

Die unglaubliche Beweis-Maschine

Mathetag, 14.11.2025, Mathematisches Institut, 2025

Die unglaubliche Beweis-Maschine

- ▶ Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das wahr oder falsch sein kann.
- ▶ Beispiele:

Heute ist Mathetag.

Aristoteles war ein Mensch.

Alle Menschen sind sterblich.

$1 + 1 = 1$.

- ▶ Wir schreiben A , B , C für beliebige solche Aussagen.

Lektion 1

- ▶ $A \rightarrow A$ stellen wir dar als:



- ▶ Über dem Strich steht die Voraussetzung.
- ▶ Unter dem Strich steht die Folgerung.
- ▶ $A \wedge B$ ist die Aussage A und B (*sind wahr*).

Lektion 2

- ▶ $A \rightarrow B$ ist ebenfalls eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann.
- ▶ Beispiel:

A: Es regnet.

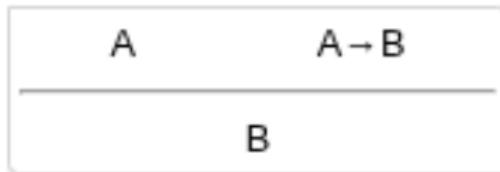
B: Die Straße ist nass.

A → B: Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.

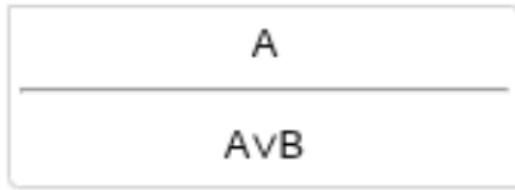
- ▶ $A \rightarrow B$ kann wahr sein, selbst wenn A nicht wahr ist!

Wenn es regnet, dann ist die Straße nass ist wahr, selbst wenn es gerade nicht regnet!

- ▶ Wenn A wahr ist, und aus A die Aussage B folgt, dann gilt B :



Lektion 3



- ▶ $A \vee B$ ist die Aussage *A oder B ist wahr.*
- ▶ $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn *A wahr ist oder B wahr ist*

Lektion 4

- ▶ True oder \top steht für eine beliebige wahre Aussage.
- ▶ False oder \perp steht für eine beliebige falsche Aussage.

- ▶ Aus einer falschen Aussage folgt alles.
- ▶ Beispiel für eine wahre Aussage:
Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann ist $1 + 1 = 1$.

Lektion 5

- ▶ Die Aussage A ist falsch ist identisch mit $A \rightarrow \perp$.
- ▶ Interessanterweise kann man nicht beweisen, dass jede Aussage A entweder wahr oder falsch ist, d.h. bisher können wir $A \vee (A \rightarrow \perp)$ nicht beweisen.
- ▶ Ausweg: Man muss es fordern (Tertium Non Datur).

Lektion 6

- ▶ Aussagen können von Variablen abhängen, z.B.

Es gilt $x^2 = 2$.

Wir schreiben $P(x)$ für die Aussage P , die von der Variablen x abhängt.

- ▶ Wir kommen zu zwei mathematischen Zeichen:
- ▶ $\forall x.P(x)$: *Für alle x gilt $P(x)$.*
- ▶ $\exists x.P(x)$: *Es gibt ein x , so dass $P(x)$ gilt.*