

## **LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL**

ALAN REYES-FIGUEROA  
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 18) 17.MARZO.2022

# Primera forma fundamental

Hasta ahora, hemos tratados a las superficies en  $\mathbb{R}^3$  desde el punto de vista de la diferenciabilidad. Vamos ahora a introducir otras estructuras geométricas asociadas a una superficie  $S$ .

El producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  natural de  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  induce en cada plano tangente  $T_p S$  de una superficie regular un producto interno, que denotamos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  dado por

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle, \quad \forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_p S.$$

Este producto interno es una forma bilineal simétrica:

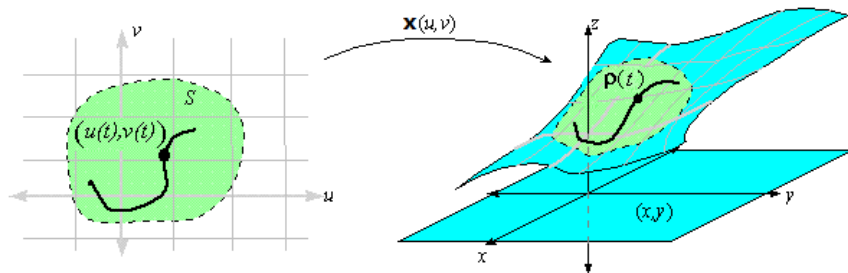
- $\langle a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle_p = a\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle_p + b\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle_p;$
- $\langle \mathbf{w}_1, a\mathbf{w}_2 + b\mathbf{w}_3 \rangle_p = a\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p + b\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle_p;$
- $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle_p.$

# Primera forma fundamental

Si  $\alpha$  es una curva diferenciable sobre la superficie  $S$ , cuando calculamos la longitud de arco de  $\alpha$

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

nos gustaría utilizar elementos intrínsecos a la superficie  $S$ , sin hacer referencia al espacio métrico ambiente.



# Primera forma fundamental

## Definición

Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regular,  $\mathbf{p} \in S$ . La **primera forma fundamental** de  $S$  en  $\mathbf{p}$  es la forma cuadrática  $I_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{p}}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

Observaciones:

- $I_{\mathbf{p}}$  es apenas la expresión de cómo  $T_{\mathbf{p}}S$  hereda la estructura de producto interno de  $\mathbb{R}^3$ .
- $I_{\mathbf{p}}$  es el ejemplo más simple de una métrica Riemanniana.

Tenemos

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} dt.$$

# Primera forma fundamental

Sea  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$  una parametrización de  $S$ , y sea  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  una curva contenida en  $V \cap S$ . Como  $\alpha'(t) = \mathbf{x}_u(\alpha(t)) \cdot u'(t) + \mathbf{x}_v(\alpha(t)) \cdot v'(t)$ , entonces si  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \cap S$  es tal que  $\mathbf{p} = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ , y  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ . Entonces,

$$\mathbf{v} = \alpha'(0) = \mathbf{x}_u(\mathbf{p}) \cdot u'(0) + \mathbf{x}_v(\mathbf{p}) \cdot v'(0),$$

y podemos escribir

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u \cdot u'(0) + \mathbf{x}_v \cdot v'(0), \mathbf{x}_u \cdot u'(0) + \mathbf{x}_v \cdot v'(0) \rangle_{\mathbf{p}} \\ &= (u'(0))^2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_{\mathbf{p}} + 2u'(0)v'(0) \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}} + (v'(0))^2 \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

# Primera forma fundamental

Si definimos los coeficientes

$$\begin{aligned}E &= E_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u(\mathbf{p}), \mathbf{x}_u(\mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_{\mathbf{p}}, \\F &= F_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u(\mathbf{p}), \mathbf{x}_v(\mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}}, \\G &= G_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_v(\mathbf{p}), \mathbf{x}_v(\mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}},\end{aligned}$$

Entonces la ecuación anterior se escribe como

$$I_{\mathbf{p}}(\alpha'(0)) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = (u', v') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \quad (1)$$

donde todos los coeficientes involucrados son calculados en  $t = 0$ :

$$E = E(u_0, v_0), \quad F = F(u_0, v_0), \quad G = G(u_0, v_0).$$

# Primera forma fundamental

En otras palabras,  $E, F, G$  son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_p S$ .

En términos de los parámetros  $t$ , en ocasiones en otros libros la ecuación (1) se escribe como

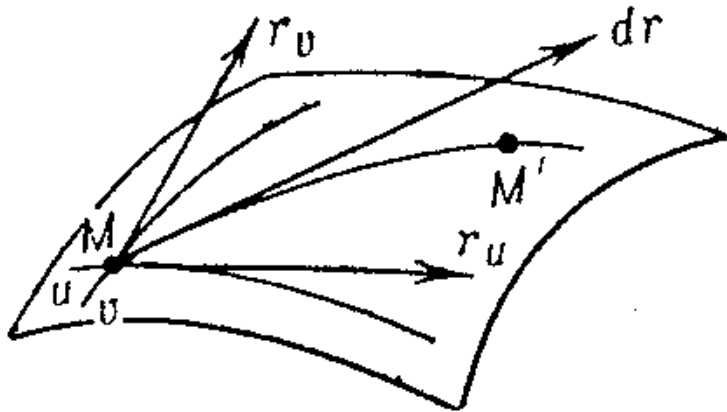
$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (2)$$

Aquí,  $ds^2$  (ó  $ds$ ) es llamado el *elemento de longitud de arco* o *elemento de línea*. Para la curva  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ , la expresión

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left( \frac{du}{dt} \right) \left( \frac{dv}{dt} \right) + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt$$

da la longitud de arco.

# Primera forma fundamental



Geometría de la primera forma fundamental.



## Definición

Un difeomorfismo  $f : S_1 \rightarrow S_2$  entre superficies es llamada una **isometría** si

$$\langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}}, \quad \forall \mathbf{p} \in S_1, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S_1.$$

$$\begin{aligned} f \text{ es isometría} &\iff (I_{S_2})_{f(\mathbf{p})}(Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}) = (I_{S_1})_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{p} \in S_1, \quad \forall \mathbf{u} \in T_{\mathbf{p}}S_1 \\ &\iff Df(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}S_1 \rightarrow T_{f(\mathbf{p})}S_2 \text{ es isometría lineal, } \forall \mathbf{u} \in T_{\mathbf{p}}S_1. \end{aligned}$$

**Obs!**  $f : S_1 \rightarrow S_2$  es isometría, entonces las parametrizaciones  $\mathbf{x}$  de  $S_1$  y  $f \circ \mathbf{x}$  de  $S_2$ , tienen los mismo coeficientes en la 1a. forma fundamental.

$$\begin{aligned} E_{f \circ \mathbf{x}} &= \langle (f \circ \mathbf{x})_u, (f \circ \mathbf{x})_u \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_{\mathbf{p}} = E_{\mathbf{x}}, \\ F_{f \circ \mathbf{x}} &= \langle (f \circ \mathbf{x})_u, (f \circ \mathbf{x})_v \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_u, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}} = F_{\mathbf{x}}, \\ G_{f \circ \mathbf{x}} &= \langle (f \circ \mathbf{x})_v, (f \circ \mathbf{x})_v \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_v \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_{\mathbf{p}} = G_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

## Proposición

Sean  $\mathbf{x}_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_1 \cap S_1$ ,  $\mathbf{x}_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2 \cap S_2$  parametrizaciones tales que  $E_{\mathbf{x}_1}(u, v) = E_{\mathbf{x}_2}(u, v)$ ,  $F_{\mathbf{x}_1}(u, v) = F_{\mathbf{x}_2}(u, v)$ ,  $G_{\mathbf{x}_1}(u, v) = G_{\mathbf{x}_2}(u, v)$ . Entonces, el mapa  $f = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1}$  es una isometría.

Prueba:

Si  $f = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1}$ , entonces  $Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1u} = \mathbf{x}_{2u}$  y  $Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1v} = \mathbf{x}_{2v}$ , y tenemos que

$$\langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1u}, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1u} \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{x}_{2u}, \mathbf{x}_{2u} \rangle_{f(\mathbf{p})} = E_{\mathbf{x}_2} = E_{\mathbf{x}_1} = \langle \mathbf{x}_{1u}, \mathbf{x}_{1u} \rangle_{\mathbf{p}},$$

$$\langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1u}, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1v} \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{x}_{2u}, \mathbf{x}_{2v} \rangle_{f(\mathbf{p})} = F_{\mathbf{x}_2} = F_{\mathbf{x}_1} = \langle \mathbf{x}_{1u}, \mathbf{x}_{1v} \rangle_{\mathbf{p}},$$

$$\langle Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1v}, Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}_{1v} \rangle_{f(\mathbf{p})} = \langle \mathbf{x}_{2v}, \mathbf{x}_{2v} \rangle_{f(\mathbf{p})} = G_{\mathbf{x}_2} = G_{\mathbf{x}_1} = \langle \mathbf{x}_{1v}, \mathbf{x}_{1v} \rangle_{\mathbf{p}}.$$

Como  $\{\mathbf{x}_{1u}, \mathbf{x}_{1v}\}$  es base de  $T_{\mathbf{p}}S_1$  y  $\{\mathbf{x}_{2u}, \mathbf{x}_{2v}\}$  es base de  $T_{f(\mathbf{p})}S_2$ , el resultado se extiende por linealidad a todo vector. Portanto  $f$  es isometría.  $\square$

## Definición

$f : S_1 \rightarrow S_2$  es una **isometría local** si  $f$  es un difeomorfismo local.

Dos superficies son **localmente isométricas** si para todo punto  $\mathbf{p} \in S_1$ , existe un punto  $\mathbf{q} \in S_2$  y vecindades abiertas  $U_1 \subseteq S_1$  de  $\mathbf{p}$ ,  $U_2 \subseteq S_2$  de  $\mathbf{q}$ , tales que  $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow U_2$  es una isometría.

# Ejemplos

Ejemplo 1: (El plano en  $\mathbb{R}^3$ ).

Sea  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$  una base ortonormal de un plano  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Sea  $\mathbf{p} \in S$ , y consideramos la parametrización  $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p} + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

De ahí,  $\mathbf{x}_u = \mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{x}_v = \mathbf{w}_2$  y

$$E = E(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 1,$$

$$F = F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 0,$$

$$G = G(u, v) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = 1.$$

La 1a. forma fundamental es

$$I_{\mathbf{p}} = ds^2 = (u')^2 + (v')^2 = (u', v') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

# Ejemplos

## Ejemplo 2: (Superficies de revolución).

Considere la curva regular  $(f(v), 0, g(v))$ , con  $f(v) > 0, \forall v \in I$ , param. por longitud de arco. Parametrizamos una superficie de revolución  $S$  por

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad u \in (0, 2\pi), \quad v \in I.$$

Luego,  $\mathbf{x}_u = (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0)$ ,  $\mathbf{x}_v = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v))$ , y

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = f(v)^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) = f(v)^2,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = f(v)f'(v)(-\sin u \cos u + \cos u \sin u) = 0,$$

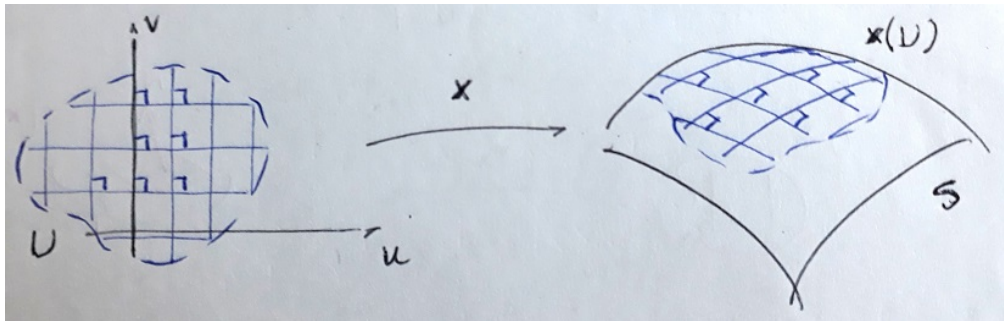
$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = f'(v)^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) + g'(v)^2 = f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1.$$

$$I_p = (u', v') \begin{pmatrix} f'(v)^2 & 0 \\ 0 & f'(v)^2 + g'(v)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

# Ejemplo

## Definición

Las parametrizaciones  $\mathbf{x}(u, v)$  con  $F = 0$ , se llaman **ortogonales**.



# Ejemplos

## Ejemplo 3:

¿Existe alguna superficie  $S$  no contenida en un plano, que se localmente isométrica al plano?

Respuesta: Sí, hay muchas.

Por ejemplo, el cilindro circular recto  $S = S^1 \times \mathbb{R}$ , parametrizado por

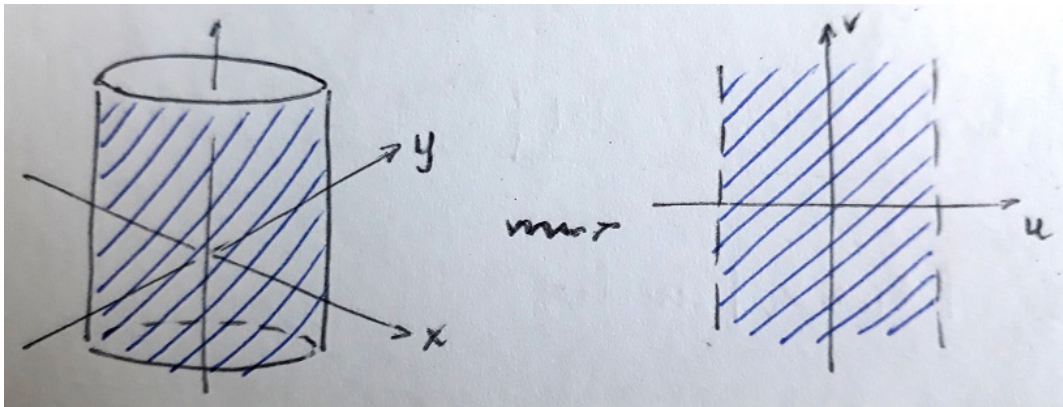
$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}.$$

Luego,  $\mathbf{x}_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ ,  $\mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$ , y

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 1.$$

Así, el cilindro satisface  $E = 1, F = 0, G = 1, \forall (u, v) \Rightarrow$  tiene la misma 1a. forma fundamental que el plano  $\mathbb{R}^2$ .

# Ejemplos



Isometría local entre el cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$  y la región  $(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$  del plano  $\mathbb{R}^2$ .