frac{\pi}{2}$.

Del B - 5

den 14 augusti 2024 21:47

5) Hitta största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x+2y$ på området

$$D = \{(x,y) : x^2+x+y^2 \leq 2\}$$

<u>rand</u>

$x^2+x+y^2=2$

~~$x=0$~~: $y^2=2 \iff y = \pm\sqrt{2}$

<u>$y=0$</u>: $x^2+x=2 \iff (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 2$

$\iff (x+\frac{1}{2})^2 = \frac{7}{4}$

$\iff x = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{1}{2}$

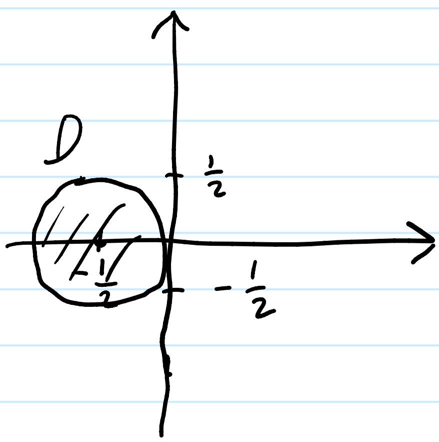
skriver vi om så har vi alltså

$$(x+\tfrac{1}{2})^2 + y^2 = 2$$

$$\iff \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

a

Dvs en ellips med halvaxlar med längden $\frac{1}{2}$ och förskjutning $-\frac{1}{2}$ i x-led. Ritar D:



$f(x,y) = x+2y$

$\text{grad } f = (1,2) \neq (0,0)$

Dvs inga inre stationära punkter.

Dvs inga inre stationära punkter.
Så största & minsta värdet på randen.

Använder Lagrangemultiplikatorer för att undersöka randen.

Sätter $g(x,y) = x^2 + x + y^2$

På randen gäller $g(x,y) = 2$

räknar $\text{grad}\, g = (2x+1, 2y)$

vill lösa när $\text{grad}\, f = \lambda\, \text{grad}\, g$

Vi ska lösa systemet

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x+1) \\ 2 = \lambda 2y \\ x^2 + x + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda(2x+1) \\ 1 = \lambda y \\ x^2 + x + y^2 = 2 \end{cases}$$

Det ger att $2x+1 = \frac{1}{\lambda}$

$y = \frac{1}{\lambda}$ så

$y = 2x+1$ gäller för alla lösningar

Insättning $y = 2x+1$ ger att

$$x^2 + x + (2x+1)^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 4x^2 + 4x + 1 = 2$$

$\Leftrightarrow 5x^2+5x+1=2$

$\Leftrightarrow 5(x^2+x)+1=2$

$\Leftrightarrow x^2+x=\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2=\frac{4}{20}+\frac{5}{20}=\frac{9}{20}$

$x=\pm\frac{3}{\sqrt{20}}-\frac{1}{2}$

dvs

$x=-\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{20}}$ eller $x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{20}}$

Då följer att då $y=2x+1$

så $y_1=2(-\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{20}})+1=-1+\frac{6}{\sqrt{20}}+1=\frac{6}{\sqrt{20}}$

$y_2=-\frac{6}{\sqrt{20}}$

alltså

$(x_1,y_1)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{20}}, \frac{6}{\sqrt{20}}\right)$

$(x_2,y_2)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{20}}, -\frac{6}{\sqrt{20}}\right)$

Dvs har vi att

$F(x_1,y_1)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{20}}+2\left(\frac{6}{\sqrt{20}}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{20}}+\frac{12}{\sqrt{20}}=$

$=-\frac{1}{2}+\frac{15}{\sqrt{20}}$

$F(x_2,y_2)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{20}}+2\left(-\frac{6}{\sqrt{20}}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{20}}-\frac{12}{\sqrt{20}}$

$=-\frac{1}{2}-\frac{15}{\sqrt{20}}$

svar: största värdet är $-\frac{1}{2}+\frac{15}{\sqrt{20}}$

minsta värdet är $-\frac{1}{2}-\frac{15}{\sqrt{20}}$

Del B - 6

den 14 augusti 2024 22:29

6) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma P dx + Q dy$$

där γ är övre halvan av kurvan $x^4+y^4=1$ genomlöpt från $(-1,0)$ till $(1,0)$ och

$$(P(x,y), Q(x,y)) = \left(ye^x + \frac{1}{1+x^2},\ e^x + \frac{x^2}{2} + \sin(y^2)\right)$$

kurvan kan skrivas:

$(x^2)^2 + (y^2)^2 = 1$ dvs en cirkel

$$\begin{cases} x = \sqrt{\cos(t)} \\ y = \sqrt{\sin(t)} \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi \qquad \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\sin(t)}{\sqrt{\cos(t)}} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}$$

kedjeregeln

$$\left[\begin{aligned} &g(x) = \sqrt{x} && g'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &h(x) = \cos(x) && h'(x) = -\sin(x) \\ &\text{så } f(x) = \sqrt{\cos(x)} && \Rightarrow f'(x) = g'(h(x))\cdot h'(x) = \\ & && = \tfrac{1}{2}\cos(x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -\sin(x) \\ & && = -\tfrac{1}{2}\frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} \end{aligned}\right]$$

Så

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\sqrt{\sin(t)}\, e^{\sqrt{\cos(t)}} + \frac{1}{1+\cos(t)}\right)\cdot -\frac{1}{2}\frac{\sin(t)}{\sqrt{\cos(t)}}}_{(i)} + \underbrace{\left(e^{\sqrt{\cos(t)}} + \frac{\cos(t)}{2} + \sin\left(\sin(t)\right)\right)\cdot\frac{1}{2}\frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}}_{(ii)}\, dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{\sin(t)}\sqrt{\cos(t)}}\, e^{\sqrt{\cos(t)}} + \frac{\sin(t)}{\sqrt{\cos(t)} + \cos(t)\cdot\sqrt{\cos(t)}}\, dt$$

Alltså genuin jävla aids. Det går inte. Men vi testar Greens formel och kommer ihåg kraven:

1. D positivt riktad rand ∂D
2. kurvan måste vara sluten. Det har vi inte.

Vi kan sätta att ρ är linjen $(1,0), (-1,0)$ och att $D = \{(x,y) : x^4+y^4 \le 1, y \ge 0\}$

Då kan vi skriva

$$\int_{\gamma+\rho} P dx + Q dy = -\iint_D x\, dx dy$$

$\gamma + \rho$ negativt orienterad

Då följer att

$$\int_\gamma P dx + Q dy = -\iint_D x\, dx dy - \int_\rho P dx + Q dy$$

$$\iint_D x\, dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt[4]{1-y^4}}^{\sqrt[4]{1-y^4}} x\, dx\right) dy = \qquad \left[\left[x^2\right]_{-\sqrt[4]{1-y^4}}^{\sqrt[4]{1-y^4}} = (\sqrt[4]{1})^2 - (-\sqrt[4]{1})^2 = 1 - 1 = 0\right]$$

$$= \int_0^1 0\, dy = 0$$

Räknar ρ integralen. Parametriserar $r(t) = (-t, 0)$, $-1 \le t \le 1$

$$\int_\rho P dx + Q dy = \int_{-1}^{1} \frac{-1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\, dt = -\Big[\arctan(t)\Big]_{-1}^{1} = -\left(\arctan(-1) - \arctan(1)\right) = -\left(-\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

Så $\displaystyle\int_\gamma P dx + Q dy = 0 - -\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$