Vorkurs Mathematik

für Mathematiker

Universität Freiburg

von Peter Pfaffelhuber

Version: 15. September 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieses Skript wurde für den Vorkurs Mathematik für Mathematiker, der an der Universität Freiburg vor dem Wintersemester 2025/26 gehalten wurde, erstellt. Wir versuchen hier nicht, durch den gesamten Schulstoff der letzten Jahre des Gymansiums zu gehen, sondern wollen den Übergang von der Schulmathematik zur universitären Mathematik etwas sanfter gestalten. Dies bedeutet, dass wir teilweise Inhalte der Schulmathematik in neues Licht stellen, aber auch neuen Stoff erarbeiten. Kenntnis der Inhalte dieses Vorkurses ist für ein erfolgreiches Mathematik-Studium prinzipiell verzichtbar. Wir hoffen dennoch, bereits in den ersten Tagen an der Universität beim Publikum etwas Ehrgeiz und Begeisterung zu wecken.

Natürlich ist die Schulmathematik und die universitäre Mathematik erstmal dieselbe. Andererseits gibt es in der Schulmathematik Begriffe, die in der Universität nicht verwendet werden und andersherum. Als erstes Beispiel sei hier das Gleichheitszeichen $=$ erwähnt. Es dient machmal dazu, eine Aussage zu treffen, etwa $|-1| = 1$ oder $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ oder $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. Manchmal wird durch ein Gleichheitszeichen aber auch etwas definiert. In diesem Fall verwenden wir nun die Schreibweise $:=$ (wobei : auf der Seite des zu definierenden steht). Beispielsweise bedeutet $x := 2$ die Definition einer Variable x mit Zahlwert 2, oder $f(x) := x^2$.

Die universitäre Mathematik ist weitestgehend so aufgebaut, dass alle neuen Begriffe zunächst definiert werden. Deshalb beginnen wir in Kapitel 2 mit mathematischen Grundlagen, insbesondere dem Mengenbegriff. In Kapitel 3 widmen uns den komplexen Zahlen, die eine Erweiterung der reellen Zahlen in der Ebene darstellen. Als Hilfsmittel werden wir dabei Neues über Sinus und Cosinus lernen. Nach einem kleinen Einschub zum Summenzeichen in Kapitel 4 behandeln wir zuletzt in Kapitel 5 die (aus der Schule wenig bekannten) Grenzwerte.

2 Aussagen und Mengen

Obwohl viele *Mengen* in der Schulmathematik vorkommen, etwa als Daten-, Definitions-, Werte-, oder Zahlmengen, wird ein Aufbau der Mengenlehre mit *Regeln*, wie mit Mengen umzugehen ist, in der Schule nicht unterrichtet. Dies wollen wir in diesem Kapitel nachholen. Kenntnisse über *Aussagen* dienen als Rüstzeug für alles Weitere.

In diesem Abschnitt werden wir noch nicht die später übliche Aufteilung in *Definition*, *Satz* und *Beweis* vornehmen, weil wir mit einem eher intuitiven Verständnis von Aussagen und Mengen arbeiten.

2.1 Aussagen

In der Mathematik werden viele Aussagen getroffen.

> Eine Aussage ist eine Feststellung, die *wahr* oder *falsch* sein kann.

Beispiel 2.1. Hier sind ein paar Aussagen:

- $\mathcal{A}$: $2^2 = 4$
- $\mathcal{B}$: Es regnet jetzt in Freiburg.
- $\mathcal{C}$: $2^2 = 4$ und es regnet jetzt in Freiburg.
- $\mathcal{D}$: 2 ist eine Primzahl, also ist 4 eine Primzahl.
  (Oder: 2 ist eine Primzahl $\Rightarrow$ 4 ist eine Primzahl)

Hierbei ist $\mathcal{A}$ immer wahr, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ hängen davon ab, ob es tatsächlich gerade regnet, und $\mathcal{D}$ ist falsch. Keine Aussagen sind z.B. $2 + 4$, $\int_0^1 x dx$ oder $A + B$. Hier sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ verknüpfte Aussagen.

Generell können Aussagen mit $\neg$ negiert, oder mittels $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\Rightarrow$ (folgt) und $\iff$ (genau dann, wenn) verknüpft werden, so dass neue Aussagen entstehen. Wichtig ist hierbei, dass $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) := (\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A})$ definiert ist. Folgende Tabelle fasst das zusammen.

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\iff$
Nicht...	...und...	...oder...	...folgt...	...genau dann, wenn...

Eine Aussage kann eine oder mehrere freie Variable enthalten. Weiter können Aussagen verknüpft werden. Zunächst ein paar Beispiele.

Beispiel 2.2. Hier sind ein paar Aussagen:

- $\mathcal{E}(x)$: $x^2 = 4$
- $\mathcal{F}(x)$:[1] x ist prim
- $\mathcal{G}(\alpha)$: $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

[1] Bekanntermaßen heißt $x \in \mathbb{N}$ prim oder Primzahl, wenn $x > 1$ und x nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.

Hierbei ist $\mathcal{E}(x)$ genau dann wahr, wenn $x = 2$, $\mathcal{F}(x)$ hängt von der freien Variablen x und $\mathcal{G}(\alpha)$ von der freien Variablen α ab.

Beispiel 2.3.

- $\neg\mathcal{A}$: $2^2 \neq 4$
- $\mathcal{H}(x)$: (x is Primzahl) $\wedge$ ($x > 2$)
- $\mathcal{I}$: $(\alpha = \frac{\pi}{4}) \Rightarrow (\sin(\alpha) = \cos(\alpha))$

Da $\mathcal{A}$ wahr ist, ist $\neg\mathcal{A}$ falsch. Die Aussage $\mathcal{H}(x)$ ist genau dann wahr, wenn x eine ungerade Primzahl ist, und $\mathcal{I}$ ist wahr (und von keiner freien Variablen abhängig).

Beispiel 2.4. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Aussagen. Gilt $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, so heißt $\mathcal{A}$ hinreichend für $\mathcal{B}$, und $\mathcal{B}$ notwendig für $\mathcal{A}$. Hier ein Beispiel:

- $\mathcal{A}(x)$: ($x > 2$) $\wedge$ (x ist prim),
- $\mathcal{B}(x)$: ($x > 2$) $\wedge$ (x ist ungerade).

Offenbar gilt $\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)$. Also ist '($x > 2$) $\wedge$ (x ist prim)' *hinreichend* für '($x > 2$) $\wedge$ (x ist ungerade)'. Andererseits ist '($x > 2$) $\wedge$ (x ist ungerade)' notwendig für '($x > 2$) $\wedge$ (x ist prim)'. Schließlich sind alle Primzahlen > 2 ungerade.

Sind also $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Aussagen, so ist $\neg A$ genau dann wahr, wenn $\mathcal{A}$ falsch ist. Die Aussage $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ ist genau dann wahr, wenn sowohl $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{B}$ wahr sind etc. Solche Zusammenhänge fasst man gerne in einer Wahrheitstabelle zusammen, bei denen "T" für *True* und "F" für *False* steht.[2]

A	T	F
$\neg A$	F	T

A	T	T	F	F
B	T	F	T	F
$A \wedge B$	T	F	F	F
$A \vee B$	T	T	T	F
$A \Rightarrow B$	T	F	T	T
$A \iff B$	T	F	F	T

Dabei sind zwei Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ identisch, wenn ihre Wahrheitstabellen übereinstimmen. Wir schreiben dann $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$. (Wir könnten aber genausogut $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ schreiben.) Sind etwa $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Aussagen, so ist $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \iff (\mathcal{B} \wedge \mathcal{A})$ und $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \iff (\mathcal{B} \vee \mathcal{A})$. Hier sind drei weitere Beispiele.

Proposition 2.5. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Aussagen. Dann gilt*

$$\mathcal{A} \iff \neg(\neg\mathcal{A})$$

und wir schreiben auch $\neg\neg\mathcal{A} := \neg(\neg\mathcal{A})$. Weiter gilt

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \iff (\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) \iff (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}),$$

und

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}).$$

[2] Man beachte, dass wir davon ausgehen, dass es genau zwei Wahrheitswerte gibt.

Beweis. Die erste Aussage erhält man durch einfaches Einsetzen in die Wahrheitstabelle, genau wie bei der ersten Gleichheit der zweiten Aussage. Wir setzen ein und erhalten

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \iff (\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) \iff (\neg\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) \iff (\neg\mathcal{A} \vee \neg(\neg\mathcal{B})) \iff (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}).$$

Für die letzte Aussage haben wir:

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \iff (\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}) \wedge (\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{B})$$

Da $\mathcal{B}$ nicht gleichzeitig wahr und falsch sein kann, muss entweder – falls $\mathcal{B}$ falsch ist – vom Term vor $\vee$ das $\neg\mathcal{A}$, oder – falls $\mathcal{B}$ wahr ist – vom Term nach dem $\vee$ das $\mathcal{C}$ stimmen. Mit anderen Worten gilt $\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}$, also $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$. □

Die zweite Aussage der Proposition benötigt man in der Tat sehr oft. Will man nämlich $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ beweisen, so kann man genausogut $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ zeigen. Dies veranschaulichen wir an einem Beispiel. Zunächst benötigen wir eine Hilfsaussage[3].

Lemma 2.6. *Sei $x \in \mathbb{N}$. Dann ist x^2 genau dann gerade, wenn x gerade ist.*

Beweis. Ist x gerade, so ist $x = 2a$ für $a = x/2 \in \mathbb{N}$. Dann ist $x^2 = 4a^2$, also auch gerade. Es bleibt zu zeigen, dass

$$x^2 \text{ gerade} \Rightarrow x \text{ gerade}.$$

Da $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) = (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$, ist dies äquivalent zu der Behauptung

$$x \text{ ungerade} \Rightarrow x^2 \text{ ungerade}.$$

Ist nun x ungerade, so ist in der Dezimaldarstellung von x die Einer-Ziffer eine 1, 3, 5, 7 oder 9. Entsprechend muss die Einer-Ziffer der Dezimaldarstellung von x^2 eine 1, 9, 5, 9 oder 1 sein. Insbesondere ist x^2 ungerade und die Behauptung ist gezeigt. □

Wir kommen nun zu einer Tatsache, die bereits aus der Schule bekannt ist.

Proposition 2.7. *Es gilt*

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Beweis. Klar ist, dass $(x = \sqrt{2}) \Rightarrow (x^2 = 2)$. Es genügt also, die Behauptung

$$x^2 = 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}. \tag{1}$$

zu zeigen. (Ist die gezeigt, verwenden wir die letzte Aussage aus Proposition 2.5, denn dann gilt $(x = \sqrt{2}) \Rightarrow (x^2 = 2) \wedge (x^2 = 2) \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$, also $(x = \sqrt{2}) \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$.) Dies ist äquivalent zu

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \neq 2. \tag{2}$$

Sei $x \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $x = \frac{p}{q}$. Wir können annehmen, dass p und q teilerfremd sind. Sind sie es nicht, so können wir durch die gemeinsamen Teiler nämlich kürzen. Also ist $x^2q^2 = p^2$.
Wir zeigen nun für $x, p, q \in \mathbb{N}$ mit $x^2q^2 = p^2$:

$$p, q \text{ teilerfremd } \Rightarrow x^2 \neq 2. \tag{3}$$

[3]Ein Hilfssatz wird auch *Lemma* genannt.

Wir verwenden denselben Trick wie oben und zeigen stattdessen die äquivalente Aussage

$$x^2 = 2 \Rightarrow p, q \text{ nicht teilerfremd.} \tag{4}$$

Gilt $x^2 = 2$, so folgt erstmal $2q^2 = p^2$. Insbesondere ist p^2 gerade, also ist auch p nach Lemma 2.6 gerade. Sei also a so, dass $2a = p$. Damit ist $4a^2 = 2q^2$, also $2a^2 = q^2$. Damit ist nun q^2, nach Lemma 2.6 ist also auch q gerade. Insbesondere sind p und q nicht teilerfremd, da 2 beide Zahlen teilt. Damit haben wir (4) gezeigt, was äquivalent zu (3) ist. Da wir die Voraussetzungen von (3) aus (2) gefolgert haben, gilt damit auch (2), was äquivalent zu (1) ist und $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist gezeigt. □

2.2 Quantoren

Aus Aussagen, die von einer freien Variablen abhängen, weitere Aussagen zu machen, stehen folgende Quantoren zur Verfügung, die in der Schule nicht verwendet wurden:

$\exists$	$\exists!$	$\forall$
Es existiert...	Es existiert genau ein...	Für alle...

Für diese Quantoren benötigt man immer eine Grundmenge an möglichen Objekten, aus denen ausgewählt werden kann, beispielsweise natürliche oder reelle Zahlen.

Beispiel 2.8 (Quantoren).

- $\mathcal{A}$: $\exists y \in \mathbb{N} : y$ ist prim
- $\mathcal{B}$: $\forall y \in \mathbb{N}$ prim $\exists z \in \mathbb{N} : ((z > y) \wedge (z \text{ prim}))$
- $\mathcal{C}$: $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$.

Hier sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wahr, $\mathcal{C}$ falsch (da sowohl $\sqrt{2}$ and auch $-\sqrt{2}$ die gesuchte Eigenschaft besitzen). Wichtig ist es, einzusehen, dass $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ von keiner freien Variablen abhängen, jedoch ($\exists z \in \mathbb{N} : z > y$ und z prim) von der freien Variablen y.

Nun können wir Negation, Verknüpfungen und Quantoren kombinieren. Es entstehen dabei viele Aussagen, die alle intuitiv verstanden werden können. Hier ein paar Beispiele:
Sei $\mathcal{A}(x)$ eine Aussage, die von der freien Variablen x abhängt. Dann gilt:

$$(\neg(\exists x : \mathcal{A}(x))) = (\forall x : \neg\mathcal{A}(x)),$$
$$(\neg(\forall x : \mathcal{A}(x))) = (\exists x : \neg\mathcal{A}(x)).$$

Sei $\mathcal{B}(x, y)$ eine Aussage, die von den freien Variablen x und y abhängt. Dann gilt

$$(\exists x \exists y : \mathcal{B}(x, y)) = (\exists y \exists x : \mathcal{B}(x, y)),$$
$$(\forall x \forall y : \mathcal{B}(x, y)) = (\forall y \forall x : \mathcal{B}(x, y)).$$

Wir schreiben deshalb auch vereinfachend für diese beiden Aussagen

$$\exists x, y : \mathcal{B}(x, y),$$
$$\forall x, y : \mathcal{B}(x, y).$$

Weitere Beispiele gibt es in den Übungen.

2.3 Mengen

Wir folgen hier einem naiven Mengenbegriff[4], der auf Cantor zurückgeht.

> Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Mitglieder einer Menge heißen auch *Elemente* der Menge. Aus der Schule sind Zahlmengen bekannt, die wir nun kurz wiederholen.

Symbol	Definition	Bezeichnung
$\mathbb{N}$	$:= \{1, 2, ...\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	$:= \{0, \pm 1, \pm 2\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}_0$	$:= \{0, 1, 2, ...\}$	natürliche Zahlen mit 0
$\mathbb{Q}$	$:= \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$	Brüche
$\mathbb{R}$	Inhalt der Vorlesung Analysis 1	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	Inhalt der Vorlesung Analysis 2	komplexe Zahlen

Es gibt zwei Möglichkeiten, Mengen zu notieren. Gerade bei endlichen Mengen, d.h. Mengen mit endlich vielen Elementen, wählt man oft eine Aufzählung, etwa

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Die Aufzählung von Elementen kann man auch (wie etwa bei den natürlichen Zahlen) bei unendlichen Mengen machen, wenn man ... verwendet. Hier besteht allerdings die Gefahr der Missinterpretation. Eine andere Möglichkeit ist es, eine Aussage $\mathcal{B}(x)$ zu verwenden, die von einer freien Variablen abhängt, und dann

$$B = \{x : \mathcal{B}(x)\} := \{x : \mathcal{B}(x) \text{ ist wahr}\}$$

zu schreiben. Wir führen einige Schreibweisen ein. Seien A, B Mengen.

1. Ist x ein *Element* von A, schreiben wir $x \in A$. Ist x kein Element von A, schreiben wir $x \notin A$.

2. Die Menge, die kein Element enthält, wird mit $\emptyset$ notiert und *leere Menge* genannt. (D.h. es gilt $(\forall x : x \notin \emptyset)$.)

3. Ist jedes Element von A auch Element von B, gilt also $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$, so schreiben wir $A \subseteq B$ und sagen, A ist eine Teilmenge von B. Gibt es darüberhinaus ein x mit $x \in B$ und $x \notin A$ (d.h. es gilt $(\exists x \in B : x \notin A)$, schreiben wir manchmal $A \subsetneq B$ und sagen, A ist eine echte Teilmenge von B.

[4] Die Vorlesung *Mengenlehre* geht hier deutlich weiter, und definiert Mengen axiomatisch.

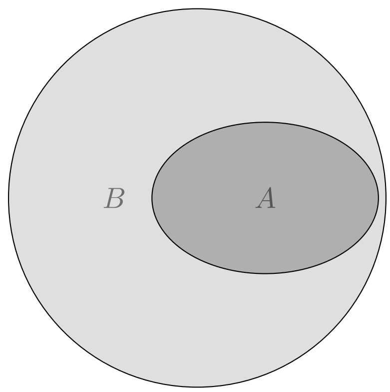
Aus der Schule bekannt ist

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Ein anderes Beispiel ist

$$\{\Delta \text{ gleichseitiges Dreieck}\} \subseteq \{\Delta \text{ gleichschenkliges Dreieck}\}.$$

Mengen und deren Zusammenhang kann man mit Venn-Diagrammen darstellen. Hier steht ein Kreis oder ein anderes abgeschlossenen Gebiet für eine Menge. Will man etwa $A \subsetneq B$ darstellen, sieht das so aus.



Hier ein paar Rechenregeln für Teilmengen. Seien A, B, C Mengen.

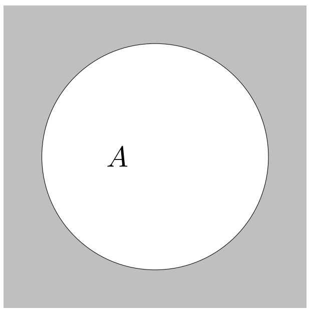
1. Es gilt $A \subseteq A$.
2. Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$.
3. Es gilt $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Wie auch bei Aussagen kann man aus Mengen neue Mengen machen. Wir führen nun die entsprechende Notation ein. Seien hier A und B Mengen.

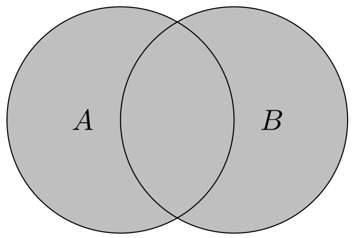
1. Mit A^c bezeichnen wie die Menge der Elemente, die nicht in A enthalten sind. Diese Menge heißt *Komplementmenge* von A.
2. Mit $A \cup B$ bezeichnen wir die Menge, die sowohl die Elemente von A als auch die von B enthält. Diese Menge heißt *Vereinigungsmenge* von A und B.
3. Mit $A \cap B$ bezeichnen wir die Menge der Elemente aus A, die auch in B enthalten sind. Diese Menge heißt *Schnittmenge* von A und B.
4. Mit $A \setminus B$ bezeichnen wir die Menge der Elemente aus A, die nicht in B enthalten sind, also $A \setminus B := A \cap B^c$. Diese Menge heißt *Differenzmenge* von A und B.
5. Mit $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ bezeichnen wir die *symmetrische Differenz* von A und B.

Wir verdeutlichen die Schreibweisen wieder mit Venn-Diagrammen.

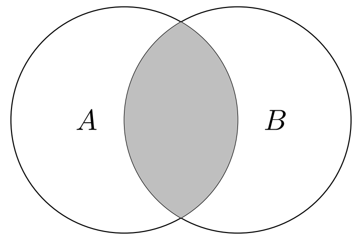
A^c



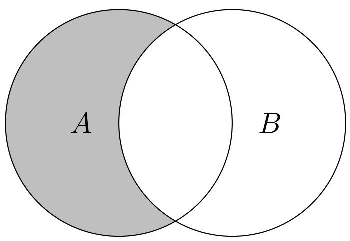
$A \cup B$



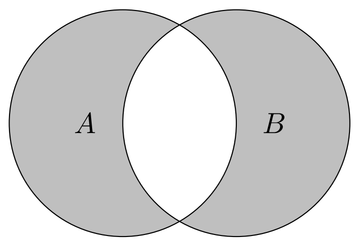
$A \cap B$



$A \setminus B$



$A \Delta B$



Es gibt nun einige Rechenregeln, die man sich mit Hilfe von Venn-Diagrammen leicht verdeutlichen kann. Seien hierzu A, B, C Mengen.

1. Es gilt $(A^c)^c = A$.
2. Es gelten die *de Morganschen Gesetze*
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \text{ und } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$
3. Es gelten die *Assoziativgesetze*
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ und } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$
4. Es gelten die *Distributivgesetze*
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ und } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aus der analytischen Geometrie sind Vektoren bekannt. Diese sind Elemente von Produktmengen, die wir nun einführen.

Definition 2.9 (Produktmenge). *Sind $A_1, ..., A_n$ Mengen. Dann bezeichnet*

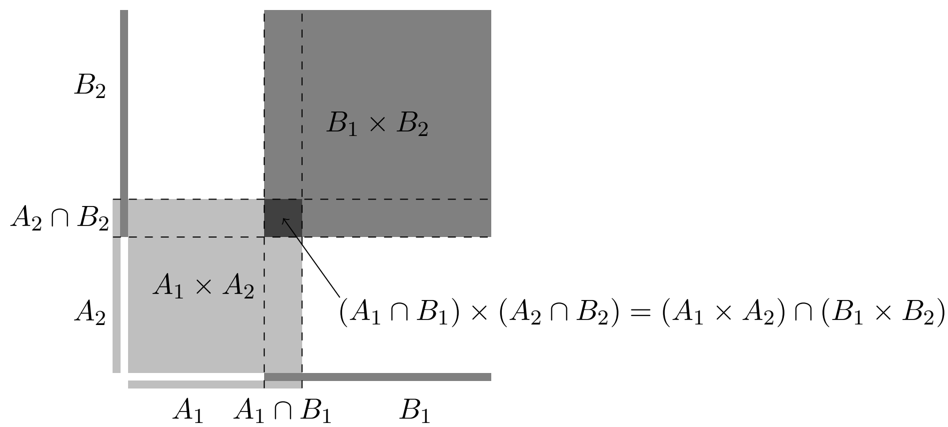
$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, ..., x_n) : x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n\}$$

die Produktmenge *von $A_1, ..., A_n$. Ist $A = A_1 = \cdots = A_n$, so schreiben wir auch $A^n := A_1 \times \cdots \times A_n$. Wir nennen Elemente von A^n auch A-wertige (n-dimensionale)* Vektoren.

Sind $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n$ Mengen. Dann gilt

$$(A_1 \times \cdots \times A_n) \cap (B_1 \times \cdots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \cdots \times (A_n \cap B_n).$$

Dies verdeutlichen wir am besten an einer Grafik (für $n = 2$):



Wie man allerdings unschwer erkennt, ist

$$(A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2) \neq (A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cap B_2).$$

Zum Abschluss dieses Kapitels vertiefen nun noch den Zusammenhang zwischen Aussagen und Mengen. Seien $\mathcal{A}(x)$ und $\mathcal{B}(x)$ Aussagen, die von der freien Variablen x abhängen, sowie $A := \{x : \mathcal{A}(x)\}$ und $B := \{x : \mathcal{B}(x)\}$.

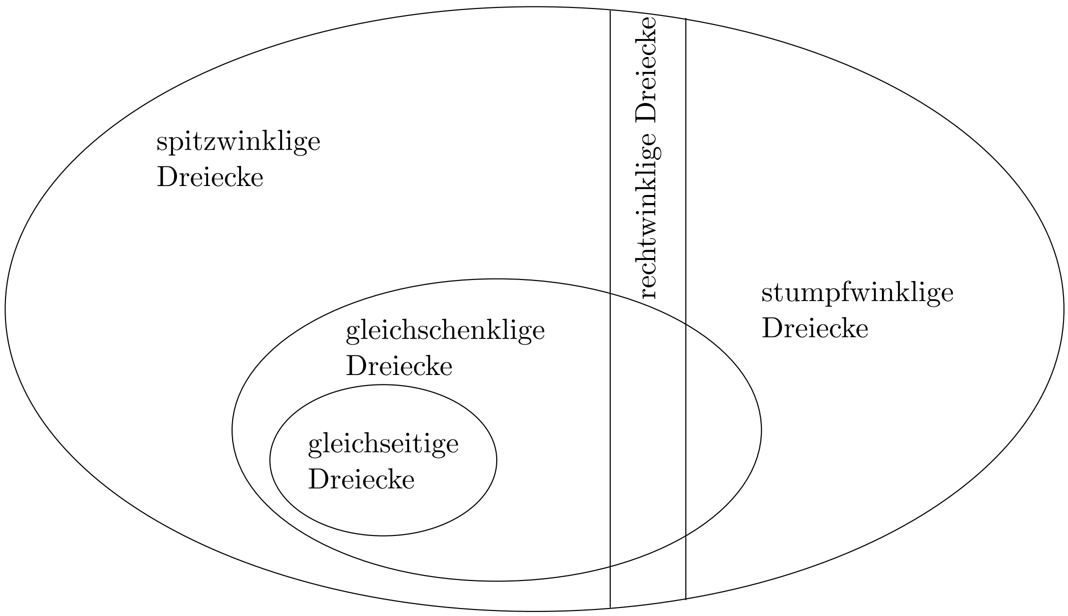
1. Es gilt $A^c := \{x : \neg\mathcal{A}(x)\}$.

2. Es gilt $A \cap B := \{x : \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)\}$ und $A \cup B := \{x : \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)\}$.

3. Es gilt
$$(\forall x : \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)) \iff (A \subseteq B).$$

Beispiel 2.10 (Das Haus der Dreiecke). Zum Abschluss des Kapitels betrachten wir verschiedene speziellen Dreiecke: Gleichseitige Dreiecke, gleichschenklige Dreiecks, rechtwinklige Dreiecke, spitzwinklige Dreiecke und stumpfwinklige Dreiecke[5]. Es ergibt sich folgendes Venn-Diagramm (bei dem nicht alle Gebiete rund sind, manche haben auch Ecken).

[5] Ein Dreieck ist stumpfwinklig, wenn es einen Winkel über 90° besitzt. Es heißt spitzwinklig, wenn alle Winkel kleiner als 90° sind und rechtwinklig wenn ein Winkel genau 90° ist.


spitzwinklige
Dreiecke
rechtwinklige Dreiecke
stumpfwinklige
Dreiecke
gleichschenklige
Dreiecke
gleichseitige
Dreiecke

3 Komplexe Zahlen und die Gaußsche Zahlenebene

Es gibt ein paar Rechenregeln, die Sie ab der 5. Klasse kennengelernt haben. Diese sind das

(K) Kommutativgesetz: $x + y = y + x$ (bzw. $x \cdot y = y \cdot x$);

(A) Assoziativgesetz: $(x + b) + c = x + (y + z)$ (bzw. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (b \cdot z)$)

(D) Distributivgesetz: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot c$.

Weitere wichtige Rechenregeln, die bisher auch immer galten, sind

(0) $x + 0 = x$;

(1) $x \cdot 1 = x$.

(Später werden wir sagen, dass 0 das neutrale Element der Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation ist.) Wir werden nun versuchen, $+$ und $\cdot$ auf einer Zahlenebene $\mathbb{C}$ zu definieren[6], die die Zahlengerade erweitert (d.h. die x-Achse ist die bekannte Zahlengerade, die insbesondere auch 0 und 1 beinhaltet), so dass (K), (A), (D), (0), (1) nachwievor gelten. In der Zahlenebene notieren wir einen Punkt in normalen (kartesischen) Koordinaten als $x \simeq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.[7] Wir können einen Punkt $x \in \mathbb{C}$ auch anders beschreiben. Dazu notieren wir seinen Abstand zum Ursprung r, sowie den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ (zwischen 0 und 2π, was 360° entspricht), den die Gerade vom Ursprung zu dem Punkt mit der positiven x-Achse einschließt. Dies notieren wir dann als $x \simeq \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix}$. Wir sagen, dass (r, φ) die Polarkoordinaten von x sind. Mit diesen beiden Darstellungen können wir Addition und Multiplikation definieren:

Definition 3.1 (Addition und Multiplikation komplexer Zahlen).
Für $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix}, y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \psi \end{pmatrix}$ *aus der Zahlenebene definieren wir*

$$x + y \equiv \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}, \qquad x \cdot y \equiv \begin{bmatrix} r \cdot s \\ \varphi + \psi \mod 2\pi \end{bmatrix}.$$

Dabei bedeutet $\varphi + \psi \mod 2\pi$, dass wir vom Ergebnis aus $\varphi + \psi$ so oft 2π abziehen, bis das Ergebnis wieder in $[0, 2\pi)$ ist. Beispielsweise ist $\pi + \pi \mod 2\pi = 0$.

Da wir die Zahlengerade $\mathbb{R} := \left\{ x \middle| \exists a \in \mathbb{R} : x \simeq \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{C}$ erweitern wollen, checken wir zunächst, ob die gerade definierten Rechenregeln auf $\mathbb{R}$ genau den bekannten Rechenregeln der reellen Zahlen entsprechen. Dabei ist es wichtig, zu bedenken, dass

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{falls } a \geq 0, \\ \begin{bmatrix} -a \\ \pi \end{bmatrix}, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

[6] Man nennt $\mathbb{C}$ auch die Menge der komplexen Zahlen.

[7] Hier ist x ein abstrakter Punkt der Zahlenebene, und $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ eine Koordinaten-Darstellung des Punktes. Das ist zwar nicht ganz dasselbe, aber gemeint ist doch derselbe Punkt. Dies bringen wir durch das Symbol $\simeq$ zum Ausdruck.

Lemma 3.2. *Für* $x \simeq \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $y \simeq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ *gilt mit der Addition und Multiplikation aus Definition 3.1*

$$x + y \simeq \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x \cdot y \simeq \begin{pmatrix} a \cdot b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Übung. □

Lemma 3.3. *Für die Addition und Multiplikation aus Definition 3.1 gelten (K) und (A).*

Beweis. Übung. □

Lemma 3.4. *Für* $0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *gelten (0) und (1).*

Beweis. Die Eigenschaft (0) liest man direkt aus der Definition der Addition ab und der Darstellung mit kartesischen Koordinaten ab. Weiter ist $1 \simeq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und (1) folgt aus der Definition der Multiplikation. □

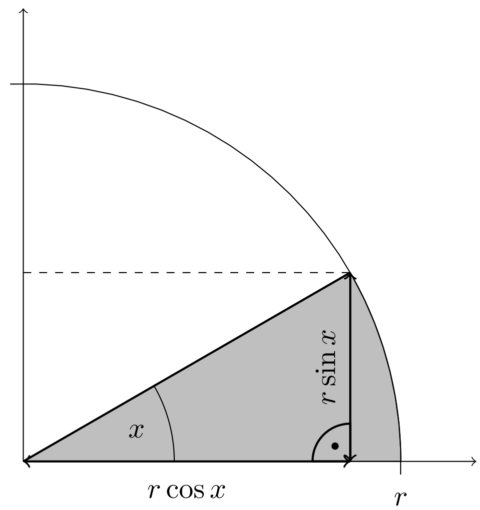
Das einzige, was noch fehlt, ist das Distributivgesetzt (D). Bevor wir es für die Zahlenebene zeigen können, brauchen wir etwas Hilfe, um kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten umrechnen zu können.

3.1 Trigonometrische Funktionen

Aus der Schule sind Winkel bekannt. Diese können wir entweder in *Grad* angeben (etwa 90° für einen rechten Winkel), oder in *Bogenmaß*. Das bedeutet, dass wir den Winkel x mit der Länge des Bogenstückes auf dem Einheitskreis (also dem Kreis mit Radius 1), das von diesem Winkel aufgespannt wird, gleichsetzen. Wir werden im Folgenden mit Winkeln immer im Bogenmaß rechnen.

Wir beschäftigen uns nun mit trigonometrischen Funktionen, insbesondere Cosinus und Sinus eines Winkels. Grundlegend ist hierfür ein rechtwinkliges Dreieck. Cosinus und Sinus ergeben sich dabei als Quotienten der Längen der beiden Katheten (Gegenkathete und Ankathete) und der Hypotenuse (also der längsten Seite)[8]:

[8] In der Vorlesung Analysis 1 wird es noch alternative Definitionen für die Cosinus- und Sinus-Funktionen geben.

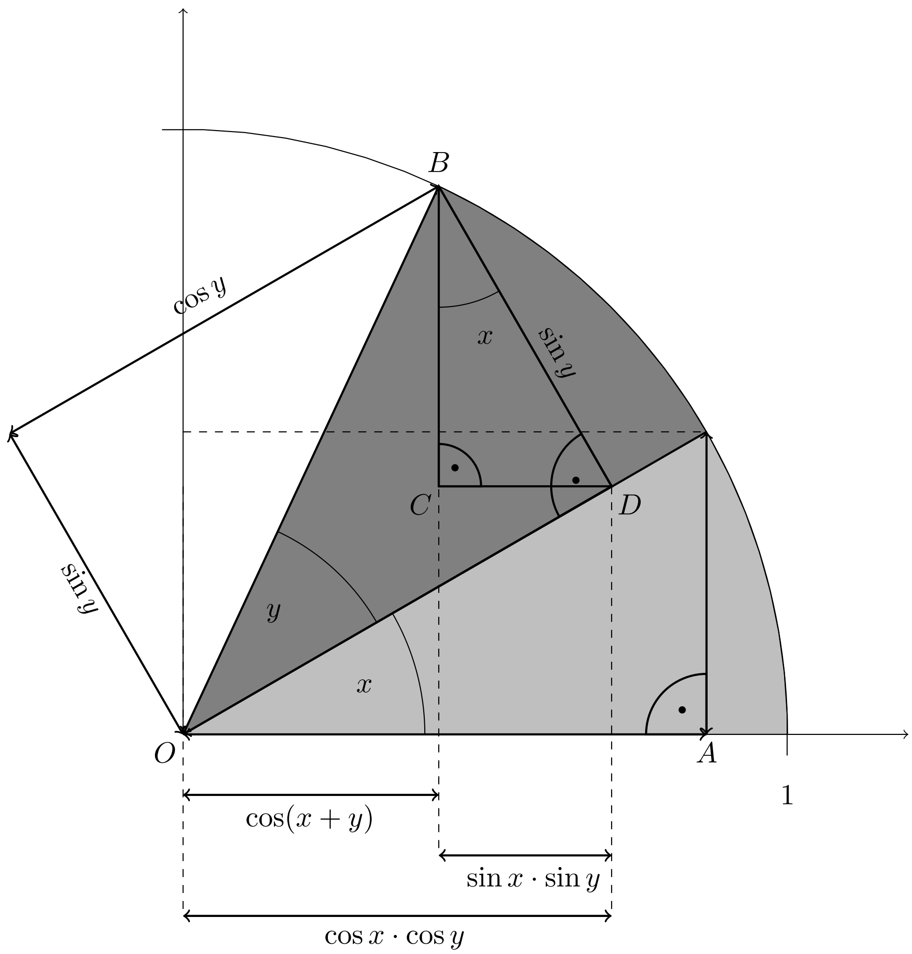


Der Satz des Pythagoras, angewandt auf dieses Bild, besagt $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Hier kommen weitere Rechenregeln.

Proposition 3.5 (Additionstheoreme von Cosinus und Sinus). *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y.$$

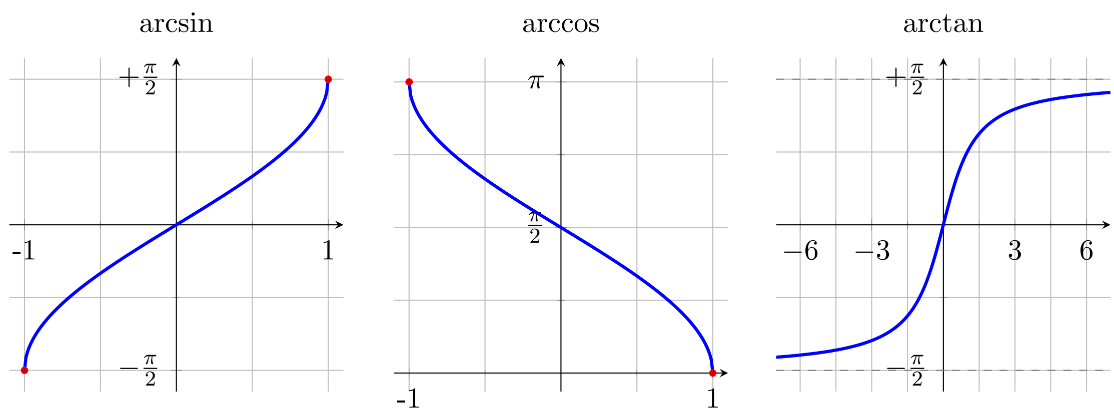
Beweis. Wir veranschaulichen nur die erste Aussage anhand einer Grafik, die zweite wird Teil der Übung sein. Hier ist $\cos(x+y)$ wie oben definiert; siehe das rechtwinklige Dreieck, das OB als Hypotenuse hat. Die Länge $\cos x \cdot \cos y$ sehen wir, indem wir die Ankathete des rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse OD, die Länge $\cos y$ hat, betrachtet. Die Länge der Strecke $\sin x \cdot \sin y$ entsteht im rechtwinklingen Dreieck BCD, da die Hypotenuse die Länge $\sin y$ hat.



□

3.2 Umkehrfunktionen von Sinus, Cosinus und Tangens

Aus der Kursstufe sind die Umkehrfunktionen von Sinus, Cosinus und Tangens bekannt und werden Arcus-Sinus, Arcus-Cosinus und Arcus-Tangens genannt. Da die trigonometrischen Funktionen periodisch sind (d.h. sie wiederholen sich nach 2π), ist es wichtig, sich an die Definitionsbereiche zu erinnern. Diese können insbesondere der nachfolgenden Abbildung entnommen werden.



3.3 Das Distributivgesetz in $\mathbb{C}$

Das Distributivgesetz verbindet Addition und Multiplikation. Um es Distributivgesetz nachrechnen zu können, müssen wir zunächst die Multiplikation in kartesischen Koordinaten darstellen. Hierzu übersetzen wir kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten (für $a \neq 0$ oder $b \neq 0$):

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \sqrt{a^2+b^2} \\ \varphi \end{bmatrix} \text{ mit } \varphi = \begin{cases} \arctan(b/a), & a > 0 \\ \arctan(b/a) + 2\pi, & a < 0, b \geq 0 \\ \arctan(b/a), & a < 0, b < 0. \end{cases}$$

und

$$\begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass

$$\arctan\tfrac{b}{a} = \arcsin\tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos\tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Insbesondere ist also mit φ wir oben

$$\cos\varphi = \cos\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \sin\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Daraus, und Proposition 3.5 ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \sqrt{a^2+b^2} \\ \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{c^2+d^2} \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\ \varphi+\psi \mod 2\pi \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) \\ \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit haben wir nun alles zusammen:

Proposition 3.6. *Für die in Definition 3.1 definierte Addition und Multiplikation gilt (D).*

Beweis. Wir berechnen direkt für $x \simeq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, y \simeq \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, z \simeq \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$:

$$x \cdot (y+z) \simeq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c+e \\ d+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot (c+e) - b \cdot (d+f) \\ a \cdot (d+f) + b \cdot (c+e) \end{pmatrix},$$

$$x \cdot y + x \cdot z \simeq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot c - b \cdot d + a \cdot e - b \cdot f \\ a \cdot d + b \cdot c + a \cdot f + b \cdot e \end{pmatrix}.$$

Da also beide Rechnungen dasselbe ergeben, folgt (D). □

4 Einschub: das Summenzeichen

In der Universitäts-Mathematik wird laufend neue Notation eingeführt. (Siehe etwa das Zeichen $\simeq$ in Kapitel 3.) Bekannt ist das Summenzeichen $\sum$, das wir hier beschreiben wollen. Für $x_0, x_1, ... \in \mathbb{R}$, und $0 \leq i \leq n$ definieren wir

$$\sum_{k=i}^{n} x_k := x_i + \cdots + x_n.$$

Dies ist also so ähnlich aufgebaut wir ein Integral $\int_x^y f(z)dz$ (mit $x \to i, y \to n, z \to k$).

5 Grenzwerte

Der Begriff des Grenzwerts (oder Limes) kommt in der Schule manchmal vor, wird jedoch eigentlich nie formal eingeführt. Dies wollen wir hier zwar auch nicht machen (da das einen großen Teil der Vorlesung *Analysis 1* ausmacht), sondern uns einige Beispiele aus der Schule ansehen.

5.1 Einführung

Wir beginnen mit ein paar Beispielen:

1. Analysiert man Funktionen in der Schule, betrachtet man etwa Pol-Stellen oder das Verhalten im unendlichen. Beispielsweise sagt man dann, die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ hat eine waagrechte Asymptote by $y = 0$ und schreibt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Begründet wird dieser Grenzwert zumeist mit einer Wertetabelle.

x	1	10	100	1000
$\frac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.001

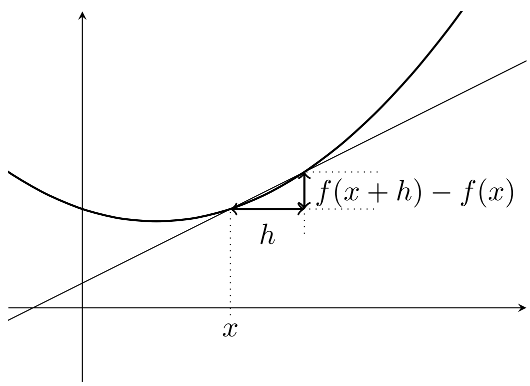
Diese Begründung ist allerdings nicht rigoros, da in einer solchen Tabelle ja nur Beispiele aufgeführt sind. Etwa könnte man ja auch fälschlicherweise behaupten, dass $\lim_{x \to \infty} \sin(x\pi) = 0$, da

x	1	10	100	1000
$\sin(\pi x)$	0	0	0	0

2. Die Ableitung einer Funktion f in x wurde definiert als

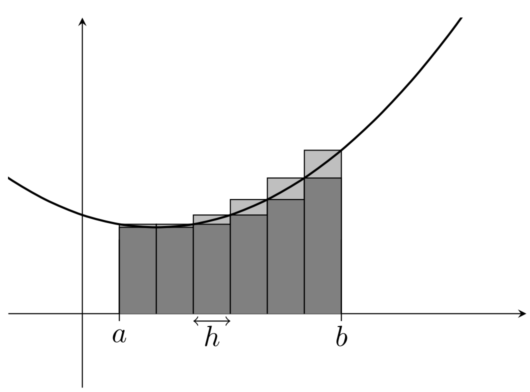
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{5.1}$$

Dabei wurde der Bruch $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ als Steigung der Gerade durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x+h, f(x+h))$ interpretiert.



Die Ableitung $f'(x)$ ist dann die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen im Punkt $(x, f(x))$.

3. Bei der Einführung des Integrals einer Funktion f über ein Intervall $[a, b]$ wurde von Ober- und Untersumme gesprochen. In beiden Fällen wird $[a, b]$ in kleine vertikale Abschnitte der Breite h unterteilt, und $\int_a^b f(x)dx$ (also die Fläche unter der Funktion f) durch die Summe der Streifenflächen approximiert. Das Integral ergibt sich dann im Fall immer kleiner werdender Abschnitte.



Betrachten wir etwa eine Funktion f, definiert auf dem Intervall $[0, 1]$, so ergibt sich

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n}) \cdot \tfrac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx \tag{5.2}$$

Wir wollen zumindest versuchen, den Grenzwertbegriff etwas zu formalisieren. Wir verwenden Theorem 5.2, das wir mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln allerdings nicht beweisen können. (Dies würde eine formale Einführung der reellen Zahlen erfordern.)

Definition 5.1 (Monotone, beschränkte Folge). *Eine reellwertige Folge $(a_n)_{n=1,2,...}$ heißt monoton wachsend, falls $(i < j) \Rightarrow (a_i \leq a_j)$ für alle $i, j = 1, 2, ...$ gilt, und streng monoton wachsend falls $(i < j) \Rightarrow (a_i < a_j)$ für alle $i, j = 1, 2, ...$ Sie heißt (streng) monoton fallend, falls $(-a_n)_{n=1,2,...}$ (streng) monoton wachsend ist. Ist $(a_n)_{n=1,2,...}$ monoton wachsend oder monoton fallend, so nennen wir sie monoton. Sie heißt beschränkt, wenn es ein $C > 0$ gibt mit $|a_n| < C$ für alle $n = 1, 2, ...$*

Theorem 5.2. *Sei $(a_n)_{n=1,2,...}$ eine reelwertige Folge. Gilt*

$$(a_n)_{n=1,2,...} \text{ monoton wachsend (fallend) und beschränkt,}$$

so gibt es eine kleinste (größte) reelle Zahl a mit $a_n \leq a$ ($a_n \geq a$) für alle $n = 1, 2, ...$ Diese nennen wir Grenzwert der Folge und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n := a.$$

Bemerkung 5.3.

1. Es gilt, zunächst die Existenz des Grenzwertes zu untersuchen. Beispielsweise existiert der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n=1,2,...}$ mit $a_n = n$ nicht, da diese Folge nicht beschränkt ist. Weiter können wir bisher nichts über die Existenz des Grenzwerts (oder Konvergenz) von $(a_n)_{n=1,2,...}$ mit $a_n = (-1)^{n-1}/n$, also $a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = -\frac{1}{4}, ...$ aussagen, da diese Folge nicht monoton ist. Wir bemerken allerdings, dass Grenzwerte per Definition eindeutig sind. Theorem 5.2 sagt ja aus, dass es genau eine reelle Zahl mit den geforderten Eigenschaften (minimal, obere Schranke der monoton wachsenden Folge) gibt.

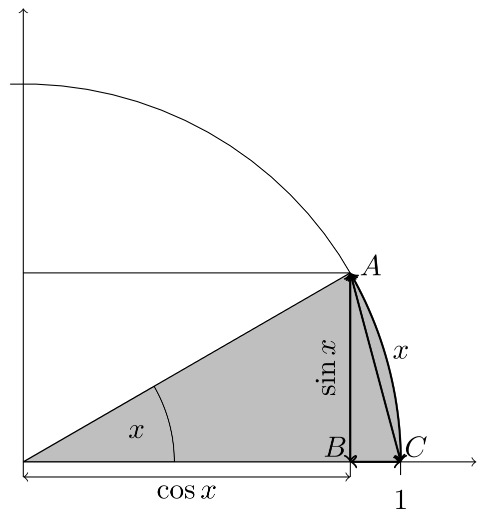
2. Nun haben wir also den Grenzwert einer (beschränkten, monotonen) Folge reeller Zahlen definiert. Etwa bei der Definition der Ableitung in (5.1) steht allerdings keine Folge unter dem lim, sondern h als kontinuierliche Variable. Diesen Grenzwert definieren wir so: Sei $(h_n)_{n=1,2,...}$ eine monotone Folge mit $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$ für jede Wahl von $(h_n)_{n=1,2,...}$ existiert, und unabhängig von $(h_n)_{n=1,2,...}$ ist, so bezeichnen wir den (von der Folge nun unabhängigen) Grenzwert als $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

3. Falls obige Grenzwerte existieren und den Wert a haben, so schreiben wir abkürzend auch
$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a, \qquad f(x) \xrightarrow{x\to 0} a, \qquad f(x) \xrightarrow{x\to\infty} a.$$

Beispiel 5.4. Wir zeigen nun

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Zunächst zur zweiten Aussage, die wir uns anhand folgender Skizze veranschaulichen:



Betrachten wir nun das Dreieck ABC. Klar ist, dass die Seite AC kürzer ist als das Stück Bogen der Länge x. Daraus folgt mit Hilfe des Satzes von Pythagoras

$$x^2 \geq \sin^2 x + (1 - \cos x)^2 = \sin^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x = 2(1 - \cos x)$$

Daraus leiten wir

$$\frac{1 - \cos x}{x} \leq \frac{x}{2}$$

ab und es folgt die zweite Behauptung.

Für die erste Aussage macht man sich anhand obiger Skizze klar, dass die Strecke AB kürzer als die Bogenlänge x ist, also $\sin x \leq x$. Andererseits ist die Bogenlänge x kleiner als die Summe der Strecken AB und BC. Mit anderen Worten ist $\sin x \geq x - (1 - \cos x)$. Teilt man durch x, erhält man aus diesen beiden Ungleichungen

$$1 - \frac{1 - \cos x}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Im Grenzwert kleiner x müssen nun die Ungleichungen erhalten bleiben, also folgt mit der zweiten Aussage die erste.

Beispiel 5.5 (Ableitung von sin und cos). Wir berechnen nun

$$\sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin.$$

Genau genommen berechnen wir nur die erste Gleichheit, und beschäftigen uns mit der zweiten Gleichheit in den Übungen.
Wir schreiben, mit Hilfe von Theorem 3.5 und dem letzten Beispiel

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \xrightarrow{h \to 0} \cos x.$$

Für das dritte Beispiel benötigen wir eine Hilfsaussage:

Lemma 5.6. *Seien $x, y > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*[9]

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis. Bekannt ist die Formel für die Binomialverteilung. Wenn X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern n und p ist, so gilt

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Wir betrachten nun $p = \frac{x}{x+y}$ und erhalten

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\frac{x}{x+y}\Big)^k \Big(\frac{y}{x+y}\Big)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k} x^k y^{n-k}}{(x+y)^n}.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 5.7. Wir begründen nun die bekannte Rechenregel für $f(x) = x^n$

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Wir berechnen

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1} = \binom{n}{n-1} x^{n-1} + h \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-2}$$
$$\xrightarrow{h \to 0} nx^{n-1}.$$

5.2 Kreisfläche

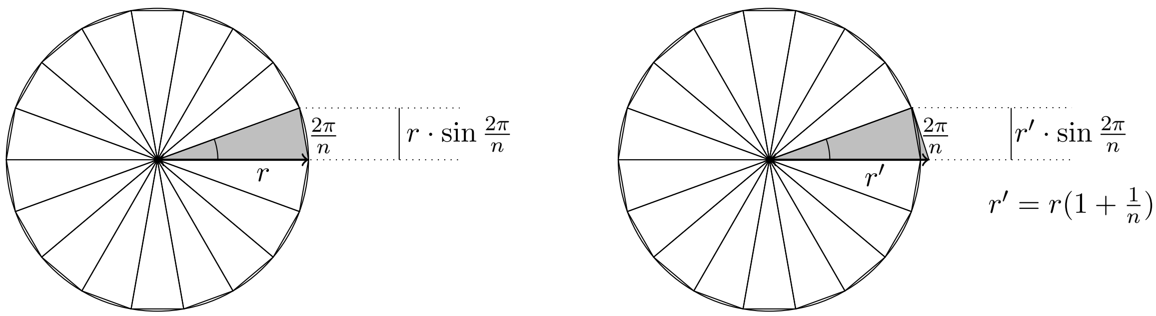
In Kapitel 3.1 haben wir Winkel in Bogenmaß angegeben. Dabei war der Winkel x gegeben durch die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis, der von x umschlossen wird. Ein rechter Winkel ist also beispielsweise die Länge des Viertelkreises, und der gesamte Kreisumfang entspricht $360°$ in Bogenlänge. Man hat sich darauf geeinigt, diesen Umfang des Kreises als 2π abzukürzen. Entsprechend ist der Umfang eines Kreises mit Radius r gegeben durch $2r\pi$. Man kann berechnen, dass die Kreiszahl π in etwa eine Größe von 3.141593 hat. Wir wollen in diesem Abschnitt berechnen, wie groß die Fläche eines Kreises (mit Radius r) ist. Bekanntlich gilt folgendes:

Theorem 5.8 (Fläche eines Kreises). *Die Fläche eines Kreises in der Ebene mit Radius r beträgt $A = \pi r^2$.*

Beweisvariante 1:. Gegeben sein ein Kreis mit Radius r und Mittelpunkt (0,0). Diesen teilen wir nun in n Kreissegmente mit identischem Winkel $\frac{2\pi}{n}$.

[9] Zur Erinnerung. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist für $k = 0, ..., n$ definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdots (n-k+1)}{k \cdots 1}.$$



Wir betrachten nun (linke Abbildung) das gleichschenklige Dreieck, das durch die Punkte $(0,0), (r,0)$ und $(r\cos\frac{2\pi}{n}, r\sin\frac{2\pi}{n})$ festgelegt wird. Die Fläche dieses Dreiecks ist $\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\sin\frac{2\pi}{n}$. Da der Kreis etwas größer ist als n dieser Dreiecke, folgt mit Beispiel 5.4.

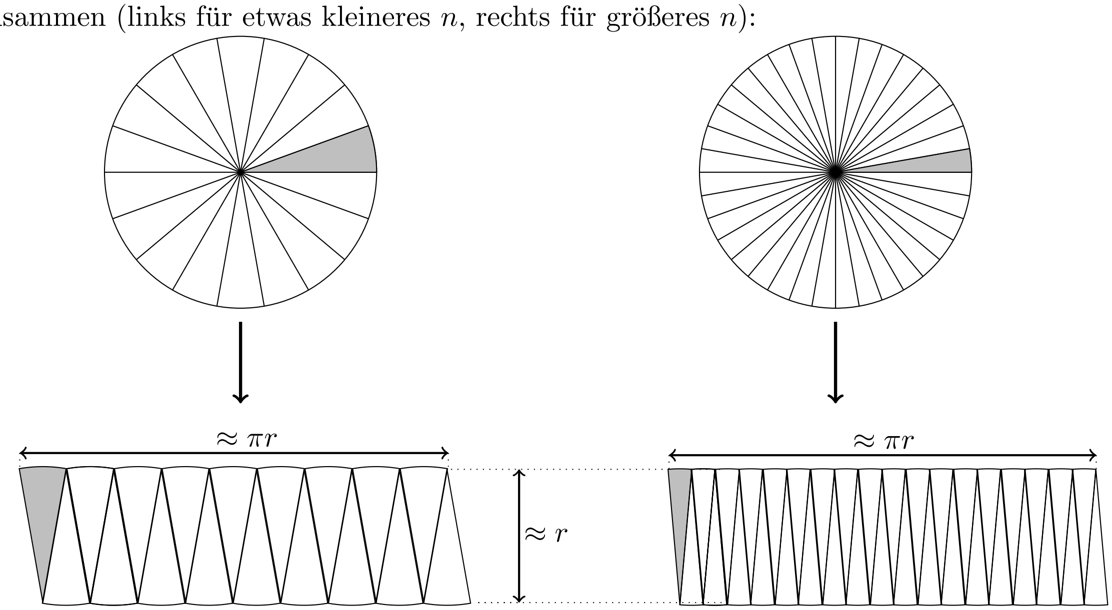
$$A \geq \tfrac{n}{2} r^2 \sin\tfrac{2\pi}{n} = \pi \frac{n}{2\pi} r^2 \sin\tfrac{2\pi}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi r^2.$$

Sei $r' = r(1+\frac{1}{n})$. Analog (rechte Abbildung) berechnet die Fläche des Dreiecks durch die Punkte $(0,0), (r',0)$ und $(r',0), r'\sin\frac{2\pi}{n}$ aufgespannt wird. Die Vereinigung aller dieser Dreiecke umschließen (für große n) den Kreis, so dass

$$A \leq \tfrac{n}{2} r^2 (1+\tfrac{1}{n})^2 \sin\tfrac{2\pi}{n} = \pi \frac{n}{2\pi} r^2 (1+\tfrac{1}{n})^2 \sin\tfrac{2\pi}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi r^2.$$

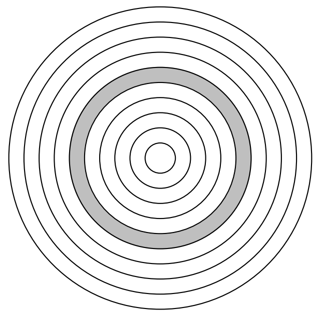
Insgesamt haben wir also die Behauptung gezeigt. □

Beweisvariante 2. Diese Variante ist zwar sehr anschaulich, jedoch weniger rigoros als die letzte. Wieder zerlegen wir den Kreis. Diesmal jedoch fügen wir ihn anders wieder zusammen. Beim Zerschneiden des Kreises in n Kreissegmente fügen wir diese nun wie folgt wieder zusammen (links für etwas kleineres n, rechts für größeres n):



Wie man sieht, nähert man sich für große n immer weiter einem Rechteck mit den Seitenlängen πr und r. Entsprechend entsteht die Aussage dann im Grenzwert großer n. □

Beweisvariante 3. Und wieder zerlegen wir den Kreis, diesmal jedoch in n Kreisringe der Dicke $\frac{r}{n}$:



Der (von innen gezählte) k-te Kreisring hat einen Umfang von $2r\frac{k}{n}\pi$. Entsprechend ist die Fläche des k-ten Kreisringes kleiner als $2r\frac{k}{n}\pi \cdot \frac{r}{n}$, aber größer als $2r\frac{k-1}{n}\pi \cdot \frac{r}{n}$. Summation über k ergibt (siehe (5.2) für die Konvergenz)

$$A \leq \sum_{k=1}^{n} 2r\tfrac{k}{n}\pi \cdot \tfrac{r}{n} = 2r^2\pi \sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{n}\tfrac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 2r^2\pi \int_0^1 x dx = r^2\pi,$$

$$A \geq \sum_{k=1}^{n} 2r\tfrac{k-1}{n}\pi \cdot \tfrac{r}{n} = 2r^2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{k}{n}\tfrac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 2r^2\pi \int_0^1 x dx = r^2\pi.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beweisvariante 4. Vielleicht haben Sie in der Schule die Formel für die Integration durch Substitution kennengelernt[10]: Die Fläche des oberen Halbkreises (also des Teils des Kreises überhalb der x-Achse) entspricht der Fläche unter der Funktion $f(x) = r\sqrt{1-(x/r)^2}$ im Intervall $x \in [-r, r]$. (Es ist so nämlich gerade $x^2 + f(x)^2 = r^2$.) Also können wir schreiben

$$A = 2\int_{-r}^{r} r\sqrt{1-(x/r)^2}dx \overset{x=r\cos y}{=} 2r^2 \int_0^\pi \sin^2 y dy = r^2 \int_0^\pi \sin^2 y + \cos^2 y dy = r^2\pi.$$

Dabei haben wir im vorletzten '=' verwendet, dass $\int_0^\pi \sin^2 y dy = \int_0^\pi \cos^2 y dy$ (was anhand der Graphen der beiden Integranden einleuchtet). □

5.3 Die Euler'sche Zahl

In der Schule gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, die Euler'sche Zahl $e \approx 2.718282$ einzuführen:

1. Die Euler'sche Zahl e ist die Basis, für die die Funktion $\exp : x \mapsto e^x$ gerade sich selbst als Ableitung hat.

[10] Etwa so: Sei φ streng monoton und ist F eine Stammfunktion von f. Dann ist $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ und es gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \overset{x=\varphi(y)}{=} \int_a^b f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)dy.$$

2. Die Euler'sche Zahl e ist der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ mit

$$x_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n.$$

Wir werden hier 2. folgen, und versuchen einzusehen, wie man hieraus 1. folgern kann. Wir zeigen also zunächst die Existenz des Grenzwertes der Folge.

Theorem 5.9. *Die Folge $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ mit $x_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n$ ist streng monoton wachsend und von oben durch 3 beschränkt.*

Definition 5.10. *Wir definieren (den nach Theorem 5.2 existierenden Grenzwert)*

$$e := \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n.$$

Bevor wir zum Beweis von Theorem 5.9 kommen können, benötigen wir eine Hilfsaussage.

Lemma 5.11. *Es gilt*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Beweis. Wir schreiben

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\Big) - \Big(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\Big) = 1 - \frac{1}{n}.$$

□

Beweis von Theorem 5.9. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big) \cdot \Big(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\Big)^n \\
&= \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big) \cdot \Big(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\Big)^n = \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big) \cdot \Big(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\Big)^n \\
&= \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\Big)^n \\
&> \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)\Big(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\Big) \\
&> 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} > 1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die strenge Monotonie. Für die Beschränktheit schreiben wir mit Lemma 5.6

$$\begin{aligned}
\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n \cdots (n-k+1)}{n^k} \\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 3 - \frac{1}{n} \\
&< 3
\end{aligned}$$

wegen Lemma 5.11. □

A Griechische Symbole

Kleine und große griechische Buchstaben (wenn sie sich von den lateinischen unterscheiden):

Kleinbuchstabe	Großbuchstabe	Name
α		Alpha
β		Beta
γ	Γ	Gamma
δ	Δ	Delta
ϵ, ε		Epsilon
ζ		Zeta
η		Eta
θ, ϑ	Θ	Theta
ι		Iota
κ		Kappa
λ	Λ	Lambda
μ		My
ν		Ny
ξ	Ξ	Xi
π	Π	Pi
ρ, ϱ		Rho
σ, ς	Σ	Sigma
τ		Tau
υ	Υ	Ypsilon
ϕ, φ	Φ	Phi
χ		Chi
ψ	Ψ	Psi
ω	Ω	Omega