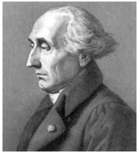
Superficies Mínimas

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial

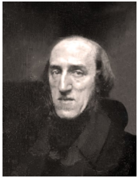
(Aula 20) 19.marzo.2021

El problema de Plateau:
Formulado por LAGRANGE en 1760, luego renombrado en honor a JOSEPH PLATEAU, debido a su extensa investigación usando superficies de jabón.



J.L. Lagrange

Consiste en mostrar la existencia de ciertas superficies mínimas, dada una frontera específica.



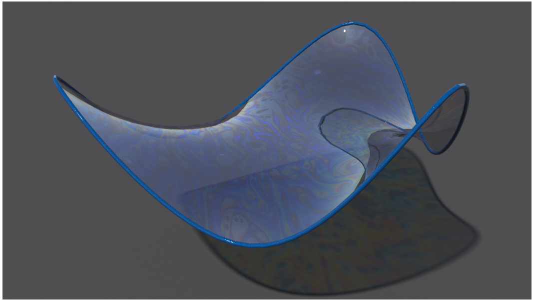
J. Plateau

Hoy en día, el problema se considera parte del cálculo de variaciones. El problema de existencia y regularidad forman parte de la teoría geométrica de la medida.

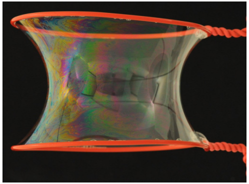
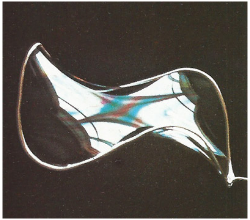
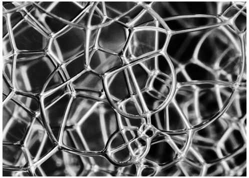
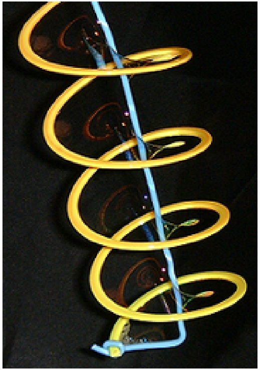
El problema de Plateau:

Dada una curva cerrada simple $\alpha \subset \mathbb{R}^3$, queremos determinar de entre todas las superficies $S \subset \mathbb{R}^3$, con borde $\partial S = \alpha$, aquella que tiene menor área.

$$\operatorname{argmin} A(S), \quad \text{sujeto a } \partial S = \alpha.$$



Relación con física: minimización de energía (tensión superficial). Leyes de PLATEAU.

Definición

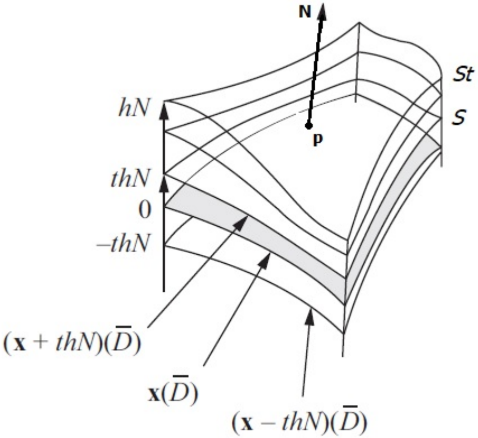
Sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ *una parametrización de una superficie regular* S. *Una aplicación diferenciable* $\overline{\mathbf{x}} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to \mathbb{R}^3$ *se llama una* ***variación*** *de* $\mathbf{x}$ *si* $\overline{\mathbf{x}}(0, u, v) = \mathbf{x}(u, v)$, $\forall (u, v) \in U$.

Definición

Dada una función diferenciable $h : U \to \mathbb{R}$ *y* S *la superficie regular parametrizada por* $\mathbf{x}$, *definimos la* ***variación normal*** *de* S *por* h *como la aplicación* $\overline{\mathbf{x}} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\overline{\mathbf{x}}(t, u, v) = \mathbf{x}(u, v) + th(u, v)N(u, v), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \ (u, v) \in U,$$

donde N *es el campo normal unitario a* S.



Variación normal de una superficie regular S

Obs. Por diferenciabilidad y continuidad, para valores pequeños de t, tenemos que S regular $\Rightarrow$ $S + thN$ regular. Luego $S_t = S + thN$ se parametriza por

$$\mathbf{x}^t(u,v) = \overline{\mathbf{x}}(t,u,v), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

De ahí, $\mathbf{x}_u^t = \mathbf{x}_u + th_u N + thN_u$, $\mathbf{x}_v^t = \mathbf{x}_v + th_v N + thN_v$. Luego,

$$\begin{aligned} E^t &= \langle \mathbf{x}_u^t, \mathbf{x}_u^t \rangle = E + 2th\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle + O(t^2) \approx E - 2the, \\ F^t &= \langle \mathbf{x}_u^t, \mathbf{x}_v^t \rangle = E + th\langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + th\langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle + O(t^2) \approx F - 2thf, \\ G^t &= \langle \mathbf{x}_v^t, \mathbf{x}_v^t \rangle = G + 2th\langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle + O(t^2) \approx G - 2thg. \end{aligned}$$

Definimos $A(t) = A(S^t) = \iint_U \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2}\, du\, dv = \iint_U \sqrt{\det(g_{ij}^t)}\, du\, dv$.

Como $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, para minimizar A hallamos los puntos críticos:

$$\frac{\partial E^t}{\partial t}(0,u,v) = -2he, \quad \frac{\partial F^t}{\partial t}(0,u,v) = -2hf, \quad \frac{\partial G^t}{\partial t}(0,u,v) = -2hg.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial t}(0) &= \frac{\partial}{\partial t}\iint_U \sqrt{E^tG^t - (F^t)^2}\,du\,dv\Big|_{t=0} = \iint_U \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{E^tG^t - (F^t)^2}\Big|_{t=0} du\,dv \\
&= \iint_U \frac{1}{2}\big(E^tG^t - (F^t)^2\big)^{-1/2}\Big(\frac{\partial E^t}{\partial t}(0)G^t + \frac{\partial G^t}{\partial t}(0)E^t - 2\frac{\partial F^t}{\partial t}(0)F^t\Big)\Big|_{t=0} du\,dv \\
&= \iint_U \frac{1}{2}\big(EG - F^2\big)^{-1/2}\big(-2heG - 2hgE + 2(2hfF)\big)\,du\,dv \\
&= \iint_U \frac{1}{2}\Big(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}\Big)(-2h)\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \\
&= -2\iint_U hH\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Entonces, $A'(0) = -2 \iint_U hH\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = -2 \iint_U hH\,dS.$

Hemos probado la siguiente

Proposición

Sea $A_h(t)$ el área de la superficie S^t, parametrizada por $\mathbf{x}^t(u,v) = S + thN = \mathbf{x}(u,v) + th(u,v)N(u,v)$. Entonces

$$A_h'(0) = -2 \iint_U hH\,dS. \tag{1}$$

Obs. De alguna manera queremos encontrar la superfície de menor área, sin importar la forma en que hacemos la variación normal. Esto implica que queremos que las derivadas

$$A_h'(0) = 0, \quad \text{para toda función diferenciable } h : U \to \mathbb{R}.$$

Superficies mínimas

Definición

Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ se llama una ***superficie mínima*** *si $H \equiv 0$.*

Consecuencia de la ecuación (1), es posible mostrar que

Propiedad

$S \subset \mathbb{R}^3$ es mínima $\Leftrightarrow$ $A_h'(0) = 0$, para toda variación normal $\mathbf{x}_h^t$ de S.

Prueba:

($\Rightarrow$) Si S es mínima, entonces $H \equiv 0$, y

$$A_h'(0) = -2 \iint_U hH\, dS = -2 \iint_U 0\, dS = 0, \quad \forall h.$$

($\Leftarrow$) La única forma de anular $A_h'(0) = 0$, $\forall h$, es que el integrando se anule, $\Rightarrow$ $hH = 0$, $\forall h$. Luego, $H \equiv 0$.

Recordemos que el gradiente de A de define como el único vector que satisface

$$\langle \nabla A(\mathbf{x}), h \rangle = D_h A(\mathbf{x}) = A_h'(0),$$

donde el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está definido sobre el espacio de funciones $C^\infty(U)$

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \iint_U \psi_1 \psi_2 \sqrt{\det(g_{ij})}\, du\, dv.$$

En particular, $\nabla A(\mathbf{x}) = -2H$, ya que $\langle -2H, h \rangle = -2 \iint_U hH\, dS = D_h A(\mathbf{x}) = A_h'(0)$.

Esto muestra que: si $\mathbf{x}$ no es superfície mínima, entonces la evolución $\mathbf{x}^t = \mathbf{x} + thHN = \mathbf{x} - \frac{t}{2}\nabla A(\mathbf{x})N$ conduce a una superficie cuya área es estrictamente menor.

Definición

*Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular. Decimos que una parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ es **isotérmica** si $E = G$ y $F = 0$ ($|\mathbf{x}_u| = |\mathbf{x}_v|$, $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$). En ese caso, los parámetros o coordenadas (u,v) se llaman isotérmicos.*

Parametrización isotérmica de un elipsoide

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular. Una parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ es ***conforme****, si la primera forma fundamental es un múltipplo de la identidad*

$$I\!I_{\mathbf{p}} = (g_{ij}) = \lambda(u,v)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall (u,v) \in U,$$

para alguna función $\lambda : U \to \mathbb{R}$.

Dos superficies $S, \widetilde{S}$, con parametrizaciones $\mathbf{x} : U \to S, \widetilde{\mathbf{x}} : U \to \widetilde{S}$ son ***conformemente equivalentes*** *si*

$$\widetilde{I\!I}_{\mathbf{p}} = (\widetilde{g}_{ij}) = \lambda(u,v)\,(g_{ij}) = \lambda(u,v) I\!I_{\mathbf{p}}, \quad for (u,v) \in U,$$

para alguna función positiva $\lambda : U \to \mathbb{R}$. Equivalentemente, S y S' son conformemente equivalentes si existe un cambio de parametrización $\varphi = \widetilde{\mathbf{x}}^{-1} \circ \mathbf{x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\Big\langle \frac{\partial(\widetilde{\mathbf{x}} \circ \varphi)}{\partial u_i}, \frac{\partial(\widetilde{\mathbf{x}} \circ \varphi)}{\partial u_j} \Big\rangle = \lambda(u,v) \Big\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \Big\rangle, \quad \forall i, j.$$

Proposición

Las siguientes son equivalentes:
(1.) $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ *es isotérmica.*
(2.) $\mathbf{x}$ *es una aplicación conforme (preserva ángulos entre vectores* $T_\mathbf{p}S$*).*
(3.) para todo $\mathbf{q} \in U$*, existe* $\lambda(\mathbf{q}) > 0$ *tal que*

$$\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{w}_2 \rangle = \lambda(\mathbf{q})^2 \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle.$$

Prueba: $(1 \Rightarrow 3)$. Sea $\lambda(\mathbf{q}) = E = G$. Por definición de la primera forma fundamental, tenemos $\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1 \rangle = E = \lambda^2 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$. Similarmente, $\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 \rangle = G = \lambda^2 = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$, y $\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_2 \rangle = F = 0 = \lambda \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$. Así, la propiedad se verifica para la base canónica de $\mathbb{R}^2$, y por linealidad, se extiende a todo vector.

Superficies isotérmicas

$(3 \Rightarrow 2)$.

$$\begin{aligned}
\cos\angle(D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{w}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{w}_2) &= \frac{\langle D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{w}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{w}_2\rangle}{|D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{w}_1|\cdot|D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{w}_2|} = \frac{\lambda^2(\mathbf{q})\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle}{\lambda^2(\mathbf{q})|\mathbf{w}_1|\cdot|\mathbf{w}_2|} \\
&= \frac{\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle}{|\mathbf{w}_1|\cdot|\mathbf{w}_2|} = \cos\angle(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x}$ es conforme.

$(2 \Rightarrow 1)$.

$$\begin{aligned}
E &= \langle\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_u\rangle = \langle D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_1\rangle = \lambda(\mathbf{q})\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1\rangle = \lambda(\mathbf{q}) = \lambda(\mathbf{q})\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\rangle \\
&= \langle D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_2, D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_2\rangle = \langle\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_v\rangle = G, \\
F &= \langle\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\rangle = \langle D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_1, D\mathbf{x}(\mathbf{q})\cdot\mathbf{e}_2\rangle = \lambda(\mathbf{q})\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle = 0. \ \square
\end{aligned}$$

Teorema

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular. Dado $\mathbf{p} \in V \cap S$, siempre existe una parametrización isotérmica $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$.

(Idea: aplicar ortonormalización de Gram-Schmidt a la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$.)

Superficies isotérmicas

Si $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ es una parametrización isotérmica, entonces $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ y $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$.

Derivando obtenemos

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle, \qquad \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0,$$
$$\langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle, \qquad \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = 0. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces la siguiente propiedad.

Propiedad

Si $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ *es una parametrización isotérmica, entonces* $\Delta\mathbf{x}$ *es paralelo al vector normal* N*.*

<u>Prueba</u>:
De las ecuaciones anteriores, $\langle \Delta\mathbf{x}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \Delta\mathbf{x}, \mathbf{x}_v \rangle = 0$. Esto muestra que $\Delta\mathbf{x} \in T_{\mathbf{p}}S^{\perp} \;\Rightarrow\; \Delta\mathbf{x}$ es paralelo a N, $\forall \mathbf{p} \in S$. $\square$

Obs.
De la propiedad anterior, existe una función diferenciable $\beta : S \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta\mathbf{x} = \beta N$. En particular, podemos escribir

$$\beta = \langle \beta N, N \rangle = \langle \Delta\mathbf{x}, N \rangle.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\beta &= \langle \Delta \mathbf{x}, N\rangle = \langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, N\rangle = \langle \mathbf{x}_{uu}, N\rangle + \langle \mathbf{x}_{vv}, N\rangle = e + g\\ &= II_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}_u) + II_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}_v).\end{aligned}$$

De ahí que

$$\frac{1}{\lambda^2}\beta = II_{\mathbf{p}}\Big(\frac{\mathbf{x}_u}{\lambda}\Big) + II_{\mathbf{p}}\Big(\frac{\mathbf{x}_v}{\lambda}\Big) = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = 2H.$$

Portanto,

$$\boxed{\beta = 2\lambda^2 H, \quad \Delta \mathbf{x} = 2\lambda^2 HN.}$$

Propiedad

Si $\mathbf{x}$ es isotérmica, entonces $\Delta \mathbf{x} = 2\lambda^2 HN$.

Superficies isotérmicas

Recordemos que una función f es **armónica** si $\Delta f = 0$.

Corolario

$S \subset \mathbb{R}^3$ es superficie mínima $\Leftrightarrow$ las funciones coordenadas $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ son funciones armónicas, cuando se consideran en parámetros isotérmicos (u,v).

Prueba:

$$\begin{aligned} S \text{ es mínima} \quad &\Leftrightarrow \quad H \equiv 0 \Leftrightarrow \Delta \mathbf{x} = 2\lambda^2 HN = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = (x,y,z) \text{ es armónica} \\ &\Leftrightarrow \quad x, y, z \text{ son armónicas.} \;\square \end{aligned}$$

- Conexiones con funciones holomorfas (próxima aula).

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ejemplos de superficies mínimas

Ejemplo 1: (Trivial)
El plano es una superficie mínima, pues $H \equiv 0$.

Otros ejemplos de superficies mínimas:

- catenoide
- helicoide
- superficie de Enneper
- superficie de Henneberg
- superficie de Costa
- superficie de Scherk I y II
- $\ldots$

Ejemplos de superficies mínimas

Tema del primer seminario:

1. Catenoide y Helicoide
2. Superficie de Enneper, Superficie de Costa
3. Superficie de Henneberg, Trinoide (3-noide)
4. Superficie de Bour, Superficie de Riemann
5. Superficies de Scherk I y II, *Saddle tower*

Ejemplos de superficies mínimas

¿Qué hay que hacer?

Preparar una presentación del tema (25 minutos máximo).

1. breve historia
2. propiedades interesantes/importantes
3. parametrizaciones
4. mostrar por qué es superficie mínima
5. ...

Importante

- Medir bien el tiempo (seré riguroso en cuanto al tiempo).
- Enviar `.pdf` por correo al menos 2 días antes.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA