

SUPERFICIES REGULARES

ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 13) 24.FEBRERO.2022

4. Gráficas de funciones

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Consideramos la parametrización $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Claramente, \mathbf{x} es diferenciable ya que f es diferenciable. La imagen de \mathbf{x} es el grafo

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}.$$

Observe que \mathbf{x} es una función biyectiva, y con inversa $\mathbf{x}^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ igual a la restricción de la proyección $\pi_{12}(x, y, z) = (x, y)$ al abierto U , de modo que \mathbf{x}^{-1} también es continua, y portanto un homeomorfismo.

Superficies

Además, la derivada de \mathbf{x} está dada por

$$D\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}.$$

Esta es inyectiva, ya que el menor $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$.

Esto muestra que toda gráfica de una función diferenciable, en un dominio abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es una superficie regular.

Obs! Gráficas de funciones del tipo $(x, g(x, z), z)$ ó $(h(y, z), y, z)$ también son superficies regulares.

La recíproca del ejemplo anterior también vale cuando es analizada desde el punto de vista local.

Necesitamos el siguiente resultado de análisis:

Teorema (Teorema de la Función Inversa)

Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable. Si la derivada $DF(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo lineal (esto es, $\det DF(\mathbf{p}) \neq 0$) para $\mathbf{p} \in U$, entonces existen vecindades $V \subseteq U$ de \mathbf{p} y $W \subseteq \mathbb{R}^m$ de $\mathbf{q} = F(\mathbf{p})$, tales que la restricción

$$F|_V : V \rightarrow F(V) = W$$

es un difeomorfismo (i.e. $F|_V$ y $F^{-1}|_W$ son ambas diferenciables).

Proposición (Superficies regulares son localmente gráficas)

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Para todo punto $\mathbf{p} \in S$, existe una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^3$ de \mathbf{p} tal que $V \cap S$ es la gráfica de alguna función diferenciable, sobre alguno de los planos coordenados xy , xz ó yz .

Prueba:

Dado $\mathbf{p} \in S$, como S es superficie regular, existe una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^3$ de \mathbf{p} y una parametrización local $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$.

Sea $\mathbf{q} \in U$ tal que $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$ y consideremos el mapa

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Superficies

Sabemos que la matriz jacobiana de \mathbf{x}

$$D\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial z}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}$$

es inyectiva y de rango 2. Así, al menos uno de los determinantes menores

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$$

no se anula en el punto \mathbf{q} .

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(\mathbf{q}) \neq 0$.

Superficies

Si $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$, entonces la composición $\pi \circ \mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi(V \cap S) \subseteq \mathbb{R}^2$ es diferenciable (pues es composición de mapas diferenciables), y su derivada es

$$D(\pi \circ \mathbf{x})(\mathbf{q}) = D\pi(\mathbf{p}) D\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial z}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{q}) & \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}.$$

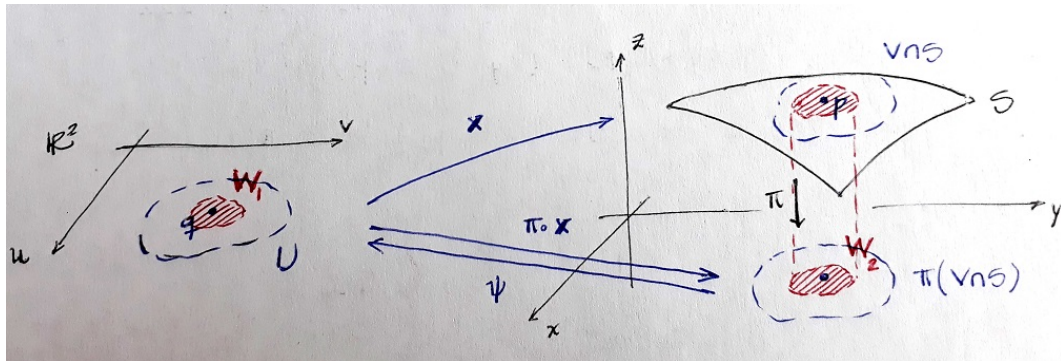
En particular, $\det D(\pi \circ \mathbf{x})(\mathbf{q}) \neq 0$, de modo que $D(\pi \circ \mathbf{x})(\mathbf{q})$ es un isomorfismo lineal.

Por el Teorema de la Función Inversa, existen vecindades $W_1 \subseteq U$ de \mathbf{q} y $W_2 \subseteq \pi(V \cap S)$ de \mathbf{p} tales que

$$(\pi \circ \mathbf{x})|_{W_1} : W_1 \rightarrow W_2 \text{ es un difeomorfismo.}$$

Superficies

En particular, $(\pi \circ \mathbf{x})(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, y la función inversa es $\psi = (\pi \circ \mathbf{x})|_{W_1}^{-1} : W_2 \rightarrow W_1$ es diferenciable.



Definamos la función $f : W_2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = z(\psi(x, y))$.

f es diferenciable, por ser composición de mapas diferenciables. Además,

$$\mathbf{x}(W_1) = \{ (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in W_1 \}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} G_f &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) = (\pi \circ \mathbf{x})(u, v) \in W_2, (u, v) \in W_1 \} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(\psi(x, y)) = z(u, v), (u, v) \in W_1 \} \\ &= \{ (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in W_1 \} \\ &= \mathbf{x}(W_1). \end{aligned}$$

Portanto, $V \cap S \supseteq W_2 = \mathbf{x}(W_1)$ es el grafo de la función f .

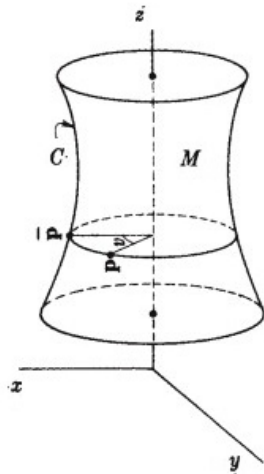
Superficies de revolución

5. Superficies de revolución:

Sea $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular plana inyectiva, y sea L un eje en el plano que no corta a la curva C , (e.g. xz el plano de C y Oz el eje).

Sea S el subconjunto de \mathbb{R}^3 obtenido al girar la curva C en torno del eje Oz .

Sea $x = f(v)$, $z = g(v)$, con $a \leq v \leq b$ una parametrización de la curva C , con $f(v) > 0$; y denotemos por u el ángulo de rotación en torno del eje Oz .



Superficies de revolución

La aplicación

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)),$$

definida en el abierto $U = (0, 2\pi) \times (a, b) \subset \mathbb{R}^2$ proporciona una parametrización para S :

- \mathbf{x} es diferenciable (desde que f y g son diferenciables).
- Como $(f(v), g(v))$ parametriza C , dados z y $r^2 = x^2 + y^2 = (f(v))^2$ entonces $z = g(v)$ y $r = f(v)$, están únicamente determinados, $\Rightarrow, x = r \cos u, y = r \sin u$ también $\Rightarrow \mathbf{x}$ es inyectiva y continua.
- Para mostrar que \mathbf{x}^{-1} es continua en función de (x, y, z) , tome $u \neq \pi$. Como $f(v) \neq 0$, entonces

$$v = C^{-1}(f(v), g(v)) = C^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, z),$$

es la parametrización inversa de C , la cual es continua.

Superficies de revolución

- (aquí se está usando el hecho que toda función continua e inyectiva definida en un compacto tiene inversa continua).
- Por otro lado,

$$\tan \frac{u}{2} = \frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} = \frac{\sin u}{1 + \cos u} = \frac{y/f(v)}{1 + x/f(v)} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

para $u \neq \pi$. En ese caso,

$$u = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad u \neq \pi.$$

En caso $u \in (\pi - \epsilon, \pi + \epsilon)$, se tiene $u = 2 \arctan \frac{y}{x - \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Superficies de revolución

- Así, \mathbf{x} es un homeomorfismo.
- Finalmente,

$$D\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} -f(v) \sin u & f'(v) \cos u \\ f(v) \cos u & f'(v) \sin u \\ 0 & g'(v) \end{pmatrix}.$$

Tenemos los determinantes menores

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -f(v)f'(v), \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = -f(v)g'(v) \sin u, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = f(v)g'(v) \cos u.$$

Como C es una curva regular, entonces

$$C'(v) = (f'(v), g'(v)) \neq 0 \Rightarrow D\mathbf{x}(\mathbf{q}) \text{ es inyectiva.}$$

Esto muestra que S , la superficie de revolución, es una superficie regular.

Ejemplos

Ejemplo: La esfera S^2 .

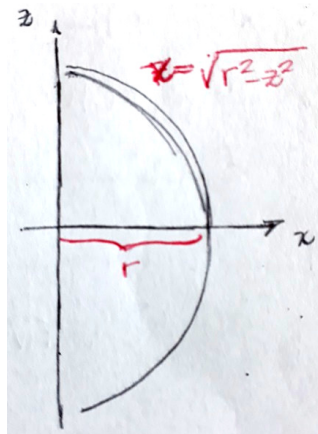
Consideremos la curva $C : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^2$
dada por

$$C(v) = (r \sin v, r \cos v), \quad v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad r > 0.$$

La curva es regular e inyectiva. Siguiendo el proceso descrito anteriormente, podemos girar la curva C en torno al eje Oz y construir una superficie de revolución dada por

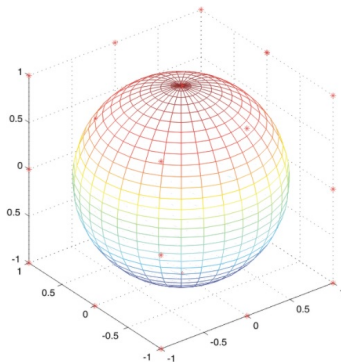
$$\mathbf{x}(u, v) = (r \cos u \sin v, r \sin u \sin v, r \cos v),$$

$$u \in (0, 2\pi), v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$



Ejemplos

Obtenemos la típica parametrización en coordenadas esféricas. -0.3cm

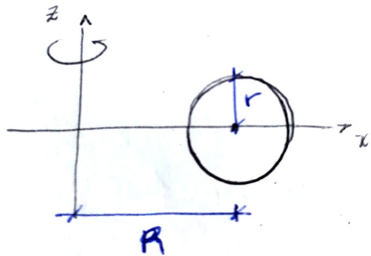


Meridianos = curvas idénticas a C al variar el parámetro u .

Paralelos = círculos que se obtienen al fijar el parámetro v .

Ejemplos

Ejemplo: El toro bidimensional \mathbb{T}^2 .



Consideramos la curva $C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$C(v) = (R, 0) + (r \cos v, r \sin v), \quad v \in (0, 2\pi),$$

$R > r > 0$.

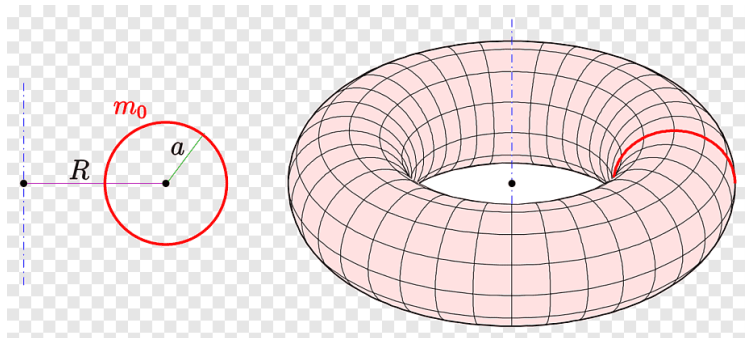
La curva es regular e inyectiva. Construimos la superficie de revolución girando C en torno al eje Oz y obtenemos la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v),$$

$u, v \in (0, 2\pi)$.

Ejemplos

Esta es la parametrización usual del toro bidimensional.



Observe que, topológicamente, el toro es homeomorfo a $\mathbb{T} \simeq S^1 \times S^1$.

Puntos y valores regulares

Definición

Dada una función diferenciable $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, U abierto, decimos que $\mathbf{p} \in U$ es un **punto crítico** de F si la derivada $DF(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ no es sobreyectiva.

La imagen $F(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^m$ de un punto crítico se llama un **valor crítico** de F . Un punto $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ que no es un valor crítico se llama un **valor regular** de F .

Obs: En el caso que $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in U$ es un punto crítico de F si $DF(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ (la terminología coincide con la de cálculo).

En este caso, como

$$DF(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{p}) \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{p}) \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \right),$$

decir que $DF(\mathbf{p})$ no es sobreyectiva implica que $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = 0, \forall i$.

Valores regulares

Portanto, para $\mathbf{q} \in F(U)$, decir que \mathbf{q} es un valor regular de F es equivalente a decir que las derivadas

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{p}), \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{p}), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{p}),$$

no se anulan simultáneamente en cualquier punto de la imagen inversa

$$F^{-1}(\mathbf{q}) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n : F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{q}\}.$$

En el caso de funciones en \mathbb{R}^3 , $f : \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, basta verificar que las derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}),$$

nunca se anulan en $\mathbf{p} \in f^{-1}(\mathbf{q})$.

Valores regulares

Proposición

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $a \in f(U)$ un valor regular de f . Entonces, $S = f^{-1}(a)$ es una superficie regular.

Prueba:

Sea $\mathbf{p} \in f^{-1}(a)$. Entonces, $Df(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \right) \neq \mathbf{0}$.

Sin pérdida, podemos asumir que $\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \neq 0$.

Definimos la función $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)).$$

Claramente, F es diferenciable (pues f lo es), y su derivada está dada por

Valores regulares

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Luego, $\det Df(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) \neq 0$. Por lo tanto, $DF(\mathbf{p})$ es un isomorfismo.

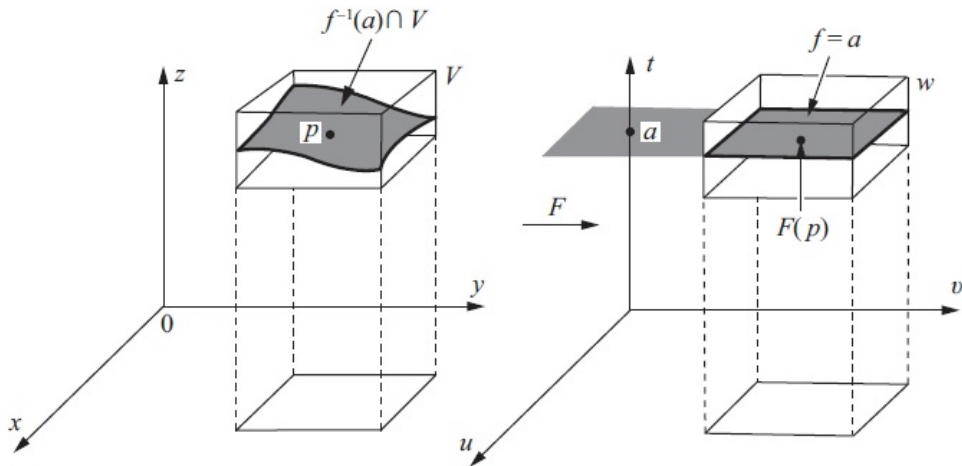
Por el Teorema de la Función Inversa, existen vecindades $V \subseteq U$ de \mathbf{p} y $W \subseteq F(U)$ de $F(\mathbf{p})$, tales que $F|_V : V \rightarrow W = F(V)$ es un difeomorfismo.

La función inversa $F^{-1} : W \rightarrow V$ tiene coordenadas

$$F^{-1}(u, v, w) = (u, v, g(u, v, w)).$$

Esto es $x = u$, $y = v$ y $z = g(u, v, w)$, para todo $(u, v, w) \in W$.

Valores regulares



Valores regulares

De nuevo denotemos por $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

Definamos la función $h : \pi(V) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x, y) = z = g(u, v, w) = g(x, y, a) = z(F^{-1}(x, y, a)),$$

donde $F^{-1}(x, y, a) = (x, y, f^{-1}(a))$.

Como $F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, w) : w = a\}$, concluimos que $G_h = \{(x, y, g(x, y, a))\} = f^{-1}(a) \cap V$.

Así, $f^{-1}(a) \cap V$ es una vecindad coordenada de \mathbf{p} , y como $f^{-1}(a)$ puede cubrirse por cartas locales, esto muestra que $S^{-1}(a)$ es superficie regular.

Ejemplos

1. Esfera:

La esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una superficie regular.

Considere la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

Observe que 0 es un valor regular de f .

2. Toro \mathbb{T}^2 :

El toro bidimensional \mathbb{T}^2 satisface la ecuación

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2.$$

Haciendo $f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 - r^2$, se puede observar que 0 es un valor regular de f .