El teorema fundamental de curvas

Alan Reyes-Figueroa

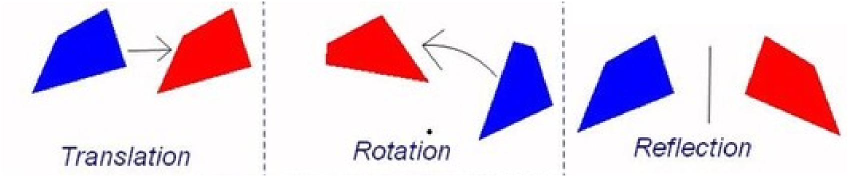
Geometría Diferencial (Aula 04) 22.enero.2021

Definición

*Sea $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de distancia en $\mathbb{R}^n$ (e.g. la distancia euclideana). Una **transformación rígida** (**movimiento rígido** o **euclideano**) en $\mathbb{R}^n$ es una transformación $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisface*

$$d(M\mathbf{x}, M\mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

¿Qué tipos de transformaciones rígidas hay?



UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Transformaciones rígidas

- Traslaciones:
  Todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ define una única traslación $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}$.
  Representamos el grupo de translaciones por $\mathbb{R}^n$.

- Rotaciones y Reflexiones: Se representan por una trasformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisface la propiedad de *isometría*

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

  En consecuencia, A es una *matriz ortogonal* real (sus columnas son una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$). El grupo de matrices ortogonales se llama el **grupo ortogonal** $O(n)$.

$$\begin{aligned} A \in O(n) \quad &\Rightarrow \quad A^T A = I \;\Rightarrow\; A^{-1} = A^T, \\ &\Rightarrow \quad \det(A)^2 = \det(A^T)\det(A) = \det(A^T A) = \det(I) = 1 \\ &\Rightarrow \quad \det(A) = \pm 1. \end{aligned}$$

Transformaciones rígidas

- Rotaciones: se caracterizan por tener determinante 1, Ellas forman la mitad del grupo ortogonal. El grupo de rotaciones se llama el **grupo especial ortogonal** $SO(n)$.

- Reflexiones: se caracterizan por tener determinante -1. Forman la otra mitad del grupo ortogonal.

Propiedad

Una transformación rígida en $\mathbb{R}^n$ es de la forma

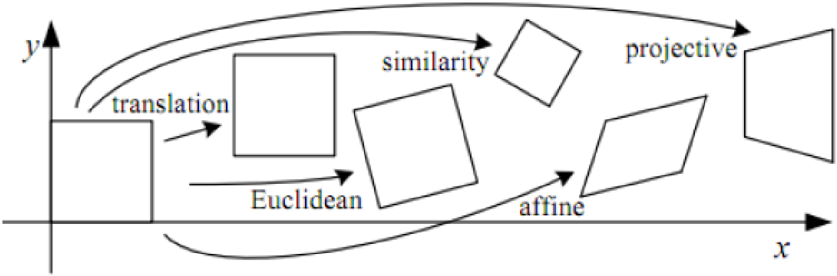
$$M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}, \quad \textit{donde } A \in O(n),\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Prueba: Traslaciones, rotaciones y reflexiones, son de la forma $A\mathbf{x} + \mathbf{t}$. La composición es de esa forma:

$$A_2(A_1\mathbf{x} + \mathbf{t}_1) + \mathbf{t}_2 = A_2A_1\mathbf{x} + (A_2\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}.$$

Definición

El grupo de transformaciones rígidas en $\mathbb{R}$ se llama el ***grupo euclideano*** *$E(n)$.*



Propiedad

La longitud de arco es invariante bajo transformaciones rígidas.

<u>Prueba</u>:
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ curva regular, $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ un movimiento rígido.
Entonces $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s)\beta'(s) = (M \circ \alpha)'(s) = (A\alpha(s) + \mathbf{v})' = A\alpha'(s)$. De ahí

$$\begin{aligned} \ell_\beta(s) &= \int_{s_0}^{s} |\beta'(u)|\, du = \int_{s_0}^{s} |A\alpha'(u)|\, du = \int_{s_0}^{s} \langle A\alpha'(u), A\alpha'(u)\rangle^{1/2}\, du \\ &= \int_{s_0}^{s} \langle \alpha'(u), \alpha'(u)\rangle^{1/2}\, du = \int_{s_0}^{s} |\alpha'(u)|\, du = \ell_\alpha(s), \ \forall s. \end{aligned}$$

Esto muestra que ℓ es invariante bajo movimientos rígidos. $\square$

Propiedad

La curvatura κ y la torsión τ son invariantes bajo transformaciones rígidas.

<u>Prueba</u>:
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular, $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ un movimiento rígido. Sea $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s)$.
Ya vimos que $\beta'(s) = A\alpha'(s)$. Luego, $\beta''(s) = A\alpha''(s)$ y $\beta'''(s) = A\alpha'''(s)$. En particular,

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_\beta(s) &= \beta'(s) = A\alpha'(s) = A\mathbf{t}_\alpha(s), \\
\mathbf{n}_\beta(s) &= A\mathbf{n}_\alpha(s) \qquad \text{(ya que } \beta''(s) = A\alpha''(s)\text{)}, \\
\mathbf{b}_\beta(s) &= \mathbf{t}_\beta(s) \times \mathbf{n}_\beta(s) = A\mathbf{t}_\alpha(s) \times A\mathbf{n}_\alpha(s) = A(\mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{n}_\alpha(s)) = A\mathbf{b}_\alpha(s).
\end{aligned}$$

Luego A lleva el triedro de Frenet de α, en el triedro de Frenet de β.

Además,

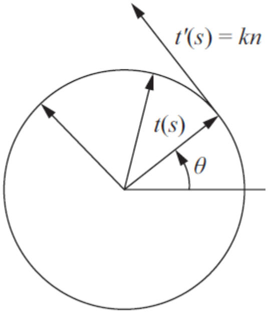
$$
\begin{aligned}
\kappa_\beta(s) &= \langle \beta''(s), \mathbf{n}_\beta(s)\rangle = \langle A\alpha''(s), A\mathbf{n}_\alpha(s)\rangle = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_\alpha(s)\rangle \\
&= \kappa_\alpha(s), \quad \forall s; \\
y & \\
\tau_\beta(s) &= \langle \mathbf{b}'_\beta(s), \mathbf{n}_\beta(s)\rangle = \langle A\mathbf{b}'_\alpha(s), A\mathbf{n}_\alpha(s)\rangle = \langle \mathbf{b}'_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s)\rangle \\
&= \tau_\alpha(s), \quad \forall s.
\end{aligned}
$$

De ahí que κ y τ son invariantes bajo movimientos rígidos. $\square$

Curvas planas

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva regular plana, parametrizada por longitud de arco, y sea $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ su vector tangente.

Suponga que $\theta(s)$ es el ángulo que hace el vector $\mathbf{t}(s)$ con el eje horizontal Ox. La función $\theta : I \to \mathbb{R}$ se llama la **indicatriz tangente** de α.



Lema

Localmente, la derivada de la indicatriz tangente satisface $\theta'(s) = \kappa(s)$, la curvatura de α.

Prueba:

Sea $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$ la indicatriz tangente de α. El vector velocidad de $\mathbf{t}(s)$ es

$$\mathbf{t}'(s) = (x''(s), y''(s)) = \alpha''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Si $0 < \theta(s) < 2\pi$, el ángulo que $\mathbf{t}(s)$ hace con el eje Ox es

$$\theta(s) = \arctan \frac{y'(s)}{x'(s)}, \quad \theta(s) \neq \tfrac{\pi}{2},\ \theta(s) \neq \tfrac{3\pi}{2}.$$

De modo que $\theta(s)$ está localmente bien definida.

Curvas planas

Además, como $\mathbf{t}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$, la derivada

$$\theta'(s) = \big(-\theta'(s)\sin\theta(s), \theta'(s)\cos\theta(s)\big) = \theta'(s)(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)) = \theta'(s)\mathbf{n}(s).$$

(al menos donde la función $\theta(s)$ está bien definida).

Esto muestra que $\theta'(s) = \kappa(s)$, y podemos definir una función global para θ, $\theta : I \to \mathbb{R}^2$ por

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(u)\,du.$$

Teorema (Teorema Fundamental de la teoría local de curvas planas)

Sea $\kappa_0 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$. Entonces, existe una curva plana $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, parametrizada por longitud de arco, tal que $\kappa_\alpha(s) = \kappa_0(s)$, $\forall s \in I$, donde κ_α es la curvatura de α.

Más aún, si $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ es otra curva plana, parametrizada por longitud de arco, con $\kappa_\beta(s) = \kappa_0(s)$, $\forall s$, entonces existe un movimiento rígido $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\beta = M \circ \alpha$.
(Esto es, la curva es única a menos de transformaciones rígidas.)

Prueba:
Definimos una función $\theta : I \to \mathbb{R}$ por $\int_{s_0}^{s} \kappa_0(u)\,du$, con $s_0 \in I$.
Entonces, θ es diferenciable, y corresponde (a menos de una constante) al ángulo que forma el tangente $\mathbf{t}(s)$ con el eje Ox.
Si definimos

$$\alpha(s) = \Big(\int_{s_1}^{s} \cos\theta(u)\,du, \int_{s_2}^{s} \sin\theta(u)\,du \Big), \quad s_1, s_2 \in I.$$

Luego $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$, tenemos que $|\alpha'(s)| = 1$, $\forall s$. Luego, α es una curva parametrizada por longitud de arco.
Su referencial de Frenet es

$$\mathbf{t}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)), \;\; \mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = (-\sin\theta(s), \cos\theta(s)).$$

Curvas planas

Por otro lado, $\mathbf{t}'(s) = (-\theta'(s)\sin\theta(s), \theta'(s)\cos\theta(s))$,
y por definición de curvatura, tenemos

$$\kappa_\alpha(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle = \theta(s) = \kappa_0(s),$$

como queríamos.

Ahora suponga que $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ es otra curvar regular plana, parametrizada por longitud de arco con $\kappa_\beta(s) = \kappa_0(s)$, $\forall s$.
Fijamos $s_0 \in I$. Como los referenciales de Frenet de α y β en s_0, $\{\mathbf{t}_\alpha(s_0), \mathbf{n}_\alpha(s_0)\}$ y $\{\mathbf{t}_\beta(s_0), \mathbf{n}_\beta(s_0)\}$, forman bases ortonormales de $\mathbb{R}^2$, existe una única matriz ortogonal $A \in O(2)$ tal que

$$A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \quad A\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0).$$

Curvas planas

Sea $\mathbf{v} = \beta(s_0) - A\alpha(s_0) \in \mathbb{R}^2$ y considere $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el movimiento rígido $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$.

Mostramos que la curva $\gamma = M \circ \alpha$ coincide con β:

$$\begin{aligned}
\gamma(s_0) &= A\alpha(s_0) + \mathbf{v} = \beta(s_0), \\
\mathbf{t}_\gamma(s_0) &= A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \\
\mathbf{n}_\gamma(s_0) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}_\gamma(s_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}_\beta(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0).
\end{aligned}$$

Pero, de lo visto anteriormente,

$$\kappa_\gamma(s) = \kappa_\alpha(s) = \kappa_0(s), \quad \forall s \in I.$$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Curvas planas

Si definimos $f: I \to \mathbb{R}$ por

$$f(s) = \frac{1}{2}\big[|\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)|^2 + |\mathbf{n}_\beta(s) - \mathbf{n}_\gamma(s)|^2\big],$$

entonces $f(s_0) = 0$ con

$$f'(s) = \langle \mathbf{t}'_\beta(s) - \mathbf{t}'_\gamma(s), \mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)\rangle + \langle \mathbf{n}'_\beta(s) - \mathbf{n}'_\gamma(s), \mathbf{n}_\beta(s) - \mathbf{n}_\gamma(s)\rangle.$$

De las ecuaciones de Frenet, y el hecho que $\kappa_\beta = \kappa_\gamma = \kappa_0$, tenemos que $f'(s) = 0$, $\forall s \in I$. Luego $f \equiv 0$ se anula en todo punto y entonces

$$\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s) = \mathbf{0}, \quad \forall s \in I,$$

$\Rightarrow \beta(s) - \gamma(s) = \textit{constante}$. Pero, $\beta(s_0) = \gamma(s_0) \Rightarrow \beta(s) = \gamma(s)$, $\forall s$. Esto muestra que $\beta = \gamma = M \circ \alpha$. $\square$

Un recordatorio...

Teorema (T. Fundamental de las EDO / Teorema de Picard)

Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$*. Dada* $\mathbf{x} : I = (a,b) \to \mathbb{R}^n$ *una curva en* $\mathbb{R}^n$ *y* $f : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ *una función continua, y* $t_0 \in I$
Entonces existe $\epsilon > 0$ *tal que* $J = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subseteq I$*, y existe una función diferenciable* $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ *tales que*

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(\varphi(t), t), & \forall\, t \in J; \\ \varphi(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Si, además, f es uniformemente Lipschitz continua en I (i.e. la constante Lipschitz es independiente de t) y es continua en t, tal función φ *es única.*
En otras palabras, existe una única solución del problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Teorema (Teorema Fundamental de la teoría local de curvas en $\mathbb{R}^3$)

Sea $\kappa_0, \tau_0 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables, definidas en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, con $\kappa_0 > 0$. Entonces, existe una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, parametrizada por longitud de arco, tal que $\kappa_\alpha(s) = \kappa_0(s)$, $\tau_\alpha(s) = \tau_0(s)$, $\forall s \in I$, donde κ_α y τ_α son la curvatura y torsión de α.

Más aún, si $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ es otra curva parametrizada por longitud de arco, con $\kappa_\beta(s) = \kappa_0(s)$ y $\tau_\beta(s) = \tau_0(s)$, $\forall s$, entonces existe un movimiento rígido $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = M \circ \alpha$.
(Esto es, la curva es única a menos de transformaciones rígidas.)

Prueba: Las ecuaciones de Frenet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}'(s)} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s)I_3 & 0 \\ -\kappa(s)I_3 & 0 & -\tau(s)I_3 \\ 0 & \tau(s)I_3 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(s)}, \quad \forall s \in I.$$

Definen un sistema de EDO en $\mathbb{R}^9$. Tomamos $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0) \in \mathbb{R}^9$ de modo que los vectores $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ formen una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$.

Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}^9$ la solución de este sistema, con condición inicial $\varphi(s_0) = \mathbf{x}_0$ (esta solución existe por el T. Fundamental de las EDO).

Para $\varphi = (f_1, \ldots, f_9)$ entonces, si definimos

$$\mathbf{t}(s) = (f_1, f_2, f_3), \; \mathbf{n}(s) = (f_4, f_5, f_6), \; \mathbf{b}(s) = (f_7, f_8, f_9), \quad \forall s,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \kappa_0(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}(s) &= -\kappa_0(s)\mathbf{t}(s) - \tau_0(s)\mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}(s) &= \tau_0(s)\mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

Sea M la matriz cuyas entradas son los productos escalares de **t**, **n**, **b**:

$$M(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{t}(s) & \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{n}(s) & \mathbf{t}(s)\cdot\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{t}(s) & \mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{n}(s) & \mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{t}(s) & \mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{n}(s) & \mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{b}(s) \end{pmatrix}.$$

De lo anterior, es posible mostrar que

$$M'(s) = A(s)M(s) - M(s)A(s).$$

En detalle, obtenemos el sistema de EDO

$$\begin{array}{rcl}
\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle' & = & 2\kappa(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \rangle \\
\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)\rangle' & = & -2\kappa(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s)\rangle - 2\tau(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\rangle, \\
\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s)\rangle' & = & 2\tau(s)\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s)\rangle, \\
\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\rangle' & = & \kappa(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)\rangle - \kappa(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle - \tau(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s)\rangle, \\
\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s)\rangle' & = & \kappa(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\rangle + \tau(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\rangle, \\
\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\rangle' & = & -\kappa(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s)\rangle - \tau(s)\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s)\rangle + \tau(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)\rangle.
\end{array}$$

donde
$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_0(s) & 0 \\ -\kappa_0(s) & 0 & -\tau_0(s) \\ 0 & \tau_0(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Más aún, M satisface la condición inicial $M(s_0) = I_3$. Sin embargo, la función constante $I_3(s) = I_3$ también satisface dicha condición. Por la unicidad de soluciones, $M \equiv I_3$, y entonces $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, $\forall s \in I$.

Como consecuencia, $\det[\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)] = \pm 1$. Pero, como $\det[\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)] = 1$, por continuidad de la solución $M(s)$, se tiene que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base con orientación positiva, $\forall s \in I$.

Finalmente, definimos $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ por $\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} \mathbf{t}(u)\, du$, $\forall s \in I$.

Entonces, α es diferenciable y $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$. Luego, $|\alpha'(s)| = 1$, $\forall s$, de modo que α es una curva parametrizada por longitud de arco.

Además, $\mathbf{t}'(s) = \kappa_0(s)\mathbf{n}(s)$, y $\kappa_\alpha(s) = |\mathbf{t}'(s)| = \kappa_0(s)$. Finalmente, como $\mathbf{b}(s) = \tau_0(s)\mathbf{n}(s)$, se tiene $\tau_\alpha(s) = \tau_0(s)$.

Unicidad. La prueba es análoga al caso de curvas planas.
Ahora suponga que $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ es otra curvar regular, parametrizada por longitud de arco con $\kappa_\beta(s) = \kappa_0(s)$, $\tau_\beta(s) = \tau_0(s)$, $\forall s$.
Fijamos $s_0 \in I$. Como los referenciales de Frenet de α y β en s_0, $\{\mathbf{t}_\alpha(s_0), \mathbf{n}_\alpha(s_0), \mathbf{b}_\alpha(s_0)\}$ y $\{\mathbf{t}_\beta(s_0), \mathbf{n}_\beta(s_0), \mathbf{b}_\beta(s_0)\}$, forman bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$, existe una única matriz ortogonal $A \in O(3)$ tal que

$$A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \;\; A\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0), \;\; A\mathbf{b}_\alpha(s_0) = \mathbf{b}_\beta(s_0).$$

Sea $\mathbf{v} = \beta(s_0) - A\alpha(s_0) \in \mathbb{R}^3$ y considere $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el movimiento rígido $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$.

Mostramos que la curva $\gamma = M \circ \alpha$ coincide con β:

$$
\begin{aligned}
\gamma(s_0) &= A\alpha(s_0) + \mathbf{v} = \beta(s_0), \\
\mathbf{t}_\gamma(s_0) &= A\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \\
\mathbf{n}_\gamma(s_0) &= A\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0), \\
\mathbf{b}_\gamma(s_0) &= A\mathbf{b}_\alpha(s_0) = \mathbf{b}_\beta(s_0).
\end{aligned}
$$

Luego, $\kappa_\gamma(s) = \kappa_\alpha(s) = \kappa_0(s), \quad \forall s \in I.$

Si definimos $f : I \to \mathbb{R}$ por

$$f(s) = \tfrac{1}{2}[|\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)|^2 + |\mathbf{n}_\beta(s) - \mathbf{n}_\gamma(s)|^2 + |\mathbf{b}_\beta(s) - \mathbf{b}_\gamma(s)|^2],$$

entonces $f(s_0) = 0$ con

$$f'(s) = \langle \mathbf{t}'_\beta - \mathbf{t}'_\gamma, \mathbf{t}_\beta - \mathbf{t}_\gamma \rangle + \langle \mathbf{n}'_\beta - \mathbf{n}'_\gamma, \mathbf{n}_\beta - \mathbf{n}_\gamma \rangle + \langle \mathbf{b}'_\beta - \mathbf{b}'_\gamma, \mathbf{b}_\beta - \mathbf{b}_\gamma \rangle.$$

De las ecuaciones de Frenet, y el hecho que $\kappa_\beta = \kappa_\gamma = \kappa_0$ y $\tau_\beta = \tau_\gamma = \tau_0$, tenemos que $f'(s) = 0$, $\forall s \in I$. Luego $f \equiv 0$ se anula en todo punto y entonces

$$\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s) = \mathbf{0}, \quad \forall s \in I,$$

$\Rightarrow \beta(s) - \gamma(s) = \textit{constante}$. Pero, $\beta(s_0) = \gamma(s_0) \Rightarrow \beta(s) = \gamma(s)$, $\forall s$. Esto muestra que $\beta = \gamma = M \circ \alpha$. $\square$

El caso general en $\mathbb{R}^n$

Comentarios sobre el caso de curvas en $\mathbb{R}^n$.
De las ecuaciones de Frenet en $\mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1}' \\ \mathbf{e}_n' \end{pmatrix}}_{F'(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \kappa_{n-2} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\kappa_{n-2} & \dots & \kappa_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix}}_{K(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}}_{F(s)}, \quad \forall s.$$

El caso general en $\mathbb{R}^n$

Nuevamente define un sistema de EDO $F'(S) = K(s)F(s)$. Dada una condición inicial $F(s_0) = [\mathbf{e}_1(s_0), \ldots, \mathbf{e}_n(s_0)]$, este problema tiene solución única, definida para todo $s \in I$.

Las ecuaciones de Frenet, $F'(s) = K(s)F(s)$ implican

$$(FF^T) = F'F^T + F(F^T)' = F'F^T + F(F')^T = KFF^T + F(KF)^T = KFF^T + FF^T K^T.$$

Esta ecuación, vista como una EDO en la variable FF^T, y dada una condicion inicial, tiene solución única $F(s_0)(F(s_0))^T = I_n$, constante. Por unicidad, esto implica que $FF^T \equiv I_n$, $\forall s$. Luego, $F(s) \in O(n)$, $\forall s$ es una matriz ortogonal, y por la continuidad, se muestra que $\det F(s) = 1$, de modo que $F(s)$ siempre consiste de una base ortonormal con orientación positiva, $\forall s$.

El caso general en $\mathbb{R}^n$

Como la matriz $F(s)$ determina un vector unitario $\mathbf{e}_1(s)$, se define

$$\alpha(s) \int_{s_0}^{s} \mathbf{e}_1(u)\, du.$$

De ahí $|\alpha'(s)| = |\mathbf{e}_1(s)| = 1$ y α es una curva parametrizada por longitud de arco. De la relación $\mathbf{e}_1' = \kappa_1 \mathbf{e}_2$, $\kappa_1 > 0$, $\mathbf{e}_2$ coincide con el segundo vector de Frenet $(\mathbf{e}_2)_\alpha$, y análogamente para el resto de los $\mathbf{e}_i$.
Así, $F(s)$ representa al referencial de Frenet de la curva α en cada punto s.
Similarmente, las κ_i coinciden con las curvaturas de Frenet de α en s.

Por último, la unicidad se prueba de forma idéntica a los casos en dimensión menor.