

Geometría Diferencial 2021

Lista 05

11.mayo.2021

1. Mostrar la **ecuación de Gauss**. Si S es una superficie con parametrización ortogonal, $F = 0$, entonces

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right].$$

2. a) Pruebe que toda superficie regular compacta S posee un punto elíptico.
b) Muestre que toda superficie regular compacta S , con característica $\chi(S) \leq 0$ posee un punto hiperbólico.
3. Compruebe que no existe superficie $\mathbf{x}(u, v)$ tal que $E = G = 1$, $F = 0$ y que $e = 1$, $g = -1$, $f = 0$.

4. Justifique por qué las superficies siguientes no son localmente isométricas dos a dos:

- a) la esfera S^2 ,
b) el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$,
c) la silla $z = x^2 - y^2$.

5. a) Dar la expresión para la ecuación de las geodésicas sobre el toro \mathbb{T}^2 , con la parametrización usual

$$\mathbf{x}(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v), \quad R > r > 0, \quad u, v \in (0, 2\pi).$$

- b) Considere las curvas $\alpha(t) = \mathbf{x}(a, bt)$ y $\beta(t) = \mathbf{x}(at, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$ son siempre geodésicas. Determinar para qué valores de a, b estas curvas son geodésicas.

Obs! No son las únicas geodésicas sobre el toro. El siguiente documento ilustra todas las familias de las geodésicas sobre \mathbb{T}^2 .
<http://www.rdrop.com/~half/math/torus/torus.geodesics.pdf>

6. Leer el punto 7, al final de la sección 4.5 del libro de Do Carmo (pp. 283–286). Entender el material, y probar el **Teorema del Índice de Poincaré**:

La suma de los índices de un campo vectorial diferenciable X con puntos singulares sobre una superficie compacta S , es igual a la característica de Euler de S , esto es

$$\sum_{\mathbf{p} \in S} I(X(\mathbf{p})) = \chi(S).$$
