La Aplicación de Gauss y la Segunda Forma Fundamental

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial (Aula 16) 05.marzo.2021

La aplicación de Gauss

En el caso de una curva regular α (parametrizada por longitud de arco), ya vimos que la curvatura está dada por la norma del vector $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s)$, ento es $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$.
¿Podemos definir un concepto similar para superficies regulares?

Sea S una superficie orientada (ya sea por la elección de un atlas coherente maximal, o por la elección de un campo normal diferenciable), y sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ una parametrización en una vecindad de $\mathbf{p} \in S$.

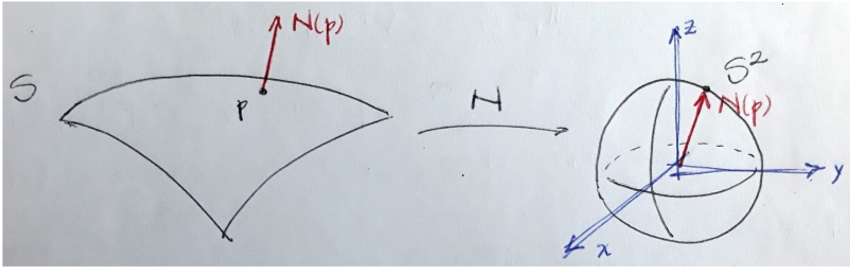
Consideramos la siguiente aplicación $N : S \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$N(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})}{|\mathbf{x}_u(\mathbf{q}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{q})|}, \quad \text{con} \, \mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p}).$$

La aplicación de Gauss

Definición

*Dada una superficie orientada S, la aplicación $N : S \to S^2$ dada por el vector normal unitario $N(\mathbf{p})$ que define la orientación de S es llamada la **aplicación de Gauss** ó **aplicación normal de Gauss**.*



La aplicación de Gauss

N es un mapa diferenciable entre superficies. Su derivada $DN(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S \to T_{N(\mathbf{p})}S^2$ es tal que si α es una curva diferenciable sobre S, $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, con $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, entonces

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = (N \circ \alpha)'(0).$$

Obs!

- Como $S^2 = f^{-1}(1)$, donde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y 1 es valor regular de f, entonces $T_{\mathbf{q}}S^2 = \langle \nabla f(\mathbf{q}) \rangle^{\perp} = \text{Ker}\, Df(\mathbf{q})$.

  En particular, $\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z) \;\Rightarrow\; \nabla f(\mathbf{q}) = 2\mathbf{q}$ y $T_{\mathbf{q}}S^2 = \langle \mathbf{q} \rangle^{\perp}$.

- En conclusión, $T_{N(\mathbf{p})}S^2 = \langle N(\mathbf{p}) \rangle^{\perp} = T_{\mathbf{p}}S$, y podemos pensar en la derivada de la aplicación de Gauss como un mapa $DN(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S \to T_{\mathbf{p}}S$, $\forall \mathbf{p} \in S$.

Propiedad

$DN(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S \to T_{\mathbf{p}}S$ es una transformación lineal auto-adjunta.

Prueba:

Sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ una parametrización, y sea $\mathbf{p} \in V \cap S$. Como $N(\mathbf{p}) \perp \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$, tenemos que

$$\langle N \circ \mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{x}_u \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle N \circ \mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{x}_v \rangle = 0.$$

Derivando con respecto a u y v, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle &= 0, \\ \langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

La aplicación de Gauss

Siendo $\mathbf{x}$ de clase C^2, entonces $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$, luego

$$\begin{aligned} \langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= -\langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_u, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v \rangle. \end{aligned}$$

Por simetría del producto interno, también tenemos

$$\begin{aligned} \langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_u, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u \rangle, \\ \langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \mathbf{x}_v, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v \rangle. \end{aligned}$$

Extendiendo por linealidad las relaciones anteriores, se obtiene

$$\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}_2 \rangle, \quad \forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_{\mathbf{p}}S. \quad \square$$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Definición

*Sea S una superficie orientada. La **segunda forma fundamental** de S en $\mathbf{p}$ es la forma cuadrática $II_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \to \mathbb{R}$ dada por*

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ es una curva con $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, y $|\alpha'(s)| = 1$, para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces

$$\langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0, \quad \forall s.$$

Diferenciando en s obtenemos $\langle N, \alpha''(s) \rangle + \langle DN(\alpha) \cdot \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, $\forall s$. En particular, para $s = 0$

$$\langle N(\mathbf{p}), \alpha''(0) \rangle = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}).$$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Segunda forma fundamental

Como $\alpha''(0) = \kappa(0)\mathbf{n}(0) = \kappa\mathbf{n}$, tenemos que
$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \kappa\langle N(\mathbf{p}), \mathbf{n}\rangle.$$

Definición

*El número $\kappa\langle N(\mathbf{p}), \mathbf{n}\rangle$ es llamado la **curvatura normal** de α en S en $\mathbf{p}$.*

Pregunta: ¿Qué ocurre si tomamos otra curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, con $\beta(0) = \mathbf{p}$, $\beta'(0) = \mathbf{v}$?

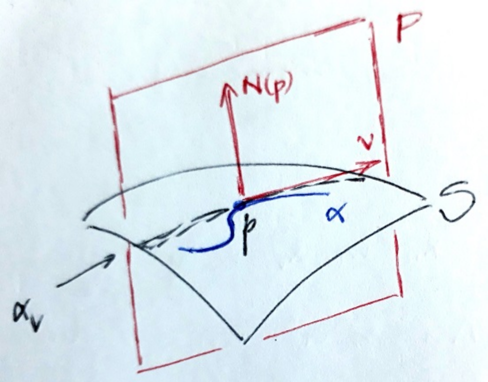
Teorema (Meusnier)

Cualesquiera dos curvas α, β en S, pasando por $\mathbf{p}$ y tangentes entre sí (esto es, $\alpha(0) = \mathbf{p} = \beta(0)$, $\alpha'(0) = \mathbf{v} = \pm\beta'(0)$) poseen la misma curvatura normal.

Del teorema de Meusnier, tenemos que la curvatura normal no depende de la orientación de la curva, pero cambia de signo al mudar la orientación de S.

Sea P el plano que para por $\mathbf{p}$, y que es generado por los vectores $\mathbf{v} = \alpha'(0)$, $N = N(\mathbf{p})$.

S y P son superficies transversales $\Rightarrow \alpha_{\mathbf{v}} = S \cap P$ es una curva regular, llamada la **sección normal** de S en $\mathbf{p}$, en la dirección de $\mathbf{v}$.



Obs! Si $\alpha_{\mathbf{v}}$ es tal que $\alpha_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{p}$, $\alpha'_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$ y $\mathbf{n}_{\alpha_{\mathbf{v}}}(0) = N(\mathbf{p})$, entonces la segunda forma fundamental está dada por $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \kappa_{\alpha_{\mathbf{v}}}\langle N(\mathbf{p}), \mathbf{n}\rangle = \kappa_{\alpha_{\mathbf{v}}}$.

Teorema (Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos)

Sea V espacio vectorial de dimensión finita n, con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, y $A : V \to V$ un operador auto-adjunto. Entonces, A admite una descomposición de la forma

$$A = U\Lambda U^T,$$

donde $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ es la matriz diagonal formada por los autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_n$ de A, y $U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal cuyas columnas son los autovalores de A, con $\mathbf{u}_i$ el autovalor correspondiente a λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

En particular, existe una base ortonormal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ de V, tal que en esta base, A es diagonalizable, i.e.

$$A\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

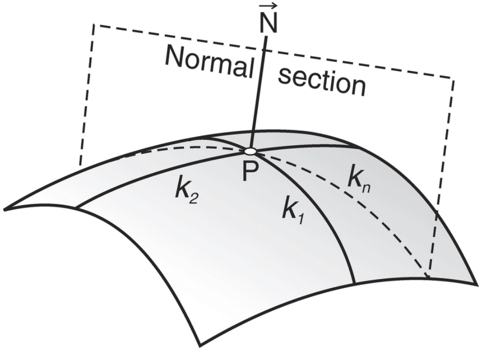
Corolario

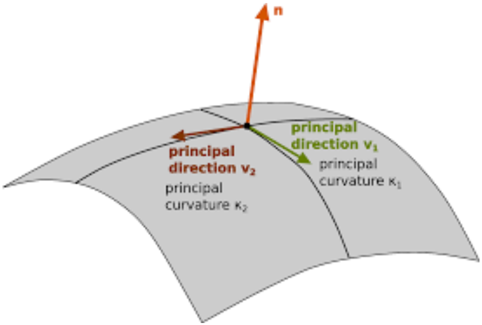
Si S es una superficie orientada, para todo punto $\mathbf{p} \in S$ existe una base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de $T_{\mathbf{p}}S$ tal que

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_1 = -\kappa_1 \mathbf{e}_1, \quad y \quad DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_2 = -\kappa_2 \mathbf{e}_2.$$

Definición

κ_1 y κ_2 se llaman las ***curvaturas principales*** *de S en* **p***. Los vectores* $\mathbf{e}_1$ *y* $\mathbf{e}_2$ *se les llama las* ***direcciones principales*** *de S en* **p***.*





Propiedad

Sea S superficie orientada, $\mathbf{p} \in S$. Para cualquier vector $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ se tiene que $\kappa_1 \geq \kappa(\alpha_{\mathbf{v}}) \geq \kappa_2$. Así, κ_1 y κ_2 corresponden a las curvaturas normales máxima y mínima en $\mathbf{p}$, respectivamente.

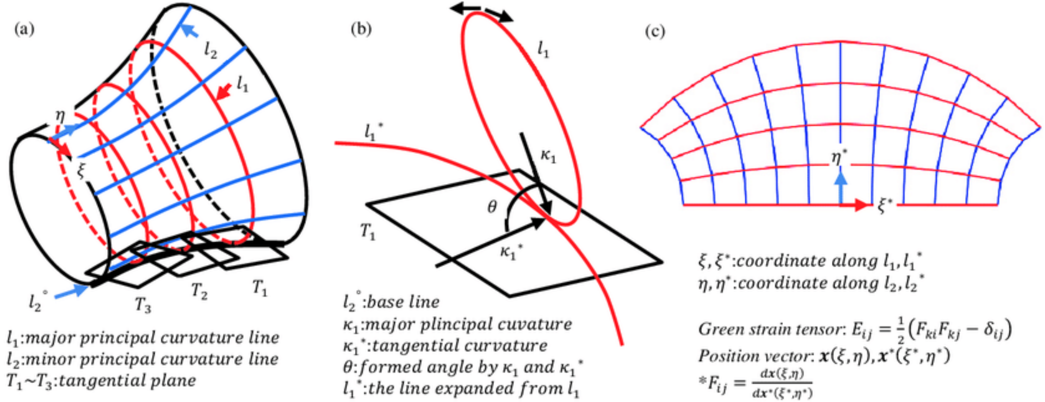
Prueba:

Tomemos $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$, con $|\mathbf{v}| = 1$. Podemos escribir $\mathbf{v} = \cos\varphi \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \mathbf{e}_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) &= -\langle DN(\mathbf{p})\cdot\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = -\langle DN(\mathbf{p})\cdot(\cos\varphi \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \mathbf{e}_2), \cos\varphi \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \mathbf{e}_2\rangle \\ &= -\langle -\kappa_1 \cos\varphi \mathbf{e}_1 - \kappa_2 \sin\varphi \mathbf{e}_2, \cos\varphi \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \mathbf{e}_2\rangle \\ &= \kappa_1 \cos^2\varphi + \kappa_2 \sin^2\varphi. \end{aligned}$$

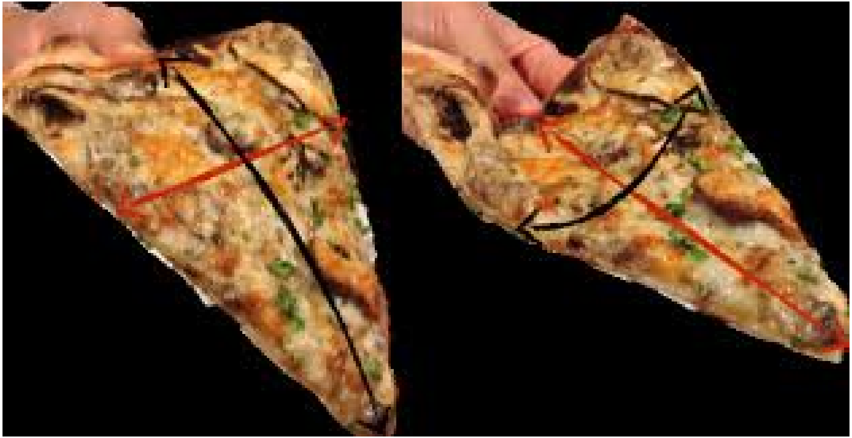
Si $\kappa_1 \geq \kappa_2 \;\Rightarrow\; \kappa_1 = \kappa_1(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \geq II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \geq \kappa_2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \kappa_2$. $\square$

Curvaturas



Las curvaturas principales κ_1 y κ_2 están relacionadas con el tensor de estrés.

Curvaturas



Gauss nos enseña hasta como se debe tomar un pedazo de pizza.

Ejemplos

Ejemplo 1: (El plano)

Tomemos la parametrización $\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{p}_0 + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2$, con $\{\mathbf{w}_1, w_2\}$ base del plano. Luego, $\mathbf{x}_u = \mathbf{w}_1, \mathbf{x}_v = \mathbf{w}_2$.

De ahí,

$$N(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{p}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{p})}{|\mathbf{x}_u(\mathbf{p}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{p})|} = \frac{\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2|}$$

es constante.

$\Rightarrow DN(\mathbf{p}) = 0$, $\forall \mathbf{p} \in S$. Así, si $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son las direcciones principales, entonces

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} = 0\mathbf{e}_1, \quad DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} = 0\mathbf{e}_2.$$

De modo que $\kappa_1 = 0$ y $\kappa_2 = 0$.

En este caso $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = 0$, para todo $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$.

Ejemplo 2: (Esfera de radio R)

Para una esfera S^2 de radio R (centrada en el origen), tenemos que la aplicación de Gauss, con la orientación que apunta todos los vectores normales hacia el origen, es

$$N(\mathbf{p}) = -\tfrac{1}{R}\mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{p} \in S^2.$$

Luego, $DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{R}I \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{R}\mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S^2$. En particular,

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\langle DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \tfrac{1}{R}||\mathbf{v}||^2.$$

Si $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son las direcciones principales en S^2_R, entonces

$$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_1 = -\tfrac{1}{R}\mathbf{e}_1, \quad DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_2 = -\tfrac{1}{R}\mathbf{e}_2.$$

Luego, $\kappa_1 = \frac{1}{R}$ y $\kappa_2 = \frac{1}{R}$, y $II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{R}$, para todo $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S^2$.

Ejemplos

Ejemplo 3: (Cilindro)

Consideramos el cilindro $S = S^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}$. $S = f^{-1}(R^2)$, con $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, y como R^2 es valor regular de f, S es superficie regular orientable. Además,

$$N(\mathbf{p}) = -\frac{\nabla f(x, y, z)}{|\nabla f(x, y, z)|} = \frac{(2x, 2y, 0)}{|(2x, 2y, 0)|} = -\tfrac{1}{R}(x, y, 0) = -\tfrac{1}{R}\mathbf{p}.$$

Consideramos la curva $(x(t), y(t), z(t))$ contenida en el cilindro, es decir, con $x(t)^2 + y(t)^2 = R^2$. A lo largo de esta curva, $N(t) = \frac{1}{R}(-x(t), -y(t), 0)$ y por lo tanto,

$$DN(\mathbf{p}) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = \tfrac{1}{R}(-x'(t), -y'(t), 0).$$

Concluimos lo siguiente:
Si $\mathbf{w}_1$ es un vector tangente al cilindro y paralelo al eje z, entonces
$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{0} = 0\mathbf{w}_1$;
si $\mathbf{w}_2$ es un vector tangente al cilindro y paralelo al plano xy, entonces
$DN(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}_2 = -\frac{1}{R}\mathbf{w}_2$.

De ello se deduce que $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ son los autovectores de $DN(\mathbf{p})$, con autovalores $\kappa_1 = 0$ y $\kappa_2 = \frac{1}{R}$, respectivamente.