

امتحان پایان ترم استنباط آماری

۱- فرض کنید میانگین ضریب هوشی مردم ایران برابر با ۱۰۰ باشد. نمونه‌ای ۶۴ نفره از دانشجویان دانشگاه تهران انتخاب و ضریب هوشی آن‌ها اندازه‌گیری شده است. میانگین ضریب هوشی این نمونه برابر با ۱۰۶ و انحراف معیار آن برابر با ۳ به‌دست آمده است.

الف) با طراحی یک آزمون فرض مناسب با $\alpha = 0.03$ و محاسبه p-value تصمیم بگیرید آیا ضریب هوشی دانشجویان دانشگاه تهران از میانگین ضریب هوشی مردم ایران بیشتر است یا خیر؟

ب) یک بازه اطمینان ۹۸ درصد برای میانگین ضریب هوشی دانشجویان دانشگاه تهران پیدا کنید.

الف)

$$H_0: \mu = 100$$

$$H_A: \mu > 100$$

شرایط تست:

شرط استقلال: نمونه‌برداری تصادفی انجام شده و ۶۴٪ از دانشجویان دانشگاه تهران کمتر است.

شرط اندازه نمونه: $n = 64 > 30$ و توزیع ضریب هوشی تقریباً نرمال است.

$$p\text{-value} = P(\bar{X} > 106 | \mu = 100) = P\left(Z > \frac{106-100}{\frac{3}{\sqrt{64}}}\right) = P(Z > 16) = 0 < 0.03$$

بنابراین فرض H_0 را رد می‌کنیم.

ب)

$$\alpha = 1 - 0.98 = 0.02 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.33$$

بازه اطمینان برابر است با:

$$\left(106 - 2.33 \times \frac{3}{\sqrt{64}}, 106 + 2.33 \times \frac{3}{\sqrt{64}}\right) \\ = (106 - 0.87, 106 + 0.87) = (105.13, 106.87)$$

۲- درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. [۷ نمره]

الف) کاهش هم‌زمان هر دو خطای نوع اول و دوم در آزمون‌های فرض امکان‌پذیر نیست.

نادرست. با افزایش اندازه نمونه می‌توان هر دو خطا را هم‌زمان کم کرد.

ب) با افزایش اندازه نمونه تصادفی منتخب از یک جامعه آماری، توزیع این نمونه به توزیع نرمال نزدیکتر می‌شود.

نادرست. توزیع نمونه شبیه به توزیع جامعه آماری است و نه توزیع نرمال.

پ) تعدادی از دانشجویان دانشگاه تهران را به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آنها می‌خواهیم فهرستی از دوستان خود را در اختیار ما قرار دهند. سپس از میان دوستان این افراد نمونه دومی را به تصادفی انتخاب می‌کنیم و همین سوال را تکرار می‌کنیم. به طور متوسط افراد حاضر در نمونه دوم، دوستان بیشتری از افراد حاضر در نمونه اول دارند.

درست. اگر فردی دوستان بیشتری داشته باشد، احتمال این که دوست فرد دیگری باشد نیز افزایش می‌یابد. در نتیجه برای دوستان یک فرد که به صورت تصادفی انتخاب شده است، احتمال بیشتری وجود دارد که دوستان زیادی داشته باشند. به عبارت دیگر دوستان شما همیشه از شما محبوب‌ترند!

ت) در صورت برقراری شرایط قضیه حد مرکزی در ساخت یک بازه اطمینان ۹۵٪ برای میانگین، احتمال قرارگیری میانگین نمونه در این بازه ۰/۹۵ خواهد بود.

نادرست. میانگین نمونه همیشه داخل بازه اطمینان است، پس این احتمال برابر با یک است.

ث) در یک آزمون فرض یک طرفه با $\alpha = 0.05$ برای میانگین یک جامعه آماری، به جای $p\text{-value}$ می‌توان از یک بازه اطمینان ۹۵٪ برای تصمیم‌گیری استفاده کرد.

نادرست. آزمون یک طرفه با $\alpha = 0.05$ معادل بازه اطمینان ۹۰٪ است.

ج) در توزیع‌های با چولگی منفی، میانه از میانگین بزرگتر است.

درست. توزیع‌های با چولگی منفی، چوله به چپ هستند و میانه در آنها از میانگین بزرگتر است.

چ) به شرط ثابت ماندن خطای نوع اول و اندازه نمونه، افزایش اندازه موثر (effect size) موجب افزایش توان یک آزمون فرض می‌شود.

درست. اندازه موثر بزرگتر منجر به توان بیشتر می‌شود.

۳- در یک آزمون تستی، هر تست دارای چهار گزینه است. دانشجویی با احتمال ۰/۶ پاسخ درست را می‌داند. او همچنین قادر است با احتمال ۰/۱۵ تنها دو گزینه‌ی نادرست، و با احتمال ۰/۱۵ تنها یک گزینه نادرست را از بین چهار گزینه حذف کند. در غیر این صورت دانشجو یکی از چهار گزینه را به صورت کاملاً تصادفی انتخاب می‌کند.

الف) اگر دانشجو پاسخ یک تست را به درستی داده باشد، احتمال آن که پاسخ درست آن را می‌دانسته است چقدر است؟

[۳ نمره]

ب) فرض کنید دانشجو پاسخ تستی را نمی‌دانسته ولی به آن پاسخ درست داده است. احتمال آن که دانشجو پاسخ تست را با حذف تنها یک گزینه نادرست داده باشد چقدر است؟ [۳ نمره]

پیشامد پاسخ صحیح دادن به یک تست: T

پیشامد حذف سه گزینه (دانستن پاسخ صحیح): S_1 ، بنابراین: $P(T|S_1) = 1$ ، $P(S_1) = 0.6$

پیشامد حذف دو گزینه (انتخاب تصادفی از دو گزینه باقیمانده): S_2 ،

بنابراین: $P(T|S_2) = 1/2$ ، $P(S_2) = 0.15$

پیشامد حذف یک گزینه (انتخاب تصادفی از سه گزینه باقیمانده): S_3 ،

بنابراین: $P(S_3) = 0.15$, $P(T|S_3) = 1/3$

پیشامد حذف هیچ گزینه (انتخاب تصادفی از چهار گزینه باقیمانده): S_4 ،

بنابراین: $P(S_4) = 1 - 0.6 - 0.15 - 0.15 = 0.1$, $P(T|S_4) = 1/4$

(الف)

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T|S_1)P(S_1) + P(T|S_2)P(S_2) + P(T|S_3)P(S_3) + P(T|S_4)P(S_4) \\ &= 1 \times 0.6 + \frac{1}{2} \times 0.15 + \frac{1}{3} \times 0.15 + \frac{1}{4} \times 0.1 = \frac{7.2 + 0.9 + 0.6 + 0.3}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \\ P(S_1|T) &= \frac{P(T|S_1)P(S_1)}{P(T)} = \frac{1 \times 0.6}{0.75} = \frac{4}{5} = 0.8 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} P(S_3|T \cap \bar{S}_1) &= \frac{P(T \cap \bar{S}_1|S_3)P(S_3)}{P(T \cap \bar{S}_1)} \\ &= \frac{P(T|S_3)P(S_3)}{P(T \cap S_2) + P(T \cap S_3) + P(T \cap S_4)} \\ &= \frac{P(T|S_3)P(S_3)}{P(T|S_2)P(S_2) + P(T|S_3)P(S_3) + P(T|S_4)P(S_4)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times 0.15}{\frac{1}{2} \times 0.15 + \frac{1}{3} \times 0.15 + \frac{1}{4} \times 0.1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۴- در امتحان میان ترم از شما خواسته شد که نمره خود را پیش‌بینی کنید و در صورتی که پیش‌بینی شما کمتر از ۵ درصد خطا داشت، ۱ نمره به نمره امتحان شما اضافه شد. از بین ۲۲ نفری که برگه خود را زودتر از سایر دانشجویان تحویل دادند (در ۷۵ دقیقه ابتدای امتحان)، ۶ نفر پیش‌بینی صحیح داشتند. از ۷۰ نفر باقی‌مانده نیز ۲۵ نفر پیش‌بینی صحیح داشتند. با طراحی و اجرای یک آزمون فرض مناسب، بررسی کنید که آیا دانشجویانی که برگه خود را زودتر از دیگران تحویل می‌دهند، درک ضعیف‌تری نسبت به نمره اکتسابی خود دارند یا خیر. [۴ نمره]

$$H_0: p_1 - p_2 = 0$$

$$H_A: p_1 - p_2 < 0$$

$$\hat{p}_{pool} = \frac{6 + 25}{22 + 70} = \frac{31}{92} = 0.337$$

Condition:

$$n_1 \hat{p}_{pool} = 7.4 < 10 \rightarrow \text{But we continue}$$

$$n_1(1 - \hat{p}_{pool}) = 14.6 > 10$$

$$n_2 \hat{p}_{pool} = 23.6 > 10$$

$$n_2(1 - \hat{p}_{pool}) = 46.4 > 10$$

$$SE = \sqrt{\frac{\hat{p}_{pool}(1 - \hat{p}_{pool})}{n_1} + \frac{\hat{p}_{pool}(1 - \hat{p}_{pool})}{n_2}} = 0.1155$$

$$\text{point estimate} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \frac{6}{22} - \frac{25}{70} = -0.0844$$

$$Z = \frac{-0.0844 - 0}{0.1155} \approx -0.73 \rightarrow \text{p-value} = P(Z < -0.73) = 0.2327 > 0.05 \rightarrow \text{We fail to reject } H_0$$

۵- استاد یک درس عمومی در دانشگاه تهران با انجام یک نظرسنجی از دانشجویان کارشناسی کلاس خود، از آنها می‌خواهد تا به این سوال پاسخ دهند که آیا از محتوای ارائه‌شده در کلاس راضی هستند یا خیر. جدول زیر خلاصه پاسخ دانشجویان سالهای مختلف کارشناسی به این سوال را نمایش می‌دهد.

سال / رضایت از محتوای کلاس	بله	خیر
اول	۹	۲۰
دوم	۷	۲۱
سوم	۴۲	۵۸
چهارم	۶	۲۱
پنجم	۵	۱۶

با طراحی و اجرای یک آزمون فرض مناسب، بررسی کنید که آیا رضایت از محتوای کلاس، مستقل از سال ورود به دانشگاه است یا خیر. [۴ نمره]

H_0 : سال ورود و رضایت از محتوای کلاس مستقل از هم هستند:

H_A : سال ورود و رضایت از محتوای کلاس به هم وابسته هستند:

Conditions:

1. **Independence:** Sampled observations are independent: we have random sample/assignment, $n < 10\%$ of population, each case only contributes to one cell in the table

2. **Sample size:** Each cell has more than 5 expected cases.

$$df = (R - 1)(C - 1) = 4$$

No	Yes	
20 ($\frac{29 \times 136}{205} = 19.24$)	9 ($\frac{29 \times 69}{205} = 9.76$)	29
21 ($\frac{28 \times 136}{205} = 18.58$)	7 ($\frac{28 \times 69}{205} = 9.42$)	28
58 ($\frac{100 \times 136}{205} = 66.34$)	42 ($\frac{100 \times 69}{205} = 33.66$)	100
21 ($\frac{27 \times 136}{205} = 17.91$)	6 ($\frac{27 \times 69}{205} = 9.09$)	27
16 ($\frac{21 \times 136}{205} = 13.93$)	5 ($\frac{21 \times 69}{205} = 7.07$)	21
136	69	

$$\chi^2 = \frac{(20 - 19.24)^2}{19.24} + \frac{(9 - 9.76)^2}{9.76} + \dots + \frac{(5 - 7.07)^2}{7.07} = 6.4$$

$$p\text{-value} = P(\chi^2 > 6.4) \rightarrow 0.1 < p\text{-value} < 0.2$$

$$p\text{-value} > 0.05 \rightarrow \text{fail to reject } H_0$$

۶- گروهی از محققین قصد دارند تا با استفاده از روش ANOVA با $\alpha = 0.01$ اثر استعمال دخانیات را بر روی میزان ساعات مطالعه دانشجویان در طول هفته بررسی کنند. آنها ۴۲۸ دانشجو را با توجه به میزان مصرف سیگار به سه دسته سفید (۰ نخ در روز)، خاکستری (بین ۱ تا ۴ نخ در روز)، و سیاه (بیش از ۴ نخ در روز) تقسیم می‌کنند.

الف) فرض‌ها را بیان کنید. [۵/۰ نمره]

$$H_0: \mu_W = \mu_G = \mu_B$$

H_A : At least one pair of means are different from each other

ب) جدول زیر را کامل کنید. [۱ نمره]

	DF	Sum Sq	Mean Sq	F Value	Pr(> F)
Class	3-1=2	572 × 2 = 1144	572	$\frac{572}{93} = 6.15$	0.002326
Residuals	428-3=425	39518	$\frac{39518}{425} = 93$		

پ) فرض کنید تعداد دانشجویان گروه سفید و خاکستری به ترتیب ۲۰۰ و ۱۵۰ است. اگر فاصله میانگین ساعات مطالعه در این دو گروه ۸ ساعت باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت میزان ساعات مطالعه در این دو گروه متفاوت است؟ [۲ نمره]

$$k = 3 \rightarrow K = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \rightarrow \alpha^* = \frac{0.01}{3} = 0.0033$$

$$SE = \sqrt{\frac{MSE}{n_G} + \frac{MSE}{n_W}} = \sqrt{\frac{93}{150} + \frac{93}{200}} = 1.04$$

$$df = n - k = 425$$

$$H_0: \mu_W - \mu_G = 0 \quad , \quad H_A: \mu_W - \mu_G \neq 0$$

$$T = \frac{(\bar{x}_W - \bar{x}_G) - 0}{\sqrt{\frac{MSE}{n_W} + \frac{MSE}{n_G}}} = \frac{8}{1.04} = 7.69$$

$$p\text{-value} = P(|t_{425}| > 7.69 \approx 0 < 0.0033 \rightarrow \text{Reject } H_0$$

۷- یک مطالعه پزشکی به بررسی رابطه بین فشار خون نوزادان با وزن (بر حسب کیلوگرم) و سن (بر حسب روز) آنها می‌پردازد. مجموعه داده این تیم تحقیقاتی از اطلاعات مربوط به ۲۵ نوزاد تشکیل و روش رگرسیون خطی برای بررسی این رابطه انتخاب شده است. جدول زیر خروجی این بررسی را نمایش می‌دهد:

Predictor	Coef	SE Coef	T-value	P-value
Intercept	57.264	$\frac{57.264}{15.08} = 3.8$	15.08	0
Age	5.8041	0.6415	$\frac{5.8041}{0.6415} = 9.05$	$P(t_{22} > 9.05) \approx 0$
Weight	3.32	1.552	2.14	$P(t_{22} > 2.14) < 2 \times 0.025 = 0.05$

Analysis of Variance:

Source	DF	SS	MS	F-value	P-value
Regression	2	1521.53	760.765	126.37	0
Residual	22	132.47	6.02		
Total	24	1654.00			

الف) جداول فوق را کامل کنید. [۲ نمره]

ب) مقدار R^2 و $Adjusted R^2$ را محاسبه کرده و R^2 را تفسیر کنید. [۱ نمره]

$$R^2 = \frac{1521.53}{1654} = 0.9199$$

$$Adjusted R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} \times \frac{n-1}{n-k-1} = 1 - \frac{132.47}{1654} \times \frac{24}{22} = 0.9126$$

91.99% of the variability in the blood pressure of infants is explained by the model.

پ) ضریب متغیر weight را تفسیر کرده و یک بازه اطمینان ۹۰٪ برای آن محاسبه کنید. [۱ نمره]

$$t_{22}^*(0.9) = 1.717$$

$$b_2 \pm t^* SE_{b_2} = (3.32 \pm 1.717 \times 1.552) = (0.6552, 5.9848)$$

All else held constant, for each 1 Kg increase in weight the model predicts the infants' blood pressure to be higher on average by 3.32

ت) با توجه به این مدل پیش‌بینی شما برای فشار خون یک نوزاد ۵ روزه با وزن ۴ کیلوگرم چقدر است؟ [۵/۰ نمره]

$$BP = 57.264 + 5.8041 \times 5 + 3.32 \times 4 = 99.56$$

۸- مجموعه داده زیر از قد مردان بالغ در دو شهر اصفهان و تبریز در اختیار شما قرار دارد:

اصفهان: ۱۷۳، ۱۷۰، ۱۶۸، ۱۸۰، ۱۷۸، ۱۶۵، ۱۷۳، ۱۷۵، ۱۶۹، ۱۷۲، ۱۷۰، ۱۷۰، ۱۷۹، ۱۷۰، ۱۷۴

تبریز: ۱۶۸، ۱۸۲، ۱۷۹، ۱۷۴، ۱۷۴، ۱۷۳، ۱۷۵، ۱۷۸، ۱۷۰، ۱۷۰، ۱۷۰، ۱۸۳، ۱۷۹، ۱۷۵، ۱۸۰، ۱۷۱، ۱۷۶، ۱۷۶، ۱۷۸

با اجرای یک آزمون فرض مناسب، بررسی کنید آیا توزیع قد مردان بالغ در این دو شهر یکسان است یا خیر. [۴ نمره]

$$H_0: F_X = F_Y$$

$$H_A: F_X \neq F_Y$$

Condition: $n, m \geq 10$

165 (1), 168 (2.5), 168 (2.5), 169 (4), 170 (7), 170 (7), 170 (7), 170 (7), 170 (7), 171 (10), 172 (11), 173 (13.5), 173 (13.5), 173 (13.5), 173 (13.5), 174 (17), 174 (17), 174 (17), 175 (20), 175 (20), 175 (20), 176 (22.5), 176 (22.5), 178 (25), 178 (25), 178 (25), 179 (28), 179 (28), 179 (28), 180 (30.5), 180 (30.5), 182 (32), 183 (33)

$$U_{obs} = \sum_{i=1}^{14} R_i = 1 + 2.5 + 4 + 7 + 7 + 7 + 11 + 13.5 + 13.5 + 13.5 + 17 + 20 + 25 + 28 + 30.5 = 200.5$$

$$E(U|H_0) = \frac{n(n+m+1)}{2} = \frac{15 \times 34}{2} = 255$$

$$Var(U|H_0) = \frac{15 \times 18 \times (34)}{12} = 765$$

$$\begin{aligned} \text{p-value} &= 2P\{U \leq 200.5\} = 2P\left\{Z \leq \frac{201-255}{\sqrt{765}}\right\} = 2P(Z \leq -1.95) = 2 \times (1 - 0.9744) \\ &= 0.0512 > 0.05 \rightarrow \text{Fail to reject } H_0 \end{aligned}$$