Université Pierre et Marie Curie, Paris 6

Master de Mathématiques 2014-2015

M2–Probabilités et Finance

Calcul Stochastique des martingales continues

Philippe Bougerol

11 Décembre 2014

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION AU CALCUL STOCHASTIQUE

Introduction très très sommaire et volontairement caricaturale, sans toutes les justifications mathématiques, pour l'instant.

1.1. Modélisation

On cherche à modéliser (construire des modèles) et faire des calculs sur des phénomènes évoluant dans le temps qui dépendent du hasard.

La valeur X_t du phénomène à l'instant t, peut être observée à cet instant, mais pas prédite avant. Entre les instants t et $t+h$ une part de hasard s'ajoute. On s'intéresse dans ce cours au cas où la fonction $t \mapsto X_t$ est **continue**. Pour faire simple supposons que X_t est à valeurs dans $\mathbb{R}$. On va avoir, pour $t, h \geq 0$,

$$X_{t+h} = X_t + \Delta_t^h$$

où Δ_t^h est aléatoire. L'idée fondamentale est qu'au moins dans un premier temps, pour h très très (infinitésimalement...) petit, Δ_t^h peut s'écrire

$$\Delta_t^h = H_t \varepsilon_t^h$$

où ε_t^h est une variable aléatoire indépendante de tout ce qui précède et de loi ne dépendant que de h (et donc pas de t) et où H_t est une fonction continue de t, "observable à l'instant t", par exemple une fonction de X_t. On va voir que c'est très opérationnel.

C'est assez naturel. Dans le cas déterministe (c'est à dire sans hasard), et si X_t est dérivable, on a bien ce type de modélisation en prenant pour H_t la dérivée à l'instant t et en prenant $\varepsilon_t^h = h$.

1.2. Bruit

Le fait d'avoir pris $h \geq 0$ (infinitésimalement) petit entraîne des contraintes. Si on remplace h par $h = h_1 + h_2$, avec $h_1, h_2 \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} X_{t+h} &= X_t + H_t \varepsilon_t^h \\ &= X_{t+h_1+h_2} = X_{t+h_1} + H_{t+h_1} \varepsilon_{t+h_1}^{h_2} \\ &= X_t + H_t \varepsilon_t^{h_1} + H_{t+h_1} \varepsilon_{t+h_1}^{h_2}. \end{aligned}$$

Pour h_1 très petit on a par continuité $H_{t+h_1} \sim H_t$. On arrive donc à

$$\varepsilon_t^h \sim \varepsilon_t^{h_1} + \varepsilon_{t+h_1}^{h_2}.$$

De proche en proche, pour h très petit,

$$\varepsilon_t^h \sim \varepsilon_t^{h/n} + \varepsilon_{t+h/n}^{h/n} + \varepsilon_{t+2h/n}^{h/n} + \cdots + \varepsilon_{t+(n-1)h/n}^{h/n}.$$

Nous avons supposé que ε_t^h est une variable aléatoire indépendante de tout ce qui précède et de loi ne dépendant pas de t. On voit donc que nécessairement, ε_t^h est la somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi. Une variante du théorème de la limite centrale (qui utilise que les ε_t^h sont petits ...) nous conduit à dire qu'alors ε_t^h a une loi gaussienne. Notons m_h sa moyenne et σ_h^2 sa variance. La relation

$$\varepsilon_t^h = \varepsilon_t^{h_1} + \varepsilon_{t+h_1}^{h_2}$$

entraîne que

$$m_{h_1+h_2} = m_{h_1} + m_{h_2}, \sigma_{h_1+h_2}^2 = \sigma_{h_1}^2 + \sigma_{h_2}^2$$

donc (par exemple si ces coefficients sont continus), il existe $a \in \mathbb{R}$ et $\sigma \geq 0$ tels que $m_h = ah$ et $\sigma_h^2 = \sigma^2 h$.

On voit donc que l'on peut écrire

$$\varepsilon_t^h = ah + \sigma(B_{t+h} - B_t)$$

où B_t est un mouvement brownien sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, c'est à dire un processus (=famille de variables aléatoires) continu formé de v.a. gaussiennes telles que $B_t \sim N(0,t)$ et $B_{t+h} - B_t$ est indépendant de $B_r, 0 \leq r \leq t$.

On était parti de

$$X_{t+h} = X_t + H_t \varepsilon_t^h$$

donc on a, au moins infinitésimalement,

$$X_{t+h} = X_t + H_t(ah + \sigma(B_{t+h} - B_t)).$$

Si $\sigma = 0$ cela s'interprète par l'équation différentielle

$$\frac{dX_t}{dt} = aH_t$$

ce qui s'écrit aussi sous forme intégrale

$$X_t - X_0 = \int_0^t aH_s\ ds.$$

On va voir par contre que si $\sigma > 0$ alors X_t ne peut pas être dérivable. On va donc plutot garder la forme intégrale en écrivant que

$$X_t - X_0 = \int_0^t aH_s\ ds + \int_0^t \sigma H_s\ dB_s$$

où il faut donner un sens à l'intégrale dite stochastique $\int_0^t \sigma H_s\ dB_s$. On verra qu'il est aussi utile de généraliser en ne prenant pas le même facteur H_s dans les deux termes, ce qui s'interprête en distinguant bien la partie aléatoire de la partie déterministe de l'accroissement.

1.3. Un "primer" sur l'intégrale d'Ito

Le mot "primer" est anglais et signifie "première couche" en métallurgie. Pour un processus continu par morceaux H_t on veut donner un sens à

$$\int_0^t H_s\ dB_s.$$

On va voir que c'est possible et naturel sous l'hypothèse que l'on a déja évoquée, que H_t est observable à l'instant t. Il faudra donner un sens à ça (et on dira adapté), mais disons que la propriété essentielle dont on va se servir ici est que l'accroissement $B_{t+h} - B_t, h \geq 0$ est indépendant de $H_s, s \leq t$.

La définition simple "naturelle" ressemble à l'intégrale de Riemann : si

$$H_t = \sum_{i=1}^n H_{t_i} \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t)$$

par analogie avec la formule qui se vérifie facilement

$$\int_0^t H_s\ ds = \sum_{i=1}^n H_{t_i}(t_{i+1} \wedge t - t_i \wedge t)$$

(où $s \wedge t = \min(s,t)$), on pose

$$\int_0^t H_s\ dB_s = \sum_{i=1}^n H_{t_i}(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t}).$$

Lemme 1.3.1. — *Si $H_s \in L^2$ pour tout $s > 0$, alors pour $t > 0$,*

$$\mathbb{E}(\int_0^t H_s \, dB_s) = 0,$$

$$\mathbb{E}((\int_0^t H_s \, dB_s)^2) = \mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 \, ds).$$

Preuve: Montrons la seconde égalité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((\textstyle\int_0^t \quad H_s \, dB_s)^2) &= \mathbb{E}((\sum_{i=1}^n H_{t_i}(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}))^2) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}(H_{t_i}H_{t_j}(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t})(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j\wedge t})) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}({H_{t_i}}^2(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t})^2) + \\
&\qquad +2\sum_{i<j} \mathbb{E}(H_{t_i}H_{t_j}(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t})(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j\wedge t})) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}({H_{t_i}}^2)\mathbb{E}((B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t})^2) + \\
&\qquad +2\sum_{i<j} \mathbb{E}(H_{t_i}H_{t_j}(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}))\mathbb{E}(B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j\wedge t})
\end{aligned}$$

en utilisant l'indépendance. Puisque $\mathbb{E}((B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t})^2) = t_{i+1} - t_i$ et $\mathbb{E}((B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j\wedge t})) = 0$ on obtient que

$$\mathbb{E}((\int_0^t H_s \, dB_s)^2) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}({H_{t_i}}^2)(t_{i+1}\wedge t - t_i \wedge t) = \int_0^t \mathbb{E}({H_s}^2) \;\; ds. \quad \square$$

On veut prolonger cette construction à d'autres processus H. On le fait de la façon suivante : si $H_t^{(n)}, t \geq 0$, est une suite de processus du type précédent pour laquelle il y a un processus H tel que $H^{(n)} \to H$ au sens où pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t \mathbb{E}(H_s^{(n)} - H_s)^2 \, ds \to 0$$

alors, la suite $\int_0^t H_s^{(n)} \, dB_s$ est une suite de Cauchy dans l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puisque

$$\mathbb{E}([\int_0^t H_s^{(n)} \, dB_s - \int_0^t H_s^{(m)} \, dB_s]^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}([\int_0^t (H_s^{(n)} - H_s^{(m)})\, dB_s]^2) \\
&= \mathbb{E}(\int_0^t (H_s^{(n)} - H_s^{(m)})^2\, ds) \\
&= \int_0^t \mathbb{E}((H_s^{(n)} - H_s^{(m)})^2)\, ds
\end{aligned}
$$

par le lemme. L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ étant complet (Hilbert), cette suite $\int_0^t H_s^{(n)}\, dB_s$ converge. On appelle

$$\int_0^t H_s\, dB_s$$

sa limite. Elle vérifie, par passage à la limite, comme au dessus

Proposition 1.3.2. —

$$\mathbb{E}(\int_0^t H_s\ dB_s) = 0,$$

$$\mathbb{E}((\int_0^t H_s\ dB_s)^2) = \mathbb{E}(\int_0^t H_s^2\ ds).$$

Supposons que $H_t, t \geq 0$, est un processus continu borné tel que H_t est $\sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ mesurable. Alors la suite de processus

$$H_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} H_{\frac{kT}{n}} \mathbf{1}_{[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}[}(t)$$

approxime bien H au sens précédent sur l'intervalle $[0, T]$ (utiliser le théorème de convergence dominée). On peut donc lui appliquer la construction précédente. En fait on verra qu'au lieu d'être borné, il suffit que

$$\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2\ ds) < \infty.$$

1.4. Intégrale de Wiener et théorème de Cameron Martin

Considérons le cas très particulier d'un processus $H_t(\omega), t \geq 0, \omega \in \Omega$, qui ne dépend pas de ω. Autrement dit il existe une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $H_t(\omega) = f(t)$ pour tout $t \geq 0, \omega \in \Omega$. Dans ce cas l'intégrale stochastique a été introduite dès les années 30 par Wiener et porte parfois le nom d'intégrale de Wiener. Si $f \in L^2([0, T], m)$, où m est la mesure de Lebesgue, il existe une suite de fonctions f_n constantes par morceaux, donc de la forme $f_n = \sum_{i=1}^{k_n} a_i^n \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}$ tels que $f_n \to f$ dans $L^2([0, T], m)$. Dans ce cas, par le paragraphe précédent, $\int_0^t f(s)dB_s$ est la limite dans $L^2(\Omega)$ de $\int_0^t f_n(s)dB_s$. Remarquons que

$$\int_0^t f_n(s)dB_s = \sum_{i=1}^{k_n} a_i^n (B_{t\wedge t_{i+1}^n} - B_{t\wedge t_i^n})$$

a une loi gaussienne d'espérance nulle et de variance $\int_0^t f_n(s)^2 ds$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(\exp(i\lambda \int_0^t f_n(s)dB_s)) = \exp(-\frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t f_n(s)^2 ds)$$

et quand $n \to +\infty$, puisque $\int_0^t f_n(s)^2 ds \to \int_0^t f(s)^2 ds$,

$$\mathbb{E}(\exp(i\lambda \int_0^t f(s)dB_s)) = \exp(-\frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t f(s)^2 ds).$$

On a donc montré,

Proposition 1.4.1. — *Si $f \in L^2([0,T],m)$, $\int_0^t f(s)dB_s$ a une loi gaussienne centrée de variance $\int_0^t f(s)^2 ds$*

Pour une fonction $f \in L^2([0,T],m)$ posons

$$Z = \exp[\int_0^T f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T f(s)^2 ds]$$

et sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ définissons une probabilité $\mathbb{Q}$ par la formule, pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{Q}(A) = \int 1_A Z d\mathbb{P}.$$

Si on note $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ l'espérance par rapport à $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{E}$ l'espérance par rapport à $\mathbb{P}$, on a pour toute fonction mesurable positive X

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \int X d\mathbb{Q} = \int XZ d\mathbb{P} = \mathbb{E}(XZ)$$

***Théorème 1.4.2* (Cameron Martin).** — *Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q})$,*

$$B_t^{\mathbb{Q}} = B_t - \int_0^t f(s)ds$$

est, pour $0 \le t \le T$, un mouvement brownien.

Preuve: Soit $g \in L^2([0,T],m)$. Calculons

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp[\int_0^T g(t)dB_t^{\mathbb{Q}}]).$$

On a

$$\int_0^T g(t)dB_t^{\mathbb{Q}} = \int_0^T g(t)dB_t - \int_0^T g(t)f(t)dt$$

donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp[\int_0^T g(t)dB_t^{\mathbb{Q}}]) = \mathbb{E}(\exp[\int_0^T g(t)dB_t^{\mathbb{Q}}]Z)$$

$$= \mathbb{E}(\exp[\int_0^T g(t)dB_t - \int_0^T g(t)f(t)dt + \int_0^T f(t)dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T f(t)^2dt])$$

$$= \exp[-\int_0^T (g(t)f(t) + \frac{1}{2}f(t)^2)dt]\mathbb{E}(\exp[\int_0^T [g(t)+f(t)]dB_t]).$$

On sait par la proposition précédente que $\int_0^T [g(t)+f(t)]dB_t$ a une loi normale centrée de variance $\int_0^T [g(t)+f(t)]^2dt$ donc

$$\mathbb{E}(\exp[\int_0^T [g(t)+f(t)]dB_t]) = \exp[\frac{1}{2}\int_0^T [g(t)+f(t)]^2dt]$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp[\int_0^T g(t)dB_t^{\mathbb{Q}}]) = \exp[-\int_0^T (g(t)f(t)+\frac{1}{2}f(t)^2)dt]\exp[\frac{1}{2}\int_0^T [g(t)+f(t)]^2dt]$$

$$= \exp[\frac{1}{2}\int_0^T g(t)^2dt]$$

Le théorème s'en déduit en prenant $g(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k 1_{[0,t_k]}(t)$ on voit que le vecteur $(B_{t_1}^{\mathbb{Q}}, \cdots, B_{t_n}^{\mathbb{Q}})$ a sous $\mathbb{Q}$ la même transformée de Fourier, donc la même loi que $(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})$ et est donc un mouvement brownien.

1.5. Une formule d'Ito

Commençons par un résultat fondamental, qui est tout à fait particulier au mouvement brownien.

Théorème 1.5.1. — *Si B est un mouvement brownien si $t_0^n = 0 < t_1^n < \cdots < t_{n-1}^n < t_n^n = t$ est une suite de subdivisions de $[0,t]$ dont le pas $\sup_{0\le k\le n-1} |t_{k+1}^n - t_k^n|$ tend vers 0, alors, dans L^2,*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2 = t.$$

En fait montrons le résultat plus général suivant :

Proposition 1.5.2. — *Sous les memes hypothèses, si f est une fonction mesurable bornée, alors dans L^2,*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(B_{t_k^n})[(B_{t_{k+1}^n}-B_{t_k^n})^2-(t_{k+1}^n-t_k^n)]=0.$$

Preuve:

$$\mathbb{E}(\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(B_{t_k^n})[(B_{t_{k+1}^n}-B_{t_k^n})^2-(t_{k+1}^n-t_k^n)]\right)^2)$$

$$=\mathbb{E}(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} f(B_{t_k^n})f(B_{t_r^n})[(B_{t_{k+1}^n}-B_{t_k^n})^2-(t_{k+1}^n-t_k^n)][(B_{t_{r+1}^n}-B_{t_r^n})^2-(t_{r+1}^n-t_r^n)])$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}(f(B_{t_k^n})^2[(B_{t_{k+1}^n}-B_{t_k^n})^2-(t_{k+1}^n-t_k^n)]^2)$$

$$+2\sum_{0\le k<r<n}\mathbb{E}f(B_{t_k^n})f(B_{t_r^n})[(B_{t_{k+1}^n}-B_{t_k^n})^2-(t_{k+1}^n-t_k^n)][(B_{t_{r+1}^n}-B_{t_r^n})^2-(t_{r+1}^n-t_r^n)])$$

On utilise l'indépendance des accroissements (espérance du produit est égal au produit des espérances) :

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}(f(B_{t_k^n})^2)\mathbb{E}[((B_{t_{k+1}^n}-B_{t_k^n})^2-(t_{k+1}^n-t_k^n))^2)$$

$$+2\sum_{0\le k<r<n}\mathbb{E}[f(B_{t_k^n})f(B_{t_r^n})((B_{t_{k+1}^n}-B_{t_k^n})^2-(t_{k+1}^n-t_k^n))]\mathbb{E}[(B_{t_{r+1}^n}-B_{t_r^n})^2-(t_{r+1}^n-t_r^n)].$$

Or, puisque $B_{t+h}-B_t$ a la même loi que $\sqrt{h}B_1$,

$$\mathbb{E}[(B_{t_{r+1}^n}-B_{t_r^n})^2-(t_{r+1}^n-t_r^n)]=0$$

$$\mathbb{E}[((B_{t_{k+1}^n}-B_{t_k^n})^2-(t_{k+1}^n-t_k^n))^2)=\mathbb{E}[((\sqrt{t_{k+1}^n-t_k^n})B_1)^2-(t_{k+1}^n-t_k^n))^2)$$
$$=(t_{k+1}^n-t_k^n)^2\mathbb{E}[(B_1^2-1)^2].$$

Donc

$$\mathbb{E}(\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(B_{t_k^n})[(B_{t_{k+1}^n}-B_{t_k^n})^2-(t_{k+1}^n-t_k^n)]\right)^2)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}^n-t_k^n)^2\mathbb{E}(f(B_{t_k^n})^2)\mathbb{E}[(B_1^2-1)^2].$$

Or ceci se majore par, si $C = \mathbb{E}[(B_1^2 - 1)^2] \max f^2$,

$$C \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \le C \sup_{0\le k\le n-1} |t_{k+1}^n - t_k^n| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n)$$
$$\le Ct \sup_{0\le k\le n-1} |t_{k+1}^n - t_k^n|$$

qui tend vers 0.

***Théorème 1.5.3* (Une formule d'Ito).** — *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est à dérivée seconde continue,*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)\, ds.$$

Preuve: On peut se ramener au cas f est à support compact. On va utiliser la formule de Taylor (Taylor-Lagrange) : pour tout x, y il existe z entre x et y tels que

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y-x) + \frac{1}{2} f''(z)(y-x)^2.$$

On prend une suite de subdivisions de $[0,t]$, par exemple $t_k^n = \frac{kt}{n}$.

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(B_{t_{k+1}^n}) - f(B_{t_k^n}))$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f'(B_{t_k^n})(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\theta_n^k)(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2$$

où θ_n^k est entre $B_{t_k^n}$ et $B_{t_{k+1}^n}$.

Comme ça ne dépend pas de n c'est égal à sa limite quand $n \to +\infty$. Prenons la limite de chacun des deux termes de la somme pour une sous suite (en utilisant que la convergence L^2 entraîne la convergence p.s. pour une sous suite). Pour le premier, on remarque d'abord que

$$\sum_{k=0}^{n-1} f'(B_{t_k^n})(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}) = \int_0^t Z_s^n \; dB_s$$

où

$$Z_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} f'(B_{t_k^n}) \mathbf{1}_{[t_k^n, t_{k+1}^n]}(t).$$

Donc,

$$\mathbb{E}([\sum_{k=0}^{n-1} f'(B_{t_k^n})(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}) - \int_0^t f'(B_s)\, dB_s]^2)$$

$$= \mathbb{E}([\int_0^t (Z_s^n - f'(B_s))\, dB_s]^2)$$
$$= \mathbb{E}(\int_0^t (Z_s^n - f'(B_s))^2\, ds)$$

qui tend vers 0 par le théorème de convergence dominée usuel. Donc, dans L^2,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f'(B_{t_k^n})(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}) \to \int_0^t f'(B_s)\, dB_s.$$

On regarde maintenant le dernier terme :

$$\sum_{k=0}^{n-1}[f''(\theta_k^n) - f''(B_{t_k^n})](B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2$$
$$\leq \sup_{1\leq r\leq n-1} |f''(\theta_r^n) - f''(B_{t_r^n})| \sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_{k+1}^n} - B^{t_k^n})^2$$

tend vers 0, p.s. suivant une sous suite car f'' est uniformément continue. Par la proposition, dans L^2,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f''(B_{t_k^n})(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f''(B_{t_k^n})(t_{k+1}^n - t_k^n)$$
$$= \int_0^t f''(B_s)\ \ ds$$

puisque f'' est continue (approximation de l'intégrale de Riemann).

On laisse en exercice la généralisation suivante très utile, en utilisant la formule de Taylor pour une fonction de deux variables.

***Théorème 1.5.4* (Une formule d'Ito).** — *Si $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto f(t,x)$ est à dérivées secondes continues,*

$$f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)\, ds \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(s, B_s)\, ds$$

1.5.1. Deux calculs. —

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s\ dB_s + t.$$

Si $Z_t = \exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t^2}{2})$ alors

$$Z_t = 1 + \int_0^t \lambda Z_s dB_s.$$

1.6. Biliographie pour tout le cours

F. Baudoin : *Diffusion Processes and Stochastic Calculus*, EMS Textbooks in mathematics, 2014.

R. Durrett : *Stochastic calculus, A practical Introduction, 1996.* CRC Press.

I. Karatzas, S. Shreve : *Brownian motion and stochastic calculus, Second Edition 1991.* Springer.

F.C Klebaner : *Introduction to Stochastic Calculus with Applications, Second Edition 2005.* Imperial College Press.

J.-F. Le Gall : *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*Springer, Collection : Mathématiques et Applications, Vol. 71, 2013. (Recommandé)

B. Oksendal : *Stochastic differential equations, 6th edition, 2010.* Springer. (Beaucoup d'applications)

Ph. Protter : *Stochastic Integration and Differential Equations, Second Edition Version 2.1, 2005.* Springer (traite aussi le cas discontinu).

D. Revuz, M. Yor : *Continuous martingales and Brownian motion, 2004.* Springer.

CHAPITRE 2

INTÉGRATION DE LEBESGUE

Le but de ce chapitre est de développer rapidement ce que l'on appelle la théorie abstraite de l'intégration de Lebesgue.

2.1. Mesures

Un espace mesurable est la donnée $(\Omega, \mathcal{F})$ d'un ensemble Ω et d'une tribu $\mathcal{F}$ sur cet ensemble :

Définition 2.1.1. — Une classe de parties $\mathcal{F}$ d'un ensemble Ω est une tribu si
(i) elle est stable par complémentaire,
(ii) elle est stable par réunion dénombrable,
(iii) elle contient Ω.

Pour comparaison une topologie est une classe d'ouverts : c'est à dire, par définition, une classe de parties de Ω stable par union quelconque, intersection finie, contenant Ω et $\emptyset$

Définition 2.1.2. — Une mesure sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $m : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que
(i) $m(\emptyset) = 0$.
(ii) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ si $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$ sont disjoints.
(iii) si (A_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$, $m(A_n) \to m(\cup A_n)$.

On dit que m est σ-finie si on peut écrire Ω comme une réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie ; m est une probabilité si $m(\Omega) = 1$.

Exemple : Lorsque Ω est dénombrable (c'est à dire fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$) , $\mathcal{F}$ = ensemble de toutes les parties de Ω est une tribu et $m(A) = Card(A)$ définit une mesure σ-finie (théorie des séries).

Il est difficile de décrire aussi explicitement des exemples très différents de celui ci, comme par exemple la mesure de Lebesgue que nous verrons.

Définition 2.1.3. — On dit qu'une propriété est vraie p.p. (presque partout) ou p.s. (presque surement) si elle est vraie en dehors d'un ensemble de mesure nulle.

2.2. Intégration

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ un espace mesurable muni d'une mesure. Une fonction f : $\Omega \to \mathbb{R}$ est étagée si on peut l'écrire sous la forme

$$f = \sum_{k=1}^{n} r_k \mathbf{1}_{A_k}$$

où $r_k \in \mathbb{R}, A_k \in \mathcal{F}, k = 1, ..n$. On définit l'intégrale de la fonction étagée f positive par

$$\int f\, dm = \sum_{k=1}^{n} r_k m(A_k).$$

(avec la convention ici que $0 \cdot \infty = 0$). On vérifie que ça ne dépend pas de la décomposition choisie et que, si f, g sont étagées positives et $a, b \in \mathbb{R}^+$,

$$\int (af + bg)\, dm = a \int f\, dm + b \int g\, dm.$$

Pour l'instant, appelons fonction mesurable réelle une fonction $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{f > a\} \in \mathcal{F}$. (On utilisera les notations $\{f > a\} = \{\omega \in \Omega; f(\omega) > a\}$ et $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$).

Lemme 2.2.1. — *Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables, alors $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est mesurable.*

Preuve: En effet il suffit d'écrire que

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > a\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n > a\}.$$

Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables, pour la même raison, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ et donc

$$\limsup f_n := \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} f_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k$$

$$\liminf f_n := \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} f_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k$$

sont mesurables. En particulier une limite de fonctions mesurables est mesurable (rappelons qu'une suite f_n converge dans $\bar{\mathbb{R}}$ ssi $f := \limsup f_n = \liminf f_n$ et qu'alors f est la limite).

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable positive on pose

$$\int f\,dm = \sup \int g\,dm$$

où le sup est pris sur l'ensemble des fonctions étagées g qui vérifient $0 \leq g \leq f$. Si f est mesurable on dit que f est intégrable si $f^+ := \max(f, 0)$ et $f^- := -\min(f, 0)$ sont d'intégrale finie et on pose alors

$$\int f\,dm = \int f^+\,dm - \int f^-\,dm.$$

On voit que f est intégrable ssi $|f|$ l'est puisque $|f| = f^+ + f^-$ et on a

$$|\int f\,dm| \leq \int |f|\,dm$$

Lemme 2.2.2. — *Une fonction intégrable est finie presque partout.*

Preuve: Soit $A = \{|f| = +\infty\}$. Si $r > 0$ et $g = r1_A$, on a $g \leq |f|$ donc

$$rm(A) = \int g\,dm \leq \int |f|dm$$

ce qui n'est possible pour $r > 0$ que si $m(A) = 0$. □

Si f et g sont mesurables finies, $-f$ et $f + g$ sont aussi mesurables car

$$\{-f > a\}^c = \{f \geq -a\} = \cap_{n\in\mathbb{N}}\{f > -a - \frac{1}{n}\}$$

et

$$\{f + g > a\} = \cup_{r\in\mathbb{Q}}\{f > r, g > a - r\}.$$

On en déduit

Proposition 2.2.3. — *L'ensemble des fonctions intégrables est un espace vectoriel.*

Théorème 2.2.4 **(de convergence monotone, ou de Beppo Levi)** *Si f_n est une suite croissante de fonctions mesurables positives,*

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n\,dm = \int \lim_{n\to+\infty} f_n\,dm.$$

Preuve: La fonction $f := \lim f_n$ est mesurable. Puisque $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, il est facile de voir que

$$\int f_n\,dm \leq \int f_{n+1}\,dm \leq \int f\,dm.$$

Donc $\lim \int f_n\,dm \leq \int f\,dm$. Pour montrer l'inégalité inverse, prenons une fonction étagée g telle que $0 \leq g \leq f$ et un réel c tel que $0 < c < 1$. Chaque ensemble

$$E_n = \{f_n \geq cg\}$$

est mesurable, la suite E_n est croissante, de réunion Ω. On a

$$\int f_n\,dm \geq \int f_n \mathbf{1}_{E_n}\,dm \geq \int cg\mathbf{1}_{E_n}\,dm.$$

Comme g est étagée, on vérifie que le terme de droite tend vers $c\int g\,dm$. On a donc

$$\lim \int f_n\,dm \geq c\int g\,dm$$

d'où, par définition,

$$\lim \int f_n\,dm \geq c\int f\,dm.$$

Il suffit alors de faire tendre c vers 1. □

Corollaire 2.2.5. — *Si (f_n)est une suite de fonctions mesurables positives*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int f_n\,dm = \int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\,dm.$$

Lemme 2.2.6 **(de Fatou)**. — *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives,*

$$\int \liminf f_n\,dm \leq \liminf \int f_n\,dm.$$

Théorème 2.2.7 **(de convergence dominée)**. — *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables vérifiant $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout x de E, où g est une fonction intégrable, alors si f_n converge*

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n\,dm = \int \lim_{n\to+\infty} f_n\;dm.$$

Preuve: En remplacant f_n par $f_n - \lim f_k$ on se ramène au cas où $f_n \to 0$. Dans ce cas, par Fatou appliqué à $g - |f_n| \geq 0$,

$$\int g\, dm \leq \int \liminf g - |f_n|\, dm \leq \liminf \int g - |f_n|\, dm = \int g\, dm - \limsup \int |f_n|\, dm$$

Donc $\limsup \int |f_n|\, dm = 0$ ce qui assure que $\lim \int |f_n|\, dm = 0$. Donc

$$|\lim \int f_n\, dm| \leq \lim \int |f_n|\, dm = 0.$$

2.3. Espaces $\mathcal{L}^1, L^1, \mathcal{L}^2, L^2$.

On note $\mathcal{L}^1$ l'ensemble des fonctions intégrables, $\mathcal{L}^2$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable, i.e. des fonctions mesurables $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ telles que

$$\int |f|^2\, dm < +\infty,$$

et $\mathcal{L}^\infty$ l'ensemble des fonctions mesurables f pour lesquelles il existe une constante $M \geq 0$ telle que $|f| \leq M$, p.p. On pose

$$\|f\|_1 = \int |f|\, dm$$

$$\|f\|_2 = (\int f^2\, dm)^{1/2}.$$

et $\|f\|_\infty =$ l'inf des M tels que $|f| \leq M$, p.p. On définit ainsi des semi-normes c'est à dire que la relation suivante est vraie pour $p = 1, 2, \infty$:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Ceci est immédiat pour $p = 1$ et résulte pour $p = 2$ du lemme essentiel suivant :

Lemme 2.3.1 **(inégalité de Cauchy Schwarz)**. — *Pour f, g mesurables*

$$(\int fg\, dm)^2 \leq \int f^2\, dm \int g^2\, dm.$$

Preuve: Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le trinome en λ du second degré

$$\lambda^2[\int f^2\, dm] + 2\lambda[\int fg\, dm] + \int g^2\, dm = \int (\lambda f + g)^2\, dm$$

est positif, ce qui n'est possible que si son discriminant

$$[\int fg\, dm]^2 - [\int f^2\, dm][\int g^2\, dm]$$

est négatif. □

On dit qu'une suite de fonctions mesurables f_n converge vers f dans $\mathcal{L}^p$, si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Théorème 2.3.2. — *Si une suite f_n converge vers f dans $\mathcal{L}^p$ il existe une sous suite d'entiers n_k telle que, pour presque tout $\omega \in \Omega$*

$$f_{n_k}(\omega) \to f(\omega).$$

Preuve: Ecrivons la preuve pour $p = 1$. Par hypothèse pour $\varepsilon = 1/2^k$ il existe n_k tel que

$$\|f_{n_k} - f\|_1 \le \frac{1}{2^k}.$$

Alors, par Beppo Levi,

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_k} - f|\, dm = \sum_{k=0}^{\infty} \int |f_{n_k} - f|\, dm = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_{n_k} - f\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$$

Donc (cf Lemme 2.2.2) la série $\sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_k} - f|$ converge p.p. ce qui entraîne que son terme général $f_{n_k} - f$ tend vers 0, p.p. $\square$

Définition 2.3.3. — La suite (f_n) est de Cauchy dans $\mathcal{L}^p$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N > 0$ tel que pour $m, n \ge N$

$$\|f_n - f_m\| \le \varepsilon.$$

Théorème 2.3.4. — *Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p$. Alors il existe $f \in \mathcal{L}^p$ tel que $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}^p$.*

Preuve: Ecrivons la preuve pour $p = 1$. Puisque la suite (f_n) est de Cauchy, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe N_k tel que, pour $n, m \ge N_k$,

$$\|f_n - f_m\| \le 2^{-k}.$$

Si on prend $n_k = \max(N_0, \cdots, N_k)$ on voit que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \le 2^{-k}.$$

Donc, un peu comme dans la preuve précédente,

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\, dm = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty.$$

Donc (cf Lemme 2.2.2) $\sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|$ est fini presque partout, et la série $\sum_{k=0}^{\infty}(f_{n_k} - f_{n_{k+1}})$ est donc convergente (car absolument convergente). On a

$$f_{n_p} = f_{n_0} + \sum_{k=0}^{p-1}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

et on pose

$$f = f_{n_0} + \sum_{k=0}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}).$$

Pour tout $n \geq N_k, p \geq k$, $\|f_n - f_{n_p}\| \leq 2^{-k}$ donc, en appliquant le lemme de Fatou,

$$\int |f_n - f|\, dm \leq \int \liminf_{p \to +\infty} |f_n - f_{n_p}|\, dm \leq 2^{-k}$$

d'où $\|f_n - f\|$ tend vers 0. □

Par rapport à la topologie il y a une petite difficulté car

Lemme 2.3.5. — *Si f est mesurable $\int |f|\, dm = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p.*

Cela résulte immédiatement de la très importante inégalité suivante

***Lemme 2.3.6* (Inégalité de Markov)**. — *Si f est une fonction mesurable positive et $T > 0$,*

$$m(f \geq T) \leq \frac{\int f\, dm}{T}.$$

Donc $\|f\| = 0$, n'entraîne pas que f est nulle (partout). Donc $\|\cdot\|$ n'est pas une norme, mais seulement une semi-norme, et $d(f,g) = \|f - g\|$ pas vraiment une distance. Ce n'est pas génant (et si on veut une norme on remplace $\mathcal{L}^p$ par l'ensemble L^p des classes de fonctions égales presque partout).

Un role particulier est joué par $\mathcal{L}^2$ (ou L^2) car il a une structure géométrique plus riche que les autres. On peut y définir les angles et surtout l'orthogonalité, à partir du produit scalaire : pour $f, g \in \mathcal{L}^2$

$$\langle f, g \rangle = \int fg\, dm.$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire dans lequel les suites de Cauchy convergent est appelé un espace de Hilbert. Donc $\mathcal{L}^2$ (ou plutot L^2) est un espace de Hilbert. Une propriété fondamentale des espaces de Hilbert est le théorème suivant.

***Théorème 2.3.7* (Théorème de projection).** — *Soit V un sous espace vectoriel fermé dans un espace de Hilbert H. Pour tout $x \in H$ il existe un unique élément $v \in V$ appelé la projection de x sur V caractérisé par*
- $v \in V$
- $\langle x - v, w \rangle = 0$, *pour tous* $w \in V$.

Corollaire 2.3.8. — *Soit W un sous espace vectoriel d'un Hilbert H. Si le seul vecteur orthogonal à W est 0, alors W est dense dans H*

Preuve: Appliquer le théorème à l'adhérence de W.

2.4. Convergence en probabilité

Définition 2.4.1. — Une suite de v.a. X_n tend vers X en probabilité si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X] \geq \varepsilon) \to 0$$

quand $n \to +\infty$.

Lemme 2.4.2. — *$X_n \to 0$ en probabilité si et seulement si* $\min(|X_n|, 1) \to 0$ *dans L^1*

Preuve: Si $X_n \to 0$ en probabilité, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}(\min(|X_n|, 1)) = \mathbb{E}(\min(|X_n|, 1)1_{\{|X_n| \geq \varepsilon\}}) + \mathbb{E}(\min(|X_n|, 1)1_{\{|X_n| < \varepsilon\}})$$

$$\leq \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

pour n assez grand. Réciproquement, par l'inégalité de Markov, pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\min(1, |X_n|) \geq \varepsilon) \leq \frac{\min(1, |X_n|)}{\varepsilon}$$

qui tend vers 0.

On déduit donc du Théorème 2.3.2 que

Proposition 2.4.3. — *Si $X_n \to 0$ p.s., alors $X_n \to 0$ en probabilité.. Si $X_n \to X$ en probabilité il existe une sous suite n_k telle que $X_{n_k} \to X$ presque surement.*

2.5. Uniforme intégrabilité

Limitons nous au cas des probabilités et utilisons les notations probabilistes : on note $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est la même chose qu'une fonction mesurable et on pose

$$\mathbb{E}(X) = \int X \, d\mathbb{P}.$$

Définition 2.5.1. — Une famille $\mathcal{L}$ de v.a. est uniformément intégrable si

$$\sup_{X \in \mathcal{L}} \int_{\{|X|>R\}} |X| \, d\mathbb{P} \to 0, \text{ quand } R \to +\infty.$$

Lemme 2.5.2. — *Si $\{X_i, i \in I\}$ et $\{Y_i, i \in I\}$ sont uniformément intégrables, alors $\{X_i + Y_i, i \in I\}$ est uniformément intégrable.*

Preuve: On a

$$\mathbb{E}(|X_i| 1_{\{|X_i+Y_i| \geq M\}}) = \mathbb{E}(|X_i| 1_{\{|X_i+Y_i| \geq M\}} 1_{\{|X_i| \geq M/2\}}) + \mathbb{E}(|X_i| 1_{\{|X_i+Y_i| \geq M\}} 1_{\{|X_i| < M/2\}})$$

$$\leq \mathbb{E}(|X_i| 1_{\{|X_i| \geq M/2\}}) + \mathbb{E}(|X_i| 1_{\{|X_i+Y_i| \geq M\}} 1_{\{|X_i| < M/2\}})$$

Le sup du premier terme tend vers 0 car (X_i) est uniformément intégrable. Pour le second on remarque qu'il est majoré par

$$\mathbb{E}(|Y_i| 1_{|Y_i| \geq M/2})$$

qui tend aussi vers 0.

Théorème 2.5.3. — *Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite uniformément intégrable de v.a. qui converge en probabilité (donc a fortiori si elle converge p.s.) vers X. Alors $X_n \to X$ dans $\mathcal{L}^1$ et en particulier, $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.*

Preuve: La suite $Y_n = |X_n - X|$ est aussi uniformément intégrable par le lemme.. Ensuite

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n \mathbf{1}_{\{Y_n < R\}}) + \mathbb{E}(Y_n \mathbf{1}_{\{Y_n \geq R\}})$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, pour R assez grand, le second terme est inférieur à $\varepsilon/2$ par unif. int. Un tel R étant choisi, le premier terme est inférieur à $\varepsilon/2$ pour n assez grand, par convergence en probabilité. □

Proposition 2.5.4. — *Une suite de v.a. X_n telle que $sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$ est uniformément intégrable.*

Preuve: On utilise que $\mathbf{1}_{\{|X_n|>R\}} \leq \frac{|X_n|}{R}$ donc

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>R\}}] \leq \frac{\mathbb{E}[X_n^2]}{R}.$$

2.6. Divers

***Lemme 2.6.1* (de Borel Cantelli).** — *Soit (A_n) une suite de sous ensembles mesurables de Ω telle que $\sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) < +\infty$. Alors*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_n} < +\infty \ p.s.$$

Autrement dit, presque tout $\omega \in \Omega$ n'appartient qu'à un nombre fini de A_n.

Preuve: Par convergence monotone,

$$\int \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_n}\, dm = \sum_{k=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty$$

donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_n} < +\infty$ p.p. $\square$.

2.7. Tribu engendrée

Définition 2.7.1. — Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de Ω. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$ et on note $\sigma(\mathcal{C})$ la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$.

Définition 2.7.2. — Soit E un espace muni d'une topologie, on appelle tribu borélienne de E et on note $\mathcal{B}(E)$ la tribu engendrée par les ouverts.

Définition 2.7.3. — Soit $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, on dit qu'une fonction $f : E \to F$ est mesurable si pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$.

Lorsque E ou F est un espace topologique, si on ne le précise pas, on le munit de la tribu borélienne. On retrouve donc la notion introduite avant. Un sup, un inf, une limite d'une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles sont mesurables. Les fonctions continues sont mesurables.

Lemme 2.7.4. — *Toute fonction mesurable de E dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ est la limite croissante d'une suite de fonctions étagées.*

En effet,

$$f = \lim_{n\to+\infty} n\mathbf{1}_{\{n\le f\}} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^n}\le f<\frac{k+1}{2^n}\}}$$

(lorsque f est finie on peut se passer du premier terme).

Pour s'habituer aux notations, utilisons le vocabulaire des probabilités. Donnons nous une famille $(E_i, \mathcal{E}_i), i \in I$, d'espaces mesurables.

Définition 2.7.5. — Soit $X_i : \Omega \to E_i$, $i \in I$, des v.a.. On appelle tribu engendrée par cette famille et on note $\sigma(X_i, i \in I)$ la tribu engendrée par $\{X_i \in A_i\}$, $A_i \in \mathcal{E}_i$ et $i \in I$.

Intuitivement, la tribu $\sigma\{X_i, i \in I\}$ est formée des ensembles que l'on peut décrire à l'aide des X_i. Pour une seule application $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $\sigma(X)$ est exactement la classe des ensembles $\{X \in A\}$, où A est un borélien de $\mathbb{R}^d$.

Donnons nous pour toute la suite un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Une variable aléatoire est la même chose qu'une application mesurable mais la plupart du temps à valeurs dans $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$. Le lemme suivant est très utile.

Lemme 2.7.6. — *Soit X une application de Ω dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ et $\sigma(X)$. Une application $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ est $\sigma(X)$-mesurable si et seulement si il existe une application mesurable $\phi : E \to \mathbb{R}$ telle que $Y = \phi(X)$.*

Preuve: Supposons d'abord que Y est étagée et $\sigma(X)$-mesurable. On peut par définition l'écrire sous la forme $Y = \sum_{n=1}^k \alpha_n \mathbf{1}_{A_n}$, où $A_n \in \sigma(X)$. Il existe donc pour tout n, un borélien B_n tel que $A_n = \{X \in B_n\}$. Posons $\phi = \sum_{n=1}^k \alpha_n \mathbf{1}_{B_n}$. On vérifie qu'alors $Y = \phi(X)$. Ceci montre la partie directe du lemme lorsque Y est étagée. Dans le cas général, si Y est $\sigma(X)$-mesurable, il existe une suite de v.a. étagées Y_n telle que $Y = \lim Y_n$. Par ce qui précède, on peut écrire $Y_n = \phi_n(X)$ et il suffit alors de poser $\phi = \limsup \phi_n$. La réciproque est facile.

Une façon agréable d'exprimer le lemme précédant est de dire qu'une variable aléatoire Y est $\sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$-mesurable si et seulement si elle s'écrit

$$Y = \phi(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

pour une application borélienne ϕ.

Le maniement des tribus engendrées est souvent délicat. Un outil sophistiqué :

***Théorème 2.7.7* (de la classe monotone).** — *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{M}$ des ensembles de parties de Ω tels que $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$. On suppose que*

(i) $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie (i.e. $A, B \in \mathcal{C}$ implique $A \cap B \in \mathcal{C}$).

(ii) $\mathcal{M}$ est stable par différence propre (i.e. $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subset B$ implique $B \setminus A \in \mathcal{M}$).

(iii) $\mathcal{M}$ est stable par limite croissante (i.e. $A_n \in \mathcal{M}$ et $A_n \subset A_{n+1}$ implique $\cup A_n \in \mathcal{M}$).

(iv) Ω est dans $\mathcal{M}$.

Alors $\sigma(\mathcal{C})$ est contenu dans $\mathcal{M}$.

Preuve: Montrons que l'intersection $\mathcal{N}$ de toutes les classes $\mathcal{M}$ vérifiant $(ii), (iii), (iv)$ est une tribu donc contient $\sigma(\mathcal{C})$. Stable par intersection finie : Fixons un A de $\mathcal{C}$, la classe

$$\{B \in \mathcal{N}; A \cap B \in \mathcal{N}\}$$

contient $\mathcal{C}$ par (i) et vérifie (ii, iii, iv), elle contient donc $\mathcal{N}$. Maintenant, fixons un B dans $\mathcal{N}$, la classe

$$\{C \in \mathcal{N}; C \cap B \in \mathcal{N}\}$$

contient $\mathcal{C}$ par ce que l'on vient de montrer et vérifie (ii, iii, iv), elle contient donc $\mathcal{N}$. $\square$

Le résultat fondamental de la théorie de l'intégration est le suivant :

***Théorème 2.7.8*.** — *Il existe une et une seule mesure m sur $\mathbb{R}$, appelée mesure de Lebesgue, vérifiant*

$$m(]s, t]) = t - s$$

Plus généralement, pour toute fonction croissante continue à droite A il existe une mesure et une seule m_A vérifiant

$$m_A(]s, t]) = A(t) - A(s)$$

pour tout $s < t$.

La preuve de l'existence est difficile, nous l'admettons. Par contre l'unicité est conséquence du théorème de la classe monotone (appliqué à la classe des intervalles de la forme $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$, qui engendre la tribu borélienne et est stable par intersection finie.)

Il est facile de voir, en utilisant le théorème de convergence dominée que pour toute fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}$, $\int f\, dm$ n'est autre que l'intégrale de Riemann de f. Nous utiliserons donc aussi la notation $\int f(x)\, dx$.

2.8. Loi d'une variable aléatoire

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un ensemble E, muni d'une tribu $\mathcal{E}$.

Définition 2.8.1. — Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire (= application mesurable). On appelle **loi** de X et on note parfois $\mathbb{P}_{(X)}$ la probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ définie par $\mathbb{P}_{(X)}(A) = \mathbb{P}(X \in A)$, pour tout A de $\mathcal{E}$.

La règle de calcul suivante est d'un emploi constant : il faut absolument savoir la manier. La première égalité est la définition de l'espérance.

Proposition 2.8.2. — *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E. Pour toute fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}$, à valeurs positives ou telle que $f(X)$ soit intégrable, on a*

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_\Omega f(X)\, d\mathbb{P} = \int_E f\, d\mathbb{P}_{(X)}.$$

Définition 2.8.3. — Etant donné deux mesures μ et ν sur $(\Omega, \mathcal{F})$, et une fonction mesurable positive $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, on dit que μ a la densité ϕ par rapport à ν et on écrit

$$d\mu = \phi\, d\nu$$

si pour tout $A \in \mathcal{F}$

$$\mu(A) = \int_A \phi(x)\, d\nu(x).$$

Alors, pour toute fonction mesurable positive f

$$\int f\, d\mu = \int f\phi\, d\nu.$$

Souvent lorsqu'on dit qu'une v.a. réelle a la densité ϕ, on sous entend que sa loi a la densité ϕ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Proposition 2.8.4. — *Si une v.a. X a une loi de densité ϕ, alors*

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int f(x)\phi(x)\, dm(x)$$

pour toute fonction mesurable positive f.

2.9. Mesure produit

Soient $(E_1, \mathcal{E}_1, m_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2, m_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. On munit $E_1 \times E_2$ de la tribu $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ sur $E_1 \times E_2$, appelée tribu produit, engendrée par les ensembles de la classe

$$\mathcal{C} = \{A \times B, A \in \mathcal{E}_1, B \in \mathcal{E}_2\}$$

Cette classe est stable par intersection finie. On pose, pour tout $C \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$,

$$(m_1 \otimes m_2)(C) = \int \{ \int \mathbf{1}_C(x, y) \, dm_1(x) \} \, dm_2(y) \}$$

(à l'aide du thm de classe monotone, on vérifie que $y \mapsto \int \mathbf{1}_C(x, y) \, dm_1(x)$ est bien mesurable). On définit ainsi une mesure sur $m_1 \otimes m_2$ sur $E_1 \times E_2$. De la même façon, la formule

$$\nu(C) = \int \{ \int \mathbf{1}_C(x, y) \, dm_2(y) \} \, dm_1(x) \}$$

définit aussi une mesure. Pour tout $C = A \times B$ de $\mathcal{C}$,

$$(m_1 \otimes m_2)(C) = m_1(A) m_2(B) = \nu(C)$$

On déduit donc du théorème de classe monotone que les deux mesures $m_1 \otimes m_2$ et ν coincident. Il en résulte assez facilement :

***Théorème 2.9.1* (de Fubini).** — *Soit $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors, pour tout $x \in E_1$, la fonction*

$$y \in E_2 \mapsto \int f(x, y) \, dm_1(x)$$

est mesurable et

$$\int \{ \int f(x, y) \, dm_1(x) \} dm_2(y) = \int \{ \int f(x, y) \, dm_2(y) \} dm_1(x)$$

sous l'une des deux hypothèses suivantes (i) f est à valeurs positives (ii) f est intégrable

Lorsque f n'est pas positive, on applique souvent ce thm à $|f|$ pour montrer que f est intégrable.

L'exemple fondamental est celui de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, égale au produit, d fois, de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour la manier on utilise parfois le

***Théorème 2.9.2* (de changement de variables).** — *Si ϕ est un difféomorphisme de l'ouvert U sur l'ouvert V, on a, pour toute $f \in B^+(\mathbb{R}^d)$,*

$$\int_V f(v)\, dm(v) = \int_U f(\phi(u))|J(\phi)(u)|\, dm(u). \tag{1}$$

où $J(\phi)$ est le déterminant de la matrice des $\frac{\partial \phi_j}{\partial u_k}$ et m est le mesure de Lebesgue.

2.10. Processus

Un processus (à temps continu) est une famille de variables aléatoires (X_t) à valeurs dans un espace E muni d'une tribu $\mathcal{E}$, indexée par $t \in \mathbb{R}^+$. En fait c'est la même chose qu'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $F(\mathbb{R}^+, E)$ des fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans E muni de la tribu $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, E)$ engendrée par les applications $\phi_t : F(\mathbb{R}^+, E) \to E$ définies par $\phi_t(\omega) = \omega(t)$, $\omega \in F(\mathbb{R}^+, E)$.

La loi du processus est par définition la loi de cette variable aléatoire.

Proposition 2.10.1. — *La loi d'un processus est déterminée par les lois finies dimensionnelles, c'est à dire les lois de*

$$(X_{t_1}, \cdots X_{t_n}), 0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n, n \in \mathbb{N}.$$

Preuve: Cela résulte du théorème de la classe monotone. En effet, la classe des sous ensembles de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, E)$ qui s'écrivent

$$\{\omega \in F(\mathbb{R}^+, E); \omega(t_1) \in E_1, \cdots, \omega(t_n) \in E_n\}$$

où les E_k sont dans $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie et engendre la tribu $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, E)$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On représente ce que l'on "connait" à l'instant t par une tribu $\mathcal{F}_t$. Ceci amène à poser

Définition 2.10.2. — Une famille croissante $(\mathcal{F}_t,\, t \in \mathbb{R}^+)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, c'est à dire vérifiant $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, s'appelle une filtration et le terme $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.

Un processus X_t est dit adapté à cette filtration si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, pour tout $t \ge 0$.

L'exemple fondamental de filtration est donné par $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \le t)$ où (X_t) est un processus quelconque. Si X_t est un processus adapté sans régularité particulière, on ne sait rien de sa dépendance en t. Elle n'est peut être même pas borélienne. Ceci amène à poser :

Définition 2.10.3. — Un processus progressivement mesurable $X_t, t \in \mathbb{R}^+$, est un processus tel que pour tout $T \geq 0$, l'application

$$(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega \mapsto X_t(\omega)$$

est mesurable de $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}_T$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{B}([0, T])$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont les tribus boréliennes.

En pratique tous les processus adaptés que nous rencontrerons seront progressifs. C'est par exemple le cas des processus continus et plus généralement ;

Lemme 2.10.4. — *Si X est un processus continu à droite adapté à $(\mathcal{F}_t)$, l'application $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ est progressivement mesurable.*

Preuve: Pour tout n, posons $X_s^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} X_{\frac{k+1}{n} \wedge t} 1_{\{\frac{k}{n} \wedge t \leq s < \frac{k+1}{n} \wedge t\}}$. Alors $(s, \omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega)$ est mesurable de $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ dans E. Il en est donc de même de la limite X de $X^{(n)}$ quand $n \to +\infty$.

2.11. Indépendance

La notion la plus importante en probabilité est sans conteste la notion d'indépendance. Elle recouvre à la fois une notion intuitive (le résultat du loto est indépendant de la température, etc ...) et une notion mathématique. Il est nécessaire de bien posséder ces deux aspects et de comprendre qu'ils signifient la même chose. Un bon utilisateur des probabilités est quelqu'un qui sait exploiter l'indépendance, ou la non indépendance, dans les événements de la vie courante. Même si le plus souvent on ne s'intéresse qu'à l'indépendance d'événements ou de variables aléatoires, il s'avère plus efficace de définir l'indépendance de tribus. Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est toujours fixé.

Définition 2.11.1. — On dit que des tribus $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n$ contenues dans $\mathcal{A}$ sont indépendantes si, pour tout $A_1 \in \mathcal{A}_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}_n$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n).$$

Des variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont dites indépendantes si les tribus engendrées $\sigma(X_1), \cdots, \sigma(X_n)$ le sont. On dit qu'une famille infinie de sous tribus (ou de variables aléatoires) est formée de tribus indépendantes lorsque toute sous famille finie a cette propriété. Donnons quelques résultats utiles au maniement de l'indépendance. Le premier est très important et son énoncé est à bien comprendre, malgré son aspect compliqué. Nous en donnons deux formes.

***Proposition 2.11.2* (Lemme de regroupement).** — *(Forme 1). Soit I un ensemble d'indices, et $\mathcal{A}_i, i \in I$, des sous tribus indépendantes de $\mathcal{A}$. Alors, si $I_1, I_2, \cdots, I_n$ sont des parties disjointes de I, les tribus $\sigma(\mathcal{A}_i, i \in I_1), \sigma(\mathcal{A}_i, i \in I_2), \cdots, \sigma(\mathcal{A}_i, i \in I_n)$ sont indépendantes.*

(Forme 2). Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ des variables aléatoires indépendantes. Alors si $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ les variables aléatoires $\phi_1(X_1, \cdots, X_{n_1})$, $\phi_2(X_{n_1+1}, \cdots, X_{n_2})$, $\cdots$ sont indépendantes, pour toute application $\phi_1 : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}$, $\phi_2 : \mathbb{R}^{n_2-n_1} \to \mathbb{R}, \cdots$, mesurable.

Donnons un exemple simple mais typique d'utilisation : si X, Y, U, V sont quatre variables aléatoires réelles indépendantes, alors $X + Y$ et UV sont indépendantes.

***Théorème 2.11.3*.** — *Deux variables aléatoires X, Y sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_{(X)} \otimes \mathbb{P}_{(Y)}$.*

***Corollaire 2.11.4*.** — *Si les variables aléatoires X, Y sont indépendantes, alors pour toute fonction ϕ mesurable positive (ou telle que $\phi(X, Y)$ soit intégrable) on a*

$$\mathbb{E}[\phi(X, Y)] = \int\int \phi(x, y)\, d\mathbb{P}_{(X)}(x) d\mathbb{P}_{(Y)}(y).$$

On peut aussi écrire cette relation sous les formes

$$\mathbb{E}[\phi(X, Y)] = \int_\Omega\int_\Omega \phi(X(\omega), Y(\omega'))\, d\mathbb{P}(\omega) d\mathbb{P}(\omega'),$$

ou encore

$$\mathbb{E}[\phi(X, Y)] = \int_\Omega \mathbb{E}[\phi(X, Y(\omega'))]\, d\mathbb{P}(\omega'),$$

qui nous seront utiles.

CHAPITRE 3

MOUVEMENT BROWNIEN

3.1. Loi gaussienne

La loi gaussienne $N(m, \sigma^2)$ sur $\mathbb{R}$ est la masse de Dirac en m lorsque $\sigma = 0$ et la loi de densité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

sinon. Il n'y a pas de primitive explicite mais une excellente approximation par une fraction rationnelle [1]. Si X suit la $N(m, \sigma^2)$, alors $\mathbb{E}(X) = m, var(X) = \sigma^2$. Lorsque $\sigma = 0$, $X = m$ p.s. La fonction caractéristique est $\mathbb{E}(e^{itX}) = \exp\{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + itm\}$.

Proposition 3.1.1. — *Toute limite de v.a. gaussiennes, en loi, en probabilité, ou p.s., ou dans L^1, ou dans L^2 est gaussienne. De plus l'espérance et la variance convergent vers l'espérance et la variance de la limite.*

Preuve: Toutes les convergences considérées entraînent la convergence en loi. Supposons donc que X_n converge en loi vers X et que X_n suit une loi $N(m_n, \sigma_n^2)$. Alors $\mathbb{E}(e^{itX_n}) = \exp\{-\frac{\sigma_n^2 t^2}{2} + itm_n\}$ et $\mathbb{E}(e^{itX_n}) \to g(t) := \mathbb{E}(e^{itX})$. En prenant le module on voit que $\exp\{-\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}\} \to |g(t)|$ donc que σ_n^2 converge vers $\sigma^2 = -(2\log|g(t)|)/t^2$. On en déduit que e^{itm_n} converge vers $h(t) = \exp\{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\} g(t)$. Alors, si f est C^1 à support compact, tel que $\int f(t)h(t)dt \neq 0$, par intégration par parties,

$$\int f'(t)e^{itm_n}dt = -im_n \int f(t)e^{itm_n}dt$$

1. cf. Appendice

donc, en pasant à la limite m_n converge vers $m := i(\int f'(t)h(t)dt)/(\int f(t)h(t)dt)$. On voit donc que

$$\mathbb{E}(e^{itX_n}) \to \exp\{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + itm\}$$

et la limite est donc gaussienne.

3.2. Vecteur gaussien

On identifie un vecteur à une matrice colonne. L'espérance d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_d)^t$ est le vecteur $\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \cdots, \mathbb{E}(X_d))^t$ et sa matrice de covariance est,

$$K_X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^t] = \mathbb{E}(XX^t) - \mathbb{E}(X)[\mathbb{E}(X)]^t.$$

ses composantes sont $K_X(i,j) = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Si les composantes $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes, $K(X)$ est diagonale. Il est clair que

Lemme 3.2.1. — *Si M est une matrice déterministe $r \times d$, on a $K_{MX} = MK_XM^t$.*

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^d$, notons

$$\langle \lambda, X \rangle = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i X_i$$

le produit scalaire. En appliquant le lemme à $M = \lambda^t$ on voit que

$$\lambda^t K_X \lambda = var\langle \lambda, X \rangle \geq 0.$$

En particulier, K_X est une matrice symétrique semi-définie positive, donc diagonalisable de valeurs propres positive ou nulles.

Définition 3.2.2. — Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$ est dit gaussien si toute combinaison linéaire des composantes suit une loi normale.

Proposition 3.2.3. — *Un vecteur X est gaussien si et seulement, il existe un vecteur $m \in \mathbb{R}^d$ et une matrice de covariance K telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$*

$$\mathbb{E}(\exp(i\langle \lambda, X \rangle) = \exp(i\langle \lambda, m \rangle - \frac{\lambda^t K \lambda}{2}).$$

Alors $m = \mathbb{E}(X)$ et $K = K_X$.

Un exemple typique de vecteur gaussien est donné par un vecteur de composantes normales indépendantes. Par contre, en général, un vecteur à composantes gaussiennes n'est pas nécéssairement gaussien. En appliquant la proposition précédente pour calculer la fonction caractéristique, on obtient le théorème fondamental suivant :

Théorème 3.2.4. — *Soit* $(X_1, \dots, X_p, Y_1, \cdots, Y_q)^t$ *un vecteur gaussien de* $\mathbb{R}^{p+q}$. *Alors les vecteurs* $(X_1, \dots, X_p)$ *et* $(Y_1, \cdots, Y_q)$ *sont indépendants ssi*

$$cov(X_i, Y_j) = 0$$

lorsque $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$.

3.3. Famille gaussienne

Une famille, ou un processus, $\{X_i, i \in I\}$ de variables aléatoires est dite gaussienne si toute combinaison linéaire finie de ces v.a. suit une loi normale.

La loi globale de cette famille (c'est à dire par définition, la loi de toute sous famille finie) est déterminée par les espérances $\mathbb{E}(X_i), i \in I$, et les covariances $\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j), i, j \in I$. Comme pour le thm. on a

Théorème 3.3.1. — *Soit* $\{X_i, i \in I\}$ *une famille gaussienne et* $I_1, I_2, \cdots, I_n$ *des parties disjointes de* I. *Alors les familles*

$$\{X_i, i \in I_1\}, \{X_i, i \in I_2\}, \cdots, \{X_i, i \in I_n\}$$

sont indépendantes ssi

$$cov(X_i, X_j) = 0$$

chaque fois que i *et* j *sont dans des ensembles* $I_1, \cdots, I_n$ *différents.*

Preuve: Il suffit de voir que $\{X_i, i \in I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_{n-1}\}$ est indépendant de $\{X_i, i \in I_n\}$...

3.4. Définition du mouvement brownien

Définition 3.4.1. — On appelle mouvement brownien un processus gaussien $B_t, t \in \mathbb{R}^+$, presque sûrement à trajectoires continues, tel que $B_0 = 0$ et $B_{t+s} - B_t$ est indépendant de $\sigma(B_u, u \leq t)$ de loi $N(0, s)$, pour tout $t, s \geq 0$.

Proposition 3.4.2. — *Un processus gaussien continu* $\{B_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ *est un mouvement brownien si et seulement si*

$$\mathbb{E}(B_t) = 0,\ \mathbb{E}(B_t B_s) = \min(s, t),\ \textit{pour tout}\ t, s \geq 0.$$

Preuve: Supposons d'abord que $B_t, t \in \mathbb{R}^+$, est un mouvement brownien. Alors B_t est centré donc $\mathbb{E}(B_t) = 0$. De plus, si $0 \leq s \leq t$, on sait que $B_t - B_s$ est indépendant de $\sigma(B_r, r \leq s)$, donc en particulier de B_s. Il en résulte que

$$\mathbb{E}(B_t B_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)B_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s)\mathbb{E}(B_s) + \mathbb{E}(B_s^2) = s.$$

Réciproquement, supposons les relations vraies et montrons qu'alors $B_t, t \in \mathbb{R}^+$, est un mouvement brownien. Il faut montrer d'abord que si $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendant de $\sigma(B_r, r \leq s)$. Puisque la famille des $B_t, t \geq 0$, est gaussienne, il suffit de vérifier que $\mathrm{Cov}(B_t - B_s, B_r) = 0$, si $r \leq s \leq t$. Or

$$\mathrm{Cov}(B_t - B_s, B_r) = \mathbb{E}(B_t B_r) - \mathbb{E}(B_s B_r) = \min(t, r) - \min(s, r) = 0.$$

Ensuite, il faut voir que, si $0 \leq s \leq t$, loi de $B_t - B_s$ ne dépend que de $t - s$: cette loi est gaussienne centrée et sa variance est

$$\mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = \mathbb{E}(B_t^2) + \mathbb{E}(B_s^2) - 2\mathbb{E}(B_t B_s) = t + s - 2s = t - s.$$

Enfin, B_t est bien centré de variance t.

Faisons une remarque importante sur la continuité. Dans l'énoncé précédent ne supposons pas a priori la continuité. La construction de Paul Lévy donnée plus bas construit un processus continu et le fait d'être uniformément continu sur les rationnels de $[0, T]$ pour un $T > 0$ fixé est mesurable. On voit donc que sous les autres hypothèses de la proposition, B_t est p.s. uniformément continu sur les rationnels de $[0, T]$, pour tout $T > 0$, donc admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}^+$ tout entier.

Corollaire 3.4.3. — *Soit $\{B_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ un mouvement brownien. Alors*

1. *pour tout $a > 0$, $\{B_{t+a} - B_a, t \in \mathbb{R}^+\}$,*
2. *(Scaling) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{\alpha B_{\alpha^{-2}t}, t \in \mathbb{R}^+\}$,*
3. *$\{tB_{1/t}, t \in \mathbb{R}^+\}$,*

sont des mouvements browniens.

Preuve: Les trois assertions se montrent de la même façon. Traitons par exemple la seconde. Posons $X_t = \alpha B_{\alpha^{-2}t}$. Tout d'abord, toute combinaison linéaire des v.a. X_t est une combinaison linéaire de certains B_s donc est gaussienne. Ceci montre que le processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est gaussien. Il est continu comme B_t. Il est clair que $\mathbb{E}(X_t) = 0$, et

$$\mathbb{E}(X_t X_s) = \alpha^2 \mathbb{E}(B_{\alpha^{-2}t} B_{\alpha^{-2}s}) = \alpha^2 \min(\frac{t}{\alpha^2}, \frac{s}{\alpha^2}) = \min(s, t).$$

Par la proposition précédente, $\{X_t, t \geq 0\}$ est un brownien. Dans le troisième cas, il faut aussi vérifier la continuité p.s. en 0. Puisque $tB_{1/t}, t > 0$ a la même loi que $\{B_t, t > 0\}$, $X_n = \sup_{0<s<1/n} |sB_{1/s}|$ et $Y_n = \sup_{0<s<1/n} |B_s|$ ont la même loi. Donc $\mathbb{P}(X_n \to 0) = \mathbb{P}(Y_n \to 0) = 1$ puisque B est continu en 0, ce qui montre la continuité p.s.

3.5. Filtrations et Brownien

Considérons un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En général, on note $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$. On pose

$$\mathcal{F}_{t^+} = \cap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}. \tag{2}$$

On dit que la filtration $\mathcal{F}_t$ est continue à droite si $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$. La filtration $\mathcal{F}_{t^+}$ est elle même continue à droite.

Définition 3.5.1. — Un processus B adapté à $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ est un $(\mathcal{F}_t)$–mouvement brownien si B est un mouvement brownien et pour tout $s \geq 0$, la famille $\{B_t - B_s, t \geq s\}$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.

Théorème 3.5.2. — *Un $(\mathcal{F}_t)$–mouvement brownien est aussi un $(\mathcal{F}_{t^+})$–mouvement brownien.*

Preuve: Pour tout $s < t < t_1 < \cdots < t_d$ le vecteur

$$(B_{t_1} - B_t, \cdots, B_{t_d} - B_t)$$

est indépendant de $\mathcal{F}_t$ donc de $\mathcal{F}_{s^+}$, qui est contenu dans $\mathcal{F}_t$. Par continuité

$$(B_{t_1} - B_s, \cdots, B_{t_d} - B_s)$$

est aussi indépendant de $\mathcal{F}_{s^+}$.

***Corollaire 3.5.3* (Loi 0–1 de Blumenthal)**. — *Soit B un mouvement brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$. Pour tout $A \in \mathcal{F}_{0^+}$, $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.*

Preuve: $\mathcal{F}_{0^+}$ est indépendant de B_t pour tout $t > 0$ donc de $\mathcal{F}_t$, donc de $\mathcal{F}_{0^+}$.

3.5.1. Quelques propriétés trajectorielles du brownien. — Le résultat technique suivant va nous permettre de décrire quelques propriétés non triviales du mouvement brownien.

Lemme 3.5.4. — *Si* $\{B_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ *est un mouvement brownien,*

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty, \ \liminf_{t\to 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty, \ p.s.$$

Preuve: La variable aléatoire $R = \limsup_{t\to 0^+} B_t/\sqrt{t}$ est $\mathcal{F}_{0^+}$–mesurable, où $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$, donc constante p.s.. Plus précisément, soit $R = +\infty$, soit il existe une constante α telle que $R \leq \alpha$, p.s. Ce dernier cas est impossible car il entraîne que $\mathbb{P}(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \geq \alpha + 1) \to 0$ quand $t = 1/n$ avec $n \to +\infty$ alors que $\mathbb{P}(\frac{B_t}{\sqrt{t}} \geq \alpha + 1) = \mathbb{P}(B_1 \geq \alpha + 1) \neq 0$. Le cas de la liminf s'obtient en appliquant la limsup à $(-B_t)$ qui est aussi un brownien.

Proposition 3.5.5. — *Pour presque tout* ω*, la trajectoire* $t \mapsto B_t(\omega)$*,*

(i) n'est nulle part dérivable ;

(ii) passe une infinité de fois par chaque point de $\mathbb{R}$*.*

Preuve: Le lemme assure que B n'est pas dérivable en 0, p.s., donc en tout point t fixé, sur un ensemble de probabilité 1, qui peut dépendre de t. Nous admettons qu'on peut choisir cet ensemble indépendant de t. Posons $W_t = tB_{1/t}$. Comme $W_t, t \geq 0$, est un mouvement brownien, on peut lui appliquer le lemme : presque sûrement,

$$\limsup_{t\to 0} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty.$$

Donc, en posant $s = t^{-1}$,

$$\limsup_{s\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} B_s = \limsup_{s\to\infty} \sqrt{s} W_{1/s} = +\infty,$$

donc $\sup B_t = +\infty$. De même $\inf B_t = -\infty$; les trajectoires étant continues elles doivent passer par tous les points, une infinité de fois, p.s.

La preuve précédente montre aussi que la trajectoire oscille énormément au moment où elle part de 0, puisqu'elle arrive à traverser une infinité de fois l'axe $\{x = 0\}$ avant chaque instant fixé.

3.6. Propriété de Markov forte du mouvement brownien

3.6.1. Temps d'arrêt. — Soit $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t,\, t \geq 0)$.

Définition 3.6.1. — Une application τ de Ω dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ est un temps d'arrêt si, pour tout $t \geq 0$, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. La tribu

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty\,,\ \text{pour tout } t \geq 0,\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

s'appelle la tribu des événements antérieurs à τ.

Proposition 3.6.2. — *(i) Soient σ et τ des temps d'arrêt. Alors $\sigma \vee \tau$ et $\sigma \wedge \tau$ sont des temps d'arrêt et $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$. De plus $\{\sigma \leq \tau\}$ et $\{\sigma = \tau\}$ appartiennent à $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$.*
(ii) Soient τ_n des temps d'arrêt. Alors $\sup_n \tau_n$ *est un temps d'arrêt.*
(iii) Supposons $(\mathcal{F}_t)$ continue à droite. Alors τ est un temps d'arrêt dès que $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ et un inf d'une suite de temps d'arrêt est un temps d'arrêt.

Preuve: (i) Soit $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$, alors $A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cup (A \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$ et $A \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$. Si $A \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$, $A \cap \{\tau \leq t\} = A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} \cap \{\tau \leq t\}$ est dans $\mathcal{F}_t$. Donc $A \in \mathcal{F}_\tau$ de même $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Pour montrer que $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$, il suffit de montrer que $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$. Mais l'on a $\{\sigma \leq \tau\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \wedge t \leq \tau \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$ et $\{\sigma \leq \tau\} \cap \{\sigma \leq t\} = \{\sigma \wedge t \leq \tau \wedge t\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. On procède de même pour $\{\sigma = \tau\}$.
(ii) On a $\{\sup_n \tau_n \leq t\} = \cap_n \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.
(iii) Si $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$, pour tout $t \geq 0$, $\{\tau \leq t\} = \cap_{\varepsilon > 0} \{\tau < t + \varepsilon\} \in \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$. Si τ_n est une suite de temps d'arrêt et $\tau = \inf \tau_n$, $\{\tau < t\} = \cup_n \{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t$, donc τ est un temps d'arrêt.

Soit (X_t) un processus adapté à $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ à valeurs dans un espace métrique (E, d), par exemple $\mathbb{R}^k$ avec la norme usuelle. La distance d définit une topologie et on munit E de la tribu borélienne. On associe à un sous ensemble A de E,

$$\tau_A(\omega) = \inf(t \geq 0,\ X_t(\omega) \in A), \tag{3}$$

τ_A est appelé le temps d'entrée dans A.

Proposition 3.6.3. — *Si A est fermé et X à trajectoires continues, τ_A est un temps d'arrêt.*

Preuve: Posons $d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a)$. Cette fonction est continue car, pour tout $x, y \in E$ et $a \in A$

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

donc $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ ce qui assure que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. On utilise alors que

$$\{\tau_A \leq t\} = \cap_n \cup_{s\leq t, s\in\mathbb{Q}^+} \{d(X_s, A) \leq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t.$$

(détail : si $\tau_A \leq t$, puisque A est fermé, il existe $s \leq t$ tel que $X_s \in A$. Par continuité de $x \mapsto d(x, A)$, on a alors $d(X_s, A) = 0$. Il existe donc $s_n \in \mathbb{Q}$ tel que $s_n \to s$ et $s_n < s$ pour lequel $d(X_{s_n}, A) \leq 1/n$. Donc l'inclusion de $\{\tau_A \leq t\}$ dans le terme de droite. Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $s_n \leq t$ tel que $d(X_{s_n}, A) \leq 1/n$, pour toute valeur d'adhérence s de la suite s_n on a $s \leq t$ et $d(X_s, A) = 0$ donc $X_s \in A$.) $\square$

Proposition 3.6.4. — *Si A est ouvert et X à trajectoires continues à droite, τ_A est un temps d'arrêt de $\mathcal{F}_{t^+}$.*

Preuve: En effet

$$\{\tau_A < t\} = \cup_{s<t, s\in\mathbb{Q}^+} \{X_s \in A\}$$

Proposition 3.6.5. — *Si X est un processus adapté progressivement mesurable et si τ est un temps d'arrêt, $X_\tau 1_{\tau<\infty}$ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.*

Preuve: Soit Γ un borélien de E. Il s'agit de montrer que pour tout $t \geq 0$, $\{X_\tau \in \Gamma\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Remarquons que

$$\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau \leq t\} = \{X_{\tau\wedge t} \in A\} \cap \{\tau \leq t\}.$$

Soit $\Omega_t = \{\tau \leq t\}$. L'application $\omega \mapsto (\tau(\omega), \omega)$ est mesurable de $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ dans $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$, l'application $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable de $(([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ dans E par le lemme. Donc l'application composée $\omega \mapsto X_{\tau(\omega)}(\omega)$ de $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ dans E est mesurable i.e. $\{\tau \leq t, X_\tau \in \Gamma\} \in \mathcal{F}_t$.

3.6.2. La propriété de Markov forte du brownien. —

Lemme 3.6.6. — *Soit τ un temps d'arrêt. Il existe une suite décroissante $\{\tau_n, n \in \mathbb{N}\}$ de temps d'arrêt convergeant vers τ telle que τ_n est à valeurs dans $\{k/2^n, k \in \mathbb{N}\} \cup \{+\infty\}$.*

Preuve: On peut prendre $\tau_n = \frac{[2^n\tau]+1}{2^n}$.

Théorème 3.6.7. — *Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un $(\mathcal{F}_t)$–mouvement brownien. Alors, pour tout temps d'arrêt τ, conditionnellement à $\{\tau < +\infty\}$, le processus $\{B_{t+\tau} - B_\tau, t \in \mathbb{R}^+\}$ est un brownien, indépendant de $\mathcal{F}_\tau$.*

Preuve: Il faut montrer que pour toute v.a. Z, $\mathcal{F}_\tau$-mesurable bornée et $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, continue bornée,

$$\mathbb{E}(Z1_{\{\tau<+\infty\}}F(B_{t_1+\tau} - B_\tau, B_{t_2+\tau} - B_\tau, \cdots, B_{t_d+\tau} - B_\tau)) =$$
$$= \mathbb{E}(Z1_{\{\tau<+\infty\}})\mathbb{E}(F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_d}))$$

On considère d'abord le cas où τ prend toutes ses valeurs dans l'ensemble dénombrable $\{s_k = k2^{-n}, k \in \mathbb{N}\}$. Alors, puisque $\{\tau < +\infty\}$ est la réunion dénombrable des ensembles disjoints $\{\tau = s_k\}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z1_{\{\tau<+\infty\}}F(B_{t_1+\tau} &- B_\tau, \cdots, B_{t_d+\tau} - B_\tau)) = \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(ZF(B_{t_1+\tau} - B_\tau, \cdots, B_{t_d+\tau} - B_\tau)1_{\{\tau=s_k\}}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(Z1_{\{\tau=s_k\}}F(B_{t_1+s_k} - B_{s_k}, \cdots, B_{t_d+s_k} - B_{s_k})) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(Z1_{\{\tau=s_k\}})\mathbb{E}(F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_d})) \\
&= \mathbb{E}(Z1_{\{\tau<+\infty\}})\mathbb{E}(F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_d}))
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $Z1_{\{\tau=s_k\}}$ est $\mathcal{F}_{s_k}$ mesurable et que B est un $\mathcal{F}_t$–brownien. Dans le cas général, on approche τ par une suite décroissante τ_n de temps d'arrêt à valeurs dénombrables, donnée par le lemme. Puisque $\mathcal{F}_\tau$ est contenu dans $\mathcal{F}_{\tau_n}$ on a encore

$$\mathbb{E}(Z1_{\{\tau<+\infty\}}F(B_{t_1+\tau_n} - B_{\tau_n}, \cdots, B_{t_d+\tau_n} - B_{\tau_n})) =$$
$$\mathbb{E}(Z1_{\{\tau<+\infty\}})\mathbb{E}(F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_d}))$$

et on fait tendre n vers l'infini pour conclure, en utilisant la continuité des trajectoires.

Proposition 3.6.8 **(Principe de réflexion)**. — *Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien. Pour $a > 0$, on pose $T_a = \inf\{t \geq 0; B_t = a\}$. Alors*

$$\mathbb{P}(T_a \leq t) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a).$$

La densité de T_a est $f(s) = a(2\pi s^3)^{-1/2}e^{-a^2/2s}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(s)$. En particulier $\mathbb{E}(T_a) = +\infty$.

Preuve: En utilisant la propriété de Markov forte du brownien, on sait que $W_t = B_{t+T_a} - B_{T_a}$ est un brownien indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$ donc en particulier de T_a. On peut donc écrire, puisque $B_{T_a} = a$ et en utilisant à l'avant dernière ligne l'important théorème 4.4.5 que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_t \geq a) &= \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t \geq a) \\
&= \mathbb{P}(T_a \leq t, (B_t - B_{T_a}) + B_{T_a} \geq a) \\
&= \mathbb{P}(T_a \leq t, W_{t-T_a} \geq 0) \\
&= \int \mathbf{1}_{\{s \leq t\}} \mathbb{P}(W_{t-s} \geq 0) d\mathbb{P}_{T_a}(s) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_a \leq t).
\end{aligned}$$

On en déduit, avec le changement de variable de x en s où $x = a\sqrt{t/s}$,

$$\mathbb{P}(T_a \leq t) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a) = \sqrt{2/\pi t}\int_a^\infty e^{-x^2/2t}\, dx = a\int_0^t (2\pi s^3)^{-1/2} e^{-a^2/2s}\, ds.$$

Donc la densité de T_a est $f(s) = a(2\pi s^3)^{-1/2}e^{-a^2/2s}$, ce qui permet de calculer l'espérance.

On voit donc que, bien que le brownien passe une infinité de fois par tout les points, il met un temps d'espérance infinie pour atteindre un point donné. La propriété suivante est assez étonnante!

Corollaire 3.6.9. — *La loi de $\sup_{0\leq s\leq t} B_s$ est la même que celle de $|B_t|$.*

Preuve: $\mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a) = \mathbb{P}(T_a \leq t) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a)$.

3.7. Existence et Simulation du Mouvement brownien

L'ordinateur simule une suite U_n de v.a. i.i.d. uniformes sur $[0,1]$. (Par simulation on veut dire qu'il "tente" de fabriquer ...) On commence par simuler des v.a. indépendantes $X_1, X_2, \cdots$ de loi gaussienne $N(0,1)$. Une façon de faire est de poser

$$X_n = \sqrt{-2\log U_{2n}}\sin(2\pi U_{2n+1}).$$

Un intervalle de temps $[0,T]$ étant donné, on choisit ensuite un pas de discrétisation $h = \frac{T}{n}$, où $n \in \mathbb{N}$. On simule la trajectoire brownienne aux instants $kT/n, k = 0, 1, \cdots, n-1$ en posant $B_0 = 0$ puis par récurrence,

$$B_{(k+1)T/n} = B_{kT/n} + \sqrt{\frac{T}{n}}X_{k+1}.$$

Il y a une autre méthode de simulation, qui permet de faire éventuellement un effet de loupe sur un morceau de trajectoire choisi. Expliquons le principe de cette construction en simulant le mouvement brownien sur $[0,1]$ par raffinements successifs : A l'étape n on construit le brownien au points $\frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq 2^n$. A l'étape 0 on pose $B_0 = 0$ et on choisit pour B_1 une v.a. de loi $N(0,1)$. Une fois l'étape n achevée, on procède ainsi : on se donne des v.a. $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots$ indépendantes entre elles et de ce qui précède, avec ε_n de loi $N(0, 2^{-n})$ et l'on pose, pour k entier,

$$B_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = \frac{B_{\frac{k}{2^n}} + B_{\frac{k+1}{2^n}}}{2} + \varepsilon_k.$$

On vérifie (cf. la construction de P. Lévy dans la section suivante) que l'on construit bien ainsi un mouvement brownien sur $[0,1]$ en passant à la limite sur l'approximation linéaire. Ceci montre en particulier son existence.

3.8. Construction de P. Lévy du mouvement brownien

Soit $\{Y_{k,n};\ 0 \leq k \leq 2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ des v.a. indépendantes, toutes de loi $N(0,1)$. On construit par récurrence sur n une suite $\{X_n(t),\ 0 \leq t \leq 1\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de processus tels que :

$$X_n(t) \text{ est linéaire sur chaque intervalle dyadique } [2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)],$$
$$X_0(0) = 0, \quad X_0(1) = Y_{1,0}, X_{n+1}(2^{-n}k) = X_n(2^{-n}k)$$
$$X_{n+1}(2^{-(n+1)}(2k+1)) = X_n(2^{-(n+1)}(2k+1)) + 2^{-(n+2)/2} Y_{2k+1,n+1}.$$

Pour n fixé, toute combinaison linéaire des $X_n(t), 0 \leq t \leq 1$ est une combinaison linéaire des $Y_{k,m}$ pour $m \leq n$ et est donc gaussienne. Montrons par récurrence sur n que les v.a. $X_n(2^{-n}(k+1)) - X_n(2^{-n}k), k = 0, 1, \cdots 2^n - 1$, sont indépendantes de loi $N(0, 2^{-n})$. Si c'est vrai au rang n, regardons

$$X_{n+1}(2^{-n-1}(2k+1)) - X_{n+1}(2^{-n-1}(2k)) =$$
$$\frac{X_n(2^{-n}(k+1)) - X_n(2^{-n}k)}{2} + 2^{-(n+2)/2} Y_{2k+1,n+1}$$

et

$$X_{n+1}(2^{-(n+1)}(2k+2)) - X_{n+1}(2^{-(n+1)}(2k+1)) =$$
$$\frac{X_n(2^{-n}(k+1)) - X_n(2^{-n}k)}{2} - 2^{-(n+2)/2} Y_{2k+1,n+1}$$

La seule chose non évidente est que ces deux v.a. sont indépendantes. Or leur covariance est

$$var(\frac{X_n(2^{-n}(k+1)) - X_n(2^{-n}k)}{2}) - var(2^{-(n+2)/2} Y_{2k+1,n+1}) = 0.$$

Vu la construction de X_{n+1} à partir de X_n,

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| = \sup_{0\leq k\leq 2^n-1} 2^{-(n+2)/2} Y_{2k+1,n+1}.$$

donc

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq 1} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \geq 2^{-n/4}) = \mathbb{P}(\sup_{0\leq k\leq 2^n-1} 2^{-(n+2)/2} |Y_{2k+1,n+1}| \geq 2^{-n/4})$$

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq k\leq 2^n-1} |Y_{2k+1,n+1}| \geq 2^{(n+4)/4}) \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{P}(|Y_{2k+1,n+1}| \geq 2^{(n+4)/4})$$
$$= 2^n \mathbb{P}(|Y_{0,0}| \geq 2^{(n+4)/4})$$

Utilisons la majoration, pour $a > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} \frac{t}{a} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} e^{-a^2/2}$$

pour voir que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq 1} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \geq 2^{-n/4}) < +\infty$$

On en déduit, par Borel Cantelli, que, p.s., pour n assez grand,

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \leq 2^{-n/4}$$

donc que X_n converge uniformément sur $[0,1]$. La limite X_t est donc continue, c'est un processus gaussien centré continu dont les covariances coïncident avec celles du brownien sur les dyadiques, donc partout.

3.9. Appendice 1

Donnons une excellente approximation de la fonction de repartition de la loi normale sous la forme d'un programme C.

```
// standard normal density function
double ndf(double t)
{
return 0.398942280401433*exp(-t*t/2);
}

// standard normal cumulative distribution function
double nc(double x)
{
double result;
```

```
if (x<-7.)
        result = ndf(x)/sqrt(1.+x*x);
else if (x>7.)
        result = 1. - nc(-x);
else
{
result = 0.2316419;
static double a[5] = {0.31938153,-0.356563782,1.781477937,
                -1.821255978,1.330274429};
result=1./(1+result*fabs(x));
result=1-ndf(x)*(result*(a[0]+result*
               (a[1]+result*(a[2]+result*(a[3]+result*a[4])))));
if (x<=0.) result=1.-result;
}
return result;
}
```

CHAPITRE 4

MARTINGALES

4.1. Martingales, définition

Pour $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$ on considère $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.

Définition 4.1.1. — Une famille de variables aléatoires réelles $M_t, t \in T$, est une martingale si $M_t \in L^1$, (M_t) est adapté et

$$\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s, \text{ pour tout } 0 \leq s \leq t.$$

Une famille $M_t, t \in T$, est une sous-martingale si $M_t \in L^1$, (M_t) est adapté et

$$\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s, \text{ pour tout } 0 \leq s \leq t.$$

Si M est une (ss)-martingale sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$, ça l'est aussi pour la filtration naturelle $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(M_s, s \leq t)$.

Exemple. Soit $X \in L^1$. On pose $X_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$. On a, pour $s < t$,

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_s) = X_s$$

et X_t est une martingale.

Proposition 4.1.2. — *Soit B un $(\mathcal{F}_t)$–mouvement brownien. Alors,*

(i) $B_t, t \in \mathbb{R}^+$;

(ii) $B_t^2 - t, t \in \mathbb{R}^+$;

(iii) pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}), t \in \mathbb{R}^+$;

sont des $(\mathcal{F}_t)$-martingales.

***Proposition 4.1.3* (Inégalité de Jensen).** — *Soit M une martingale (resp. sous martingale) et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp. convexe croissante). Si $\phi(M_t)$ est intégrable pour tout $t \geq 0$, c'est une sous martingale.*

Preuve: Une fonction convexe est l'enveloppe supérieure d'une famille de droites : il existe une famille F de fonctions affines (du type $x \mapsto ax+b$) telles que

$$\phi(x) = \sup_{f \in F} f(x)$$

avec de plus chaque f croissante si ϕ est croissante (c'est évident si $\varphi(x) = x^+$, ou $|x|$ ou x^2, qui sont les cas principaux où on appliquera cette inégalité dans la suite du cours). Pour tout $f \in F$

$$\mathbb{E}(\phi(M_t)|\mathcal{F}_s) \geq \mathbb{E}(f(M_t)|\mathcal{F}_s) = f(\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s)) \geq f(M_s)$$

donc $\mathbb{E}(\phi(M_t)|\mathcal{F}_s) \geq \sup_{f \in F} f(M_s) = \phi(M_s)$. □

Exemple : Si M est une martingale $|M|$ est une sous martingale et si X est une sous martingale, alors X^+ est une sous martingale.

Proposition 4.1.4. — *Soit* $\{M_t^{(n)}, t \in T\}, n \in \mathbb{N}$, *une suite de* $(\mathcal{F}_t)$*– martingales. Si pour tout* t, $M_t^{(n)}$ *tend vers* M_t *dans* L^1, *ou afortiori dans* L^2, *alors* $M_t, t \in T$, *est une martingale.*

Preuve: On utilise que

$$\mathbb{E}(|\mathbb{E}(M_t^{(n)}|\mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s)|) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|M_t^{(n)} - M_t||\mathcal{F}_s)) = ||M_t^{(n)} - M_t||_1.$$

4.2. Martingales à temps discret

Nous allons exposer deux résultats fondamentaux de Doob, indispensables pour nous. Etant donné un processus M et un temps d'arrêt τ on note M^τ le processus arrété à l'instant τ, défini par :

$$M_t^\tau = M_{\tau \wedge t}.$$

***Théorème 4.2.1* (d'arrêt)**. — *Soit* $\{M_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une (sous) martingale et* τ *un temps d'arrêt. Alors* M^τ *est encore une (sous)-martingale.*

Preuve: Il suffit d'écrire

$$M_{n+1}^\tau - M_n^\tau = 1_{\{\tau > n\}}(M_{n+1} - M_n). \qquad \square$$

Le lemme suivant n'est utile que pour les temps d'arrêt à valeurs dénombrables, c'est à dire rarement dans le cas "continu" car il n'a d'intérêt que si $\mathbb{P}(\{\sigma = r\}) > 0$.

Lemme 4.2.2. — *Si σ est un temps d'arrêt et r un réel fixé, pour toute v.a. $X \geq 0$, p.s.,*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\sigma) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_r), \text{ sur } \{\sigma = r\}$$

Preuve: Il nous faut montrer que

$$1_{\{\sigma=r\}}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\sigma) = 1_{\{\sigma=r\}}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_r),$$

soit encore puisque $\{\sigma = r\} \in \mathcal{F}_\sigma$ que

$$\mathbb{E}(1_{\{\sigma=r\}}X|\mathcal{F}_\sigma) = 1_{\{\sigma=r\}}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_r).$$

On utilise la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle 4.4.1 : la v.a. $Z = 1_{\{\sigma=r\}}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_r)$ est $\mathcal{F}_\sigma$-mesurable et pour toute v.a. U positive, $\mathcal{F}_\sigma$-mesurable, puisque $U1_{\{\sigma=r\}}$ est $\mathcal{F}_r$-mesurable,

$$\mathbb{E}(UZ) = \mathbb{E}(U1_{\{\sigma=r\}}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_r)) = \mathbb{E}(U1_{\{\sigma=r\}}X)$$

donc $Z = \mathbb{E}(1_{\{\sigma=r\}}X|\mathcal{F}_\sigma)$.

Corollaire 4.2.3. — *Soient $\{M_n, n \in \mathbb{N}\}$ une (sous) martingale, σ et τ deux temps d'arrêt à valeurs dans $\bar{\mathbb{N}}$. On suppose que τ est borné. Alors*

$$\mathbb{E}(M_\tau|\,\mathcal{F}_\sigma) \geq M_{\tau\wedge\sigma}$$

avec égalité dans le cas d'une martingale.

Preuve: Si τ est borné par la constante $r > 0$, on peut écrire que, sur $\{\sigma = n\}$,

$$\mathbb{E}(M_\tau|\,\mathcal{F}_\sigma) = \mathbb{E}(M_r^\tau|\,\mathcal{F}_n) \geq M_{r\wedge n}^\tau = M_{\tau\wedge\sigma}.$$

Théorème 4.2.4. — *Soit $M_n, n \in \mathbb{N}$, une sous-martingale positive. Pour tout $a > 0$,*

$$\mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq n} M_k \geq a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(M_n 1_{\{\max_{0\leq k\leq n} M_k \geq a\}}) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(M_n).$$

De plus

$$\mathbb{E}(\max_{0\leq k\leq n} M_k^2) \leq 4\mathbb{E}(M_n^2).$$

Preuve: L'inégalité de droite est évidente car $M_n \geq 0$. Pour celle de gauche, posons $\sigma = \inf\{k \geq 0; M_k \geq a\}$. On a $\{\sigma \leq n\} = \{\max_{0\leq k\leq n} M_k \geq a\}$ donc

$$\mathbb{E}(M_n 1_{\{\max_{0\leq k\leq n} M_k \geq a\}}) = \mathbb{E}(M_n 1_{\{\sigma\leq n\}}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_\sigma)1_{\{\sigma\leq n\}})$$
$$\geq \mathbb{E}(M_{n\wedge\sigma}1_{\{\sigma\leq n\}}) \geq a\mathbb{P}(\sigma \leq n) = a\mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq n} M_k \geq a)$$

en appliquant le corollaire. Ensuite

$$\int_0^\infty a\mathbb{P}(\max_{0\le k\le n} M_k \ge a)\,da \le \int_0^\infty \mathbb{E}(M_n;\max_{0\le k\le n} M_k \ge a)\,da.$$

Avec Fubini ceci s'écrit,

$$\mathbb{E}(\int_0^{\max_{0\le k\le n} M_k} a\,da) \le \mathbb{E}(M_n\int_0^{\max_{0\le k\le n} M_k} da)$$

donc

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}((\max_{0\le k\le n} M_k)^2) \le \mathbb{E}(M_n \max_{0\le k\le n} M_k).$$

En appliquant Cauchy Schwarz on obtient

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}((\max_{0\le k\le n} M_k)^2) \le \mathbb{E}(M_n^2)^{1/2}\mathbb{E}((\max_{0\le k\le n} M_k)^2)^{1/2},$$

$\mathbb{E}((\max_{0\le k\le n} M_k)^2)$ est fini car majoré par $\mathbb{E}(\sum_{k=0}^n M_k^2)$ on peut donc simplifier par $\mathbb{E}((\max_{0\le k\le n} M_k)^2)^{1/2}$ dans l'inégalité précédente, ce qui donne le résultat. □

Dans la preuve précédente, en multipliant par a^{p-2} et en appliquant l'inégalité de Hölder (c.f. **??**) on obtient pour $p > 1$,

$$||\max_{0\le k\le n} M_k||_p \le q||M_n||_p$$

où $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

4.3. Martingale continue à droite

Si $M_t, t \in \mathbb{R}^+$, est un processus à trajectoires continues à droite, on a

$$\sup_{0\le t\le T} M_t = \lim_{n\to+\infty} \sup_{0\le k\le 2^n} M_{\frac{kT}{2^n}}.$$

En appliquant le Théorème 4.2.4 à la sous martingale $X_k = M_{\frac{kT}{2^n}}$ et l'égalité

$$\{\sup_{0\le t\le T} M_t > a\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{\sup_{0\le k\le 2^n} M_{\frac{kT}{2^n}} > a\}$$

on obtient, en passant par $\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T} M_t > a)$,

Théorème 4.3.1 **(Inégalités de Doob).** — *Soit $M_t, t \in \mathbb{R}^+$, une sous-martingale continue à droite positive. Pour tout $a > 0$,*

$$\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T} M_t \ge a) \le \frac{1}{a}\mathbb{E}(M_T 1_{\{\sup_{0\le t\le T} M_t\ge a\}}) \le \frac{1}{a}\mathbb{E}(M_T)$$

De plus

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T} M_t^2) \le 4\mathbb{E}(M_T^2).$$

Puisque la valeur absolue d'une martingale est une sous martingale positive, on en déduit le corollaire absolument fondamental pour la suite :

Corollaire 4.3.2. — *Si M est une martingale continue à droite,*

$$\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}|M_t|\ge a)\le\frac{\mathbb{E}(|M_T|)}{a}$$

et

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}M_t^2)\le 4\mathbb{E}(M_T^2).$$

Déduisons un convergence de théorème de martingales (il en existe d'autres, par exemple pour les martingales positives).

Théorème 4.3.3. — *Une martingale continue à droite (M_t) telle que*

$$\sup_{t\ge0}\mathbb{E}(M_t^2)<+\infty$$

converge p.s. et dans L^2 lorsque $t\to+\infty$.

Preuve: Puisque M_t^2 est une sous martingale, $\mathbb{E}(M_t^2)$ est une fonction croissante. Par hypothèse, elle est bornée. Donc elle converge lorsque $t\to+\infty$. On en déduit que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe N tel que, si $s,t\ge N$

$$\mathbb{E}((M_t-M_s)^2)=\mathbb{E}(M_t^2)-\mathbb{E}(M_s^2)<\varepsilon$$

lorsque $s,t\to+\infty$. La suite M_n est donc de Cauchy dans L^2, elle converge vers une v.a. M_∞. En faisant tendre $t\to+\infty$ suivant les entiers on voit, par Fatou, que

$$\mathbb{E}((M_\infty-M_s)^2)<\varepsilon$$

donc $M_s\to M_\infty$ dans L^2. Si on applique l'inégalité de Doob à la martingale $N_t=M_{s+t}-M_s$ on obtient, pour $s>N$,

$$\mathbb{E}(\sup_{t\le T}(M_{t+s}-M_s)^2)\le 4\mathbb{E}((M_{T+s}-M_s)^2)\le 4\varepsilon$$

pour tout $T\ge0$, donc

$$\mathbb{E}(\sup_{t\ge0}(M_{t+s}-M_s)^2)\le 4\varepsilon.$$

Il en résulte en écrivant que

$$(M_{t+s}-M_\infty)^2\le 2(M_{t+s}-M_s)^2+2(M_s-M_\infty)^2$$

que

$$\mathbb{E}(\sup_{t\ge0}(M_{t+s}-M_\infty)^2)\le 16\varepsilon.$$

Il existe donc une sous suite n_i telle que, p.s., $\sup_{t\geq 0}(M_{t+n_i} - M_\infty) \to 0$, ce qui entraîne que $M_t \to M_\infty$, p.s. □

Pour montrer le théorème d'arrêt, nous allons utiliser :

Lemme 4.3.4. — *Si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la famille $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{F}),\ \mathcal{F}$ sous tribu de $\mathcal{A}\}$ est uniformément intégrable.*

Preuve: Remarquons d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, si $\mathbb{P}(A) < \alpha$ alors $\mathbb{E}(|X|1_A) \leq \varepsilon$. En effet, par Lebesgue dominé, $\mathbb{E}(|X|1_{\{|X|\geq M\}})$ tend vers 0 lorsque $M \to +\infty$. On choisit M pour lequel $\mathbb{E}(|X|1_{\{|X|\geq M\}})) < \varepsilon/2$ et ensuite $\alpha > 0$ tel que $\alpha M < \varepsilon/2$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X|1_A) &\leq \mathbb{E}(|X|1_A 1_{\{|X|\geq M\}}) + \mathbb{E}(|X|1_A 1_{\{|X|\leq M\}})\\ &\leq \mathbb{E}(|X|1_{\{|X|\geq M\}}) + M\mathbb{P}(A) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Soit $R = \alpha^{-1}\mathbb{E}|X|$. On a, pour $a > R$, $\mathbb{P}(|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})| > a) \leq a^{-1}\mathbb{E}|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})| \leq a^{-1}\mathbb{E}|X| < \alpha$ et

$$\int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|>a\}} |\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\, d\mathbb{P} \leq \int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|>a\}} \mathbb{E}(|X||\mathcal{F})\, d\mathbb{P} = \int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|>a\}} |X|\, d\mathbb{P} < \varepsilon.$$

***Théorème 4.3.5* (d'arrêt)**. — *Soient $(X_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$ une sous-martingale continue à droite, et σ et τ deux temps d'arrêt avec τ borné. Alors $X_\tau \in L^1$ et $X_{\sigma\wedge\tau} \leq \mathbb{E}(X_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma)$, avec égalité si X est une martingale.*

Preuve: (a) La suite de temps d'arrêt $\tau_n = 2^{-n}([2^n\tau] + 1)$ décroit vers τ et X_{τ_n} tend vers X_τ, quand $n \to +\infty$. Si τ est bornée par K, τ_n est borné par $K + 1$. D'après le corollaire 4.2.3, $X^+_{\frac{k}{2^n}}$ étant une sous-martingale, $X^+_{\tau_n} \leq \mathbb{E}(X^+_{K+1} \,|\, \mathcal{F}_{\tau_n})$. On a alors

$$\mathbb{E}|X_{\tau_n}| = 2\mathbb{E}(X^+_{\tau_n}) - \mathbb{E}(X_{\tau_n}) \leq 2\mathbb{E}(X^+_{K+1}) - \mathbb{E}(X_0)$$

d'où, par le lemme de Fatou, $\mathbb{E}|X_\tau| \leq \liminf_n \mathbb{E}|X_{\tau_n}| < +\infty$ donc $X_\tau \in L^1$.

(b) Soit $\sigma_n = 2^{-n}([2^n\sigma] + 1)$. On suppose d'abord que $X_t \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Soit $A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$. On a alors, en appliquant le corollaire 4.2.3 à la sous-martingale $X_{\frac{k}{2^n}}, k \in \mathbb{N}$,

$$X_{\sigma_n\wedge\tau_n} \leq \mathbb{E}(X_{\tau_n}|\mathcal{F}_{\sigma_n})$$

donc

$$\mathbb{E}(1_A X_{\sigma_n\wedge\tau_n}) \leq \mathbb{E}(1_A X_{\tau_n}).$$

Puisque $X_t \geq 0$, $|X_{\sigma_n \wedge \tau_n}| \leq \mathbb{E}(X_{\tau_n}|\mathcal{F}_{\sigma_n})$ et le lemme montre que les suites $X_{\sigma_n \wedge \tau_n}$ et X_{τ_n} sont uniformément intégrables. Donc $X_{\sigma_n \wedge \tau_n}$ et X_{τ_n} convergent vers $X_{\sigma \wedge \tau}$ et X_τ dans L^1 et $\mathbb{E}(1_A X_{\sigma \wedge \tau}) \leq \mathbb{E}(1_A X_\tau)$.

(c) On revient au cas général. Pour tout $a > 0$, $a + X_t \vee (-a)$ est une sous-martingale positive donc, pour tout $A \in \mathcal{F}_\sigma$, $\mathbb{E}(1_A(X_{\sigma \wedge \tau} \vee (-a))) \leq \mathbb{E}(1_A(X_\tau \vee (-a)))$. On conclut facilement puisque, lorsque $a \to +\infty$, $X_\tau \vee (-a) \to X_\tau$ et $X_{\sigma \wedge \tau} \vee (-a) \to X_\sigma$ dans L^1 puisque $|X_\tau \vee (-a)| \leq |X_\tau$.□

Corollaire 4.3.6. — *Soient* $(M_t,\, t \in \mathbb{R}^+)$ *une sous-martingale continue à droite, telle que* $\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t < +\infty} |M_t|) < +\infty$. *Pour tous temps d'arrêt* σ *et* τ

$$\mathbb{E}(M_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \geq M_{\tau \wedge \sigma},$$

avec égalité si X *est une martingale.*

Preuve: En utilisant le théoréme précédent aux temps d'arrêts bornés $\tau \wedge t$ et $\sigma \wedge t$, pour tout $A \in \mathcal{F}_\sigma$

$$\mathbb{E}(1_A 1_{\{\sigma \leq t\}} M_{\tau \wedge t}) = \mathbb{E}(1_A 1_{\{\sigma \leq t\}} M_{\sigma \wedge \tau \wedge t})$$

car $A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge t}$. Il suffit alors de faire tendre t vers l'infini en appliquant le théorème de convergence dominée.

Corollaire 4.3.7. — *Soient* $(X_t,\, t \in \mathbb{R}^+)$ *une (sous) martingale continue à droite et* τ *un temps d'arrêt. Alors* $X_t^\tau := X_{t \wedge \tau}$ *est une (sous) martingale.*

Preuve: Vu le corollaire précédent, on a, pour $s < t$, $\mathbb{E}(X_{t \wedge \tau} \,|\, \mathcal{F}_s) \geq X_{t \wedge \tau \wedge s} = X_{\tau \wedge s}$ p.s. □

Corollaire 4.3.8. — *Soit* $(X_t,\, t \in \mathbb{R}^+)$ *un processus intégrable continu à droite. Alors* X_t *est une martingale si et seulement si, pour tout temps d'arrêt borné* τ *on a* $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$.

Preuve: La nécessité résulte du théorème 4.3.5. Montrons que la condition est suffisante. Soient $s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$. $\tau = s 1_A + t 1_{A^c}$ est un temps d'arrêt borné et l'on $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(1_A X_s) + \mathbb{E}(1_{A^c} X_t)$. Mais $\tau = t$ est aussi un temps d'arrêt borné d'où $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(1_A X_t) + \mathbb{E}(1_{A^c} X_t)$. On en déduit $\mathbb{E}(1_A X_s) = \mathbb{E}(1_A X_t)$ i.e. X_t est une martingale. □

4.4. Formulaire sur l'espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ d'une variable aléatoire X positive (ou intégrable) n'est définie que presque surement, on ommetra d'écrire "p.s." dans une égalité où elle apparait.

Théorème 4.4.1 **(Propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle)**
Soit X une v.a.r. positive ou intégrable. L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ est la seule (classe de) v.a. Z ayant les deux propriétés suivantes :
(i) Z est $\mathcal{F}$-mesurable ;
(ii) pour toute v.a.r. U, $\mathcal{F}$-mesurable bornée positive,

$$\mathbb{E}(ZU) = \mathbb{E}(XU).$$

On utilisera très souvent les inégalités suivantes qui montrent que l'application $T : \mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^p$ donnée par $T(X) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ est continue pour $p = 1, 2, \infty$.

Proposition 4.4.2 **(Continuité de l'espérance conditionelle)**

$$\|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\|_{L^1} \leq \|X\|_{L^1}; \quad \|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\|_{L^2} \leq \|X\|_{L^2};$$

Les propriétés suivantes sont faciles à démontrer et essentielles :

Proposition 4.4.3. — *Si les expressions ont un sens :*

1. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$;
2. $|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{F})$.
3. *Si X est $\mathcal{F}$-mesurable,* $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$;
4. *Si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$,* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{G})$;
5. $\mathbb{E}(1|\mathcal{F}) = 1$;
6. $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$;
7. *Si $X \leq Y$,* $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$;
8. $|\mathbb{E}(XY|\mathcal{F})|^2 \leq \mathbb{E}(X^2|\mathcal{F})\mathbb{E}(Y^2|\mathcal{F})$.

On a l'analogue des théorèmes de convergence de Beppo Levi, de Fatou, de Lebesgue :

Proposition 4.4.4. — *Soit (X_n) une suite de v.a.*

(Beppo Levi conditionnel) Si $0 \leq X_n \uparrow X$, $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$, p.s.

(Fatou conditionnel) Si $0 \leq X_n$, $\mathbb{E}(\liminf X_n|\mathcal{F}) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F})$,

(Lebesgue conditionnel) Si $|X_n| \leq V$ où $V \in L^1$ et si $X_n \to X$, $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$, p.s. et dans L^1.

Preuve: On commence par montrer Beppo Levi : si $0 \leq X_n \uparrow X$ la suite $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F})$ est croissante donc a une limite, que nous notons Z. Comme limite de fonctions $\mathcal{F}$-mesurables Z est $\mathcal{F}$-mesurable. Et pour toute v.a. U positive et $\mathcal{F}$-mesurable, par le théorème de Beppo Levi classique, appliqué deux fois,

$$\mathbb{E}(UZ) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(U\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F})) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(UX_n) = \mathbb{E}(UX).$$

Donc $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ par la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle (Thm 4.4.1). Les autres énoncés s'en déduisent comme dans le cas non conditionnel et par le fait que

$$||\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})||_1 \leq ||X_n - X||_1$$

pour la convergence dans L^1. $\square$

Très souvent les calculs explicites d'espérance conditionnelle utilisent le théorème suivant :

Théorème 4.4.5. — *Soit (T, X) une variable aléatoire à valeurs dans un espace produit $E \times F$ et $h : E \times F \to \mathbb{R}$ mesurable, positive ou bornée. On suppose que T est $\mathcal{B}$-mesurable et que X est indépendante de $\mathcal{B}$. Alors,*

$$\mathbb{E}(h(T, X)|\mathcal{B}) = \phi(T) \quad \text{où} \quad \phi(t) = \mathbb{E}(h(t, X)).$$

On peut encore écrire cette égalité comme

$$\mathbb{E}(h(T, X)|\mathcal{B})(\omega) = \int_\Omega h(T(\omega), X(\omega'))\, d\mathbb{P}(\omega').$$

Preuve: On utilise la caractérisation de l'espérance conditionnelle pour montrer que $\mathbb{E}(h(T, X)|\mathcal{B})$ est bien la variable aléatoire $\phi(T)$. D'abord, il résulte du théorème de Fubini que l'application $t \mapsto \mathbb{E}(h(t, X))$ est mesurable. Il en résulte que $\phi(T)$ est $\sigma(T)$ mesurable, donc $\mathcal{B}$-mesurable. Ensuite, pour toute v.a. Z $\mathcal{B}$-mesurable, bornée et positive, p.s.,

$$\mathbb{E}(h(T, X)Z)(\omega) = \int\int h(T(\omega), X(\omega'))Z(\omega)d\mathbb{P}(\omega)d\mathbb{P}(\omega')$$

d'après le corollaire 2.11.4. Ceci est égal, par Fubini, à

$$\int \big(\int h(T(\omega), X(\omega'))d\mathbb{P}(\omega')\big)Z(\omega)d\mathbb{P}(\omega') = \int \phi(T(\omega))Z(\omega)d\mathbb{P}(\omega') =$$
$$= \mathbb{E}(\phi(T)Z)(\omega).$$

CHAPITRE 5

CROCHET DE MARTINGALES

Afin d'introduire le crochet de martingales, nous allons débuter la construction de l'intégrale stochastique. La construction est naturelle mais il y a pas mal d'inégalités à contrôler ! Après ce début, et à l'aide du crochet, on pourra dans le chapitre suivant construire l'intégrale stochastique en toute généralité.

5.1. Cas discret

Soit $(M_n, n \in \mathbb{N})$ une $(\mathcal{F}_n)$–martingale sur $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$. Si H est un processus adapté on pose $S(H,M)_0 = 0$ et

$$S(H,M)_n = \sum_{k=1}^{n} H_{k-1}(M_k - M_{k-1}).$$

Le lemme simple suivant est la clé des calculs que nous ferons.

***Lemme 5.1.1* (Lemme d'orthogonalité).** — *Si $M_n, n \in \mathbb{N}$, est une martingale dans L^2,*

$$\mathbb{E}(M_n^2) - \mathbb{E}(M_0^2) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2).$$

Montrons maintenant un résultat technique.

Proposition 5.1.2. — *Soit M une martingale et H un processus adapté borné. Alors $S(H,M)$ est une martingale et si M est bornée il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de la borne de M, telle que, pour tout n,*

$$||S(H,M)_n||_2^2 \leq c||\sup_{k\leq n} H_k^2||_2.$$

Preuve: Puisque H est borné, $S(H,M)_n$ est intégrable pour tout n. C'est une martingale car

$$\mathbb{E}(S(H,M)_{n+1} - S(H,M)_n|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(H_n(M_{n+1} - M_n)|\mathcal{F}_n)$$

$$= H_n[\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) - M_n] = 0.$$

Supposons maintenant que $|M|$ est bornée par K. Posons $A_0 = 0$ et

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2 \, |\mathcal{F}_{k-1}).$$

On vérifie facilement que $M_n^2 - A_n$ est une martingale. Nous allons chercher à majorer $\mathbb{E}(A_n^2)$. En appliquant le lemme d'orthogonalité,

$$\mathbb{E}(A_n) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n}(M_k - M_{k-1})^2) = \mathbb{E}(M_n^2 - M_0^2) \leq K^2.$$

Par ailleurs, puisque

$$A_k - A_{k-1} = \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2 \, |\mathcal{F}_{k-1}),$$

on a $0 \leq A_k - A_{k-1} \leq 4K^2$, donc

$$(A_k - A_{k-1})^2 \leq 4K^2(A_k - A_{k-1})$$

et

$$\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})^2) \leq 4K^2\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})) = 4K^2\mathbb{E}(A_n) \leq 4K^4.$$

En appliquant le lemme d'orthogonalité à la martingale $M_n^2 - A_n$ et en utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, on obtient que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(M_n^2 - A_n)^2] - \mathbb{E}[M_0^4] &= \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n}(M_k^2 - A_k - M_{k-1}^2 + A_{k-1})^2) \\
&\leq 2\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n}(M_k^2 - M_{k-1}^2)^2) + 2\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})^2)
\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité

$$(M_k^2 - M_{k-1}^2)^2 = (M_k + M_{k-1})^2(M_k - M_{k-1})^2 \leq 4K^2(M_k - M_{k-1})^2;$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(M_n^2 - A_n)^2] &\leq 8K^2\mathbb{E}(\sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})^2) + 8K^4 + \mathbb{E}[M_0^4] \\
&\leq 8K^2\mathbb{E}(M_n^2) + 8K^4 \\
&\leq 8K^4 + 9K^4 = 17K^4,
\end{aligned}$$

donc (écrivant $A_n = M_n^2 + (A_n - M_n^2)$),

$$\mathbb{E}(A_n^2) \leq 2\mathbb{E}(M_n^4) + 2\mathbb{E}(M_n^2 - A_n)^2 \leq 36K^4.$$

On a alors, en appliquant cette fois le lemme à la martingale $S(H, M)$

$$\mathbb{E}[S(H,M)_n^2] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(H_{k-1}^2(M_k - M_{k-1})^2)$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(H_{k-1}^2 \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2 \,|\mathcal{F}_{k-1})) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(H_{k-1}^2(A_k - A_{k-1}))$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\sup_r |H_r|^2 (A_k - A_{k-1})) = \mathbb{E}(\sup_r |H_r|^2 A_n)$$

$$\leq ||A_n||_2 || \sup_r |H_r|^2||_2 \leq 6K^2 || \sup_r |H_r|^2||_2$$

où l'on a utilsé Cauchy Schwarz à la dernière ligne. On peut donc prendre $c = 6K^2$.

5.2. Premiers pas, à temps continu

On considère une martingale continue $M_t, t \in \mathbb{R}^+$, sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$. On appelle processus (adapté) élémentaire un processus H s'écrivant

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i} 1_{[t_i, t_{i+1}[}(t)$$

où $0 \leq t_0 < t_1 \cdots < t_n$ et où H_{t_i} est une v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$–mesurable bornée. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces processus élémentaires.

Proposition 5.2.1. — *Pour $H \in \mathcal{E}$ on pose*

$$\int_0^t H_s \, dM_s = (H \cdot M)_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t}).$$

Alors

(i) $H \cdot M$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue, nulle en 0.

(ii) Si M est bornée, il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que de la borne de M, telle que, pour tout $T > 0$,

$$|| \sup_{0\le t\le T} (H\cdot M)_t||_2^2 \le C|| \sup_{t\le T} H_t^2||_2$$

Preuve: Puisque M est une martingale, $\mathbb{E}(M_r|\mathcal{F}_s) = M_{r\wedge s}$ pour tous $r, s, \ge 0$. On en déduit que si $0 \le t_i \le s \le t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H_{t_i}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})|\mathcal{F}_s) &= H_{t_i}\mathbb{E}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})|\mathcal{F}_s) \\ &= H_{t_i}(M_{t_{i+1}\wedge t\wedge s} - M_{t_i\wedge t\wedge s}) \\ &= H_{t_i}(M_{t_{i+1}\wedge s} - M_{t_i\wedge s}).\end{aligned}$$

En utilisant cette relation pour $s = t_i$, on voit maintenant que si $0 \le r \le t_i \le t$,

$$\mathbb{E}(H_{t_i}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})|\mathcal{F}_r) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_{t_i}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})|\mathcal{F}_{t_i})|\mathcal{F}_r) = 0$$

donc encore

$$\mathbb{E}(H_{t_i}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})|\mathcal{F}_r) = H_{t_i}(M_{t_{i+1}\wedge r} - M_{t_i\wedge r}).$$

Lorsque $t \le t_i$, ceci est trivialement vrai. Donc $H \cdot M$ est une martingale.

Montrons (ii). On regarde la martingale à temps discret $N_k = M_{t_k\wedge T}$ et le processus à temps discret $G_k = H_{t_k}$. Alors

$$(H \cdot M)_T = S(G, N)_n$$

donc par la Proposition 5.1.2, il existe $c > 0$ tel que

$$||(H \cdot M)_T||_2^2 \le c|| \sup_{t\le T} H_t^2||_2.$$

On applique alors l'inégalité de Doob à la martingale $H \cdot M$.

5.3. Crochet comme variation quadratique

Théorème 5.3.1. — *Soit M une martingale continue bornée et $0 = t_0^n \le t_1^n \le \cdots \le t_{p_n}^n = T$ une suite de subdivisions de $[0, T]$ dont le pas tend vers 0. Alors, la limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} (M_{t_{i+1}^n\wedge t} - M_{t_i^n\wedge t})^2 \tag{4}$$

existe dans L^2 et définit, pour $t \le T$, un processus croissant continu adapté noté $\langle M, M\rangle_t$. Il existe une sous suite qui, presque surement, converge unifomément en $t \in [0, T]$. De plus

$$M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$$

est une martingale.

Preuve: L'idée de la preuve est d'anticiper la formule

$$M_t^2 - M_0^2 - \langle M, M\rangle_t = 2\int_0^t M_s dM_s$$

(que l'on ne connait pas encore) en écrivant que

$$\begin{aligned} M_t^2 - M_0^2 - \sum_{i=0}^{p_{n-1}} (M_{t_{i+1}^n\wedge t} - M_{t_i^n\wedge t})^2 &= 2\sum_{i=0}^{p_{n-1}} M_{t_i^n\wedge t}(M_{t_{i+1}^n\wedge t} - M_{t_i^n\wedge t}) \\ &= 2\sum_{i=0}^{p_{n-1}} M_{t_i^n}(M_{t_{i+1}^n\wedge t} - M_{t_i^n\wedge t}). \end{aligned}$$

Avec

$$M_t^{(n)} = \sum_{i=0}^{p_n-1} M_{t_i^n} 1_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(t),$$

ceci se réécrit

$$M_t^2 - M_0^2 - \sum_{i=1}^{p_{n-1}} (M_{t_{i+1}^n\wedge t} - M_{t_i^n\wedge t})^2 = 2\int_0^t M_s^{(n)}\, dM_s. \tag{5}$$

Posons

$$X_t^{(n)} = \int_0^t M_s^{(n)}\, dM_s.$$

On sait par la Proposition 5.2.1 que $X_t^{(n)}$ est une martingale. En appliquant cette proposition à la martingale $X_t^{(n)} - X_t^{(m)}$ on voit qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T} (X_t^{(n)} - X_t^{(m)})^2] &\le C|| \sup_{0\le s\le T} (M_s^{(m)} - M_s^{(n)})^2||_2 \\ &\le 2C|| \sup_{0\le s\le T} (M_s^{(m)} - M_s)^2||_2 + 2C|| \sup_{0\le s\le T} (M_s^{(n)} - M_s)^2||_2 \end{aligned}$$

(en utilisant $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$). Par continuité de $t \mapsto M_t(\omega)$ et donc uniforme continuité sur $[0, T]$, et le théorème de convergence dominée, ceci tend vers 0 quand $m, n \to +\infty$. Par récurrence construisons une suite d'entiers n_k vérifiant $n_k \ge n_{k-1}$ et, pour tout $\ge n_k$

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T} (X_t^{(n_k)} - X_t^m)^2) \le 1/2^k.$$

Alors,

$$\mathbb{E}(\sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{0\le t\le T} |X_t^{(n_k)} - X_t^{(n_{k+1})}|) \le \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T} |X_t^{(n_k)} - X_t^{(n_{k+1})}|^2)^{1/2} < +\infty.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{(n_k)} - X_t^{(n_{k+1})}| < +\infty, p.s.$$

On en déduit que, presque surement, $X_t^{(n_k)}$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus X_t qui sera donc continu. Toute la suite $X_t^{(n)}$ converge vers X_t dans L^2. En particulier X est une martingale. Ceci montre (4) en utilisant (5) et

$$\langle M, M\rangle_t = M_t^2 - M_0^2 - 2X_t.$$

On a

$$M_t^2 - M_0^2 - 2X_t^{(n)} = \sum_{i=0}^{p_{n-1}} (M_{t_{i+1}^n\wedge t} - M_{t_i^n\wedge t})^2$$

Donc la suite $i \mapsto M_{t_i^n}^2 - M_0^2 - 2X_{t_i^n}^{(n)}$ est croissante. Choisissons une subdivision qui se raffine, alors c'est encore vrai pour la suite $i \mapsto M_{t_i^n}^2 - M_0^2 - 2X_{t_i^n}^{(m)}$ pour $m \geq n$, donc par passage à la limite pour la suite

$$\langle M, M\rangle_{t_i^{(n)}} = \lim_{m\to+\infty} M_{t_i^n}^2 - M_0^2 - 2X_{t_i^n}^{(m)}$$

La fonction $\langle M, M\rangle_t$ est donc croissante. $\square$

Remarque : La preuve montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\sup_{t\leq T}(\sum_{i=0}^{p_n-1} (M_{t_{i+1}^n\wedge t} - M_{t_i^n\wedge t})^2 - \langle M, M\rangle_t)^2] = 0 \tag{6}$$

Le corollaire suivant résulte de la formule (4) et de la convergence p.s. pour une sous suite.

Lemme 5.3.2. — *Si M est une martingale bornée et τ un temps d'arrêt,*

$$\langle M^\tau, M^\tau\rangle_t = \langle M, M\rangle_{t\wedge\tau}.$$

5.4. Martingale locale

Dans ce cours, on se concentre sur les processus continus. C'est pourquoi on pose :

Définition 5.4.1. — Un processus adapté M tel que $M_0 = 0$ est une martingale locale si il est **continu** et si il existe une suite croissante $\tau_n, n \in \mathbb{N}$, de temps d'arrêt tendant vers $+\infty$ telle que M^{τ_n} soit une martingale. On dit que (τ_n) réduit M.

Si M est un processus adapté non nul en 0, on dit que c'est une martingale locale si $M_t - M_0$ l'est.

Lemme 5.4.2. — *Il y a équivalence entre*

(i) M est une martingale locale et M_0 est intégrable ;

(ii) Il existe une suite croissante (τ_n) de temps d'arrêt tendant vers $+\infty$ telle que M^{τ_n} soit une martingale continue.

Il résulte du théorème d'arrêt que :

Théorème 5.4.3. — *Une martingale locale arrêtée est une martingale locale.*

Lemme 5.4.4. — *La somme de deux martingales locales est une martingale locale.*

Preuve: Si (τ_n) réduit la martingale locale M et (σ_n) réduit la martingale locale N, alors $\sigma_n \wedge \tau_n$ réduit $M + N$.

Très souvent on utilisera :

Proposition 5.4.5. — *Si M est une martingale locale nulle en* 0*, et si*

$$T_n = \inf\{t \geq 0; |M_t| = n\}$$

alors M^{T_n} est une martingale bornée.

Preuve: Si (τ_k) réduit M, M^{τ_k} est une martingale donc par le théorème d'arrêt, $M^{\tau_k \wedge T_n}$ est une martingale. Pour tout $t \geq 0$, quand $k \to +\infty$, $M_t^{\tau_k \wedge T_n}$ tend vers $M_t^{T_n}$ dans L^1 par convergence dominée (puisque $|M_t^{\tau_k \wedge T_n}| \leq n$). Donc M^{T_n} est une martingale.

Théorème 5.4.6. — *Une martingale locale M telle que $\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|$ est dans L^1 pour tout $t \geq 0$ est une martingale.*

Preuve: Il suffit d'utiliser qu'une limite dans L^1 de martingales est une martingale (Proposition 4.1.4) et le théorème de convergence dominée.

Par contre l'uniforme intégrabilité ne suffit pas. L'exemple classique est $M_t = 1/||B_{t+1}||$ où B est le brownien dans $\mathbb{R}^3$: on verra que c'est une martingale locale avec la formule d'Ito, par calcul $\mathbb{E}(M_t^2)$ est uniformément borné (et même $\mathbb{E}(M_t^{5/2})$) et pourtant

$$\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(1/||B_{t+1}||) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}\mathbb{E}(1/||B_1||)$$

n'est pas constant.

5.4.1. Crochet d'une martingale locale. — Considérons une martingale locale M, nulle en 0, et $T_n = \inf\{t \geq 0; |M_t| = n\}$. Il résulte du corollaire 5.3.2 que si $n \leq m$ alors

$$\langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle_t = \langle M^{T_m}, M^{T_m}\rangle_t$$

si $t \leq T_n$. On peut donc définir sans ambiguité $\langle M, M\rangle$ en posant

$$\langle M, M\rangle_t = \langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle_t, \text{ pour tout } n \text{ tel que } T_n \geq t.$$

On aura

$$\langle M^\tau, M^\tau\rangle_t = \langle M, M\rangle_{t\wedge\tau}$$

On remarque que, puisque $M^2_{t\wedge\tau_n} - \langle M, M\rangle_{t\wedge\tau_n}$ est une martingale,

Proposition 5.4.7. — *Si M est une martingale locale, le processus $\langle M, M\rangle_t$ est continu, adapté et*

$$M_t^2 - \langle M, M\rangle_t, t \geq 0,$$

est une martingale locale.

Le théorème suivant est très important.

Théorème 5.4.8. — *Soit M une martingale locale nulle en 0. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) pour tout $t \geq 0$, $\langle M, M\rangle_t \in L^1$;

(ii) M est une martingale de carré intégrable.

Sous ces conditions, $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une martingale.

Preuve: Supposons (i). On peut réduire M avec $T_n = \inf\{t; |M_t| = n\}$. Alors

$$N_t^{(n)} = (M_t^{T_n})^2 - \langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle_t$$

est une martingale (cf. Théorème 5.3.1). Donc $\mathbb{E}(N_t^{(n)}) = 0$ c'est à dire

$$\mathbb{E}(M^2_{T_n\wedge t}) = \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_{T_n\wedge t}). \tag{7}$$

En particulier

$$\mathbb{E}(M^2_{T_n\wedge t}) \leq \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_t)$$

ce qui assure que la suite $M_{T_n\wedge t}, n \in \mathbb{N}$, est uniformément intégrable. Donc $M_t^{T_n}$ tend vers M_t dans L^1 et M_t est une martingale comme limite dans L^1 de martingales. Par Fatou

$$\mathbb{E}(M_t^2) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}(M_{T_n\wedge t}^2) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_{T_n\wedge t}) = \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_t) < +\infty.$$

Donc M_t est de carré intégrable. Ce qui montre (ii). Dans ce cas, par Doob $\sup_{0\leq s\leq t} M_s^2$ est dans L^1. La martingale locale $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est majorée en valeur absolue pour $t \in [0, T]$ par $\langle M, M\rangle_T + \sup_{0\leq t\leq T} M_t^2$. C'est donc une vraie martingale par le théorème 5.4.6.

Supposons maintenant (ii) donc que M_t est une martingale de carré intégrable. Alors, par Doob,

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} M_t^2) \leq 4\mathbb{E}(M_T^2)$$

donc, puisque M^{T_n} est bornée,

$$\mathbb{E}(\langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle_T) = \mathbb{E}(M_{T_n\wedge T}^2) \leq 4\mathbb{E}(M_T^2)$$

et

$$\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_T) \leq 4\mathbb{E}(M_T^2) < +\infty. \ \square$$

Proposition 5.4.9. — *Soit M_t une martingale locale nulle en 0 et*

$$\langle M, M\rangle_\infty = \lim_{t\to+\infty} \langle M, M\rangle_t.$$

Alors

$$\mathbb{E}(\sup_{t\geq 0} M_t^2) \leq 4\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_\infty).$$

Si ces quantités sont finies, M_t est une martingale, elle converge p.s. et dans L^2 vers une v.a. M_∞ quand $t \to +\infty$ et pour tous temps d'arrêts σ, τ

$$\mathbb{E}(M_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau\wedge\sigma}.$$

Preuve: Soit (τ_n) une suite de temps d'arrêt bornant M. Par Doob, pour tout $T > 0$,

$$\mathbb{E}(\sup_{t\leq T}(M_t^{\tau_n})^2) \leq 4\mathbb{E}((M_T^{\tau_n})^2) = 4\mathbb{E}(\langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n}\rangle_T) \leq 4\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_\infty)$$

On peut appliquer deux fois le théorème de convergence monotone, en faisant tendre T puis n vers l'infini, pour obtenir

$$\mathbb{E}(\sup_{t\geq 0} M_t^2) \leq 4\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_\infty).$$

Si cette quantité est finie, M_t est une martingale convergente p.s. par le théorème de convergence 4.3.3. Par le théorème d'arrêt,

$$\mathbb{E}(M_{\tau\wedge n}|\mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau\wedge n\wedge\sigma}.$$

et on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour l'espérance conditionnelle (ou la continuité dans L^2) pour faire tendre n vers l'infini. □

Attention : si M est une vraie martingale, $\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_t)$, donc

$$\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_\infty).$$

Si par contre M est seulement une martingale locale ceci peut être faux, comme le montre le contre exemple de la fin de la section précédente $M_t = 1/||B_{t+1}||$ où B est le brownien de $\mathbb{R}^3$ (dans ce cas $\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_\infty) = +\infty$ car M n'est pas une martingale).

Insistons, l'inégalité de Doob sous la forme

$$\mathbb{E}(\sup_{t\leq T} M_t^2) \leq 4\mathbb{E}(M_T^2)$$

est **fausse** pour la martingale locale $M_t = 1/||B_{t+1}||$.

5.5. Processus à variation finie

Définition 5.5.1. — On appelle processus (sous entendu adapté continu) à variation finie la différence de deux processus croissants continus adaptés.

Si $A_t = U_t - V_t$ est à variation finie avec U et V croissants, pour toute subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$,

$$\sum_{i=1}^n |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}| \leq \sum_{i=1}^n |U_{t_i} - U_{t_{i-1}}| + \sum_{i=1}^n |V_{t_i} - V_{t_{i-1}}| \leq U_T - U_0 + V_T - V_0. \tag{8}$$

Il y a une réciproque à cette propriété, mais nous ne l'utiliserons pas. L'exemple typique de processus à variation finie est donné par la primitive $A_t = \int_0^t R_s\,ds$ d'un processus R_t localement intégrable progressif (par exemple continu adapté) : en effet il suffit de prendre $U_t = \int_0^t R_s^+\,ds$ et $V_s = \int_0^t R_s^-\,ds$. Si A est nul en 0 on prendra U et V nuls en 0.

Proposition 5.5.2. — *Une martingale locale (continue) nulle en* 0 *à variation finie est nulle.*

Preuve: Ecrivons $M_t = U_t - V_t$ avec U, V croissants continus adaptés. Soit $\tau_k = \inf\{t \geq 0; U_t + V_t \geq k\}$ et $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = T$ une suite de subdivisions de $[0, T]$ dont le pas tend vers 0. Alors, en appliquant le lemme d'orthogonalité 5.1.1 à la martingale $N = M^{\tau_k}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{T\wedge\tau_k}^2) &= \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{p_n}(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})^2) \\
&\leq \mathbb{E}(\sup_j |N_{t_j^n} - N_{t_{j-1}^n}| \sum_{i=1}^{p_n} |N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}|) \\
&\leq \mathbb{E}(\sup_j |N_{t_j^n} - N_{t_{j-1}^n}|(U_{T\wedge\tau_k} + V_{T\wedge\tau_k})) \\
&\leq k\mathbb{E}(\sup_j |N_{t_j^n} - N_{t_{j-1}^n}]) \to 0,
\end{aligned}
$$

donc $M_T = 0$.

Corollaire 5.5.3. — *Si M est une martingale locale, $\langle M, M\rangle$ est l'unique processus croissant adapté A_t nul en 0 tel que $M_t^2 - A_t$ soit une martingale locale.*

5.6. Crochet de deux martingales locales

Considérons deux martingales locales M et N. Le "crochet" de M et N est défini par

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{4}[\langle M + N, M + N\rangle_t - \langle M - N, M - N\rangle_t]$$

Exactement comme au dessus on voit que

Proposition 5.6.1. — *$\langle M, N\rangle$ est le seul processus (continu adapté) à variation finie, nul en 0, tel que $MN - \langle M, N\rangle$ soit une martingale locale.*

Si M et N sont bornés, il résulte de la formule (4) du théorème 5.3.1 que si $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = T$ sont des subdivisions dont le pas tend vers 0. Alors

$$\langle M, N\rangle_T = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n}(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}) \tag{9}$$

On en déduit :

Théorème 5.6.2. — *Si M et N sont deux martingales locales, et τ un temps d'arrêt, alors*

$$\langle M^\tau, N\rangle = \langle M, N^\tau\rangle = \langle M^\tau, N^\tau\rangle = \langle M, N\rangle^\tau.$$

Preuve: Ecrire (après avoir borné par localisation) que

$$\langle M^\tau, N\rangle_T = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n\wedge\tau} - M_{t_{i-1}^n\wedge\tau})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})$$

et que

$$\sum_{i=1} = \sum_{i;t_i^n\le\tau} + \sum_{i;t_{i-1}^n\le\tau\le t_i^n} + \sum_{i;t_{i-1}^n\ge\tau} .$$

La somme du milieu ne comporte qu'un seul terme et tend donc vers 0, les autres sont les mêmes si on remplace $N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}$ par $N_{t_i^n\wedge\tau} - N_{t_{i-1}^n\wedge\tau}$. □

Proposition 5.6.3. — *Si $B_t, t \ge 0$, et $B'_t, t \ge 0$, sont deux $\mathcal{F}_t$-browniens indépendants, alors $\langle B, B'\rangle_t = 0$.*

Preuve: En appliquant la proposition 3.4.2, on voit que $W_t = \frac{B_t + B'_t}{\sqrt{2}}$ est un mouvement brownien. On en déduit que

$$t = \langle W, W\rangle_t = \frac{1}{2}(\langle B, B\rangle_t + 2\langle B, B'\rangle_t + \langle B', B'\rangle_t) = t + \langle B, B'\rangle_t$$

donc $\langle B, B'\rangle = 0$. □

Considérons un processus croissant continu A sur $\mathbb{R}^+$. Pour chaque $\omega \in \Omega$, définissons une mesure $m_{A(\omega)}$ sur $\mathbb{R}^+$ on posant

$$m_{A(\omega)}([s,t]) = A_t(\omega) - A_s(\omega).$$

Pour simplifier, on notera

$$\int_0^t f(s)\, dm_{A(\omega)}(s) = \int_0^t f(s)\, dA_s(\omega)$$

si f est borélienne positive ou bornée, et la plupart du temps on n'écrit pas ω. Si A maintenant est un processus à variation finie, donc s'écrivant $A_t = U_t - V_t$ où U et V sont des processus croissants, on posera

$$\int_0^t f(s)\, dA_s = \int_0^t f(s)\, dU_s - \int_0^t f(s)\, dV_s.$$

Le seul cas que l'on rencontrera souvent est celui où A est une primitive : $A_t = \int_0^t R_s\, ds$. Alors

$$\int_0^t f(s)\, dA(s) = \int_0^t f(s) R_s\, ds.$$

Le lemme suivant sera considérablement renforcé au théorème 6.1.8.

Lemme 5.6.4. — *Pour $H \in \mathcal{E}$, si M et N sont des martingales locales,*

$$\langle H \cdot M, N\rangle_T = \int_0^T H_s\, d\langle M, N\rangle_s,$$

Preuve: Par linéarité, il suffit de considérer le cas où $H_t = Z1_{[a,b[}(t)$, avec $b \le T$, où Z est $\mathcal{F}_a$–mesurable, bornée. Par localisation, il suffit de considérer le cas où M et N sont bornées. On a alors

$$\mathbb{E}((H \cdot M)_T N_T) = \mathbb{E}(Z(M_b - M_a)N_T),$$

or

$$\mathbb{E}(Z(M_b - M_a)N_T) = \mathbb{E}(ZM_bN_b) - \mathbb{E}(ZM_aN_a)$$

$$= \mathbb{E}(Z[(M_bN_b - Z\langle M, N\rangle_b) - (M_aN_a - Z\langle M, N\rangle_a)]) + \mathbb{E}(Z\langle M, N\rangle_b) - \mathbb{E}(Z\langle M, N\rangle_a)$$

$$= \mathbb{E}(Z\langle M, N\rangle_b) - \mathbb{E}(Z\langle M, N\rangle_a)$$

car $MN - \langle M, N\rangle$ est une martingale, donc,

$$\mathbb{E}((H \cdot M)_T N_T) = \mathbb{E}(Z(\langle M, N\rangle_b - \langle M, N\rangle_a)) = \mathbb{E}(\int_0^t H_s\, d\langle M, N\rangle_s).$$

Pour tout temps d'arrêt τ borné par T, en remplaçant M et N par M^τ et N^τ on a encore

$$\mathbb{E}((H \cdot M)_\tau N_\tau) = \mathbb{E}(\int_0^\tau H_s\, d\langle M, N\rangle_s)$$

ce qui montre que $(H \cdot M)_t N_t - \int_0^t H_s\, d\langle M, N\rangle_s$ est une martingale (par le corollaire 4.3.8). $\square$

Lemme 5.6.5. — *Soit H une fonction qui s'écrit $H_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i} 1_{[t_i, t_{i+1}[}(t)$ où H_{t_i} est un réel. Alors*

$$(\int_0^t H_s\, d\langle M, N\rangle_s)^2 \le \langle N, N\rangle_t \int_0^t H_s^2\, d\langle M, M\rangle_s.$$

Preuve: On écrit que $\langle \lambda M + N, \lambda M + N\rangle_t$ est une fonction croissante de t, on en déduit que, si $s \le t$,

$$(\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s)^2 \le (\langle M,M\rangle_t - \langle M,M\rangle_s)(\langle N,N\rangle_t - \langle N,N\rangle_s)$$

qui s'écrit aussi

$$(\int_s^t d\langle M,N\rangle_u)^2 \le \int_s^t d\langle M,M\rangle_u \int_s^t d\langle N,N\rangle_u.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}|\int_0^t H_s\, d\langle M,N\rangle_s| &= |\sum_{i=1}^n \int_{t_i\wedge t}^{t_{i+1}\wedge t} H_s\, d\langle M,N\rangle_s| \\ &\le \sum_{i=1}^n |H_{t_i} \int_{t_i\wedge t}^{t_{i+1}\wedge t} d\langle M,N\rangle_s| \\ &\le \sum_{i=1}^n |H_{t_i}| [\int_{t_i\wedge t}^{t_{i+1}\wedge t} d\langle M,M\rangle_s]^{1/2} [\int_{t_i\wedge t}^{t_{i+1}\wedge t} d\langle N,N\rangle_s]^{1/2}.\end{aligned}$$

Or $(\sum a_i b_i)^2 \le (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$ (Cauchy Schwarz) donc

$$(\int_0^t H_s\, d\langle M,N\rangle_s)^2 \le [\sum_{i=1}^n H_{t_i}^2 \int_{t_i\wedge t}^{t_{i+1}\wedge t} d\langle M,M\rangle_s][\sum_{i=1}^n \int_{t_i\wedge t}^{t_{i+1}\wedge t} d\langle N,N\rangle_s]$$

c'est à dire

$$(\int_0^t H_s\, d\langle M,N\rangle_s)^2 \le \int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s \int_0^t d\langle N,N\rangle_s. \quad \square$$

En utilisant par exemple la proposition 6.1.7, on voit que

***Proposition 5.6.6* (Kunita Watanabe).** — *L'application qui à $H_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i} 1_{[t_i,t_{i+1}[}(t)$ associe $\int_0^t H_s\, d\langle M,N\rangle_s$ se prolonge par continuité à tout processus mesurable H tel que $\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_u < \infty$ et si on note de la même façon ce prolongement, il vérifie encore*

$$(\int_0^t H_s\, d\langle M,N\rangle_s)^2 \le \langle N,N\rangle_t \int_0^t H_s^2\, d\langle M,M\rangle_s.$$

CHAPITRE 6

INTÉGRALE STOCHASTIQUE

6.1. Cas d'une martingale de carré intégrable

Sur un espace $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ on considère une martingale continue M_t de carré intégrable (c'est à dire telle que $M_t \in L^2$ pour tout $t \geq 0$). Rappelons (Théorème 5.4.8) qu'alors $\langle M, M\rangle_t \in L^1$ et que

$$M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$$

est une martingale. Dans la suite on fixe un $T > 0$.

Définition 6.1.1. — On note $\mathcal{H}_T^2$ l'espace des martingales dans $L^2(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ presque surement continues $M_t, 0 \leq t \leq T$, telles que $M_0 = 0$, muni du produit scalaire

$$(M, N)_{\mathcal{H}_T^2} = \mathbb{E}(M_T N_T) = \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_T).$$

Remarquons que si $M, N \in \mathcal{H}_T^2$, alors $M + N$ et $M - N$ sont dans $\mathcal{H}_T^2$ et que $MN - \langle M, M\rangle$ est une martingale.

On identifiera deux martingales égales p.s. dans la proposition suivante.

Proposition 6.1.2. — *$\mathcal{H}_T^2$ est un espace de Hilbert.*

Preuve: Il faut montrer que $\mathcal{H}_T^2$ est complet. Considérons une suite de Cauchy $M^{(n)}$. Alors $M_T^{(n)}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, qui est complet. Il existe donc une variable aléatoire, que nous noterons M_T, dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que

$$\mathbb{E}((M_T^{(n)} - M_T)^2) \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Posons, pour tout $t \leq T$, $M_t = \mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_t)$. Il est clair que (M_t) est une martingale, et par continuité dans L^2 de l'espérance conditionnelle, que $M_t^{(n)} \to M_t$ dans L^2. Par Doob

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}(M_s^{(n)} - M_s^{(m)})^2) \leq 4\mathbb{E}((M_T^{(n)} - M_T^{(m)})^2)$$

tend vers 0 quand $n, m \to +\infty$. On peut extraire une sous suite n_k telle que $M_t^{(n_k)}$ converge uniformément. La limite sera donc continue. Or cette limite est nécessairement M_t. Ceci montre que M_t est une martingale continue. Donc $M \in \mathcal{H}_T^2$ et $||M^{(n)} - M||^2_{\mathcal{H}_T^2} = \mathbb{E}((M_T^{(n)} - M_T)^2) \to 0$.

Définition 6.1.3. — Etant donnée une martingale M on note $L^2(M)_T$ l'ensemble des processus progressifs H tels que $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 d\langle M, M\rangle_s) < \infty$ muni du produit scalaire

$$(H, K)_{L^2(M)_T} = \mathbb{E}(\int_0^T H_s K_s \, d\langle M, M\rangle_s).$$

Proposition 6.1.4. — *$\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(M)_T$.*

Preuve: Remarquons que $L^2(M)_T$ est un sous espace fermé de l'espace $L^2(\Omega\times [0, T], \mathcal{F}_T \otimes B([0, T]), m)$ où m est la mesure définie par, si $A \in \mathcal{F}_T \otimes B([0, T])$,

$$m(A) = \mathbb{E}(\int_0^T 1_A(\omega, s) d\langle M, M\rangle_s(\omega))$$

C'est donc un espace de Hilbert. Il suffit donc de montrer que si $K \in L^2(M)_T$ est orthogonal à $\mathcal{E}$ alors il est nul (cf. Corollaire 2.3.8). Posons, pour un tel K,

$$X_t = \int_0^t K_s \, d\langle M, M\rangle_s.$$

Montrons que X_t est une martingale : Par l'inégalité de Kunita Watanabe (Proposition 5.6.6),

$$\int_0^t |K_s| \, d\langle M, M\rangle_s \leq \langle M, M\rangle_t^{1/2} (\int_0^t K_s^2 \, d\langle M, M\rangle_s)^{1/2}$$

on voit, après avoir appliqué Cauchy Schwarz, que

$$(10) \qquad [\mathbb{E}(\int_0^t |K_s| \, d\langle M, M\rangle_s)]^2 \leq \mathbb{E}(\langle M, M\rangle_t)\mathbb{E}(\int_0^t K_s^2 \, d\langle M, M\rangle_s) < +\infty.$$

Donc $X_t \in L^1$. Soit Z une v.a. $\mathcal{F}_s$–mesurable bornée. Pour $0 \leq s \leq t \leq T$, le processus $H_r = Z1_{[s,t[}(r)$ est dans $\mathcal{E}$ donc, par hypothèse, orthogonal à K, donc

$$0 = \mathbb{E}(\int_0^T H_r K_r \, d\langle M, M\rangle_r) = \mathbb{E}(Z \int_s^t K_r \, d\langle M, M\rangle_r) = \mathbb{E}(Z(X_t - X_s)).$$

Ceci entraîne que X est une martingale. Comme elle est à variation finie, elle est nulle par la Proposition 5.5.2. Donc, p.s.

$$\int_0^t K_s \, d\langle M, M\rangle_s = 0$$

pour tout $s > 0$, ce qui entraîne (par densité des combinaisons linéaires de fonctions indicatrices $1_{[0,s]}$, ou classe monotone) que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $s \mapsto K_s(\omega)$ est nul $d\langle M, M\rangle_s(\omega)$ presque partout, donc que K est nul dans $L^2(M)_T$. □

Rappelons maintenant que lorsque $H = \sum H_{t_i} 1_{[t_i, t_{i+1}[} \in \mathcal{E}$ et M est une martingale, on a défini l'intégrale stochastique

$$(H \cdot M)_t = \sum H_{t_i}(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})$$

Lemme 6.1.5. — *Si $H \in \mathcal{E}$ et M est une martingale de carré intégrable,*

$$\mathbb{E}(H \cdot M)_T^2 = \mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 \, d\langle M, M\rangle_s).$$

Preuve: Il suffit d'appliquer deux fois le lemme 5.6.4 :

$$d\langle H \cdot M, H \cdot M\rangle = H d\langle M, H \cdot M\rangle = H^2 d\langle M, M\rangle.$$

Théorème 6.1.6. — *L'intégrale stochastique par rapport à M se prolonge en une isométrie de $L^2(M)_T$ dans $\mathcal{H}_T^2$. On note encore $H \cdot M$ ou $\int_0^t H_s \, dM_s, 0 \leq t \leq T$, l'image de $H \in L^2(M)_T$.*

Preuve: Considérons l'application

$$I_M : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{H}_T^2$$

définie par $I_M(H) = H \cdot M$. Le lemme précédent montre que c'est une isométrie de $\mathcal{E}$, considéré comme sous espace de $L^2(M)_T$, dans $\mathcal{H}_T^2$. Comme $\mathcal{E}$ est dense et $\mathcal{H}_T^2$ complet, on peut prolonger cette isométrie à $\mathcal{H}_T^2$ tout entier. En effet, on a le résultat général suivant :

Proposition 6.1.7. — *On considère deux espaces métriques (F_1, d_1) et (F_2, d_2), D une partie dense de F_1 et $\phi : D \mapsto F_2$ une application pour laquelle il existe $c > 0$ tel que*

$$d_2(\phi(x), \phi(y)) \leq c d_1(x, y) \tag{11}$$

pour tous $x, y \in D$. Si (F_2, d_2) est complet, l'application ϕ se prolonge à F_1 tout entier en une application vérifiant (11) partout.

Preuve: En effet, par densité, pour tout $x \in F_1$, il existe une suite $x_n \in D$ tendant vers x. La suite (x_n) est de Cauchy pour d_1 puisqu'elle converge. L'inégalité (11) montre que $\phi(x_n)$ est une suite de Cauchy dans (F_2, d_2). Comme cet espace est complet, $\phi(x_n)$ converge. Il suffit de poser $\phi(x) = \lim \phi(x_n)$. □

Le théorème suivant est fondamental.

***Théorème 6.1.8* (Propriété caractéristique).** — *Pour $H \in L^2(M)_T$, $(H \cdot M)_t, t \leq T$, est la seule martingale de $\mathcal{H}^2_T$, nulle en 0, vérifiant*

$$\langle H \cdot M, N\rangle_T = \int_0^T H_s \, d\langle M, N\rangle_s,$$

pour tout $N \in \mathcal{H}^2_T$.

Preuve: Lorsque $H \in \mathcal{E}$ la relation est donnée par le lemme le lemme 5.6.4. Pour traiter le cas général d'un H dans $L^2(M)_T$, approchons le par une suite $H^n \in \mathcal{E}$. Par construction de l'intégrale stochastique, $H_n \cdot M$ tend vers $H \cdot M$ dans $\mathcal{H}^2_T$. L'application linéaire

$$M \in \mathcal{H}^2_T \mapsto \langle M, N\rangle_T \in L^1$$

est continue par Kunita Watanabe (Proposition 5.6.6 appliquée à $H = 1$), donc, dans L^1,

$$\langle H \cdot M, N\rangle_T = \lim_{n\to+\infty} \langle H^n \cdot M, N\rangle_T = \lim_{n\to+\infty} \int_0^T H^n_s \, d\langle M, N\rangle_s = \int_0^T H_s \, d\langle M, N\rangle_s,$$

en utilisant à nouveau Kunita Watanabe.

Reste l'unicité : si X est une martingale nulle en 0, telle que pour tout N,

$$\langle X, N\rangle_T = \langle H \cdot M, N\rangle_T,$$

alors, en prenant $N = X - H \cdot M$, on a $\langle X - H \cdot M, X - H \cdot M\rangle = 0$ donc $X = H.M$. □

Une autre façon d'écrire cette relation est

$$d\langle H \cdot M, N\rangle_t = H_t \, d\langle M, N\rangle_t$$

c'est à dire que, pour chaque ω fixé, la mesure $d\langle H \cdot M, N\rangle_t$ a la densité H_t par rapport à la mesure $d\langle M, N\rangle_t$.

Corollaire 6.1.9. — *Pour toutes martingales M, N dans $\mathcal{H}^2_T$, $H \in L^2(M)_T$ et $K \in L^2(N)_T$*

$$\langle H \cdot M, K \cdot N \rangle_T = \int_0^T H_s K_s \, d\langle M, N \rangle_s.$$

Théorème 6.1.10. — *Pour $H \in L^2(M)_T$, pour tout temps d'arrêt τ,*

$$(H \cdot M)^\tau = H \cdot M^\tau = H\mathbf{1}_{[0,\tau[} \cdot M.$$

De plus, $K \in L^2(H \cdot M)_T$ si et seulement si $KH \in L^2(M)_T$ et alors (associativité de l'intégrale stochastique)

$$(KH) \cdot M = K \cdot (H \cdot M).$$

Preuve: Pour l'arrêt, on utilise la propriété caractéristique. Par le théorème 5.6.2 pour tout $N \in \mathcal{H}^2_T$, et

$$\langle (H \cdot M)^\tau, N \rangle_T = \langle (H \cdot M), N \rangle^\tau_T = \int_0^T H_s \, d\langle M, N \rangle^\tau_s$$

$$= \int_0^T H_s d \, \langle M^\tau, N \rangle_s = \langle H \cdot M^\tau, N \rangle_T$$

et

$$\langle (H \cdot M)^\tau, N \rangle_T = \int_0^T H\mathbf{1}_{[0,\tau[} \, d\langle M, N \rangle_s = \langle H\mathbf{1}_{[0,\tau[} \cdot M, N \rangle_T.$$

Pour l'associativité : d'abord

$$\mathbb{E}(\int_0^T K_s^2 \, d\langle (H \cdot M), (H \cdot M) \rangle_s) = \mathbb{E}(\int_0^T K_s^2 H_s^2 \, d\langle M, M \rangle_s).$$

Par ailleurs

$$\langle (KH) \cdot M, N \rangle_T = \int_0^T K_s H_s d \, \langle M, N \rangle_s = \int_0^T K_s \langle H \cdot M, N \rangle_s = \langle K \cdot (H \cdot M), N \rangle_T.$$

6.2. Cas d'une martingale locale.

Soit M une martingale locale. On note $L^0(M)$ l'ensemble des processus progressifs H tels que, pour tout $t > 0$,

$$\int_0^t H_s^2 \, d\langle M, M \rangle_s < +\infty, \; p.s.$$

Par exemple tout processus adapté continu, et même seulement càd-làg, est dans $L^0(M)$. La suite

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0; \int_0^t (1 + H_s^2) d\langle M, M\rangle_s \geq n\}$$

est formée de temps d'arrêt et croît vers $+\infty$. Puisque

$$\langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n}\rangle_t \leq n \text{ et } \int_0^T H_s^2 \, d\langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n}\rangle_s \leq n,$$

on voit que M^{τ_n} est une vraie martingale de $\mathcal{H}_T^2$ et que H est dans $L^2(M^{\tau_n})_T$. Considérons $H \cdot M^{\tau_n}$. Pour $m \geq n$,

$$(H \cdot M^{\tau_m})^{\tau_n} = H \cdot (M^{\tau_m})^{\tau_n} = H \cdot M^{\tau_m \wedge \tau_n} = H \cdot M^{\tau_n}.$$

On peut donc poser, sans ambiguïté,

$$(H \cdot M)_t = H \cdot (M^{\tau_n})_t, \text{ pour tout } n \text{ tel que } \tau_n \geq t.$$

***Théorème 6.2.1* (Propriété caractéristique).** — *$H \cdot M$ est l'unique martingale locale, nulle en 0, telle que, pour toute martingale locale N*

$$\langle H \cdot M, N\rangle_T = \int_0^T H_s \, d\langle M, N\rangle_s,$$

Preuve: facile.

Corollaire 6.2.2. — *Pour $H, K \in L^0(M)$, pour tout temps d'arrêt τ,*

$$(H \cdot M)^\tau = H \cdot M^\tau = H\mathbf{1}_{[0,\tau[} \cdot M \text{ et } (HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M).$$

***Corollaire 6.2.3* (Kunita Watanabe 2).** — *Pour $H \in L^0(M)$, $K \in L^0(N)$,*

$$(\int_0^t H_s K_s \, d\langle M, N\rangle_s)^2 \leq \int_0^t H_s^2 \, d\langle M, M\rangle_s \int_0^t K_s^2 \, d\langle N, N\rangle_s.$$

6.3. Semimartingales

On se fixe $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$.

Définition 6.3.1. — On appelle semimartingale (sous entendu continue) un processus adapté X_t s'écrivant

$$X_t = X_0 + M_t + V_t$$

où M est une martingale locale et V un processus à variation finie, nuls en 0, continus adaptés et X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

Vu la Proposition 5.5.2, cette décomposition est unique. On l'appelle la décomposition canonique.

Définition 6.3.2. — Le crochet de 2 semimartingales $X_t = X_0 + M_t + V_t, Y_t = Y_0 + N_t + U_t$ où M et N sont les parties martingales locales, est par définition

$$\langle X, Y\rangle = \langle M, N\rangle.$$

L'exemple fondamental de semimartingale (mais ce n'est pas le seul, penser au sup du brownien $S_t = \max_{0\le s\le t} B_s$) est donné par les processus d'Ito : on considère un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien $B = (B^{(1)}, \cdots, B^{(d)})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ issu de 0 ; par définition,

Définition 6.3.3. — Un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien $B = (B^{(1)}, \cdots, B^{(d)})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un processus continu tel que $B_{t+s} - B_t, s \ge 0$, est indépendant de $\mathcal{F}_t$ et dont les composantes sont des browniens indépendants.

Définition 6.3.4. — On appelle processus d'Itô réel tout processus X_t de la forme

$$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \phi_s^k \, dB_s^k + \int_0^t \alpha_s \, ds \tag{12}$$

où $X_0 \in \mathcal{F}_0$, où ϕ^k et α sont des processus progressifs réels tels que, pour tout $t > 0$, $\int_0^t \sum (\phi_s^k)^2 \, ds + \int_0^t |\alpha_s| \, ds < +\infty$ p.s.

Un processus d'Ito multidimensionnel est un processus dont les composantes sont des processus d'Ito réels (par rapport au même $\mathcal{F}_t$–brownien d-dimensionnel B). Soient $X_t = X_0 + \sum \int_0^t \phi^k \, dB^k + \int_0^t \alpha_s \, ds$ et $Y_t = Y_0 +$

$\sum \int_0^t \psi^k \, dB^k + \int_0^t \beta_s \, ds$ les composantes d'un processus d'Itô de dimension 2. On a

$$\langle X, Y \rangle_t = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \phi_s^k \psi_s^k \, ds. \tag{13}$$

6.3.1. Intégration par rapport à une semimartingale. — Soit $X_t = X_0 + M_t + A_t^1 - A_t^2$ une semimartingale où A_1 et A_2 sont croissants. On note $L^0(X)$, l'ensemble des processus progressifs U tels que, pour tout $t > 0$,

$$\int_0^t U_s^2 \, d\langle M_s, M_s \rangle + \int_0^t |U_s| \, d(A_s^1 + A_s^2) < +\infty, \text{ p.s.}$$

Par exemple tout processus adapté continu par morceaux est dans $L^0(X)$. Pour $U \in L^0(X)$, on définit :

$$(U \cdot X)_t = \int_0^t U_s \, dX_s = \int_0^t U_s \, dM_s + \int_0^t U_s \, dA_s^1 - \int_0^t U_s \, dA_s^2.$$

On vérifie facilement que :

Proposition 6.3.5. — *Si X, Y sont des semimartingales, pour $H \in L^0(X)$, pour tout temps d'arrêt τ,*

$$(H \cdot X)^\tau = H \cdot X^\tau),$$

si $K \in L^0(H.X)$,

$$(KH) \cdot X = K \cdot (H \cdot X),$$

$$\langle H \cdot X, K \cdot Y \rangle_t = \int_0^t H_s K_s \, d\langle X, Y \rangle_s.$$

Théorème 6.3.6 **(de convergence dominée pour l'I.S.)**

Soit $K, H \in L^0(X)$ et $H^{(n)}$ une suite de processus progressifs telle que ; pour tout $t \geq 0$, $H_t^{(n)} \to H_t$ p.s. quand $n \to +\infty$ et $|H_t^{(n)}| \leq K_t$. Alors, en probabilité

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t H_s^{(n)} \, dX_s - \int_0^t H_s \, dX_s \right| \to 0.$$

Preuve: Si $X_t = X_0 + M_t + A_t$ est la décomposition canonique de X. L'intégrale par rapport à A se traite avec le théorème de Lebesgue classique. Pour la partie M, appliquons la technique fondamentale : la localisation.

Etape 1 : Localisation et convergence L^2. Soit τ_k la suite croissante vers $+\infty$ de temps d'arrêt, définie par

$$\tau_k = \inf\{t \geq 0; |M_t| + \langle K \cdot M, K \cdot M \rangle_t = k\}$$

alors par Doob

$$\mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T}(\int_0^t H_s^{(n)}\,dM_s^{\tau_k}-\int_0^t H_s\,dM_s^{\tau_k})^2]\le 4\mathbb{E}[(\int_0^T H_s^{(n)}\,dM_s^{\tau_k}-\int_0^T H_s\,dM_s^{\tau_k})^2]$$

$$=4\mathbb{E}[(\int_0^{\tau_k\wedge T}(H_s^{(n)}-H_s)^2\,d\langle M,M\rangle_s].$$

Par Lebesgue dominé (puisque $(H_s^{(n)}-H_s)^2\le 4K_s^2$) on voit que $\int_0^{\tau_k\wedge T}(H_s^{(n)}-H_s)^2\,d\langle M,M\rangle\to 0$ quand $n\to+\infty$, et puisque cette quantité est bornée (par $2k$) son espérance tend vers 0 à nouveau par Lebesgue dominé.

Etape 2 : Convergence en probabilité :Soit $\varepsilon>0$

$$\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}(\int_0^t H_s^{(n)}\,dM_s-\int_0^t H_s\,dM_s)^2>\varepsilon)$$

$$\le\mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T}(\int_0^t H_s^{(n)}\,dM_s^{\tau_k}-\int_0^t H_s\,dM_s^{\tau_k})^2>\varepsilon,\tau_k>t)+\mathbb{P}(\tau_k\le t)$$

etc... tend vers 0.

Proposition 6.3.7. — *Soit X une semimartingale et U un processus adapté* **continu**. *Soit $0=t_0^n\le t_1^n\le\ldots\le t_{p_n}^n=T$, une suite de subdivisions dont le pas tend vers 0. Alors*

$$\sup_{0\le t\le T}|\sum_{i=0}^{p_n-1}U_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n\wedge t}-X_{t_i^n\wedge t})-\int_0^t U_s\,dX_s|\to 0$$

et

$$\sup_{0\le t\le T}|\sum_{i=0}^{p_n-1}U_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n\wedge t}-X_{t_i^n\wedge t})^2-\int_0^t U_s\,d\langle X,X\rangle_s|\to 0$$

en probabilité.

Preuve: On pose $U_s^n=\sum_{i=0}^{p_n-1}U_{t_i^n}1_{[t_i^n,t_{i+1}^n[}(s)$. On a

$$\sum_{i=0}^{p_n-1}U_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n\wedge t}-X_{t_i^n\wedge t})=\int_0^t U_s^n\,dX_s.$$

Vu la continuité, U^n tend vers U en restant borné pour chaque ω puisque $|U_s^n|\le\max_{0\le r\le t}|U_r|$. Il suffit d'appliquer le théorème précédent pour obtenir la première limite.

Pour la seconde limite, pour simplifier les notations ne regardons que ce qui se passe en T. Ecrivons $X=X_0+M+A$ où M est une martingale et A à variation finie. Commencons par montrer que

$$\sum_{i=0}^{p_n-1}(X_{t_i^n}-X_{t_{i-1}^n})^2 \to \langle X,X\rangle_T.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty}|\sum_{i=0}^{p_n-1}(X_{t_i^n}-X_{t_{i-1}^n})^2-\sum_{i=0}^{p_n-1}(M_{t_i^n}-M_{t_{i-1}^n})^2|$$

$$\leq \lim|\sum_{i=0}^{p_n-1}(A_{t_i^n}-A_{t_{i-1}^n})^2+2\sum_{i=0}^{p_n-1}(M_{t_i^n}-M_{t_{i-1}^n})(A_{t_i^n}-A_{t_{i-1}^n})|$$

$$\leq (\sup_{1\leq j\leq n}|A_{t_j^n}-A_{t_{j-1}^n}|+2|M_{t_j^n}-M_{t_{j-1}^n}|)|\sum_{i=0}^{p_n-1}|A_{t_i^n}-A_{t_{i-1}^n}|=0$$

par continuité de M et de A et en utilisant l'inégalité (8). Donc

$$\lim\sum_{i=0}^{p_n-1}(X_{t_i^n}-X_{t_{i-1}^n})^2=\lim\sum_{i=0}^{p_n-1}(M_{t_i^n}-M_{t_{i-1}^n})^2$$

Posons $\tau_k=\inf(s\geq 0,\,|M_s|\geq k)$. En écrivant

$$\mathbb{P}(|\sum_{i=0}^{p_n-1}(M_{t_i^n}-M_{t_{i-1}^n})^2-\langle X,X\rangle_T|>\varepsilon)$$

$$=\mathbb{P}(|\sum_{i=0}^{p_n-1}(M^{\tau_k}_{t_i^n}-M^{\tau_k}_{t_{i-1}^n})^2-\langle X^{\tau_k},X^{\tau_k}\rangle_T|>\varepsilon, t<\tau_k)+\mathbb{P}(t\geq\tau_k)$$

on obtient la convergence en probabilité puisque $\sum_{i=1}^{p_n}(M^{\tau_k}_{t_i^n}-M^{\tau_k}_{t_{i-1}^n})^2\to\langle X^{\tau_k},X^{\tau_k}\rangle_T$ par le théorème 5.3.1. Le cas avec $\sup_{t\leq T}$ se traite avec (6).

Il est alors facile de traiter le cas d'un U continu : Il suffit de l'approcher (pour ω fixé) uniformément sur $[0,T]$ par les fonctions en escalier du type $\sum_k U_{k/n}1_{[k/n,(k+1)/n[}$.

Corollaire 6.3.8. — *Si X,Y sont deux semimartingales et U un processus adapté continu.*

$$\sup_{0\leq t\leq T}|\sum_{i=0}^{p_n-1}U_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n\wedge t}-X_{t_i^n\wedge t})(Y_{t_{i+1}^n\wedge t}-Y_{t_i^n\wedge t})-\int_0^t U_s\,d\langle X,Y\rangle_s|\to 0$$

en probabilité.

Preuve: Par découpage.

6.4. Formule d'Itô

Théorème 6.4.1. — *(Formule d'Itô) Soit $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^p)$ une semimartingale à valeurs dans un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, et $f \in C^2(U)$. Alors $f(X_t)$ est une semimartingale et*

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{j=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s)\, dX_s^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(X_s)\, d\langle X^j, X^k \rangle_s.$$

Preuve: Traitons le cas $p = 1$. Par continuité X_t reste à valeurs dans l'intervalle de U contenant X_0. La formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y - x) + \frac{(y - x)^2}{2} f''(\theta)$$

pour un $\theta \in [x, y]$. Ecrivons donc, pour une suite de subdivisions $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{p_n}^n = t$, de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0,

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=0}^{p_n - 1} (f(X_{t_{i+1}^n}) - f(X_{t_i^n}))$$

$$= \sum_{i=0}^{p_n - 1} f'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) + \sum_{i=0}^{p_n - 1} f''(\theta_i^n) \frac{(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2}{2}$$

où θ_i^n est entre $X_{t_{i+1}^n}$ et $X_{t_i^n}$. Le premier terme tend en probabilité vers $\int_0^t f'(X_s)\, dX_s$ par la proposition 6.3.8. Pour le second, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{p_n - 1} |f''(\theta_i^n) - f''(X_{t_i^n})| \frac{(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2}{2}$$

$$\leq \lim_{n \to +\infty} \sup_k |f''(\theta_k^n) - f''(X_{t_k^n})| \sum_{i=0}^{p_n - 1} \frac{(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2}{2} = 0$$

par uniforme continuité de f'' sur les compacts. Il suffit donc d'appliquer la proposition précédente pour conclure. Si $p > 1$, la preuve est la même lorsque U est convexe. Sinon on utilise la formule de Taylor sous la forme, pour x, y variant dans un compact de U, il existe une fonction o telle que

$$f(y) - f(x) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, (y_j - x_j) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)(y_j - x_j)(y_k - x_k) + o(\|y - x\|^2),$$

où $o(h)/h \to 0$ quand $h \to 0$. □

On écrit souvent de façon formelle,

$$df(X_t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_t)\, dX_t^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(X_t)\, d\langle X^j, X^k\rangle_t. \tag{14}$$

Corollaire 6.4.2. — *Soit X une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p)$. Alors $f(t, X_t)$ est une semimartingale et*

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) =$$

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \sum_{j=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(s, X_s)\, dX_s^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(s, X_s)\, d\langle X^j, X^k\rangle_s.$$

***Corollaire 6.4.3* (Intégration par parties)**. — *Si X et Y sont deux semimartingales,*

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t$$

CHAPITRE 7

APPLICATIONS DE LA FORMULE D'ITO

7.1. Sur le Brownien multidimensionnel

Soit B le Brownien dans $\mathbb{R}^d$ partant de 0 et $W_t = B_t + x_0$, le mouvement brownien partant de $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Pour tout temps d'arrêt, τ, par Ito, si U est un ouvert tel que $W_{t\wedge\tau} \in U$ pour tout $t \geq 0$, pour toute fonction $C^2(U)$

$$f(W_{t\wedge\tau}) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^{t\wedge\tau} \frac{\partial f}{\partial x_i}(W_s)\, dW_s^i + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau} \Delta f(W_s)\, ds$$

où Δ est le laplacien $\Delta f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Considérons pour $U = \mathbb{R}^d - \{0\}$ la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ égale à :

$$f(x) = \log \|x\|, \text{ si } d = 2 \text{ et } f(x) = \frac{1}{\|x\|^{d-2}}, \text{ si } d \geq 3.$$

En dehors de 0, $\Delta f = 0$ (on dit que f est harmonique). Donc

Lemme 7.1.1. — *Si τ est un temps d'arrêt tel que W_t^τ ne s'annule jamais, $f(W_t^\tau)$ est une martingale locale.*

Proposition 7.1.2 **(Les points sont polaires en dimension ≥ 2)**
Si $d \geq 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{P}(\exists t > 0; B_t = x) = 0.$$

Preuve: Il suffit de traiter le cas $d = 2$. Supposons d'abord $x_0 \neq 0$. Montrons que

$$\mathbb{P}(\exists t > 0; W_t = 0) = 0.$$

Choisissons $r, R > 0$ tels que $r < ||x_0|| < R$, posons $T_r = \inf\{t \geq 0; ||W_t|| = r\}, T_R = \inf\{t \geq 0; ||W_t|| = R\}$ et $\tau = T_r \wedge T_R$. Puisque $\ln(||W_t^\tau||)$ est une martingale locale bornée,

$$\mathbb{E}[\ln(||W_t^\tau||)] = \mathbb{E}[\ln(||W_0^\tau||)] = \ln||x_0||$$

donc, en faisant $t \to +\infty$, par convergence dominée,

$$\mathbb{E}[\ln(||W_\tau||)] = \ln||x_0||$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}(T_r < T_R)\ln r + \mathbb{P}(T_r > T_R)\ln R = \ln||x_0||$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}(T_r < T_R) = \frac{\ln R - \ln||x_0||}{\ln R - \ln r}. \tag{15}$$

En faisant tendre r vers 0 on obtient que

$$\mathbb{P}(T_0 \leq T_R) = 0,$$

car $\{T_0 \leq T_R\} = \cup_{r<R}\{T_r < T_R\}$. Puis en faisant tendre R vers $+\infty$,

$$\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 0.$$

Donc partant de $x_0 \neq 0$ on n'atteint pas 0. Ensuite, puisque pour tout $\varepsilon > 0$, $\tilde{B}_t = B_{t+\varepsilon} - B_\varepsilon, t \geq 0$, est un brownien indépendant de B_ε et puisque $B_\varepsilon \neq 0$, p.s., on a (en prenant dans ce qui précède $W_t = \tilde{B}_t + B_\varepsilon$)

$$\mathbb{P}(\exists t > \varepsilon, B_t = 0) = \mathbb{P}(\exists t > 0, B_{\varepsilon+t} = 0) = \mathbb{P}(\exists t > 0, \tilde{B}_t = -B_\varepsilon) = 0$$

et, en faisant tendre ε vers 0, $\mathbb{P}(\exists t > 0, B_t = 0) = 0$.

Proposition 7.1.3. — *En dimensions $d = 1, 2$, pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^d$*

$$\mathbb{P}(\exists t > 0; B_t \in U) = 1$$

et, p.s.,

$$\liminf_{t\to+\infty} ||B_t|| = 0.$$

Si $d \geq 3$, p.s.,

$$\lim_{t\to+\infty} ||B_t|| = +\infty.$$

Preuve: Le cas $d = 1$ est clair. Pour $d = 2$ en reprenant la preuve précedente on voit en commençant par faire tendre R vers l'infini dans (15), que pour tout x_0, $\mathbb{P}(T_r < +\infty) = 1$ et donc que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{P}(\exists t > 0; ||B_t - x|| < \varepsilon) = 1.$$

On conclut alors facilement. Par contre pour $d \geq 3$, puisque ce n'est plus $\ln ||x||$ mais $||x||^{2-d}$ qui est harmonique hors de 0, on obtient à la place de l'équation (15),

$$\mathbb{P}(T_r < T_R) = \frac{R^{2-d} - ||x_0||^{2-d}}{R^{2-d} - r^{2-d}}.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient que, partant de x_0,

$$\mathbb{P}(T_r < +\infty) = \frac{||x_0||^{2-d}}{r^{2-d}}.$$

On a donc, pour tout $M > 0$,

$$\mathbb{P}(\liminf_{t\to+\infty} |B_t| \geq r) \geq \mathbb{P}(\|B_{t+T_M}\| \geq r, \forall t \geq 0) \geq 1 - \frac{M^{2-d}}{r^{2-d}} \to 1$$

quand M tend vers l'infini si $d > 2$.

Remarque : On peut maintenant justifier que $M_t := 1/||B_{t+1}||$ est bien une martingale locale pour le brownien dans $\mathbb{R}^3$.

7.2. Martingales exponentielles

7.2.1. Définition. —

Théorème 7.2.1. — *Soit M une martingale locale. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,*

$$\mathcal{E}(\lambda M) = \exp(\lambda M - \frac{1}{2}\lambda^2\langle M, M\rangle)$$

est une martingale locale et

$$d\mathcal{E}(\lambda M) = \lambda\mathcal{E}(\lambda M)\, dM.$$

Si N est une martingale locale strictement positive, il existe une martingale locale M telle que $N = \mathcal{E}(M)$

Preuve: Il suffit pour la partie directe d'appliquer la formule d'Ito aux fonctions parties réelles et imaginaires de $f(x) = e^x$ et à la semimartingale $\lambda M - \frac{\lambda^2}{2}\langle M, M\rangle$. Pour la réciproque on applique Ito à $\log(N_t)$.

Proposition 7.2.2. — *Soit M une martingale locale à valeurs positives ou nulles telle que M_0 est intégrable. Alors M est une surmartingale (i.e. $-M$ est une sous martingale). On a toujours $\mathbb{E}(M_T) \leq \mathbb{E}(M_0)$. Si $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$, alors M est une martingale.*

Preuve: Soit τ_n réduisant M. Par Fatou conditionnel

$$\mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_s) \leq \mathbb{E}(\liminf_{n\to+\infty} M_T^{\tau_n}|\mathcal{F}_s) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}(M_T^{\tau_n}|\mathcal{F}_s) = \liminf_{n\to+\infty} M_s^{\tau_n} = M_s$$

donc M_t est une surmartingale. Pour $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_s) \leq \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$$

donc

$$\mathbb{E}(M_T) \leq \mathbb{E}(M_t) \leq \mathbb{E}(M_s) \leq E(M_0) < +\infty.$$

Si $\mathbb{E}(M_T) = E(M_0)$ alors $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_s)$. Donc $M_s - \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \geq 0$ est d'espérance nulle, donc nul p.s.

Corollaire 7.2.3. — *Soit M une martingale locale nulle en 0 et $\mathcal{E}(M) = \exp(M - \frac{1}{2}\langle M, M\rangle)$. Alors $\mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_T) \leq 1$ et, si $\mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_T) = 1$ pour un $T > 0$, alors $\mathcal{E}(M)_t, t \leq T$, est une (vraie) martingale.*

7.2.2. Critère de Paul Lévy. —

Proposition 7.2.4. — *Soit M une martingale locale (continue) nulle en 0 de crochet t. Alors M est un $(\mathcal{F}_t)$–brownien.*

Preuve: Par le théorème précédent, pour tout λ réel, $\mathcal{E}(i\lambda M)$ est une martingale locale bornée sur $[0, T]$ par $e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}$ donc une martingale : pour $0 < s < t$,

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(i\lambda M_t)|\mathcal{F}_s] = \mathcal{E}(i\lambda M_s)$$

autrement dit,

$$\mathbb{E}[\exp(i\lambda M_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)|\mathcal{F}_s] = \exp(i\lambda M_s - \frac{1}{2}\lambda^2 s)$$

d'où

$$\mathbb{E}[\exp(i\lambda(M_t - M_s))|\mathcal{F}_s] = \exp(-\frac{1}{2}\lambda^2(t - s))$$

et l'on conclut facilement.

7.2.3. Dubins-Schwarz. —

Proposition 7.2.5. — *Soit M une martingale locale nulle en 0. Alors il existe un brownien B tel que $M_t = B_{\langle M,M\rangle_t}$.*

Preuve: Ne traitons que le cas plus simple où $\langle M, M\rangle$ est strictement croissant et $\langle M, M\rangle_\infty = \infty$. Dans ce cas, pour chaque $\omega \in \Omega$, la fonction $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \langle M, M\rangle_t(\omega) \in \mathbb{R}^+$ est bijective. Notons $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sigma_t(\omega) \in \mathbb{R}^+$ l'inverse de cette fonction (qui vérifie donc $\langle M, M\rangle_{\sigma_t} = \sigma_{\langle M,M\rangle_t} = t$). Chaque σ_t est un temps d'arrêt car

$$\{\sigma_t \le s\} = \{\langle M, M\rangle_{\sigma_t} \le \langle M, M\rangle_s\} = \{t \le \langle M, M\rangle_s\}$$

est $\mathcal{F}_s$–mesurable. Pour $n \in \mathbb{N}$, M^{σ_n} est une vraie martingale car

$$\langle M^{\sigma_n}, M^{\sigma_n}\rangle_t \le \langle M, M\rangle_{\sigma_n} = n$$

et par Doob

$$\mathbb{E}(\sup_{t\ge 0}(M_t^{\sigma_n})^2) \le \lim_{T\to+\infty} \mathbb{E}(\sup_{t\le T}(M_t^{\sigma_n})^2) \le 4\mathbb{E}(\langle M, M\rangle_{\sigma_n}) = n.$$

On n'a donc pas de mal à justifier l'application du théorème d'arrêt pour obtenir que si $s \le t$,

$$\mathbb{E}(M_{\sigma_t}^{\sigma_n} | \mathcal{F}_{\sigma_s}) = M_{\sigma_s}^{\sigma_n}.$$

Donc M_{σ_t} est une $(\mathcal{F}_{\sigma_t})$-martingale locale. On voit de la même façon que

$$(M^2 - \langle M, M\rangle)_{\sigma_t} = M_{\sigma_t}^2 - t$$

est une martingale locale. On conclut donc avec le critère de Lévy que $B_t = M_{\sigma_t}$ est un mouvement brownien. On termine en remarquant que $M_t = B_{\langle M,M\rangle_t}$.

Proposition 7.2.6. — *Soit M une martingale locale. Presque sûrement,*
a. Sur $\langle M, M\rangle_\infty = +\infty$,

$$\limsup_{t\to+\infty} M_t = +\infty,\ \liminf_{t\to+\infty} M_t = -\infty$$

et $\lim_{t\to+\infty} M_t/\langle M, M\rangle_t = 0$.
b. Sur $\langle M, M\rangle_\infty < +\infty$, M_t converge quand $t \to +\infty$.

Corollaire 7.2.7. — *Une martingale locale positive converge p.s.*

7.3. Théorèmes de représentation

Théorème 7.3.1 **(Théorème de représentation L^2)**
On suppose que $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration du brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$. Si $Z \in L^2(\mathcal{F}_T)$, il existe un unique processus K dans $L^2_T(B)$ tel que

$$Z - \mathbb{E}(Z) = \int_0^T K_s \, dB_s. \tag{16}$$

Preuve: Les combinaisons linéaires des v.a.

$$U = \exp(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})),$$

$n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}, t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq T$, sont denses dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$. En effet soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ tel que

$$\mathbb{E}[X \exp(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}))] = 0.$$

Notons μ^+ et μ^+ les probabilités sur $\mathbb{R}^n$ images de $\frac{X^+}{\mathbb{E}(X^+)} d\mathbb{P}$ et $\frac{X^-}{\mathbb{E}(X^-)} d\mathbb{P}$ par le vecteur $(B_{t_1} - B_{t_0}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$. Ces deux probabilités ont la même transformée de Fourier donc sont égales. Autrement dit pour tout $A \in \sigma(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}, j = 1, \cdots, n)$, $\mathbb{E}(1_A X) = 0$. Par classe monotone, c'est vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_T$. Donc $X = 0$.

Notons $\tilde{H}$ l'ensemble des Z de $L^2(\mathcal{F}_T)$ admettant la représentation (16). C'est un fermé car si $Z_n \to Z$ dans L^2 et

$$Z_n = \mathbb{E}(Z_n) + \int_0^T K_s^n \, dB_s$$

la suite $Z_n - \mathbb{E}(Z_n)$ est de Cauchy donc K^n est de Cauchy dans $L^2_T(B)$, qui est complet. Si $K_n \to K$, alors

$$Z = \mathbb{E}(Z) + \int_0^T K_s \, dB_s.$$

Montrons que chaque v.a. U est dans $\tilde{H}$. Posons $G_t = \sum_{j=1}^n \lambda_j 1_{[t_{j-1}, t_j[}(t)$, $M_t = e^{i \int_0^t G_s \, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t G_s^2 \, ds}$ et $\gamma = e^{-\frac{1}{2} \int_0^T G_s^2 \, ds}$. Remarquons que γ n'est pas aléatoire et que $dM_t = iG_t M_t dB_t$. On a

$$U = e^{i \int_0^T G_s \, dB_s} = e^{i \int_0^T G_s \, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^T G_s^2 \, ds} e^{-\frac{1}{2} \int_0^T G_s^2 \, ds} = \gamma M_t$$

donc

$$U = \gamma [1 + \int_0^T i G_t M_t \, dB_t]$$

$$U = \mathbb{E}(U) + \int_0^T i\gamma G_t M_t \, dB_t$$

ce qui montre que U est dans $\tilde{H}$. Finalement $\tilde{H}$ est fermé et contient un sous ensemble dense dans $L^2_T(B)$, il lui est donc égal. Ceci montre l'existence de la représentation (16). Pour l'unicité, si (16) est vrai pour K et K', alors $\int_0^T K_s \, dB_s = \int_0^T K'_s \, dB_s$ donc

$$\mathbb{E}(\int_0^T (K_s - K'_s) \, dB_s)^2 = \int_0^T \mathbb{E}(K_s - K'_s)^2 \, ds = 0$$

et $K_s = K'_s$, p.s.

Théorème 7.3.2 **(Théorème de représentation des martingales)**

Si M_t est une $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$-martingale locale (sous entendu continue), il existe un processus $K \in L^{(0)}(B)$ tel que

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s \, dB_s.$$

Preuve: On peut supposer que $M_0 = 0$. Soit $\tau_n = \inf\{t \geq 0; |M_t| \geq n\}$. Puisque $M_T^{\tau_n}$ est borné, il existe par le théorème précédent un unique processus $K^n \in L^2_T(B)$ tel que

$$M_T^{\tau_n} = \int_0^T K_s^n \, dB_s$$

Alors, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$M_t^{\tau_n} = \mathbb{E}(M_T^{\tau_n} | \mathcal{F}_t) = \int_0^t K_s^n \, dB_s$$

Si $m \geq n$

$$M_t^{\tau_m} = \int_0^t K_s^m \, dB_s$$

donc puisque $\tau_n \leq \tau_m$,

$$M_t^{\tau_n} = \int_0^{t \wedge \tau_n} K_s^m \, dB_s = \int_0^t K_s^m 1_{\{s \leq \tau_n\}} \, dB_s$$

Par unicité

$$K_s^m 1_{\{s \leq \tau_n\}} = K_s^n$$

On peut donc poser sans ambiguité, pour $s \leq \tau_n$

$$K_s = K_s^n$$

Alors on aura, pour tout n

$$M_t^{\tau_n} = \int_0^t K_s \, dB_s$$

donc, puisque $\tau_n \to +\infty$,

$$M_t^{\tau_n} = \int_0^t K_s \, dB_s$$

Corollaire 7.3.3. — *Si $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \le s \le t)$, toutes les $\mathcal{F}_t$-martingales sont continues p.s.*

Preuve: Soit M est une martingale arbitraire et $T > 0$. Considérons une suite Z_n de v.a. bornées qui tend vers M_T dans L^1, on peut écrire

$$Z_n = \mathbb{E}(Z_n) + \int_0^T K_s^n \, dB_s$$

et alors, pour $0 \le t \le T$,

$$M_t^{(n)} = \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(Z_n) + \int_0^t K_s^n \, dB_s$$

est continue. Par Doob

$$\mathbb{P}(\sup_{0 \le s \le T} |M_s^{(n)} - M_s^{(m)}| > \varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}(|X_n - X_m|)}{\varepsilon}$$

il en résulte qu'une sous suite de $M^{(n)}$ converge uniformeément sur $[0, T]$, p.s., vers M. Donc M est continue.

***Corollaire 7.3.4* (Théorème de représentation L^1)**

Si $Z \in L^1(\mathcal{F}_T)$, où $\mathcal{F}_T = \sigma(B_s, 0 \le s \le T)$, il existe un processus K dans $L_T^{(0)}(B)$ tel que

$$Z - \mathbb{E}(Z) = \int_0^T K_s \, dB_s. \tag{17}$$

Preuve: Par la corollaire précédent $M_t = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_t), 0 \le t \le T$, est une martingale continue. Elle s'écrit donc par le théorème de représentation des martingales

$$M_t = M_0 + int_0^t K_s \, dB_s$$

où K dans $L_T^{(0)}(B)$. Il suffit alors de remarquer que $Z = M_T$.

7.4. Girsanov

Sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$ on dit que deux probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes si il existe une v.a. Z strictement positive telle que pour tout $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{Q}(A) = \int 1_A Z \, d\mathbb{P}.$$

On écrira $\mathbb{Q} = Z{\cdot}\mathbb{P}$, ou $d\mathbb{Q} = Z\, d\mathbb{P}$. Par application du théorème de convergence monotone c'est la même chose que dire que pour toute v.a. X, $\mathcal{F}$–mesurable positive,

$$\int X \, d\mathbb{Q} = \int XZ \, d\mathbb{P}.$$

On continuera à noter $\mathbb{E}$ l'espérance par rapport à $\mathbb{P}$ mais on notera $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ l'espérance par rapport à $\mathbb{Q}$. Autrement dit $\mathbb{E}(X) = \int X \, d\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \int X \, d\mathbb{Q} = \int XZ \, d\mathbb{P}$..

***Théorème 7.4.1* (Girsanov).** — *Soit M une martingale locale nulle en 0 sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, $T > 0$ et*

$$Z_T = e^{M_T - \frac{1}{2}\langle M, M\rangle_T}.$$

On suppose que $\mathbb{E}(Z_T) = 1$ et on note $\mathbb{Q}$ la probabilité $Z_T \cdot \mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Alors pour toute martingale locale N sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, le processus $X_t = N_t - \langle N, M\rangle_t, 0 \le t \le T$, est une martingale locale sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \le T}, \mathbb{Q})$ de processus croissant $\langle N, N\rangle_t$.

Preuve: Montrons d'abord que, sous $\mathbb{P}$, $X_t Z_t$ est une martingale locale. Puisque $dZ = ZdM$ et $d\langle N, Z\rangle = Zd\langle N, M\rangle$ la formule d'Ito nous montre que

$$d(XZ) = d(NZ - \langle N, M\rangle Z) = ZdN + NdZ + d\langle N, Z\rangle - \langle N, M\rangle dZ - Zd\langle N, M\rangle$$

$$= ZdN + NdZ - \langle N, M\rangle dZ$$

est une somme d'intégrales stochastiques par rapport à des martingales locales, donc une martingale locale. Soit (τ_n) réduisant XZ en martingale et soit τ un temps d'arrêt borné par T, alors, en utilisant à la fois que, sous $\mathbb{P}$, Z (cf. Lemme 7.2.3) et $(XZ)^{\tau_n}$ sont des martingales,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_\tau^{\tau_n}] = \mathbb{E}[X_\tau^{\tau_n} Z_T] = \mathbb{E}[X_\tau^{\tau_n} \mathbb{E}(Z_T | \mathcal{F}_{\tau_n \wedge \tau})]$$

$$= \mathbb{E}[X_\tau^{\tau_n} Z_{\tau_n \wedge \tau}] = \mathbb{E}[(XZ)_\tau^{\tau_n}] = \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_0],$$

(car $Z_0 = 1$). Donc X^{τ_n} est une $\mathbb{Q}$-martingale (Corollaire 4.3.8).

Le crochet pouvant s'obtenir par une limite p.s. ne dépend que de la classe d'équivalence des probabilités (puisqu'alors les ensembles négligeables sont les mêmes).

Il résulte de ce théorème que les semimartingales pour $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont les mêmes (jusqu'en T). Par l'argument de la fin de la preuve, ou la propriété caractéristique par exemple, on voit aussi que les intégrales stochastiques sont les mêmes pour $\mathbb{P}$ et pour $\mathbb{Q}$.

Pour vérifier l'hypothèse du théorème de Girsanov, on utilise le critère de Novikov :

7.5. Critère de Novikov

Lemme 7.5.1. — *Une famille $\{X_i, i \in I\}$ est uniformément intégrable si et seulement si $\sup_{i\in I} E(|X_i|) < +\infty$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\mathbb{P}(A) \leq \eta$ alors $\mathbb{E}(1_A|X_i|) \leq \varepsilon$ pour tout $i \in I$.*

Preuve: Si le crière est vérifié, étant donné $\varepsilon > 0$, par Markov,

$$\mathbb{P}(|X_i| \geq a) \leq \frac{\sup \mathbb{E}(|X_i|)}{a} \leq \eta$$

pour a assez grand, donc $\mathbb{E}(1_{\{|X_i|\geq a\}}|X_i|) \leq \varepsilon$. Réciproquement, si la famille est uniformément intégrable, pour M assez grand, et $\mathbb{P}(A) \leq \varepsilon/2M$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X|1_A) &\leq \mathbb{E}(|X|1_A 1_{\{|X|\geq M\}}) + \mathbb{E}(|X|1_A 1_{\{|X|\leq M\}})\\ &\leq \mathbb{E}(|X|1_{\{|X|\geq M\}}) + M\mathbb{P}(A) \leq \varepsilon\end{aligned}$$

***Théorème 7.5.2* (Critère de Novikov)**. — *Soit M martingale locale nulle en 0, telle que $\mathbb{E}(e^{\frac{\langle M,M\rangle_T}{2}}) < +\infty$. Alors $\mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_T) = 1$.*

Preuve: Rappelons d'abord (Corollaire 7.2.3) que $\mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_T) \leq 1$. Pour tout $A \in \mathcal{F}_T$,

$$1_A e^{\frac{M_T}{2}} = \mathcal{E}(M)_T^{1/2} 1_A (e^{\frac{\langle M,M\rangle_T}{2}})^{1/2},$$

donc par Cauchy Schwarz,

$$\mathbb{E}(1_A e^{\frac{M_T}{2}}) \leq [\mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_T)]^{1/2} [\mathbb{E}(1_A e^{\frac{\langle M,M\rangle_T}{2}})]^{1/2} \leq [\mathbb{E}(1_A e^{\frac{\langle M,M\rangle_T}{2}})]^{1/2}.$$

Pour $0 < a < 1$, posons $X = \exp \frac{aM_T}{1+a}$, alors

$$\mathcal{E}(aM)_T = e^{aM_T - \frac{a^2}{2}\langle M,M\rangle_T} = (e^{M_T - \frac{1}{2}\langle M,M\rangle_T})^{a^2} e^{a(1-a)M_T} = \mathcal{E}(M)_T^{a^2} X^{1-a^2}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder on a

$$\mathbb{E}(1_A\mathcal{E}(aM)_T) \le \mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_T)^{a^2}\mathbb{E}(1_AX)^{1-a^2} \le \mathbb{E}(1_AX)^{1-a^2}. \tag{18}$$

Comme $(1+a)/2a > 1$ on peut appliquer l'inégalité de Jensen $(\mathbb{E}(U)^{(1+a)/2a} \le \mathbb{E}(U^{(1+a)/2a})$,

$$\mathbb{E}(1_AX) = \mathbb{E}(1_A \exp\frac{aM_T}{1+a}) \le \mathbb{E}(1_A e^{\frac{M_T}{2}})^{\frac{2a}{1+a}}.$$

On arrive donc à

$$\mathbb{E}(1_A\mathcal{E}(aM)_T) \le \mathbb{E}(1_A e^{\frac{M_T}{2}})^{2a(1-a)} \le [\mathbb{E}(1_A e^{\frac{\langle M,M\rangle_T}{2}})]^{a(1-a)}.$$

Pour tout temps d'arrêt τ, en appliquant ceci à M^τ, on obtient que

$$\mathbb{E}(1_A\mathcal{E}(aM)_{\tau\wedge T}) \le [\mathbb{E}(1_A e^{\frac{\langle M,M\rangle_T}{2}})]^{a(1-a)}.$$

Il résulte du lemme que la famille $\mathcal{E}(aM)_{\tau\wedge T}$ est uniformément intégrable. Et donc (pourquoi ?) que la martingale locale $\mathcal{E}(aM)_t$ est une vraie martingale. En particulier $\mathbb{E}(\mathcal{E}(aM)_T) = 1$. Pour atteindre le cas $a = 1$ on écrit que par (18) avec $A = \Omega$,

$$1 = \mathbb{E}(\mathcal{E}(aM)_T) \le \mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_T)^{a^2}\mathbb{E}(X)^{1-a^2}$$

donc en prenant $a \to 1$, $\mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_T) = 1$. □

Remarque : On a aussi $\mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_T|\mathcal{F}_0) = 1$ puisque $\mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_T|\mathcal{F}_0) \le 1$ et $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_T|\mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(\mathcal{E}(M)_T) = 1$.

7.6. Cameron-Martin

***Corollaire 7.6.1* (Cameron–Martin).** — *Soit B un brownien sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ et $\phi_s \in L^0(B)$. On suppose que $Z_T = \exp[\int_0^T \phi_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \phi_s^2\, ds]$ vérifie $\mathbb{E}(Z_T) = 1$. Alors, pour $0 \le t \le T$, $\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \phi_s\, ds$ est un mouvement brownien sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, \mathbb{Q})$ où $d\mathbb{Q} = Z_T\, d\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$.*

Preuve: d'après le critère de Lévy, il suffit de voir que $\tilde{B}_t$ est une martingale locale de processus croissant t ce qui est immédiat par le théorème. □

Le critère suivant est très utile :

***Corollaire 7.6.2* (Variante de Novikov).** — *Si il existe $\mu > 0$ tel que $\int_0^T \mathbb{E}(e^{\mu\phi_t^2})\, dt < +\infty$, alors $\mathbb{E}(Z_T) = 1$.*

Preuve: On choisit $t_0 = 0 < t_1 \cdots < t_n = T$ avec $t_{i+1} - t_i < 2\mu$ et on pose $\phi_i = \phi 1_{[t_i, t_{i+1}[}$. Alors, écrivons, en utilisant que pour toute probabilité ν,$\exp \int |f|\, d\nu \leq \int \exp |f|\, dp$ (conséquence de l'inégalité de Jensen),

$$\mathbb{E}(e^{\frac{1}{2}\int_0^T \phi_i(s)^2\, ds}) = \mathbb{E}(\exp[\frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{(t_{i+1} - t_i)\phi(s)^2}{2}\, ds])$$

$$\leq \mathbb{E}(\frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \exp \frac{(t_{i+1} - t_i)\phi(s)^2}{2}\, ds) \leq \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E} \exp \mu\phi(s)^2\, ds$$

est fini, donc en appliquant la remarque suivant Novikov au processus $\frac{Z_{t_i+t}}{Z_{t_i}}, t \geq 0$, on voit que

$$\mathbb{E}(\frac{Z_{t_{i+1}}}{Z_{t_i}} | \mathcal{F}_{t_i}) = 1.$$

Donc de proche en proche,

$$\mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}(Z_{t_0} \frac{Z_{t_1}}{Z_{t_0}} \cdots \frac{Z_{t_n}}{Z_{t_{n-1}}}) = 1.$$

CHAPITRE 8

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

8.1. Introduction

Notons $M_{p\times d}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $p \times d$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soient $\sigma : \mathbb{R}^p \to M_{p\times d}(\mathbb{R})$ et $b : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions mesurables localement bornées (i.e. bornées sur chaque boule) définies sur $\mathbb{R}^p$. Pour $x \in \mathbb{R}^p$, on considère l'équation différentielle stochastique (E.D.S.)

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t + b(X_t)\, dt, \qquad X_0 = x \in \mathbb{R}^p; \tag{19}$$

pour $B_t \in \mathbb{R}^d$ et $X_t \in \mathbb{R}^p$. Etant donné un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien d dimensionnel B sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, muni de sa filtration, on appelle solution (forte) de cette équation un processus adapté continu X_t tel que, en coordonnées, pour $i = 1, \cdots, p$, pour tout $t \geq 0$,

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_{ij}(X_s)\, dB_s^{(j)} + \int_0^t b_i(X_s)\, ds$$

Le cas d'une équation à coefficients dépendant du temps, du type

$$dX_t = \sigma(t, X_t)\, dB_t + b(t, X_t)\, dt$$

se ramène à cette situation en travaillant dans $\mathbb{R}^{p+1}$, en rajoutant une composante $X_t^{(0)} = t$. Le lemme suivant est crucial.

***Lemme 8.1.1* (Gronwall).** — *Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée telle que, pour $a, b \geq 0$,*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)\, ds, \ \textit{pour tout } 0 \leq t \leq T.$$

Alors $g(t) \leq ae^{bt}$ sur $[0,T]$.

Preuve: On pose $G(t) = a + b\int_0^t g(s)\,ds$ et $H(t) = a + b\int_0^t G(s)\,ds$. Alors

$$g(t) \le G(t) \le H(t)$$

et $H(t) \le a + b\int_0^t H(s)\,ds$. Il suffit donc majorer H or H est dérivable et

$$(e^{-bt}H(t))' = -be^{-bt}H(t) + e^{-bt}H'(t) = -be^{-bt}H(t) + be^{-bt}g(t) \le 0$$

donc $e^{-bt}H(t) \le H(0) = a$. $\square$

8.2. Solutions fortes d'E.D.S.

On considère l'équation (19). On dit que b et σ sont lipschitziennes si il existe $K > 0$ tel que, partout,

$$||b(x) - b(y)|| \le K||x - y||, \qquad ||\sigma(x) - \sigma(y)|| \le K||x - y||.$$

(on peut prendre comme norme, par exemple, $||\sigma(x)|| = (\sum_{i,j}\sigma_{i,j}(x)^2)^{1/2}$ et $||b(x)|| = (\sum_i b_i(x)^2)^{1/2}$). Le théorème fondamental est le suivant :

Théorème 8.2.1. — *Soit $B_t, t \ge 0$, un $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ mouvement brownien d–dimensionnel. On suppose que b et σ sont lipschitziennes. Etant donné $x \in \mathbb{R}^p$ il existe un et un seul processus continu adapté X tel que pour tout $t \ge 0$,*

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s.$$

Preuve: En dimensions $p = d = 1$, pour simplifier les notations uniquement.
1. **Unicité** : Si X, X' sont deux solutions. On localise avec $\tau = \inf\{t > 0; |X_t - X'_t| \ge n\}$:

$$X_{t\wedge\tau} - X'_{t\wedge\tau} = \int_0^{t\wedge\tau}(b(X_s) - b(X'_s))\,ds + \int_0^{t\wedge\tau}(\sigma(X_s) - \sigma(X'_s))\,dB_s.$$

Puisque $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$, et en appliquant Cauchy Schwarz, si $t \le T$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}([X_{t\wedge\tau} - X'_{t\wedge\tau}]^2) \le\, & \\
& \le 2\mathbb{E}([\int_0^{t\wedge\tau}(b(X_s) - b(X'_s))\,ds]^2) + 2\mathbb{E}([\int_0^{t\wedge\tau}(\sigma(X_s) - \sigma(X'_s))\,dB_s]^2) \\
& \le 2\mathbb{E}((t\wedge\tau)[\int_0^{t\wedge\tau}(b(X_s) - b(X'_s))^2\,ds]) + 2\mathbb{E}([\int_0^{t\wedge\tau}(\sigma(X_s) - \sigma(X'_s))^2\,ds]) \\
& \le 2\mathbb{E}(T[\int_0^{t\wedge\tau}(K|X_s - X'_s|)^2\,ds]) + 2\mathbb{E}([\int_0^{t\wedge\tau}(K|X_s - X'_s|)^2\,ds]) \\
& \le 2(T+1)K^2\int_0^t \mathbb{E}(|X_{s\wedge\tau} - X'_{s\wedge\tau}|)^2\,ds.
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}[X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau}]^2=0$ par le lemme de Gronwall. On en déduit que $X=X'$.

2. **Existence** : on utilise ce qu'on appelle le schéma de Picard. On pose, pour tout $t\geq 0$, $X_t^0=x$ puis par récurrence

$$X_t^n = x+\int_0^t b(X_s^{n-1})\,ds+\int_0^t \sigma(X_s^{n-1})\,dB_s$$

On a

$$X_t^{n+1}-X_t^n=\int_0^t (b(X_s^n)-b(X_s^{n-1}))\,ds+\int_0^t (\sigma(X_s^n)-\sigma(X_s^{n-1}))\,dB_s$$

Posons

$$g_n(u)=\mathbb{E}(\sup_{t\leq u}[X_t^{n+1}-X_t^n]^2).$$

Si $0\leq u\leq T$,

$$\begin{aligned}
g_n(u) &\leq 2\mathbb{E}(\sup_{t\leq u}[\int_0^t (b(X_s^n)-b(X_s^{n-1}))\,ds]^2)+2\mathbb{E}(\sup_{t\leq u}[\int_0^t (\sigma(X_s^n)-\sigma(X_s^{n-1}))\,dB_s]^2)\\
&\leq 2\mathbb{E}(T\int_0^u (b(X_s^n)-b(X_s^{n-1}))^2\,ds)+8\mathbb{E}([\int_0^u (\sigma(X_s^n)-\sigma(X_s^{n-1}))^2\,ds)\\
&\leq 2(T+4)K^2\int_0^u \mathbb{E}(|X_s^n-X_s^{n-1}|^2)\,ds\\
&\leq 2(T+4)K^2\int_0^u \mathbb{E}(\sup_{s\leq v}|X_s^n-X_s^{n-1}|^2)\,dv = C\int_0^u g_{n-1}(v)\,dv
\end{aligned}$$

pour $C=2(T+4)K^2$. On en déduit par récurrence que,

$$g_n(t)\leq \frac{C^n t^{n-1}}{(n-1)!}g_0(t)$$

or

$$g_0(t)\leq \mathbb{E}(\sup_{s\leq T}[X_s^1-x]^2)\leq \mathbb{E}(\sup_{s\leq T}(sb(x)+\sigma(x)B_s)^2))\leq Cte$$

On a donc

$$\mathbb{E}(\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{t\leq T}[X_t^{n+1}-X_t^n]^2)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(T)<+\infty.$$

On en déduit facilement que X^n converge p.s. vers une solution X de l'équation.

8.3. Localisation

On dit que b et σ sont localement lipschitziennes si pour tout $N > 0$ il existe $K_N, K'_N > 0$ tel que, si $||x|| \leq N, ||y|| \leq N$,

$$||b(x) - b(y)|| \leq K_N||x - y||, \qquad ||\sigma(x) - \sigma(y)|| \leq K'_N||x - y||.$$

C'est le cas par exemple dans le cas fondamental où les fonctions b et σ sont de classe C^1, par le théorème des accroissements finis.

Théorème 8.3.1. — *On suppose que b et σ sont localement lipschitziennes. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ il existe un temps d'arrêt $\xi \leq +\infty$ et un processus X tel que pour tout $t < \xi$, X_t est solution de l'E.D.S.,*

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t + b(X_t)\, dt, \qquad X_0 = x.$$

Lorsque $\xi < +\infty$, $\limsup_{t \to \xi^-} ||X_t|| = +\infty$. Dans ce cas on dit qu'il y a explosion.

Si, de plus il existe $K > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$,

$$||\sigma(x)|| + ||b(x)|| \leq K(1 + ||x||) \tag{20}$$

alors $\xi = +\infty$ p.s. et pour tout $m, T > 0$,

$$\mathbb{E}(\sup_{t \leq T} \|X_t\|^m) < +\infty.$$

Preuve: Pour tout $n > 0$ on se donne une fonction $\phi_n : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^1, égale à 1 sur $\{x; ||x|| \leq n\}$ et à 0 sur $\{x; ||x|| \geq n+1\}$. Les fonctions $b_n = b\phi_n$ et $\sigma_n = \sigma\phi_n$ sont lipschitziennes. Il existe donc une unique solution $X^{(n)}$ de l'E.D.S.

$$dX_t^{(n)} = \sigma_n(X_t^{(n)})\, dB_t + b_n(X_t^{(n)})\, dt, \qquad X_0^{(n)} = x.$$

On prend $n \geq ||x||$. Soit $\tau_n = \inf\{t \geq 0; ||X_t^{(n)}|| \geq n\}$. Si $m \geq n$, soit $\tau_m^n = \inf\{t \geq 0; ||X_t^{(m)}|| \geq n\}$. Alors $b_m(X_{t\wedge\tau_m^n}^{(m)}) = b(X_{t\wedge\tau_m^n}^{(m)})$ et $\sigma_m(X_{t\wedge\tau_m^n}^{(m)}) = \sigma(X_{t\wedge\tau_m^n}^{(m)})$. Comme pour la preuve de l'unicité dans la preuve du théorème 8.2.1 on en déduit que pour tout $m \geq n$,

$$X_{t\wedge\tau_m^n}^{(m)} = X_{t\wedge\tau_n}^{(n)}$$

en particulier $\tau_m^n \geq \tau_n$. On peut donc poser, dès que $\tau_n \geq t$,

$$X_t = X_t^{(n)}$$

Soit $\xi = \lim_{n\to+\infty} \tau_n$. On définit ainsi, pour $t < \xi$, une solution X_t de l'E.D.S. De plus si $\xi < \infty$,

$$\limsup_{t\to\xi^-} ||X_t|| \geq \limsup_{n\to+\infty} ||X_{\tau_n}|| = \limsup_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

Supposons maintenant vérifiée la condition (20). Soit

$$\tau = \inf\{t \geq 0; \|X_t\| \geq n\}$$

avec $n \geq \|x_0\|$. Pour simplifier les notations, travaillons en dimension 1, pour $p \in \mathbb{N}$, par Ito,

$$dX_t^p = pX_t^{p-1}dX_t + \frac{p(p-1)}{2}X_t^{p-2}d\langle X, X\rangle_t$$

donc

$$X_{t\wedge\tau}^p = x_0^p + \int_0^{t\wedge\tau} [p(X_s^\tau)^{p-1}b(X_s^\tau) + \frac{p(p-1)}{2}\sigma(X_s^\tau)^2(X_s^\tau)^{p-2}]ds$$
$$+ \int_0^{t\wedge\tau} p(X_s^\tau)^{p-1}\sigma(X_s^\tau)dB_s$$

Puisque $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ on en déduit que

$$X_{t\wedge\tau}^{2p} \leq 4x_0^{2p} + 4(\int_0^{t\wedge\tau} [p(X_s^\tau)^{p-1}b(X_s^\tau) + \frac{p(p-1)}{2}\sigma(X_s^\tau)^2(X_s^\tau)^{p-2}]ds)^2$$
$$+4(\int_0^{t\wedge\tau} p(X_s^\tau)^{p-1}\sigma(X_s^\tau)dB_s)^2$$

donc par Doob, et par Cauchy Schwarz, si $0 \leq r \leq T$, pour un $T > 0$ fixé,

$$\mathbb{E}(\sup_{t\leq r} X_{t\wedge\tau}^{2p}) \leq$$
$$4x_0^{2p} + 4T(\int_0^r [p(X_s^\tau)^{p-1}b(X_s^\tau) + \frac{p(p-1)}{2}\sigma(X_s^\tau)^2(X_s^\tau)^{p-2}]^2 ds)$$
$$+16\mathbb{E}(\int_0^r [p(X_s^\tau)^{p-1}\sigma(X_s^\tau)]^2 ds$$

On peut trouver deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$4T(px^{p-1}b(x) + \frac{p(p-1)}{2}\sigma(x)^2x^{p-2})^2 + 16(px^{p-1}\sigma(x))^2 \leq \alpha + \beta|x|^{2p}$$

On a donc, en posant $\gamma = 4x_0^{2p} + T\alpha$,

$$\mathbb{E}(\sup_{t\leq r} X_{t\wedge\tau}^{2p}) \leq \gamma + \beta\int_0^r \mathbb{E}(X_{s\wedge\tau}^{2p})ds$$

donc

$$\mathbb{E}(\sup_{t\leq r} X_{t\wedge\tau}^{2p}) \leq \gamma + \beta\int_0^r \mathbb{E}(\sup_{t\leq s} X_{t\wedge\tau}^{2p})ds$$

et par Gronwall,

$$\mathbb{E}(\sup_{t\le r} X_{t\wedge\tau}^{2p}) \le \gamma e^{\beta r}.$$

Comme les constantes ne dépendent pas de n (qui a défini τ) on peut faire tendre n vers l'infini pour obtenir que

$$\mathbb{E}(\sup_{t\le r} X_t^{2p}) \le \gamma e^{\beta r}.$$

En particulier X_t est fini p.s. donc $\xi = +\infty$.

8.4. Propriété de Markov

Reprenons les hypothèses précédentes en supposant que $\xi = +\infty$, et notons X_t la solution de l'E.D.S. (19) vérifiant $X_0 = x_0$. Par construction, l'application

$$(x_0,\omega) \in \mathbb{R}^p \times \Omega \mapsto \{X_t(\omega), 0 \le t\} \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^p)$$

est mesurable lorsqu'on munit $\mathbb{R}^d \times \Omega$ de la tribu $B(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}_\infty$ et l'ensemble des fonctions continues $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^p)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^p$ de la tribu engendrée par les applications coordonnées $(f \mapsto f(t))$, par exemple. Puisque l'on peut prendre $\mathcal{F}_\infty = \sigma(B_s, s \ge 0)$, il existe une application mesurable

$$\Phi : \mathbb{R}^p \times C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^p) \to C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^p)$$

telle que

$$X_t = \Phi(x_0, B)(t).$$

De plus, par construction, Pour tout temps d'arrêt τ, fini p.s., on a

$$X_t^\tau = \Phi(x_0, B^\tau)(t).$$

Par la propriété de Markov forte on sait que le processus $\tilde{B}_t = B_{t+\tau} - B_\tau$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_\tau$, donc de X_τ. On voit facilement en prenant d'abord pour H des fonctions étagées que, pour tout H de $L^0(B)$,

$$\int_\tau^{t+\tau} H_s\, dB_s = \int_0^t H_{s+\tau}\, d\tilde{B}_s$$

La relation

$$\begin{aligned} X_{\tau+t} &= X_\tau + \int_\tau^{t+\tau} b(X_s)\, ds + \int_\tau^{t+\tau} \sigma(X_s)\, dB_s \\ &= X_\tau + \int_0^t b(X_{\tau+s})\, ds + \int_0^t \sigma(X_{\tau+s})\, d\tilde{B}_s \end{aligned}$$

montre que, si on pose ${}^\tau X_t = X_{\tau+t}$, pour tout $t \ge 0$, alors

$$ {}^\tau X = \Phi(X_\tau, \tilde{B}).$$

Puisque $\tilde{B}$ est indépendant de $\mathcal{F}_\tau$, on en déduit :

Théorème 8.4.1. — *(Propriété de Markov forte) Pour tout temps d'arrêt τ fini p.s., pour toute fonction mesurable positive F définie sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^p)$,*

$$\mathbb{E}(F({}^\tau X)|\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}_y(F(X)), \textit{pour } y = X_\tau$$

où le symbole $\mathbb{E}_y$ signifie que l'on considère la solution X telle que $X_0 = y$.

8.5. Processus de Markov

Posons, pour f mesurable positive sur $\mathbb{R}^p$, $P_t f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_t))$. En prenant $F(X) = f(X_t)$ et $\tau = s$ dans le théorème précédent on voit que

$$\mathbb{E}(f(X_{t+s})|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_y(f(X_t)) = P_t f(y), \text{ pour } y = X_s,$$

donc, en prenant l'espérance,

$$P_{t+s} f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_{t+s})) = P_s(P_t f)(x)$$

c'est la propriété dite de semigroupe. On dit que X est un processus de Markov de semigroupe (P_t). Par continuité des trajectoires en $t = 0$,

$$\lim_{t\to 0} P_t f(x) = f(x)$$

si f est continue bornée.

Définition 8.5.1. — On appelle générateur du semigroupe (P_t) l'opérateur Lf défini par

$$Lf(x) = \lim_{t\to 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t}$$

pour les f pour lesquels cette limite a un sens.

Théorème 8.5.2. — *Soit X solution de l'E.D.S.,*

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t + b(X_t)\, dt$$

Alors X est un processus de Markov dont le générateur est donné par

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{p} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

lorsque f est C^2 à support compact où $a = \sigma\sigma^*$. On dit que X est une diffusion.

Preuve: Si on applique la formule d'Ito à $f(X_t)$, on obtient,

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\sigma_{i,j}(X_s)\, dB_j(s) + \int_0^t Lf(X_s)\, ds$$

Puisque f est à support compact , $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\sigma_{i,j}(X_s)$ est borné, donc l'intégrale stochastique est une martingale, d'espérance nulle. On a alors

$$P_t f(x) = f(x) + \mathbb{E}_x(\int_0^t Lf(X_s)\, ds) = f(x) + \int_0^t P_s Lf(x)\, ds$$

Donc

$$Lf(x) = \lim_{t\to 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t P_s Lf(x)\, ds = P_0 Lf(x) = Lf(x).$$

8.6. EDS et EDP

La formule d'Ito et le théorème précédent montrent qu'il y a un lien très fort entre les EDS et les opérateurs différentiels aux dérivées partielles du second ordre du type de L. Ceci permet en particulier de donner des solutions probabilistes à certaines équations aux derivées partielles (EDP), et réciproquement. Donnons deux exemples.

8.6.1. Problème de Dirichlet. — Dans $\mathbb{R}^p$ considérons un ouvert borné D de frontière ∂D régulière. Etant donné une fonction $f : \partial D \to \mathbb{R}$ sur le bord on considère l'équation

$$L\phi(x) = 0, x \in D;$$

$$\phi(x) = f(x), x \in \partial D,$$

où ϕ est continue sur $\bar{D}$. Donnons juste l'idée du type de résultat auquel on peut s'attendre :

Théorème 8.6.1. — *Sous de bonnes hypothèses..., la solution ϕ admet la représentation*

$$\phi(x) = \mathbb{E}_x(f(X_\tau)),\ x \in D;$$

où X est la diffusion associée à (19) et $\tau = \inf\{t \geq 0; X_t \in \partial D\}$.

Preuve: On considère la solution X de (19) partant de $x \in D$. Par Ito,

$$\phi(X_{t\wedge\tau}) = \phi(x) + \int_0^{t\wedge\tau} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(X_s)\sigma_{i,j}(X_s)\, dB_j(s) + \int_0^{t\wedge\tau} L\phi(X_s)\, ds$$

On prend l'espérance et on tient compte du fait que $L\phi$ est nulle :

$$\mathbb{E}(\phi(X_{t\wedge\tau})) = \mathbb{E}(\phi(x)) = \phi(x)$$

et on fait tendre t vers l'infini, et on utilise que $\phi = f$ sur ∂D :

$$\phi(x) = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}(\phi(X_{t\wedge\tau}) = \mathbb{E}(\phi(X_\tau)) = \mathbb{E}(f(X_\tau)).$$

8.6.2. Feynman-Kac. — On se donne $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $\phi, c : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ avec $c \geq 0$. On considère une solution u bornée à dérivées bornées de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = (L - c(x))u(t,x) + g(t,x), \quad u(0,x) = \phi(x). \tag{21}$$

Théorème 8.6.2. — *La solution $u(t,x)$ de (21) vérifie :*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[\phi(X_t)\exp(-\int_0^t c(X_s)\,ds)] + \mathbb{E}_x[\int_0^t g(t-s,X_s)\exp(-\int_0^s c(X_u)\,du)\,ds]$$

où X est la diffusion associée à (19)

Preuve: On pose, $t > 0$ étant fixé,

$$v(s,x) = u(t-s,x), \quad Z_s = \exp(-\int_0^s c(X_u)\,du).$$

Appliquant la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned} d(v(s,X_s)Z_s) &= -v(s,X_s)c(X_s)Z_s\,ds + Z_s\,dv(s,X_s) \\ &= Z\{\frac{\partial v}{\partial s} + (L-c)v\}\,ds + Z\nabla_x v\,\sigma\,dB_s. \end{aligned}$$

Vu que $\nabla_x v$ est bornée et que $0 \leq Z_s \leq 1$, $\mathbb{E}(\int_0^t Z_s \nabla_x v\,\sigma(X_s)\,dB_s) = 0$. D'autre part $\frac{\partial v}{\partial s}(s,x) = -\frac{\partial u}{\partial s}(t-s,x)$ et donc

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s,x) + (L-c)v(s,x) = -\frac{\partial u}{\partial s}(t-s,x) + (L-c)u(t-s,x) = -g(t-s,x).$$

On a donc

$$\mathbb{E}(v(t,X_t)Z_t) - \mathbb{E}(v(0,X_0)Z_0) = \mathbb{E}(-\int_0^t g(t-s,X_s)Z_s\,ds),$$

mais, puisque $u(0,X_t) = \phi(X_t)$,

$$\mathbb{E}(v(t,X_t)Z_t) - \mathbb{E}(v(0,X_0)Z_0) = \mathbb{E}(u(0,X_t)Z_t) - u(t,x) = \mathbb{E}(\phi(X_t)Z_t) - u(t,x)$$

et l'on obtient

$$u(t,x) = \mathbb{E}(\phi(X_t)Z_t) + \mathbb{E}(\int_0^t g(t-s,X_s)Z_s\,ds).$$