

EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET

ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 32) 17.MAYO.2022

Motivación

¿Cuánto suman los ángulos internos en un triángulo?

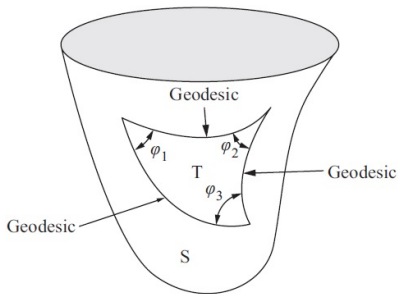
Respuesta: Depende de la geometría donde yace dicho triángulo.

Una primera versión del teorema fue dada por Gauss en 1848, y trata sobre triángulos geodésicos.

Afirma que el exceso sobre π de la suma de los ángulos internos en un triángulo geodésico T es la integral de la curvatura:

$$\sum_{j=1}^3 \varphi_j = \pi + \iint_T K dS.$$

P. O. Bonnet: extensión a regiones acotadas y a superficies compactas.



Preliminares

Recordemos que si $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es una parametrización ortogonal de S (esto es $F = 0$), entonces la curvatura de Gauss es

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right). \quad (1)$$

Proposición

Sea S superficie regular en \mathbb{R}^3 , $\mathbf{p} \in S$. Entonces, es posible encontrar una parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, definida en una vecindad U de $\mathbf{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$ tal que $F = 0$ en U . \square

De (1), $K\sqrt{EG} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right)$, observe que el término en el lado izquierdo \sqrt{EG} tiene una interpretación geométrica, pues

$$\int_R f \, dS = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} (f \circ \mathbf{x}) \sqrt{EG} \, du \, dv.$$

Por otro lado, el término del lado derecho tiene una estructura similar a una divergencia $\nabla \cdot H$, para algún campo vectorial H en \mathbb{R}^2 (pues $\nabla \cdot H = \operatorname{div} H = \frac{\partial}{\partial u}(H_1) + \frac{\partial}{\partial v}(H_2)$).

Definición

Una región **regular** $\Omega \subset S$ es un abierto conexo de S , con cerradura compacta en S , cuya frontera $\partial\Omega$ es unión finita disjunta de curvas cerradas simples, cada una diferenciable por partes.

Una región regular es **simple** si es homeomorfa a \mathbb{D} .

Teorema (Teorema de la Divergencia)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ una región regular y sea $X = (P, Q) = P \frac{\partial}{\partial u} + Q \frac{\partial}{\partial v}$ un campo vectorial sobre $\overline{\Omega}$. Sea $\mathbf{n} = (v', -u')$ el vector normal unitario a la curva $\partial\Omega = \alpha(s) = (u, v)$. Entonces

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \, du \, dv = \int_{\partial\Omega} X \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad \square$$

Esto es, si $\alpha : [a, b] \rightarrow \partial\Omega$, con $\alpha(s) = (u(s), v(s))$ es diferenciable en cada subintervalo de la partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$, entonces

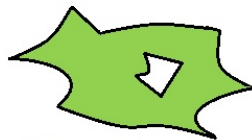
$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} \right) du \, dv = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (P(\alpha(s))v'(s) - Q(\alpha(s))u'(s)) \, ds.$$

Definición

Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada, $\partial\Omega = c_1 \cup \dots \cup c_n$. Diremos que una parametrización $\alpha_i(s)$ de c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, $|\alpha'_i(s)| = 1$, es **positiva** si $\mathbf{n}_i(s) = N \times \alpha'_i(s)$ apunta siempre para adentro de Ω , $i = 1, 2, \dots, n$. En ese caso, diremos que $\partial\Omega$ está **positivamente orientada**.



Simple



No simple

Diferenciable a partes

Preliminares

Si S es superficie orientada, $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización ortogonal de S , y $R \subseteq \mathbf{x}(U)$ es una región regular simple, con $\partial\Omega = \alpha(s)$ positivamente orientada. Aplicando el Teorema de la Divergencia a $X = (\frac{G_u}{\sqrt{EG}}, \frac{E_v}{\sqrt{EG}})$ y (1)

$$\begin{aligned}\int_R K dS &= \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K \sqrt{EG} du dv = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \operatorname{div} X du dv \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} v'(s) - \frac{E_v}{\sqrt{EG}} u'(s) \right) ds.\end{aligned}$$

- el lado derecho anterior no depende del sistema de coordenadas.
- $\int_R K$ sólo depende del comportamiento de S en una vecindad de ∂R .

Preliminares

Recordemos de la clase anterior que la curvatura geodésica de una curva α , $|\alpha'| = 1$, está dada por

$$\kappa_g \alpha(s) = [\nabla_{\alpha} \alpha'(s)] = \langle \nabla_{\alpha} \alpha'(s), N \times \alpha'(s) \rangle.$$

Recordemos también que si X, Y son campos tangentes unitarios, y φ es el ángulo entre ellos, entonces $\varphi'(s) = [\nabla_{\alpha} Y(s)] - [\nabla_{\alpha} X(s)]$.

En particular, si $X(s) = \frac{\mathbf{x}_u(\alpha(s))}{\sqrt{E}}$ y $Y(s) = \alpha'(s)$, tenemos $|X(s)| = |Y(s)| = 1$, y

Lema

Sea S superficie orientada, $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización ortogonal de S , y $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbf{x}(U)$ una curva con $|\alpha'(s)| = 1$, $\forall s \in I$, positivamente orientada. Entonces

$$\kappa_g \alpha(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} v'(s) - \frac{E_v}{\sqrt{EG}} u'(s) \right) + \frac{d}{ds} \varphi(s).$$

Preliminares

Prueba:

Observe que

$$X'(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right) = \left(\frac{\mathbf{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2} \frac{E_u \mathbf{x}_u}{E^{3/2}} \right) u'(s) + \left(\frac{\mathbf{x}_{uv}}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2} \frac{E_v \mathbf{x}_u}{E^{3/2}} \right) v'(s).$$

Como $N \times X = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}$ y $[\nabla_\alpha X] = \langle \nabla_\alpha X, N \times X \rangle = \langle \nabla_\alpha X, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \rangle$, entonces

$$[\nabla_\alpha X] = \frac{\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle}{\sqrt{EG}} u'(s) + \frac{\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle}{\sqrt{EG}} v'(s).$$

De $\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_u = \frac{1}{2} G_u$ y $\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_v = -\frac{1}{2} E_v$, obtenemos la expresión requerida

$$\kappa_g \alpha(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} v'(s) - \frac{E_v}{\sqrt{EG}} u'(s) \right) + \frac{d}{ds} \varphi(s),$$

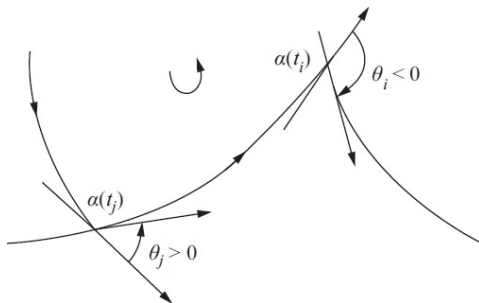
donde $\varphi(s)$ es el ángulo de $X(s)$ a $\alpha'(s)$. \square

Preliminares

Tomemos ahora una región $R \subseteq \mathbf{x}(U)$ regular y simple, cuyo borde ∂R es positivamente orientado. Consideramos una parametrización

$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de $\mathbf{x}^{-1}(\partial R)$, regular por partes en los subintervalos de $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

Denotamos por θ_j al ángulo $\theta_j = \alpha'(t_j^+) - \alpha'(t_j^-)$ (ángulos externos a ∂R)



Teorema (Índice de Rotación)

Para una curva cerrada y simple $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, regular por partes, en $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, vale

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_j(t_j) - \varphi_j(t_{j-1})) + \sum_{j=1}^n \theta_j = \pm 2\pi.$$

Aquí, $\varphi_j(s)$ mide el ángulo desde \mathbf{e}_1 a $\alpha'_j(s)$ (esto es, el ángulo externo a α en el vértice j); y el signo depende de la orientación de α .

Prueba: Basta considerar

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_j(t_j) - \varphi_j(t_{j-1})) + \sum_{j=1}^n \theta_j = \int_a^b \theta(s) ds = 2\pi \text{Index}(\alpha) = \pm 2\pi. \quad \square$$

Teorema de Gauss-Bonnet

Sea S superficie orientada, $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización regular, y sea $R \subseteq \mathbf{x}(U)$ una región regular simple, cuya frontera ∂R está parametrizada por una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{x}(U)$, regular por partes, en $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, y parametrizada por longitud de arco, con vector normal unitario a ∂R , dado por $\mathbf{n}(s) = (v'(s), -u'(s))$.

Entonces

Teorema (Teorema de Gauss-Bonnet local)

$$\int_R K dS + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \kappa_g \alpha(s) ds + \sum_{j=1}^n \theta_j = 2\pi.$$

Esto es,
$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{j=1}^n \theta_j = 2\pi.$$

Teorema de Gauss-Bonnet

Prueba: Definamos $X = \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}, \frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)$, $\mathbf{n} = (v', -u')$. Por el lema, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \kappa_g \alpha(s) ds &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{2} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{d}{ds} \varphi_j(s) ds \\&= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{2} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} dv - \frac{E_v}{\sqrt{EG}} du \right) + \sum_{j=1}^n \varphi_j(s) \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} \\&= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{2} X \cdot \mathbf{n} ds + \sum_{j=1}^n \varphi_j(s) \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} = \sum_{j=1}^n \iint \frac{1}{2} \operatorname{div} X du dv + \sum_{j=1}^n \varphi_j(s) \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} \\&= \sum_{j=1}^n \iint -K \sqrt{EG} du dv + \sum_{j=1}^n (\varphi_j(t_j) - \varphi_j(t_{j-1})) \\&= - \iint_R K dS - \sum_{i=1}^n \theta_i + 2\pi.\end{aligned}$$

Teorema de Gauss-Bonnet

De ahí que

$$\int_R K dS + \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \kappa_g \alpha(s) ds + \sum_{j=1}^n \theta_j = 2\pi. \quad \square$$

Obs!

- El Teorema de Gauss-Bonnet local, sobre una región regular R , combina información geométrica de diferentes naturalezas: la curvatura gaussiana en R , la curvatura geodésica en ∂R , más información de los ángulos externos.
- Existe una versión global de Teorema de Gauss-Bonnet sobre una superficies compacta S . Esta combina además, información topológica de S .

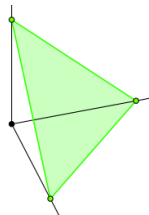
Mencionamos ahora varios conceptos topológicos que serán de utilidad.

Simplejos

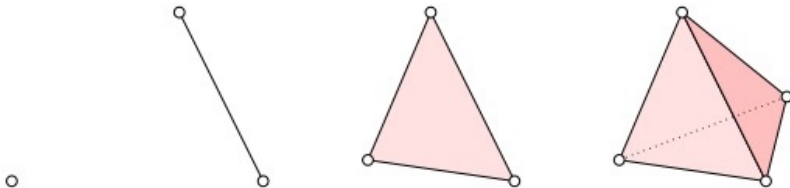
Definición

El **simplex estándar** o **n -simplex** Δ^n , es el subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} definido por

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0, \forall i\}.$$



2-simplex $\Delta^2 \subset \mathbb{R}^3$.



Simplejos estándar Δ^n , para $n = 0, 1, 2, 3$.

Simplejos

- Los vértices del n -simplex estándar son los puntos

$$\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

- Denotamos al n -simplex Δ^n por $[\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n]$.
- Un conjunto de puntos $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ (con $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_0$ l.i.), define un n -simplex arbitrario $\sigma = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ por mediante el mapa

$$\sigma = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=0}^n t_i \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0, \forall i \right\}.$$

- Hay un homeomorfismo natural de Δ^n a $[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$, dado por

$$\sum_{i=0}^n t_i \mathbf{e}_i \longrightarrow \sum_{i=0}^n t_i \mathbf{v}_i.$$

Simplejos

Definición

Sea $\sigma = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ un n -simplex en \mathbb{R}^p .

Cualquier m -simplex, $0 \leq m < n$, formado de los vértices de σ , es llamado una m -**cara** de σ . En particular, los 0-caras son los **vértices** de σ ; las 1-caras son las **aristas** de σ ; y las $(n - 1)$ -caras son las **caras** (faces) de σ .

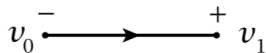
En particular, la i -ésima cara de σ es $\sigma_i = [\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n]$.

Definición

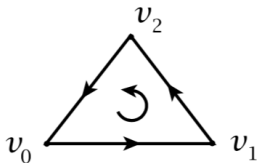
Decimos que un n -simplex $\sigma = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ tiene una **orientación positiva** si $\det[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] > 0$. El **borde** (con signo) de σ se define como

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n].$$

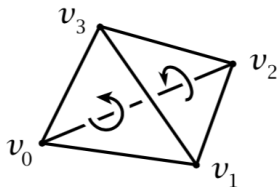
Simplejos



$$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$$



$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$



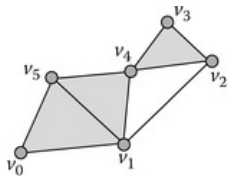
$$\begin{aligned} \partial[v_0, v_1, v_2, v_3] = & [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] \\ & + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2] \end{aligned}$$

Complejos Simpliciales

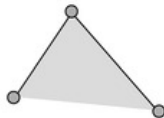
Definición

Un **complejo simplicial** es un conjunto finito de simplejos \mathcal{K} de \mathbb{R}^n , que cumple las dos condiciones siguientes:

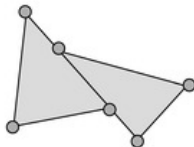
- Si un n -simplex σ pertenece a \mathcal{K} entonces todas sus m -caras pertenecen a \mathcal{K} , para $0 \leq m \leq n$.
- Si dos simplejos σ, τ de \mathcal{K} se cortan, entonces su intersección $\sigma \cap \tau$ es una cara común.



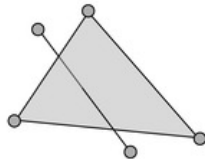
(a) A simplicial complex



(b) Missing edge



(c) Shared partial edge



(d) Nonface intersection

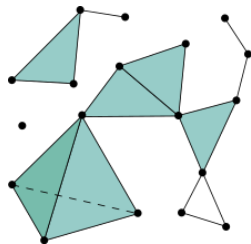
Complejos Simpliciales

Definición

La **dimensión** de un n -simplex σ es $\dim \sigma = n$. La dimensión de un complejo simplicial \mathcal{K} se define por

$$\dim \mathcal{K} = \max\{\dim \sigma : \sigma \in \mathcal{K}, \sigma \text{ es simplex}\}.$$

Los complejos simpliciales pueden ser estructuras muy complicadas. Nos interesa aquí sólo los complejos de dimension ≤ 2 .



Obs! Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie, nos interesan las imágenes de complejos simpliciales en $U \subseteq \mathbb{R}^2$, bajo la parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Triangulaciones

Definición

Una **triangulación** de un espacio topológico X es un complejo simplicial \mathcal{K} homeomorfo a X , junto con un homeomorfismo $h : \mathcal{K} \rightarrow X$.

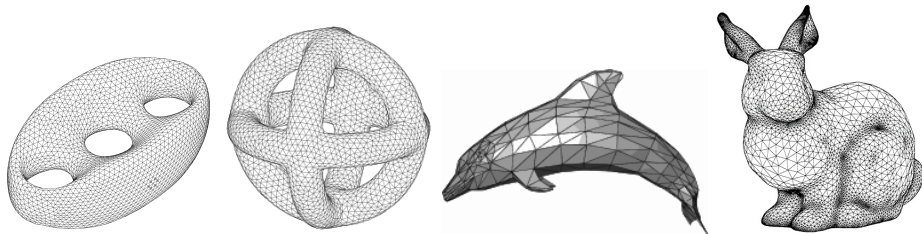
Obs! Típicamente, los elementos de esta triangulación son simplejos de la misma dimension $\dim X$.

En el caso de superficies

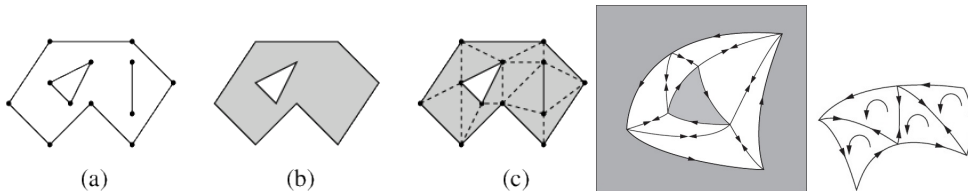
Definición

Una región regular simple R sobre una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es un **triángulo** si ∂R posee tres vértices (esto es, si R es la imagen parametrizada de un 2-simplex). En ese caso, una triangulación de R es un complejo simplicial \mathcal{K} formado por una colección (finita) de triángulos y sus caras, de forma que \mathcal{K} es homeomorfo a R .

Triangulaciones



Ejemplos de triangulaciones para algunas superficies.



Triangulaciones para una región regular R .