

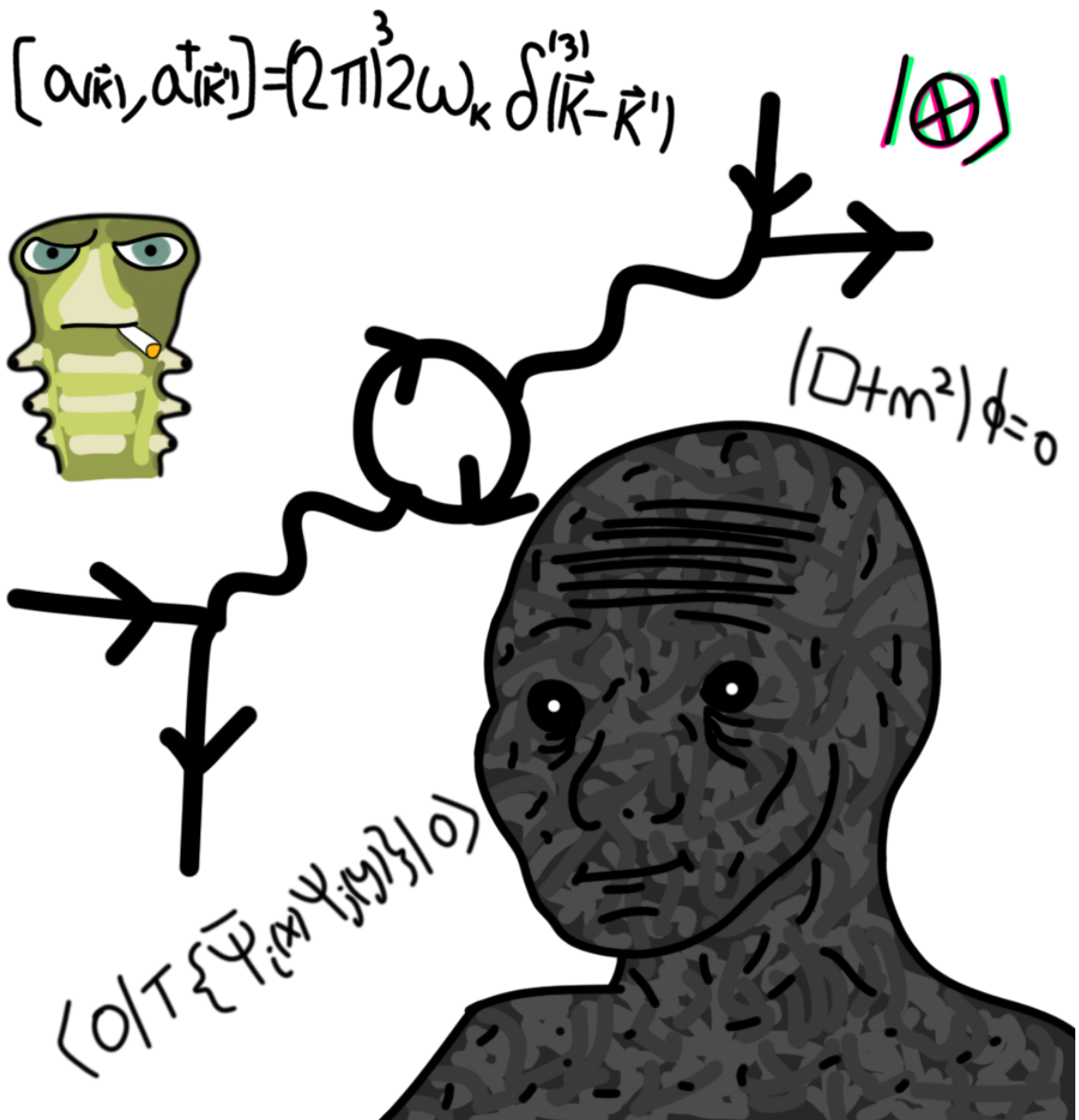
# Formulario/guía para QFT

Todo lo básico que hay que saber y cómo usarlo

v.0.0 (beta)

@peycuantico  $|\otimes\rangle$

4 de octubre de 2024



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Convenios</b>	<b>2</b>
<b>3. Bosones (spin 0 y 1)</b>	<b>3</b>
3.1. Relación de conmutación . . . . .	3
3.2. Campo escalar real . . . . .	3
3.3. Campo escalar complejo . . . . .	4
3.4. Campo vectorial real ( $m = 0$ ) . . . . .	4
3.4.1. Propiedades de las polarizaciones . . . . .	5
<b>4. Fermiones (spin <math>\frac{1}{2}</math>)</b>	<b>6</b>
4.1. Relación de (anti)conmutación . . . . .	6
4.2. Campo espinorial . . . . .	6
4.3. Propiedades de las matrices $\gamma$ . . . . .	7
4.4. Propiedades de los espinores . . . . .	8
<b>5. Propagadores</b>	<b>11</b>
5.1. Campo escalar . . . . .	11
5.2. Campo vectorial . . . . .	11
5.3. Campo espinorial . . . . .	12
<b>6. Operadores de creación y destrucción (normal ordering, time ordering y Teorema de Wick)</b>	<b>13</b>
6.1. Normal ordering para bosones . . . . .	13
6.2. Normal ordering para fermiones . . . . .	13
6.3. Propiedades de los operadores creación . . . . .	14
6.4. Time ordering . . . . .	15
6.5. Teorema de Wick . . . . .	16
<b>7. <math>S</math>-matrix (interacciones)</b>	<b>19</b>
7.1. Diagramas de Feynman y $S$ -matrix . . . . .	19
7.1.1. $T$ -matrix . . . . .	20
7.2. $\lambda\phi^4$ . . . . .	20
7.2.1. $S$ -operator (para $\lambda\phi^4$ ) . . . . .	20
7.2.2. $T$ -matrix (para $\lambda\phi^4$ ) . . . . .	24
7.3. QED . . . . .	28
7.3.1. $S$ -operator (para QED) . . . . .	28
7.3.2. $T$ -matrix (para QED) . . . . .	28
<b>8. Reglas de Feynman</b>	<b>29</b>

## 9. Loops

30

## 1. Introducción

¿Cansado de estar en clase de QFT y no entender nada ni acordarte de ninguna fórmula? Yo también. Si bien este formulario puede que no te ayude en clase, en el examen la cosa cambia. **Aquí encontrarás todo lo que necesitas** para tu primera (y esperemos que última) asignatura de Quantum Field Theory.

El objetivo principal de este PDF era hacer un formulario compacto, pero se me ha ido de las manos. Me enfadé y ahora incluye explicaciones y, sobretodo, ✨ ✨ ✨ **EJEMPLOS** ✨ ✨ ✨, que son lo que más me faltó en mis clases.

**Si ves cualquier error**, quieres mandar tu solución de un ejercicio, preguntar dudas o incluir alguna cosa, no dudes en mandar un mail a [peycuantico@gmail.com](mailto:peycuantico@gmail.com) o escribirme por mensaje privado a [@peycuantico](#) en Instagram, X o TikTok (y seguirme 😡).

Sin más dilación, que empiece el descenso a la locura.



## 2. Convenios

Cosillas que son arbitrarias dependiendo del libro, las pongo aquí para que sea rápido de ver.

- **Cuadrivectores.** Sean  $x$  y  $k$  cuadrivectores:

$x$	Cuadrivector
$x^\mu$	Componente $\mu$ -ésima del cuadrivector
$kx = k^\mu x^\nu g_{\mu\nu} = k^\mu x_\mu$	Producto escalar entre $k$ y $x$
$\vec{x}$	componentes $(x^1, x^2, x^3)$ del cuadrivector

- **Métrica:**  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

Para este formulario, usaremos la métrica mala, ya que es la que más se usa en todos los libros.

- **Delta de Dirac.**

$$\delta(x - x') = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-x')}$$

- **Unidades naturales.**  $c = \hbar = \frac{\pi}{3} = 1$

- **Relaciones de conmutación:**

$$[\hat{a}_\sigma(\vec{k}), \hat{a}_{\sigma'}^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\sigma\sigma'} (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \text{ para bosones}$$

$$\{\hat{b}_\sigma(\vec{k}), \hat{b}_{\sigma'}^\dagger(\vec{k}')\} = \delta_{\sigma\sigma'} (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \text{ para fermiones}$$

- **Medida en la solución de los bosones:**  $d\tilde{k} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}$  (definición para ahorrar espacio)

- **Notación slash.**  $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$ . Donde  $p$  es un cuadrivector y  $\gamma$  son las matrices del álgebra de Dirac.

- **Integrales.** Cuando se esté integrando en  $d^4k$ , se asume una integral cuádruple en  $\mathbb{R}^4$ , i. e.

$$\int f(k) d^4k = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) dk^0 dk^1 dk^2 dk^3$$

También, en la mayoría de casos se escribirá el diferencial ( $d^4k$ ) al inicio de la integral y no al final ( $\int d^4k f(k) = \int f(k) d^4k$ ).

- **Densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$ :** en casi todo el formulario se le va a llamar **lagrangiano**, pues es mucho más cómodo 😊

### 3. Bosones (spin 0 y 1)

#### 3.1. Relación de conmutación

Siendo  $\hat{a}_\sigma^\dagger(\vec{k})$  el operador que crea partículas bosónicas de "tipo"  $a$  con polarización  $\sigma$  y momento  $\vec{k}$ :

- $[\hat{a}_\sigma(\vec{k}), \hat{a}_{\sigma'}^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\sigma\sigma'} (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$
- $[\hat{a}_\sigma(\vec{k}), \hat{a}_{\sigma'}(\vec{k}')] = [\hat{a}_\sigma^\dagger(\vec{k}), \hat{a}_{\sigma'}^\dagger(\vec{k}')] = [\hat{a}_\sigma(\vec{k}), \hat{b}_{\sigma'}^\dagger(\vec{k}')] = [\hat{a}_\sigma(\vec{k}), \hat{b}_{\sigma'}(\vec{k}')] = 0$

Es decir, los únicos conmutadores que son distintos de 0 son aquellos entre los operadores de creación y destrucción de bosones de un **mismo tipo**  $a$  (indistinguibles), en caso de que en el espacio de Hilbert hayan otros de "tipo"  $b$ . En caso de tener fermiones, conmutan siempre con ellos 👍

#### 3.2. Campo escalar real

Primero, es importante definir el **lagrangiano** del campo. Usando las ecuaciones de **Euler-Lagrange** se puede obtener fácilmente la **ecuación de movimiento**<sup>1</sup>. Hay que tener en cuenta que este lagrangiano es el de una partícula libre. Cuando hay interacciones se sigue usando la solución del campo libre (ya que las interacciones se añaden con teoría de perturbaciones).

Recordad que estos campos  $\phi$  son en realidad operadores y dependen de la posición y el tiempo  $\hat{\phi}(x^\mu)$ , pero en ocasiones se omite por comodidad en la notación.

<b>Lagrangiano</b> $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$	<b>Ecuación de movimiento (Klein-Gordon)</b> $(\square + m^2)\phi = 0$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------

La **solución** a la ecuación de movimiento es la siguiente:

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \int d\vec{k} \left( \underbrace{\hat{a}(\vec{k}) e^{-ikx}}_{\phi(+)} + \underbrace{\hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{ikx}}_{\phi(-)} \right) \quad (3.1)$$

La parte "+" de los campos, es la que va acompañada de un  $e^{-ikx}$ , la parte "-" es la que va con  $e^{+ikx}$ . (Si, parece que esté al revés, pero es lo que se usa siempre, ya que cuando se calculan interacciones y diagramas es más intuitivo; o eso dicen).

La interpretación de esta solución es una suma de ondas planas de momento  $\vec{k}$  y amplitudes cuantizadas ( $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$ ).

<sup>1</sup>Donde  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$

### 3.3. Campo escalar complejo

Como los lagrangianos se dan en un contexto de teoría clásica de campos, es costumbre establecer el convenio  $\phi^* \equiv \hat{\phi}^\dagger(x^\mu)$ .

<p><b>Lagrangiano</b></p> $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$
---------------------------------------------------------------------------------------------------

<p><b>Ecuaciones de movimiento (Klein-Gordon)</b></p> $(\square + m^2)\phi = 0$ $(\square + m^2)\phi^* = 0$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fijaos en que, en este caso, el lagrangiano no tiene ese factor  $\frac{1}{2}$  en los términos.

**Solución:**

$\hat{\phi}(x^\mu) = \int d\tilde{k} \left( \hat{a}(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{b}^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right)$	(3.2)
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------

$\hat{\phi}^\dagger(x^\mu) = \int d\tilde{k} \left( \hat{b}(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{+ikx} \right)$	(3.3)
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------

Como veis, la solución es muy similar a la del caso real (3.1), solo que en este caso dentro hay 2 tipos de operadores:  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$ . Esto se debe a que el campo  $K-G$  complejo sirve para representar partículas que sí tienen **antipartícula** (estas dos son distinguibles la una de la otra).

### 3.4. Campo vectorial real ( $m = 0$ )

Esta vez, el campo no tiene masa, así que la ecuación de Klein-Gordon se convierte simplemente en dos ecuaciones de Maxwell<sup>2</sup>.

<p><b>Lagrangiano</b></p> $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p><b>Ecuaciones de movimiento</b></p> $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$
----------------------------------------------------------------------

Junto a las dos otras ecuaciones de Maxwell<sup>3</sup> se acaban convirtiendo en la ecuación de ondas, cuya **solución** conocemos muy bien (además, es un caso específico de la ecuación de Klein-Gordon):

$$\hat{A}_\mu(x^\nu) = \int d\tilde{k} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \epsilon_\mu^\alpha(\vec{k}) \hat{a}^\alpha(\vec{k}) e^{-ikx} + \epsilon_\mu^{*\alpha}(\vec{k}) \hat{a}^{\dagger\alpha}(\vec{k}) e^{+ikx} \right)$$

Resulta que esta solución tiene un grado de libertad redundante, debido a que si  $A^\mu$  es solución de  $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ , entonces  $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$  también lo es  $\forall f$  (movidas de simetría gauge, nunca lo entenderías 🤔). Entonces, escogemos una  $f$  tal que  $\partial_i A^i = 0$  (os juro que se puede, crean en mí). A su vez, si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla^2 A^0 = 0$ , entonces  $A^0 = 0$  (ya que  $A^0(x^\mu = \pm\infty) = 0$

<sup>2</sup>  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ , para  $\nu = 0$  es  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , para  $\nu = i$  es  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

<sup>3</sup>  $F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0$

y movidas de teorema de gauss). Como nos hemos cargado la componente 0, lo celebramos descendiendo la **solución** a trivector:

$$\hat{\vec{A}}(x^\nu) = \int d\tilde{k} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \vec{\epsilon}^\alpha(\vec{k}) \hat{a}^\alpha(\vec{k}) e^{-ikx} + \vec{\epsilon}^{*\alpha}(\vec{k}) \hat{a}^{\dagger\alpha}(\vec{k}) e^{+ikx} \right) \quad (3.4)$$

### 3.4.1. Propiedades de las polarizaciones

Ya que hemos impuesto  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , esto implica algunas propiedades para las polarizaciones  $\vec{\epsilon}^\alpha(\vec{k})$ .

- $\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}^\alpha(\vec{k}) = 0$
- $\sum_{\alpha=1}^2 \epsilon_i^\alpha(\vec{k}) \cdot \epsilon_j^\alpha(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2}$

Podemos establecer una expresión explícita para las polarizaciones si queremos, son convenio estas dos:

- $\epsilon^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \quad \text{para } \vec{k} = |\vec{k}| \vec{e}_z$
- $\epsilon^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0), \quad \text{para } \vec{k} = |\vec{k}| \vec{e}_z$



## 4. Fermiones (spin $\frac{1}{2}$ )



### 4.1. Relación de (anti)conmutación

Siendo  $\hat{b}_\sigma^\dagger(\vec{k})$  el operador que crea partículas bosónicas de "tipo"  $b$  con polarización (o spin)  $\sigma$  y momento  $\vec{k}$ :

- $\{\hat{b}_\sigma(\vec{k}), \hat{b}_{\sigma'}^\dagger(\vec{k}')\} = \delta_{\sigma\sigma'} (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$
- $\{\hat{b}_\sigma(\vec{k}), \hat{b}_{\sigma'}(\vec{k}')\} = \{\hat{b}_\sigma^\dagger(\vec{k}), \hat{b}_{\sigma'}^\dagger(\vec{k}')\} = \{\hat{b}_\sigma(\vec{k}), \hat{c}_{\sigma'}^\dagger(\vec{k}')\} = \{\hat{b}_\sigma^\dagger(\vec{k}), \hat{c}_{\sigma'}(\vec{k}')\} = 0$
- $[\hat{b}_\sigma(\vec{k}), \hat{a}_{\sigma'}(\vec{k}')] = [\hat{b}_\sigma^\dagger(\vec{k}), \hat{a}_{\sigma'}^\dagger(\vec{k}')] = [\hat{b}_\sigma(\vec{k}), \hat{a}_{\sigma'}^\dagger(\vec{k}')] = [\hat{b}_\sigma^\dagger(\vec{k}), \hat{a}_{\sigma'}(\vec{k}')] = 0$

Donde  $c$  es otro fermión random y  $a$  es cualquier boson. Como veis, la normalización es diferente; esto se debe a que quien lo hizo en su momento tuvo un mal dia y lo pagó con nosotros.

### 4.2. Campo espinorial

Para este caso, se necesitan dos campos diferentes:  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  (que son "vectores" de 4 componentes), y una lista de 4 matrices  $\{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$  (donde  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ ), que se suelen escribir como  $\gamma^\mu$ . Más adelante se definen sus propiedades y expresiones explícitas.

#### Lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$$

#### Ecuación de movimiento (Dirac)

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

La **solución** también satisface la ecuación de Klein-Gordon:

$$\hat{\psi}(x^\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \left( \bar{u}^\alpha(\vec{k}) \hat{b}^\alpha(\vec{k}) e^{-ikx} + \bar{v}^\alpha(\vec{k}) \hat{d}^{\alpha\dagger}(\vec{k}) e^{+ikx} \right) \quad (4.1)$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x^\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} \left( \bar{v}^\alpha(\vec{k}) \hat{d}^\alpha(\vec{k}) e^{-ikx} + \bar{u}^\alpha(\vec{k}) \hat{b}^{\alpha\dagger}(\vec{k}) e^{+ikx} \right) \quad (4.2)$$

Estos campos  $\psi$  se suelen escribir como  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ , ya que, si bien son "vectores" de cierto espacio vectorial, no son vectores ni de  $\mathbb{R}^4$  ni de **Lorentz**, así que no los escribimos con componentes de 0 a 3.

En un paralelismo con el campo vectorial, aparecen estas funciones  $u$  y  $v$  en vez de las  $\epsilon$ 's. En vez de cuadvectores, estas son **espinores**, y tienen un porrón de propiedades (sec 4.4).

**ACLARACIÓN:** en ocasiones será conveniente trabajar con componentes, así que las escribiremos como  $\psi_i$  (índice latín). Cuando hayan matrices  $\gamma$  involucradas, también se usará la notación con índices ( $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \gamma_{ij}^\mu\bar{\psi}_i\psi_j$ ). Esto cobrará más sentido en la sección 6

### 4.3. Propiedades de las matrices $\gamma$

Estas matrices forman el **álgebra de Dirac**. Su expresión explícita no es necesaria (además de que es arbitraria y la física debe ser independiente de la elección de sus componentes). La representación de Dirac es la siguiente:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

También es conveniente definir una quinta matriz  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora si, **propiedades:** (algunas son redundantes, las pongo para búsquedas rápidas)

- $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$
- $\text{tr}(\underbrace{\gamma^\mu \dots \gamma^\nu}_{\text{impar}}) = 0$
- $\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$

- $\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$
- $\text{tr}(\gamma^5) = \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = 0$
- $\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) = 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$
- $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$
- $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$
- $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$
- $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$
- $(\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}$

Como es obvio, todas estas propiedades acaban derivando en propiedades de los vectores  $\not{p}$ :

- $\not{a}\not{b} = a \cdot b - ia_\mu \sigma^{\mu\nu} b_\nu$   
 $(\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu])$
- $\not{a}\not{a} = a^2 \mathbb{1}$
- $\text{tr}(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b$
- $\text{tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]$
- $\text{tr}(\gamma_5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = -4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma$
- $\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}$
- $\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b \mathbb{1}$
- $\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2\not{c} \not{b} \not{a}$

#### 4.4. Propiedades de los espinores

De misma manera que con las polarizaciones de los campos vectoriales, las funciones  $u$  y  $v$  que aparecen en la solución de los espinores (4.1), son los espinores "base" y pueden tener una representación explícita en forma de matriz:

$$u^\alpha(\vec{k}) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2m(m + \omega_k)}} u^\alpha(0) \quad v^\alpha(\vec{k}) = -\frac{\not{k} - m}{\sqrt{2m(m + \omega_k)}} v^\alpha(0)$$

Es decir, se pueden escribir en función de un espinor en un sistema de referencia en reposo ( $\vec{k} = 0$ ).

A su vez, estos espinores en reposo se pueden escribir de la siguiente manera:

$$u^\alpha(0) = \begin{pmatrix} \alpha(\hat{k}, \pm) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha(\hat{k}, \pm) \end{pmatrix}$$

Donde  $\alpha(\hat{k}, \pm)$ :

$$\boxed{\alpha(\hat{k}, +) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}} \quad \boxed{\alpha(\hat{k}, -) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}} \quad (4.3)$$

$\hat{k}$  es el vector unitario que apunta hacia el momento de la partícula, i.e.  $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$  y los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  son los de este vector unitario en coordenadas esféricas. El índice  $\alpha$  de  $u^\alpha$  puede tener valores  $\alpha = +, -$ . Esto se debe a que se tiene que interpretar de misma manera que el spin. Si apunta en dirección del momento, entonces es spin up (+), si apunta en dirección contraria, entonces es spin down (-).

Si nos fijamos, al escoger una partícula en **reposo** con el spin (+) en dirección del eje  $z$  ( $\theta = 0, \phi = 0$ ) obtenemos:

$$u^\alpha(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La **interpretación** es que estos espinores "base" son los mismos utilizados para la mecánica cuántica ( $\alpha(\hat{k}, +) = |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha(\hat{k}, -) = |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ).

Combinando todo esto, las funciones  $u$  y  $v$  se pueden escribir de manera general:

$$\boxed{u^\alpha(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \alpha(\hat{k}, \pm) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E+m} \alpha(\hat{k}, \pm) \end{pmatrix}} \quad \boxed{v^\alpha(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E+m} \alpha(\hat{k}, \pm) \\ \alpha(\hat{k}, \pm) \end{pmatrix}} \quad (4.4)$$

donde, como no,  $E = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ ,  $\vec{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ .

Todo este análisis de la expresión explícita nos sirve para ver que estos espinores no son más que versiones relativistas de los espinores de la mecánica cuántica. Para  $u$  son los de la partícula, para  $v$  son los de la **antipartícula**.

Puede parecer muy complicado trabajar con estas funciones  $u$  y  $v$ , pero siempre podemos usar una **lista de propiedades** para no tener que escribir su expresión explícita cada vez que queramos calcular cosas:

- $\bar{u}^\alpha(\vec{k})u^\beta(\vec{k}) = \delta^{\alpha\beta}$
- $\bar{v}^\alpha(\vec{k})v^\beta(\vec{k}) = -\delta^{\alpha\beta}$
- $\bar{u}^\alpha(\vec{k})v^\beta(\vec{k}) = \bar{v}^\alpha(\vec{k})u^\beta(\vec{k}) = 0$
- $u^{\alpha\dagger}(\vec{k})u^\beta(\vec{k}) = v^{\alpha\dagger}(\vec{k})v^\beta(\vec{k}) = \frac{\omega_k}{m}\delta^{\alpha\beta}$
- $u^{\alpha\dagger}(\vec{k})v^\beta(-\vec{k}) = v^{\alpha\dagger}(\vec{k})u^\beta(-\vec{k}) = 0$

■

$$\sum_{\alpha=+,-} v_i^\alpha(\vec{k})\bar{v}_j^\beta(\vec{k}) = \frac{(\not{k} - m)_{ij}}{2m}$$

■

$$\sum_{\alpha=+,-} u_i^\alpha(\vec{k})\bar{u}_j^\beta(\vec{k}) = \frac{(\not{k} + m)_{ij}}{2m}$$

■

$$\sum_{\alpha=+,-} v_i^\alpha(\vec{k})v_j^{\beta\dagger}(\vec{k}) = \frac{((\not{k} - m)\gamma^0)_{ij}}{2m}$$

■

$$\sum_{\alpha=+,-} u_i^\alpha(\vec{k})u_j^{\beta\dagger}(\vec{k}) = \frac{((\not{k} + m)\gamma^0)_{ij}}{2m}$$

## 5. Propagadores

Los propagadores son un elemento clave para hacer cálculos. Se pueden interpretar como amplitudes de probabilidad de que un campo pase de un punto a otro del espacio-tiempo. Más adelante, en la sección 8, explicaremos un método general para calcularlos.

La forma general de un propagador (a 1r orden) es la siguiente:

$$\langle 0 | \mathcal{T} \{ \hat{\phi}_i^\mu(x) \hat{\phi}_j^\nu(y) \} | 0 \rangle$$

Donde  $\mu$  es un índice de Lorentz y  $i$  puede ser cualquier número cuántico.  $\mathcal{T}$  es el operador **Time Ordering**, que se explica más adelante por razones convenientes (sección 6.4).

### 5.1. Campo escalar

La idea es buscar una función  $D(x - y)$  que cumpla lo siguiente:

$$(\square + m^2)D_F(x - y) = -i\delta^{(4)}(x - y)$$

Esto es, que  $D_F(x - y)$  es una **función de Green** del operador de Klein-Gordon  $(\square + m^2)$ . Además, debe cumplir ciertas propiedades. Para más información, consultar la referencia [1]. El objeto que cumple todo eso es el **propagador de Feynman** ( $i\Delta_F(x - y) = D_F(x - y)$ ):

$$\langle 0 | \mathcal{T} \{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \quad (5.1)$$

La razón por la cual aparece esa  $i\epsilon$  en el denominador, es para evitar los polos del denominador, tal y como se muestra en la Fig. 5.1.



Figura 5.1: Peskin, M. E. (2018). *An introduction to quantum field theory*. CRC press. **Página 31**

Para un campo escalar complejo de Klein-Gordon ( $\langle 0 | \mathcal{T} \{ \hat{\phi}^\dagger(x) \hat{\phi}(y) \} | 0 \rangle$ ) el resultado es **exactamente** el mismo.

### 5.2. Campo vectorial

De forma general, el propagador de un bosón 4-vectorial como el **fotón** no tiene sentido físico (ya que el bosón es realmente un 3-vector). Aun así, en los cálculos aparece como 4-vector, así que lo usaremos así.

$$\langle 0 | \mathcal{T} \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} \left( -g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu - k^0(n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu)}{\vec{k}^2} \right)$$

Donde  $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Por lo general, esta expresión del propagador no se suele usar, ya que es muy larga y la libertad **Gauge** nos permite escoger otra expresión igual de válida:

$$\langle 0 | \mathcal{T} \{ \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} \left( -g_{\mu\nu} - (1 - \zeta) \frac{k_\mu k_\nu}{\vec{k}^2} \right) \quad (5.2)$$

Donde  $\zeta$  es el "**Gauge fixing parameter**" (movidas 📦). En ocasiones, es útil fijar  $\zeta = 1$  (**Feynman gauge**) o  $\zeta = 0$  (**Landau gauge**).

### 5.3. Campo espinorial

Para fermiones, el propagador siempre se calcula de  $\bar{\psi}$  a  $\psi$ , ya que es como aparece en las interacciones (y tiene que ver con la conservación de la carga). por raxones varias, el propagador de los campos espinoriales se puede calcular a partir del de Klein-Gordon (5.1):

$$\langle 0 | \hat{\bar{\psi}}(x) \hat{\psi}(y) | 0 \rangle = S_F(x - y) = (i\not{\partial}_x + \mathbb{1}m) D_F(x - y)$$

Aquí hemos vuelto a abusar de la notación, evitando los **índices de los fermiones**, cosa que no hay que hacer, así que lo escribiremos con índices en el resultado final:

$$\langle 0 | \hat{\bar{\psi}}_i(x) \hat{\psi}_j(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k} + \mathbb{1}m)_{ij}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} \quad (5.3)$$

En ocasiones os podeis encontrar el propagador escrito de otra manera:

$$\langle 0 | \hat{\bar{\psi}}_i(x) \hat{\psi}_j(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{k} + m + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)}$$

Pero poner las matrices en el denominador es un **abuso de notación** que viene inspirado por:

$$\frac{1}{\not{k} + m} = \frac{1}{\not{k} + m} \cdot \frac{\not{k} - m}{\not{k} - m} = \frac{\not{k} - m}{k^2 - m^2}$$

y, usando las propiedades de las matrices slash (sección 4.3),  $\not{k}^2 = \mathbb{1}k^2$

$$\frac{1}{\not{k} + m} = \frac{\not{k} - m}{k^2 - m^2}$$

Cosa que no es correcta, ya que es **imprescindible** que la  $m$  vaya acompañada de la matriz identidad, como pasa en la ecuación 5.3

## 6. Operadores de creación y destrucción (normal ordering, time ordering y Teorema de Wick)

### 6.1. Normal ordering para bosones

El "normal ordering" ( $: \cdot :$ ) es un operador que actúa sobre los operadores creación y destrucción (o sobre otros que sean proporcionales a estos). Lo que hace es desplazar todos los operadores de creación ( $\hat{a}^\dagger$ ) a la izquierda y todos los de destrucción ( $\hat{a}$ ) a la derecha. Y **siempre** respetando los índices y las dependencias en otras variables. Por ejemplo:

$$: \hat{a}^\alpha(\vec{k}) \hat{a}^\beta(\vec{q}) \hat{a}^{\gamma\dagger}(\vec{p}) := \hat{a}^{\gamma\dagger}(\vec{p}) \hat{a}^\alpha(\vec{k}) \hat{a}^\beta(\vec{q})$$

En caso de "no saber" si poner  $\hat{a}^\alpha(\vec{k}) \hat{a}^\beta(\vec{q})$  o  $\hat{a}^\beta(\vec{q}) \hat{a}^\alpha(\vec{k})$ , recordad que estos dos conmutan, así que en esencia los podemos poner como queramos. Lo mismo pasa con los  $a^\dagger$ .

También ocurre con los operadores que son directamente proporcionales a estos, como pueden ser los campos ( $\pm$ ) (3.1). Para este caso, pone los  $+$  (proporcionales a  $\hat{a}$ ) a la derecha y los  $-$  (proporcionales a  $\hat{a}^\dagger$ ) a la izquierda:

$$: \hat{A}_\mu^{(+)}(x) \hat{A}_\nu^{(+)}(y) \hat{A}_\sigma^{(-)}(z) := \hat{A}_\sigma^{(-)}(z) \hat{A}_\mu^{(+)}(x) \hat{A}_\nu^{(+)}(y)$$

### 6.2. Normal ordering para fermiones

En este caso el planteamiento es el mismo **pero**, al reordenar los campos, habrá que hacerlo contando las permutaciones de estos y añadiendo un signo  $-$  cada vez. Desde que la relación de anticonmutación entre dos operadores fermiónicos es  $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2\} = 0$ , entonces  $\hat{b}_1 \hat{b}_2 = -\hat{b}_2 \hat{b}_1$ .

(Para limpiar el máximo de información posible vamos a escribir  $\hat{b}^\alpha(\vec{k}) \equiv \hat{b}_1$ ,  $\hat{b}^\beta(\vec{p}) \equiv \hat{b}_2$ , etc.) Ejemplo:

$$: \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_3^\dagger := - : \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1 \hat{b}_3^\dagger := \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_3^\dagger \hat{b}_1$$

(en este caso, hemos cambiado 2 veces, así que  $(-) \cdot (-) = (+)$ )

Otro ejemplo:

$$: \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_3 \hat{b}_4^\dagger := - : \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1 \hat{b}_3 \hat{b}_4^\dagger := \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1 \hat{b}_4^\dagger \hat{b}_3 := -\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_4^\dagger \hat{b}_1 \hat{b}_3$$

(ahora hemos cambiado 3 veces,  $(-) \cdot (-) \cdot (-) = (-)$ )

Y lo mismo pasa con los campos ( $\pm$ ):

$$: \hat{\psi}_{(1)i}^{(+)} \hat{\psi}_{(2)j}^{(-)} \hat{\psi}_{(3)k}^{(-)} := - : \hat{\psi}_{(2)j}^{(-)} \hat{\psi}_{(1)i}^{(+)} \hat{\psi}_{(3)k}^{(-)} := \hat{\psi}_{(2)j}^{(-)} \hat{\psi}_{(3)k}^{(-)} \hat{\psi}_{(1)i}^{(+)}$$

Solo hay que cambiar de signo cuando se permutan **dos operadores fermiónicos**. En caso de permutar uno bosónico y fermiónico no se cambia.



**DISCLAIMER (muy importante):** En ocasiones tendemos a abusar de la notación para los fermiones. La mayoría de veces, el producto entre espinores se escribe **sin índices** ( $\bar{\psi}\psi$ ). Hay que recordar, que realmente esto es una suma de números ( $\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2 + \bar{\psi}_3\psi_3 + \bar{\psi}_4\psi_4$ ), es decir,  $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_i\psi_i$ , tal y como se aclaró en la sección 4.2. El **normal ordering** para campos está definido **cuando se usan índices**.

Lo aclaro porque más de una vez me he encontrado cosas como :  $\hat{\psi}^{(+)}\hat{\psi}^{(-)} := -\hat{\psi}^{(-)}\hat{\psi}^{(+)}$ , cosa que no tiene sentido alguno, ya que estamos pasando de tener un escalar a tener una matriz. Con índices la cosa se arregla, :  $\hat{\psi}_i^{(+)}\hat{\psi}_i^{(-)} := -\hat{\psi}_i^{(-)}\hat{\psi}_i^{(+)}$ , ya que tenemos escalares en ambos lados (se contraen los índices).

### 6.3. Propiedades de los operadores creación

Es conveniente apuntar algunas propiedades (aunque su demostración es trivial). Algunas son propias de los operadores creación ( $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$ ), pero veo conveniente ponerlas aquí, ya que se suelen usar en conjunto en los cálculos:

$$\blacksquare \underbrace{\hat{a} \dots \hat{a}}_n \underbrace{\hat{a}^\dagger \dots \hat{a}^\dagger}_m |0\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n > m \\ ? & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\blacksquare \langle 0 | \underbrace{\hat{a} \dots \hat{a}}_n \underbrace{\hat{a}^\dagger \dots \hat{a}^\dagger}_m = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ ? & \text{si } n = m \end{cases}$$

- Esta la enmarco porque es **MUY** importante y nos ahorra mucho tiempo.

$$\langle 0 | \underbrace{\hat{a} \dots \hat{a}}_n \underbrace{\hat{a}^\dagger \dots \hat{a}^\dagger}_m |0\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n > m \\ 0 & \text{si } n < m \\ ? & \text{si } n = m \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\blacksquare \boxed{[\hat{\phi}^{(+)}(x), \hat{a}^\dagger(\vec{q})] = e^{-iqx}}, \boxed{[\hat{A}_\mu^{(+)}(x), \hat{a}^{\sigma\dagger}(\vec{q})] = \epsilon_\mu^\sigma(\vec{q})e^{-iqx}}, \frac{\boxed{[\hat{\psi}_i^{(+)}(x), \hat{b}^{\sigma\dagger}(\vec{q})] = u_i^\sigma(\vec{q})e^{-iqx}}}{\boxed{[\hat{\psi}_i^{(+)}(x), \hat{d}^{\sigma\dagger}(\vec{q})] = \bar{v}_i^\sigma(\vec{q})e^{-iqx}}}$$

$$\blacksquare \boxed{[\hat{a}(\vec{q}), \hat{\phi}^{(-)}(x)] = e^{iqx}}, \boxed{[\hat{a}^\sigma(\vec{q}), \hat{A}_\mu^{(-)}(x)] = \epsilon_\mu^\sigma(\vec{q})e^{iqx}}, \frac{\boxed{[\hat{d}^\sigma(\vec{q}), \hat{\psi}_i^{(-)}(x)] = v_i^\sigma(\vec{q})e^{iqx}}}{\boxed{[\hat{b}^\sigma(\vec{q}), \hat{\psi}_i^{(-)}(x)] = \bar{u}_i^\sigma(\vec{q})e^{iqx}}}$$

- Si  $\langle 0 | \hat{\mathcal{O}} |0\rangle \neq 0$ , entonces  $\langle 0 | : \hat{\mathcal{O}} : |0\rangle = 0$ , para todo conjunto de operadores  $\hat{\mathcal{O}}$ .

Una última propiedad importante es la siguiente (que se deriva directamente de (6.1)):

$$\langle 0 | \prod_i^{n_f} \hat{a}_i : \prod_j^n \hat{A}_j : \prod_k^{n_i} \hat{a}_k^\dagger |0\rangle = \langle 0 | \prod_i^{n_f} \hat{a}_i \sum_{\text{perm } j,k} \underbrace{\left\{ \prod_j^{n_f} \hat{A}_j^{(-)} \prod_k^{n_i} \hat{A}_k^{(+)} \right\}}_{\text{if } n = n_f + n_i} \prod_l^{n_i} \hat{a}_l^\dagger |0\rangle \quad (6.2)$$

Así a simple vista, no dice nada ni parece importante, pero si ponemos algunos ejemplos vemos que lo es, y mucho. Estas propiedades se suelen usar en cálculos de  $S$ -matrix, lo cual significa que tenemos un estado inicial ( $|i\rangle$ ), otro final ( $\langle f|$ ) y hacemos su producto escalar:

- Para  $|i\rangle = \hat{a}_1^\dagger |0\rangle$ ,  $\langle f| = \langle 0| \hat{a}_2$ :

$$\begin{aligned}\langle 0| \hat{a}_2 : \hat{A}_1 : \hat{a}_1^\dagger |0\rangle &= 0 \\ \langle 0| \hat{a}_2 : \hat{A}_1 \hat{A}_2 : \hat{a}_1^\dagger |0\rangle &= \langle 0| \hat{a}_2 \hat{A}_1^{(-)} \hat{A}_2^{(+)} \hat{a}_1^\dagger |0\rangle + \langle 0| \hat{a}_2 \hat{A}_2^{(-)} \hat{A}_1^{(+)} \hat{a}_1^\dagger |0\rangle \\ \langle 0| \hat{a}_2 : \hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 : \hat{a}_1^\dagger |0\rangle &= 0 \\ \langle 0| \hat{a}_2 : \hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 \hat{A}_4 : \hat{a}_1^\dagger |0\rangle &= 0 \\ &\vdots\end{aligned}$$

- Para  $|i\rangle = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle$ ,  $\langle f| = \langle 0| \hat{a}_3$ :

$$\begin{aligned}\langle 0| \hat{a}_3 : \hat{A}_1 : \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle &= 0 \\ \langle 0| \hat{a}_3 : \hat{A}_1 \hat{A}_2 : \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle &= 0 \\ \langle 0| \hat{a}_3 : \hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 : \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle &= \langle 0| \hat{a}_3 \hat{A}_1^{(-)} \hat{A}_2^{(+)} \hat{A}_3^{(+)} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle + \langle 0| \hat{a}_3 \hat{A}_2^{(-)} \hat{A}_1^{(+)} \hat{A}_3^{(+)} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle \\ &\quad + \langle 0| \hat{a}_3 \hat{A}_3^{(-)} \hat{A}_2^{(+)} \hat{A}_1^{(+)} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle \\ \langle 0| \hat{a}_3 : \hat{A}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_3 \hat{A}_4 : \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle &= 0 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Es decir, **solo sobreviven**  $n_i$  operadores  $(+)$  y  $n_f$  operadores  $(-)$ , permutados entre sí. Si bien el normal ordering en  $\hat{A}_i$  haría que los operadores se aniquilaran con el vacío, al haber  $\hat{a}_i$ 's antes, estas lo impiden cuando hay  $n_i \hat{A}_i^{(+)}$ 's y  $n_f \hat{A}_i^{(-)}$ 's. Esta propiedad es **fundamental** para calcular rápidamente elementos de la  $S$ -matrix (sección 7.2). Esto es así para **1 solo tipo de partícula**; si quisiéramos añadir más a la ecuación funciona de la misma manera, solo que hay que tratar a los distintos operadores de manera separada, para que no interfieran entre sí.

## 6.4. Time ordering

Se define el "time ordering" ( $\mathcal{T}\{ \}$ ) de dos operadores que **dependen de una cuadruposición** como:

$$\mathcal{T}\{\hat{A}_1(x_1) \dots \hat{A}_n(x_n)\} = \sum_{\text{perm}} \left( \prod_{j=1}^{n-1} \theta(x_{p_j}^0 - x_{p_{j+1}}^0) \right) (-1)^p \hat{A}_{p_1}(x_{p_1}) \dots \hat{A}_{p_n}(x_{p_n})$$

Donde "perm" significa todas las posibles permutaciones entre los operadores,  $p$  es el número de permutaciones entre operadores fermiónicos que hayamos hecho al reordenarlos y

$\theta(x^0 - y^0)$  es la función escalón de Heaviside. Como veis, esta expresión es una mierda, así que vamos a ejemplificarla para que se entienda.

- Para 2 operadores bosónicos:

$$\mathcal{T}\{\hat{A}(x)\hat{B}(y)\} = \theta(x^0 - y^0)\hat{A}(x)\hat{B}(y) + \theta(y^0 - x^0)\hat{B}(y)\hat{A}(x)$$

- Para 3 operadores fermiónicos:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{\hat{A}(x)\hat{B}(y)\hat{C}(z)\} &= \theta(x^0 - y^0)\theta(y^0 - z^0)\hat{A}(x)\hat{B}(y)\hat{C}(z) + \theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - y^0)\hat{A}(x)\hat{C}(z)\hat{B}(y) \\ &+ \theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0)\hat{B}(y)\hat{A}(x)\hat{C}(z) + \theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0)\hat{B}(y)\hat{C}(z)\hat{A}(x) \\ &+ \theta(z^0 - x^0)\theta(x^0 - y^0)\hat{C}(z)\hat{A}(x)\hat{B}(y) + \theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0)\hat{C}(z)\hat{B}(y)\hat{A}(x)\end{aligned}$$

- Para  $\hat{A}$  bosónico,  $\hat{\phi}, \hat{\psi}$  fermiónicos:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\{\hat{A}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\psi}(z)\} &= \theta(x^0 - y^0)\theta(y^0 - z^0)\hat{A}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\psi}(z) - \theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - y^0)\hat{A}(x)\hat{\psi}(z)\hat{\phi}(y) \\ &- \theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0)\hat{\phi}(y)\hat{A}(x)\hat{\psi}(z) + \theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0)\hat{\phi}(y)\hat{\psi}(z)\hat{A}(x) \\ &+ \theta(z^0 - x^0)\theta(x^0 - y^0)\hat{\psi}(z)\hat{A}(x)\hat{\phi}(y) - \theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0)\hat{\psi}(z)\hat{\phi}(y)\hat{A}(x)\end{aligned}$$

Como veis, la función  $\theta$  lo que hace es marcar **cual es el campo que "ocurre" primero**. Este operador  $\mathcal{T}$  se suele usar en un contexto en el que se encuentra dentro de un bracket ( $\langle 0 | \mathcal{T} \{ \} | 0 \rangle$ ), así que se puede interpretar como que los campos que están a la derecha "ocurren" antes que los de la izquierda, y por eso se restringe su orden con la  $\theta$ . Como os podréis imaginar, para más de 4 operadores la cosa se complica enormemente. Es aquí donde necesitamos usar el **Teorema de Wick**.

## 6.5. Teorema de Wick

Vamos a ir al grano, el Teorema de Wick dice así:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\{\prod_i \hat{\phi}_i(x_i)\} =: & \prod_i \hat{\phi}_i(x_i) : + \frac{1}{1!} \sum_{i < j} \overbrace{\hat{\phi}_i(x_i) \hat{\phi}_j(x_j)} : \prod_{k \notin \{i,j\}} \hat{\phi}_k(x_k) : + \\
& + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i < j, k < l \\ i \neq j \neq k \neq l}} \overbrace{\hat{\phi}_i(x_i) \hat{\phi}_j(x_j)} \overbrace{\hat{\phi}_k(x_k) \hat{\phi}_l(x_l)} : \prod_{m \notin \{i,j,k,l\}} \hat{\phi}_m(x_m) : + \dots
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Donde  $\overbrace{\hat{\phi}_i(x_i) \hat{\phi}_j(x_j)} = \langle 0 | \mathcal{T}\{\hat{\phi}_i(x_i) \hat{\phi}_j(x_j)\} | 0 \rangle$ . Es decir, el propagador entre los dos campos (siempre y cuando estos sean de la **misma partícula**, están recogidos en la sección 5). Cada vez que contraemos los campos, hay que asegurarse de que **no estamos repitiendo ninguno** (todos tienen índice diferente y son campos diferentes). El  $\frac{1}{n!}$  es para eliminar los términos que se repiten, ya que sumamos dos veces al pasar por  $j$  y  $l$  (en el caso del  $\frac{1}{2!}$ ).



La forma general del teorema es una mierda, para que mentir. Así que vamos a poner varios ejemplos para que quede claro:

- Para 2 campos escalares (idénticos):

$$\mathcal{T}\{\phi_1 \phi_2\} =: \phi_1 \phi_2 : + \overbrace{\phi_1 \phi_2} :$$

(donde definimos  $\hat{\phi}(x_i) \equiv \phi_i$ )

- Para 3 campos escalares (idénticos):

$$\mathcal{T}\{\phi_1 \phi_2 \phi_3\} =: \phi_1 \phi_2 \phi_3 : + \overbrace{\phi_1 \phi_2} : \phi_3 : + \overbrace{\phi_1 \phi_3} : \phi_2 : + \overbrace{\phi_2 \phi_3} : \phi_1 :$$

- Para 4 campos escalares (idénticos):

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4\} =: & \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 : + \overbrace{\phi_3 \phi_4} : \phi_1 \phi_2 : + \overbrace{\phi_2 \phi_4} : \phi_1 \phi_3 : + \overbrace{\phi_1 \phi_4} : \phi_3 \phi_2 : \\
& + \overbrace{\phi_2 \phi_3} : \phi_1 \phi_4 : + \overbrace{\phi_1 \phi_3} : \phi_4 \phi_2 : + \overbrace{\phi_1 \phi_2} : \phi_3 \phi_4 : + \frac{1}{2!} \left( \overbrace{\phi_3 \phi_4} \overbrace{\phi_1 \phi_2} + \overbrace{\phi_2 \phi_4} \overbrace{\phi_1 \phi_3} \right. \\
& \left. + \overbrace{\phi_1 \phi_4} \overbrace{\phi_2 \phi_3} + \overbrace{\phi_2 \phi_3} \overbrace{\phi_1 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_3} \overbrace{\phi_2 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2} \overbrace{\phi_3 \phi_4} \right)
\end{aligned}$$

Desde que  $\langle 0 | \mathcal{T}\{\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)\} | 0 \rangle = \langle 0 | \mathcal{T}\{\hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x)\} | 0 \rangle$ , vemos que hay términos repetidos, que se cancelan con el  $\frac{1}{2!}$ . Además, podemos escribirlo ordenadamente para que se vea la estructura general del desarrollo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} = & \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : + : \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} : + : \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} : + : \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} : \\
& + : \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} : + : \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} : + : \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} : + : \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} : + : \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} : \\
& + : \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} :
\end{aligned}$$

Es decir, solamente hay que contraer los campos con diferente índice **1 vez**, sin repetirlos.

- Para 4 fermiónicos y 2 vectoriales:

Este caso ocurre continuamente en QED, así que no está mal verlo. Primero definimos los campos con su posición y lo escribimos **con índices** ( $\hat{\psi}(x) \equiv \psi_{ix}$ ):

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\{\hat{\psi}(x)\gamma^\mu\hat{\psi}(x)\hat{A}_\mu(x)\hat{\psi}(y)\gamma^\nu\hat{\psi}(y)\hat{A}_\nu(y)\} = & \mathcal{T}\{\bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}\} = \\
& : \bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y} : + : \overbrace{\bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}} : \\
& + : \overbrace{\bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}} : + : \overbrace{\bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}} : \\
& + : \bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\overbrace{\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}} : + : \bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\overbrace{\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}} : \\
& + : \overbrace{\bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}} : + : \overbrace{\bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}} : \\
& + : \overbrace{\bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}} : + : \overbrace{\bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}} : \\
& : \overbrace{\bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}} : + : \overbrace{\bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}} : \\
& + : \overbrace{\bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}} : + : \overbrace{\bar{\psi}_{ix}\gamma^\mu_{ij}\psi_{jx}A_{\mu x}\bar{\psi}_{ky}\gamma^\nu_{kl}\psi_{ly}A_{\nu y}} :
\end{aligned}$$

Como veis, los fermiones solo se pueden contraer entre campos con barra ( $\bar{\psi}$ ) y sin barra ( $\psi$ ).

Viendo algunas de estas expresiones, nos podemos dar cuenta de que andar contando contracciones y combinaciones puede dar margen a mucho fallos. Es por eso que, una vez visto el contexto en el que aparecen estas expresiones ( $S$ -matrix), conviene introducir los **diagramas de Feynman**.

## 7. $S$ -matrix (interacciones)

Debido a que los estados y operadores en QFT están en el contexto de la **imagen de interacción** (consultar referencia [2], página 320), nos tenemos que imaginar que nuestras partículas se crean en el infinito pasado y llegan hasta el infinito futuro, interactuando en medio del trayecto. Nuestro estado evoluciona según un operador unitario:

$$|i, t\rangle = \hat{U}(t, t_0) |i, t_0\rangle$$

Así pues, la amplitud de probabilidad de que nuestro estado  $|i, t_0\rangle$  se convierta en  $|f, t\rangle$  en un intervalo de tiempo  $t - t_0$  es:

$$A_{if}(t, t_0) = \langle f, t | \hat{U}(t, t_0) | i, t_0 \rangle$$

Tras mucho texto y demostración, podemos llegar a que el operador  $\hat{U}(t, t_0)$  tiene la misma forma que el que hace evolucionar nuestros estados en **mecánica cuántica** y es solución de la ecuación de Schrödinger:

$$\hat{U}(t, t_0) = \mathcal{T}\{e^{-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'}\}$$

Donde  $H_I$  es el **Hamiltoniano de interacción** (en la imagen de interacción), que se puede escribir en función de una **densidad Hamiltoniana**  $H_I(x^0) = \int d^3x \mathcal{H}_I(x)$ . Finalmente, si hacemos el límite cuando el tiempo se va a  $\pm\infty$ , obtenemos el  **$S$ -operator**:

$$\boxed{\hat{S} = \mathcal{T}\{e^{-i \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{H}_I(x) d^4x}\}} \quad (7.1)$$

Y, por definición, la  **$S$ -matrix**:

$$\boxed{S_{if} = \langle f | \hat{S} | i \rangle = \langle f | \mathcal{T}\{e^{-i \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{H}_I(x) d^4x}\} | i \rangle} \quad (7.2)$$

Donde  $|i\rangle$  y  $|f\rangle$  son estados que contienen las partículas cuya amplitud de probabilidad queramos "comprobar". Por ejemplo, si queremos ver la amplitud de probabilidad de que un estado con **2 bosones** escalares se vaya a otro con **2**, escribiremos:

$$\begin{aligned} |i\rangle &= \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle \\ |f\rangle &= \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_1) \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_2) |0\rangle \\ (\langle f | &= \langle 0 | \hat{a}(\vec{k}'_1) \hat{a}(\vec{k}'_2)) \end{aligned}$$

### 7.1. Diagramas de Feynman y $S$ -matrix

Para calcular la  $S$ -matrix, en ocasiones es muy conveniente simplemente **dibujar** diagramas según el orden de la constante de interacción y los loops (sec. 9) que queramos. Al momento de calcular la  $S$ -matrix, hay que expandir el  $S$ -operator en serie de Taylor:

$$\hat{S} \approx 1 - i \int \mathcal{T}\{\mathcal{H}_I(x)\} d^4x + (-i)^2 \int \mathcal{T}\{\mathcal{H}_I(x)\mathcal{H}_I(y)\} d^4x d^4y + \dots$$

Cada orden significará cuantos vértices de interacción tenemos, ya que cada vez que ponemos una integral estamos añadiendo un **punto de interacción** sobre el que integramos en todo el espacio. Vamos a ver 2 teorías,  $\lambda\phi^4$  y QED para ver como funciona.

### 7.1.1. $T$ -matrix

Para poder usar la teoría cuántica de campos para calcular cosas, nos interesa la parte **no trivial** de la  $S$ -matrix. Según como la hemos definido en 7.1, está claro que  $\hat{S}$  se puede escribir como:

$$\hat{S} = \mathbb{1} + i\hat{T}$$

La parte de la identidad, está claro que acabará dando un elemento de matriz:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \hat{a}^{\alpha_1}(\vec{p}_1) \hat{a}^{\alpha_2}(\vec{p}_2) \dots \hat{a}^{\alpha_n}(\vec{p}_n) \hat{a}^{\beta_m \dagger}(\vec{k}_m) \dots \hat{a}^{\beta_2 \dagger}(\vec{k}_2) \hat{a}^{\beta_1 \dagger}(\vec{k}_1) | 0 \rangle = \\ & = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 2^{2n} (2\pi)^{6n} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \delta_{\alpha_1 \beta_1} \delta_{\alpha_2 \beta_2} \dots \delta_{\alpha_n \beta_n} \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{k}_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_2 - \vec{k}_2) \dots \delta^{(3)}(\vec{p}_n - \vec{k}_n) & \text{si } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

Que básicamente viene a decirnos que las partículas **no interactúan**, son las mismas al inicio y al final y tienen los mismos momentos; trivial. Hay algunos elementos de la  $T$ -matrix (la parte interactuante) que también tienen esta forma, son los casos donde **no todas las partículas** interactúan, así que habrá que librarse de esos términos para calcular la parte que nos interesa.

## 7.2. $\lambda\phi^4$

### 7.2.1. $S$ -operator (para $\lambda\phi^4$ )

Primeramente, vamos a ver la **interpretación diagramática** del  $S$ -operator, y más adelante veremos como montar los diagramas para la  $T$ -matrix (que es incluyendo el sandwich con  $\langle f |$   $| i \rangle$ ).

Presentamos el lagrangiano de interacción:

$$\mathcal{L}_I(x) = -\lambda\phi^4(x)$$

Es una interacción **local**, los 4 campos se encuentran en  $x$  en el momento de la interacción. Su Hamiltoniano de interacción es:

$$\mathcal{H}_I(x) = \lambda\phi^4(x)$$

Así pues, su  $S$ -operator es:

$$\hat{S} = 1 - i\lambda \int \mathcal{T}\{\hat{\phi}^4(x)\}d^4x + (-i\lambda)^2 \int \mathcal{T}\{\hat{\phi}^4(x)\hat{\phi}^4(y)\}d^4xd^4y + \dots$$

Por el **Teorema de Wick** (sec. 6):

$$\begin{aligned} \int \mathcal{T}\{\hat{\phi}^4(x)\}d^4x &= \int \left( : \hat{\phi}^4(x) : + 6\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)} : \hat{\phi}^2(x) : + 3\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)} : \right) d^4x \\ \int \mathcal{T}\{\hat{\phi}^4(x)\hat{\phi}^4(y)\}d^4xd^4y &= \int \left( : \hat{\phi}^4(x)\hat{\phi}^4(y) : + 12\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)} : \hat{\phi}^2(x)\hat{\phi}^4(y) : \right. \\ &+ 16\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} : \hat{\phi}^3(x)\hat{\phi}^3(y) : + 6\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)} : \hat{\phi}^4(y) : + 36\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overline{\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)} : \hat{\phi}^2(x)\hat{\phi}^2(y) : \\ &+ 96\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} : \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^3(y) : + 72\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} : \hat{\phi}^2(x)\hat{\phi}^2(y) : \\ &+ 36\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overline{\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)} : \hat{\phi}^2(y) : + 144\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overline{\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)} : \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) : \\ &+ 144\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} : \hat{\phi}^2(y) : + 96\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} : \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) : \\ &+ 9\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overline{\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)}\overline{\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)} + 72\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \\ &\left. + 24\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \right) d^4xd^4y \end{aligned}$$

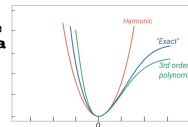
Los factores que aparecen delante se les llama **factores de simetría** (gracias a [tw@Teic-Dawn](#) por calcularlos). Vienen de juntar términos similares y asumir que  $\int \hat{f}(x, y)d^4xd^4y = \int \hat{f}(y, x)d^4xd^4y$ . El tercer orden es un suplicio y ya del cuarto ni hablemos, así que lo dejaremos aquí.

### como creen los matemáticos que calculan los físicos:



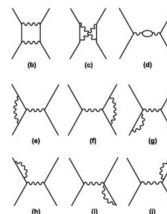
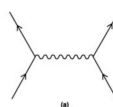
lo hago hasta segundo orden porque sino no se calcularlo, pero ya es muy buena aproximación

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$



### los físicos calculando:

lo hago hasta segundo orden porque el tercero da 0 y el cuarto tardaría 1 semana

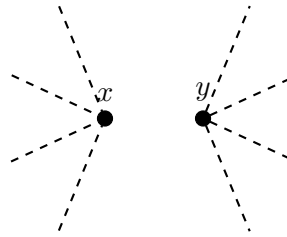




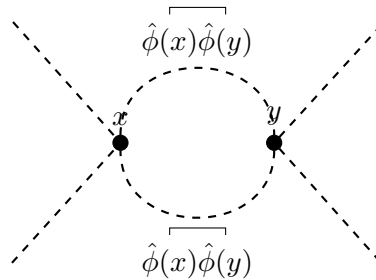
Ahora, vamos a indicar los pasos de **como dibujar** el diagrama de Feynman correspondiente a cada término, tomando como ejemplo el término  $\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} : \hat{\phi}^2(x)\hat{\phi}^2(y) :$ .

$$\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} : \hat{\phi}^2(x)\hat{\phi}^2(y) :$$

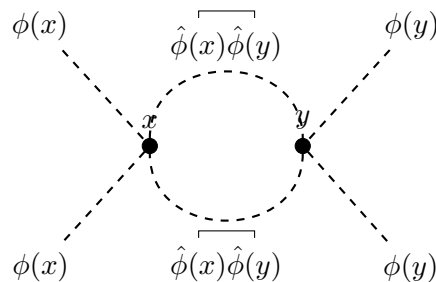
1. Primero dibujamos un punto por cada vértice (recordemos que estamos en el orden  $\lambda^2$ ), así que en este caso habrá 2. Los etiquetamos con las variables de posición de cada vértice ( $x$  e  $y$ ). Estos vértices tendrán 4 patas, ya que la interacción es  $\lambda\hat{\phi}^4(x)$ , 4 campos:



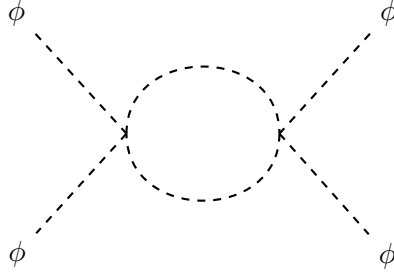
2. Ahora unimos los vértices con los propagadores  $\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}$  2 veces, ya que tenemos 2. Para el caso de los bosones escalares, la línea se suele escribir a rayas.



3. Finalmente, los campos dentro del normal ordering :  $\hat{\phi}^2(x)\hat{\phi}^2(y) :$  se colocan en las puntas

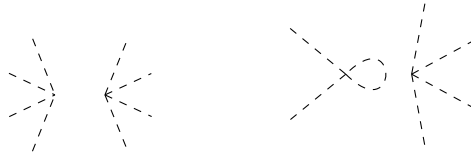


4. Normalmente, se suelen obviar muchos elementos que hemos escrito para no sobrecargar de información al diagrama. Se suelen escribir los campos iniciales y finales solamente:

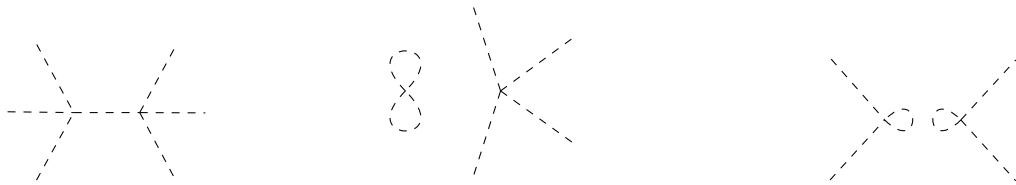


Así pues, para nuestro caso nos quedan los siguientes diagramas para cada término:

$$\int \mathcal{T}\{\hat{\phi}^4(x)\hat{\phi}^4(y)\}d^4x d^4y = \int \left( \underbrace{:\hat{\phi}^4(x)\hat{\phi}^4(y):}_{\text{diagram 1}} + 12 \underbrace{\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)} \hat{\phi}^2(x)\hat{\phi}^4(y):}_{\text{diagram 2}} \right)$$



$$+ 16 \underbrace{\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \hat{\phi}^3(x)\hat{\phi}^3(y):}_{\text{diagram 3}} + 6 \underbrace{\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)} \hat{\phi}^4(y):}_{\text{diagram 4}} + 36 \underbrace{\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)} \hat{\phi}^2(x)\hat{\phi}^2(y):}_{\text{diagram 5}}$$



$$+ 96 \underbrace{\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^3(y):}_{\text{diagram 6}} + 72 \underbrace{\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \hat{\phi}^2(x)\hat{\phi}^2(y):}_{\text{diagram 7}}$$



$$+ 36 \underbrace{\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)} \hat{\phi}^2(y):}_{\text{diagram 8}} + 144 \underbrace{\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)} \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y):}_{\text{diagram 9}}$$



$$\begin{aligned}
& +144 \underbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}_{\text{diagrama}} : \hat{\phi}^2(y) : + 96 \underbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}_{\text{diagrama}} : \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) : \\
& +9 \underbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)}_{\text{diagrama}} + 72 \underbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}_{\text{diagrama}} \\
& +24 \underbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}_{\text{diagrama}} \Big) d^4x d^4y
\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio hacer los diagramas del término de orden  $\lambda$  (el anterior, 1 vértice). Estos diagramas son **solo para el  $S$ -operator**, no son diagramas de Feynman "reales" que representan procesos reales, ya que hasta que no los usemos para calcular elementos de matriz, no están completos (les faltan las "contracciones" con los estados finales e iniciales).

### 7.2.2. $T$ -matrix (para $\lambda\phi^4$ )

Recordemos que nuestro  $S$ -operator tenía la pinta siguiente:

$$\hat{S} = 1 - i\lambda \int \mathcal{T}\{\hat{\phi}^4(x)\} d^4x + (-i\lambda)^2 \int \mathcal{T}\{\hat{\phi}^4(x)\hat{\phi}^4(y)\} d^4x d^4y + \dots$$

,

así que el  $T$ -operator sería:

$$\hat{T} = -\lambda \int \mathcal{T}\{\hat{\phi}^4(x)\} d^4x + i\lambda^2 \int \mathcal{T}\{\hat{\phi}^4(x)\hat{\phi}^4(y)\} d^4x d^4y + \dots$$

Cuyos desarrollos ya hemos especificado en 7.2.1. Ahora, vamos a poner como ejemplo los siguientes estados iniciales y finales:

$$|i\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1)\hat{a}^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle$$

$$\langle f| = \langle 0|\hat{a}(\vec{p}_2)\hat{a}(\vec{p}_1)$$

Así que, hasta orden 2:

$$T_{if} = \langle 0|\hat{a}(\vec{p}_2)\hat{a}(\vec{p}_1) \left[ -\lambda \int \mathcal{T}\{\hat{\phi}^4(x)\}d^4x + i\lambda^2 \int \mathcal{T}\{\hat{\phi}^4(x)\hat{\phi}^4(y)\}d^4xd^4y \right] \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1)\hat{a}^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle$$

Como se puede ver, aparecen los dos términos que hemos calculado en la sección anterior (7.2.1), así que solo habría que introducirlo dentro de nuestra expresión. Pero antes, debido al resultado 6.2, y fijándonos en que tenemos 2 partículas iniciales ( $\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|0\rangle$ ) y 2 finales ( $\langle 0|aa$ ), **solo sobrevivirán los diagramas con 4 patas** (o, lo que es lo mismo, con 4 campos en el normal ordering).

En total son 4 términos (escribimos solo el  $T$ -operator, teniendo en cuenta que los términos que faltarían se hacen 0 por lo ya mencionado para ahorrarnos escribir los estados finales e iniciales):

$$\begin{aligned} \hat{T}' = & -\lambda \int : \hat{\phi}^4(x) : d^4x + i\lambda^2 \int (6\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)} : \hat{\phi}^4(y) : \\ & + 36\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)}\overbrace{\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(y)} : \hat{\phi}^2(x)\hat{\phi}^2(y) : + 72\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} : \hat{\phi}^2(x)\hat{\phi}^2(y) : ) d^4xd^4y \end{aligned}$$

Ahora, vamos a trabajar sobre **este** término (que llamaremos  $T_{if}^{(4)}$ , el resto  $T_{if}^{(1,2,3)}$ ), para ver como desarrollarlo. Así que hay que calcular la siguiente integral:

$$T_{if}^{(4)} = i72\lambda^2 \langle 0|\hat{a}(\vec{p}_2)\hat{a}(\vec{p}_1) \int \overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} : \hat{\phi}^2(x)\hat{\phi}^2(y) : d^3xd^4y \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1)\hat{a}^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle$$

Como todo lo que no son operadores lo podemos sacar fuera del bracket, lo entramos dentro de la integral y lo arreglamos tal que así:

$$T_{if}^{(4)} = i72\lambda^2 \int \overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \langle 0|\hat{a}(\vec{p}_2)\hat{a}(\vec{p}_1) : \hat{\phi}^2(x)\hat{\phi}^2(y) : \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1)\hat{a}^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle d^4xd^4y$$

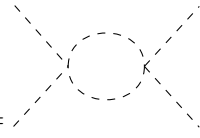
Ahora, usando la propiedad 6.2, lo que hay dentro del normal ordering se expande:

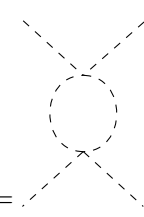
$$\begin{aligned} T_{if}^{(4)} = & i72\lambda^2 \int \overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)}\overbrace{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \langle 0|\hat{a}(\vec{p}_2)\hat{a}(\vec{p}_1) ( : \hat{\phi}^{(+)}(x)\hat{\phi}^{(+)}(x)\hat{\phi}^{(-)}(y)\hat{\phi}^{(-)}(y) \\ & + \hat{\phi}^{(+)}(x)\hat{\phi}^{(-)}(x)\hat{\phi}^{(+)}(y)\hat{\phi}^{(-)}(y) + \hat{\phi}^{(+)}(x)\hat{\phi}^{(-)}(x)\hat{\phi}^{(-)}(y)\hat{\phi}^{(+)}(y) + \hat{\phi}^{(-)}(x)\hat{\phi}^{(-)}(x)\hat{\phi}^{(+)}(y)\hat{\phi}^{(+)}(y) \\ & + \hat{\phi}^{(-)}(x)\hat{\phi}^{(+)}(x)\hat{\phi}^{(-)}(y)\hat{\phi}^{(+)}(y) + \hat{\phi}^{(-)}(x)\hat{\phi}^{(+)}(x)\hat{\phi}^{(+)}(y)\hat{\phi}^{(-)}(y) : ) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1)\hat{a}^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle d^4xd^4y \end{aligned}$$

Son 6 términos (🤖), pero, debido a la simetría de la integral ( $\int f(x, y) dx dy = \int f(y, x) dx dy$ ) y a que estamos **obligados** a poner todos los operadores (-) a la izquierda y los operadores (+) a la derecha (**debido al normal ordering**), se simplifica mucho (🐼):

$$T_{if}^{(4)} = i72\lambda^2 \int \overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \langle 0 | \hat{a}(\vec{p}_2) \hat{a}(\vec{p}_1) (2\hat{\phi}^{(-)}(x) \hat{\phi}^{(-)}(x) \hat{\phi}^{(+)}(y) \hat{\phi}^{(+)}(y) + 4\hat{\phi}^{(-)}(x) \hat{\phi}^{(-)}(y) \hat{\phi}^{(+)}(x) \hat{\phi}^{(+)}(y)) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_2) | 0 \rangle d^4x d^4y$$

Estos 2 términos que se están sumando, ahora si, son **diagramas de Feynmann**, ya que estamos especificando si el operador de dentro del bracket se conecta con las patas finales o iniciales, dando lugar a 2 diagramas diferentes, el **s-channel** y el **t-channel** respectivamente (con 1 loop, no lo son exactamente):

$$\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \langle 0 | \hat{a}(\vec{p}_2) \hat{a}(\vec{p}_1) \hat{\phi}^{(-)}(x) \hat{\phi}^{(-)}(x) \hat{\phi}^{(+)}(y) \hat{\phi}^{(+)}(y) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_2) | 0 \rangle =$$


$$\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \langle 0 | \hat{a}(\vec{p}_2) \hat{a}(\vec{p}_1) \hat{\phi}^{(-)}(x) \hat{\phi}^{(-)}(y) \hat{\phi}^{(+)}(x) \hat{\phi}^{(+)}(y) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_2) | 0 \rangle =$$


Como veis, aunque parecían el mismo diagrama, la contracción con los estados iniciales y finales ha hecho que cambie. Ahora, combinando los conmutadores entre  $\hat{a}$  y  $\hat{\phi}$  de la sección 6.3 y la propiedad 6.1 (lo dejo como ejercicio) llegamos al resultado:

$$T_{if}^{(4)} = i72\lambda^2 \int \overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} \overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} (2e^{i(p_1+p_2)x} e^{-i(k_1+k_2)y} + 4e^{i(p_1-k_2)x} e^{-i(p_2-k_1)y}) d^4x d^4y$$

Ahora, como hemos indicado en la sección del Teorema de Wick (6.5), la contracción es el propagador del campo escalar (ecuación 5.1):

$$\overline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)} = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

Como hay 2 propagadores, tendremos 2 variables mudas ( $q_1$  y  $q_2$ ) sobre las que integramos. A su vez, podemos juntar las exponenciales que tienen  $x$  e  $y$  respectivamente

$$T_{if}^{(4)} = -i72\lambda^2 \int \frac{1}{(2\pi)^8} \frac{1}{(q_1^2 - m^2)(q_2^2 - m^2)} (2e^{i(p_1+p_2-q_1-q_2)x} e^{-i(k_1+k_2-q_1-q_2)y})$$

$$+4e^{i(p_1-k_2-q_1-q_2)x}e^{-i(p_2-k_1-q_1-q_2)y}d^4q_1d^4q_2d^4xd^4y$$

Ahora podemos integrar en  $x$  e  $y$  las exponenciales (ya que son las únicas dependencias de  $x$  e  $y$ ). Usando la definición de la **delta de Dirac** ( $\delta^{(4)}(p) = \int \frac{dx}{(2\pi)^4} e^{-ipx}$ ) obtenemos:

$$T_{if}^{(4)} = -i72\lambda^2 \int \frac{1}{(q_1^2 - m^2)(q_2^2 - m^2)} (2\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - q_1 - q_2) \\ + 4\delta^{(4)}(p_1 - k_2 - q_1 - q_2)\delta^{(4)}(p_2 - k_1 - q_1 - q_2)) d^4q_1 d^4q_2$$

Finalmente, integramos en  $q_2$  aplicando las deltas y cambiamos  $q_1 \leftrightarrow q$ :

$$T_{if}^{(4)} = -i72\lambda^2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \int \left( \frac{2}{(q^2 - m^2)((p_1 + p_2 - q)^2 - m^2)} + \frac{4}{(q^2 - m^2)((p_1 - k_2 - q)^2 - m^2)} \right) d^4q$$

Estas dos integrales son un **cálculo de loops**, que no toca hacer en esta sección, sino en la sección 9. Como se puede observar, al inicio hay una delta de los momentos iniciales y finales. Básicamente es un indicador de que el momento-energía se conserva en el proceso, lo cual nos dice que lo hemos hecho bien 🤪.

Los **otros 3 términos** que nos dejamos anteriormente dan esto (se deja como ejercicio, no os quejéis, que he calculado el más difícil):

$$T_{if}^{(1)} = -6\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$$

$$T_{if}^{(2)} = -i36\lambda^2 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \int \frac{1}{(q_1^2 - m^2)(q_2^2 - m^2)} d^4q_1 d^4q_2 d^4x$$

$T_{if}^{(2)}$  Tiene un diagrama de vacío, lo cual nos complica la vida porque es una divergencia como una casa. Ya se verá que hacemos con eso, yo solo calculo 🏠.

$$T_{if}^{(3)} = -i36\lambda^2 \int \frac{2\delta^{(4)}(p_1 + p_2)\delta^{(4)}(k_1 + k_2) + 4\delta^{(4)}(p_1 - k_2)\delta^{(4)}(p_2 - k_1)}{(q_1^2 - m^2)(q_2^2 - m^2)} d^4q_1 d^4q_2$$

Podemos deshacernos del término  $2\delta^{(4)}(p_1 + p_2)\delta^{(4)}(k_1 + k_2)$ , ya que sabemos que  $p_1^0 \neq -p_2^0$  ni  $k_1^0 \neq -k_2^0$ , pues son partículas on-shell y no pueden tener energía negativa.

$$T_{if}^{(3)} = -i36\lambda^2 \int \frac{4\delta^{(4)}(p_1 - k_2)\delta^{(4)}(p_2 - k_1)}{(q_1^2 - m^2)(q_2^2 - m^2)} d^4q_1 d^4q_2$$

Este último término, realmente se puede interpretar como dos partículas viajando sin interacción, lo cual se puede reabsorber dentro de un propagador (no lo vamos a hacer, por si quedaban dudas).

Entonces, la  $T$ -matrix de este proceso a segundo orden es:

$$T_{if} = T_{if}^{(1)} + T_{if}^{(2)} + T_{if}^{(3)} + T_{if}^{(4)}$$

¿Todavía sigues ahí...? que aguante 😎👍.

### 7.3. QED

COMING SOON...

#### 7.3.1. $S$ -operator (para QED)

#### 7.3.2. $T$ -matrix (para QED)

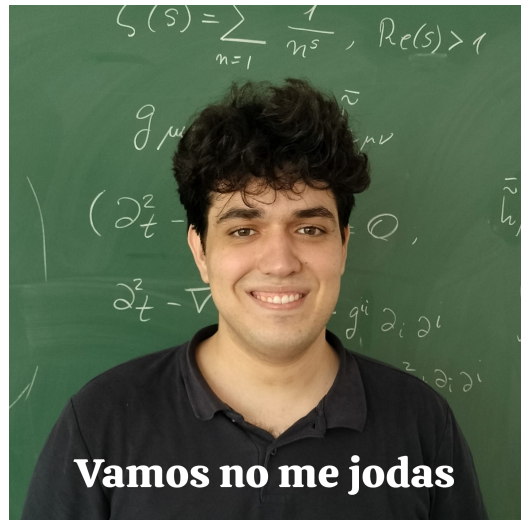
## 8. Reglas de Feynman

COMING SOON...



## 9. Loops

COMING SOON...



## Referencias

- [1] M. E. Peskin, *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [2] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2020.