

# Geometría Diferencial 2021

Lista 02

17.febrero.2021

1. Muestre que el cilindro  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  es una superficie regular, y encuentre parametrizaciones que cubran dicha superficie.
2. Sea  $f(x, y, z) = z^2$ . Muestre que 0 no es un valor regular de  $f$  y que aún así,  $f^{-1}(0)$  es una superficie regular.
3. Sea  $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$ .
  - a) Localizar los puntos críticos y valores críticos de  $f$ .
  - b) ¿Para qué valores de  $c$  e conjunto  $f(x, y, z) = c$  es una superficie regular?
  - c) Responder las preguntas en (a) y (b) para la función  $g(x, y, z) = xyz^2$ .

4. Probar que  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

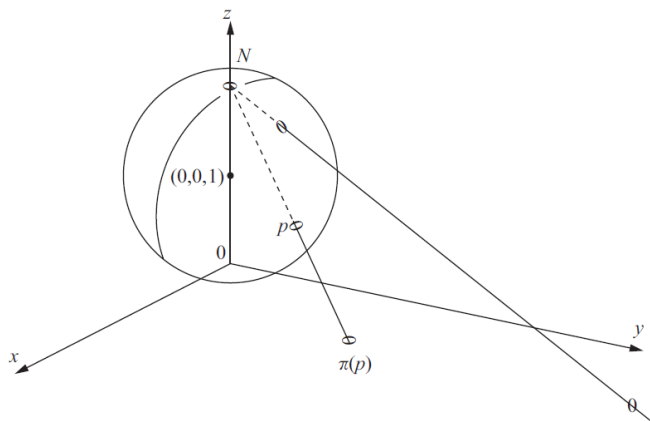
$$\mathbf{x}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u), \quad a, b, c \neq 0,$$

con  $0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi$ , es una parametrización para el elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .  
Describir geoméricamente las curvas  $u = \text{const.}$  sobre el elipsoide.

5. Una forma de definir un sistema de coordenadas para la esfera  $S^2$ , dada por  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ , es considerar la **proyección estereográfica**  $\pi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  que lleva el punto  $\mathbf{p} = (x, y, z)$  en la esfera  $S^2$  menos el polo norte  $N = (0, 0, 2)$  sobre la intersección del plano  $xy$  con la recta que conecta  $N$  con  $\mathbf{p}$  (Fig. abajo). Sea  $(u, v) = \pi(x, y, z)$ , donde  $(x, y, z) \in S^2 - \{N\}$  y  $(u, v) \in \text{plano } xy$ .

- a) Pruebe que  $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$  está dada por

$$x = \frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \quad y = \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \quad z = \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4}.$$



- b) Muestre que es posible, usando la proyección estereográfica, cubrir la esfera con dos cartas locales.

6. Sea  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  la esfera unitaria y sea  $A : S^2 \rightarrow S^2$  el mapa antipodal  $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ . Pruebe que  $A$  es un difeomorfismo.
7. Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regular y sea  $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  el mapa que toma cada punto  $p \in S$  y lo lleva a su proyección ortogonal sobre  $\mathbb{R}^2$ . ¿Es  $\pi$  diferenciable?
8. a) Mostrar que el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  es difeomorfo al plano.  
 b) Construir un difeomorfismo entre el elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  y la esfera unitaria  $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
9. Defina una curva regular en analogía con una superficie regular. Demostrar lo siguiente:
- a) La imagen inversa de un valor regular de una función diferenciable  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una curva plana regular. Dé un ejemplo de tal curva que sea no conexa.
- b) La imagen inversa de un valor regular de un mapa diferenciable  $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva regular en  $\mathbb{R}^3$ . Muestre la relación entre esta proposición y la forma clásica de definir una curva en  $\mathbb{R}^3$  como la intersección de dos superficies.
- c) El conjunto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^3\}$  no es una curva regular.
10. a) Sea  $C$  una curva regular y sean  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C$ ,  $\beta : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C$  dos parametrizaciones de  $C$  en una vecindad de  $p \in \alpha(I) \cap \beta(J) = W$ . Sea  $h = \alpha^{-1} \circ \beta : \beta^{-1}(W) \rightarrow \alpha^{-1}(W)$  el cambio de coordenadas. Probar que  $h$  es un difeomorfismo.  
 b) Defina la noción de función diferenciable en una curva regular, incluyendo todas las hipótesis necesarias.  
 c) Muestre que el mapa  $E : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dado por

$$E(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

es diferenciable (geométricamente,  $E$  “envuelve” la recta real  $\mathbb{R}$  alrededor de  $S^1$ ).

---