

LA DERIVADA COVARIANTE

ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 30) 05.MAYO.2022

Campos Tangentes

Sea S una hipersuperficie en \mathbb{R}^{n+1} , parametrizada por $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Definición

Un **campo de vectores tangente** a S es un mapa $X : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $X(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}S$.

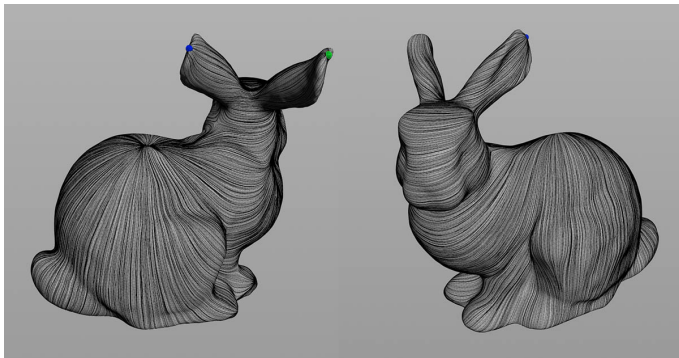
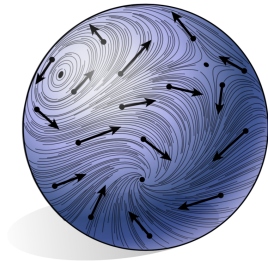
Decimos que X es **diferenciable** si $X \circ \mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es diferenciable para toda parametrización \mathbf{x} de S .

Escribimos

$$X = \sum_i \xi_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} = \sum_i \xi_i \mathbf{x}_i, \quad X(\mathbf{p}) = (\xi_1(\mathbf{p}), \dots, \xi_n(\mathbf{p})),$$

la representación de X en la base canónica local de $T_{\mathbf{p}}S$. X es **de clase C^k** , si las $\xi_i = \xi_i(\mathbf{p})$ son todas de clase C^k .

Campos Tangentes



Ejemplos de campos vectoriales tangentes a superficies.

La Derivada Covariante

Recordemos de cálculo que en un espacio ambiente \mathbb{R}^{n+1} tenemos la noción de derivada direccional (de funciones)

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

Nos interesa desarrollar una noción de derivada direccional para campos vectoriales. En el caso de superficies, esta derivada aplicada a campos tangenciales (en el plano tangente), puede tener una componente normal, y perdería el carácter intrínseco.

El concepto de *derivada covariante* pretende dar una noción de derivada direccional, pero manteniendo la propiedad intrínseca.

La Derivada Covariante

Definición

Sea $Y : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ un campo vectorial diferenciable, y sea X un vector direccional sobre un punto $\mathbf{p} \in U$ fijo, esto es $(\mathbf{p}, X) \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^{n+1}$. La expresión

$$D_X Y(\mathbf{p}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(\mathbf{p} + tX) - Y(\mathbf{p})}{t}$$

se llama la **derivada direccional** de Y en la dirección de X .

Propiedad

$D_X Y(\mathbf{p})$ está únicamente determinada por el valor de Y a lo largo de una curva diferenciable $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, con $\gamma(0) = \mathbf{p}$ y $\gamma'(0) = X$:

$$D_X Y(\mathbf{p}) = \left. \frac{d}{dt}(Y \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(\gamma(t)) - Y(\mathbf{p})}{t}.$$

La Derivada Covariante

Consecuencias:

- Las derivadas parciales de Y corresponden al caso $X = \mathbf{e}_i$, con $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n . Tenemos así $D_{\mathbf{e}_i} Y = \frac{\partial Y}{\partial x_i}$.

En particular, si $X = \sum_i X_i \mathbf{e}_i$, entonces

$$D_X Y(\mathbf{p}) = \sum_i X_i D_{\mathbf{e}_i} Y = \sum_i X_i \frac{\partial Y}{\partial x_i}.$$

- Para una hipersuperficie n -dimensional S , dada por $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ denotemos Y un campo vectorial diferenciable a lo largo de \mathbf{x} , y X un vector tangente a $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{q}) \in S$. Entonces,

$$D_X Y(\mathbf{p}) = D_{(D\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{p}) \cdot X} Y(\mathbf{q}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Y(\mathbf{q} + t(D\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{p}) \cdot X) - Y(\mathbf{q}))}{t}.$$

La Derivada Covariante

En este caso, $\gamma(t) = \mathbf{x}(\mathbf{q} + t(D\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{p}) \cdot X)$ es una curva sobre S tal que $\gamma'(0) = X$.

- La derivada de una función en la dirección de la i -ésima coordenada u_i es precisamente $D_{\mathbf{e}_i}\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} = \mathbf{x}_i$.

Se sigue que

$$D_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} Y(\mathbf{p}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y(u_1, \dots, u_i + t, \dots, u_n) - Y(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)).$$

En particular,

$$D_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j}.$$

La Derivada Covariante

Definición

Si X, Y son campos vectoriales tangentes a una hipersuperficie S , parametrizada por $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, entonces

$$\nabla_X Y = (D_X Y)^T = D_X Y - \langle D_X Y, N \rangle N,$$

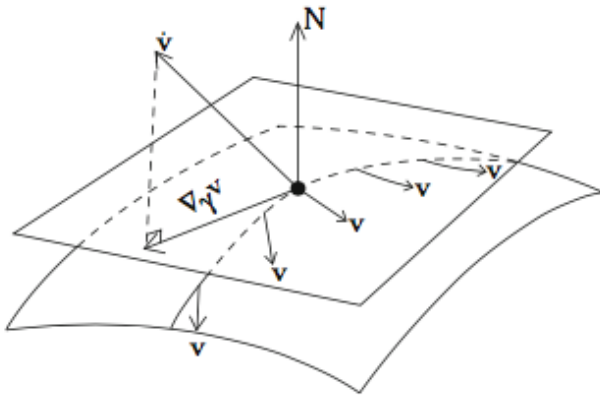
donde N es el campo normal unitario a S , se llama la **derivada covariante** de Y en la dirección de X .

Obs! $\nabla_X Y$ es también un campo vectorial tangente. La componente normal a $D_X Y$ es la segunda forma fundamental de \mathbf{x} , ya que la igualdad $\langle Y, N \rangle = 0 \Rightarrow \langle D_X Y, N \rangle = II(X, Y)$. En consecuencia $\langle D_X Y, N \rangle = -\langle Y, D_X N \rangle$.

Podemos escribir entonces

$$D_X Y = D_X Y^T + D_X Y^\perp = \nabla_X Y + II(X, Y)N.$$

La Derivada Covariante



La derivada covariante $\nabla_\gamma \mathbf{v}$ sobre S .

La Derivada Covariante

Observaciones:

- En el libro de Do Carmo, la derivada covariante se denota por D .
- Es importante diferenciar entre ambos operadores diferenciales D y ∇ (derivada direccional y derivada covariante): D está definida para campos vectoriales en el espacio ambiente \mathbb{R}^{n+1} , mientras que ∇ sólo está definida para campos vectoriales tangentes a S .
- Para una función escalar φ , se tiene $D_X\varphi = \nabla_X\varphi$ (en general para campos vectoriales, $D_XY \neq \nabla_XY$).
Podemos multiplicar tales funciones escalares, punto a punto, con campos vectoriales:

$$\varphi X \text{ denota } \mathbf{p} \rightarrow (\varphi X)(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p})X(\mathbf{p}).$$

La Derivada Covariante

Proposición (Propiedades de D y de ∇)

$$\begin{aligned} 1. \quad D_{\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2} Y &= \varphi_1 D_{X_1} Y + \varphi_2 D_{X_2} Y, \\ \nabla_{\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2} Y &= \varphi_1 \nabla_{X_1} Y + \varphi_2 \nabla_{X_2} Y. \end{aligned} \quad (\text{linealidad})$$

$$\begin{aligned} 2. \quad D_X (Y_1 + Y_2) &= D_X Y_1 + D_X Y_2, \\ \nabla_X (Y_1 + Y_2) &= \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2. \end{aligned} \quad (\text{aditividad})$$

$$\begin{aligned} 3. \quad D_X (\varphi Y) &= \varphi D_X Y + D_X \varphi Y, \\ \nabla_X (\varphi Y) &= \varphi \nabla_X Y + \nabla_X \varphi Y. \end{aligned} \quad (\text{regla del producto})$$

$$\begin{aligned} 4. \quad D_X \langle Y_1, Y_2 \rangle &= \langle D_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, D_X Y_2 \rangle, \\ \nabla_X \langle Y_1, Y_2 \rangle &= \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{regla de Leibniz})$$

La Derivada Covariante

La conmutatividad falla: en general $D_X Y \neq D_Y X$ y $\nabla_X Y \neq \nabla_Y X$.

Ejemplo: Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ la base canónica de \mathbb{R}^2 , con coordenadas (x_1, x_2) .

Observe que $D_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j = 0$.

Eligiendo $X = x_1 \mathbf{e}_2 = (0, x_1)$, y $Y = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$, se tiene

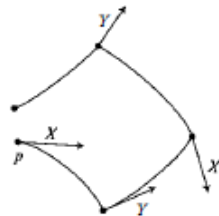
$$D_X Y = D_{x_1 \mathbf{e}_2} \mathbf{e}_1 = x_1 D_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_1 = 0,$$

$$D_Y X = D_{\mathbf{e}_1}(x_1 \mathbf{e}_2) = x_1 D_{\mathbf{e}_1} \mathbf{e}_2 + D_{\mathbf{e}_1} x_1 \mathbf{e}_2 = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2.$$

Definición

Para dos campos vectoriales X, Y sobre una hipersuperficie S , definimos el **corchete de Lie** (Lie bracket) de X y Y como

$$[X, Y] = D_X Y - D_Y X.$$



La Derivada Covariante

- Si X, Y son campos tangentes, se tiene $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.
- Si \mathbf{x} es de clase C^2 , vale

$$\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \right] = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j} - \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_j \partial u_i} = \mathbf{0}.$$

- En coordenadas arbitrarias, si $X = \sum_i \xi_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$, $Y = \sum_i \eta_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$, entonces

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i} \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}.$$

Esto se abrevia por $[X, Y]_j = X(Y_j) - Y(X_j)$.

- Una condición necesaria para que X y Y sean campos base $X = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$, $Y = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}$ (i.e. formen una base en cada punto de S) es que $[X, Y] = \mathbf{0}$.

La Derivada Covariante

Teorema

La derivada covariante ∇ es una cantidad intrínseca: sólo depende de la primera forma fundamental.

Prueba:

Sean $X = \sum_j \xi_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}$, $Y = \sum_j \eta_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}$. Para determinar $\nabla_X Y$, es suficiente conocer $\langle \nabla_X Y, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \rangle$, $\forall k$. De las propiedades de ∇ tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_i \xi_i \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} Y = \sum_i \xi_i \sum_j \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \left(\eta_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \xi_i \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} + \eta_j \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \right).\end{aligned}$$

La Derivada Covariante

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla_X Y, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \right\rangle &= \sum_{i,j} \xi_i \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \right\rangle + \eta_j \left\langle \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \right\rangle \right) \\ &= \sum_{i,j} \xi_i \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k \rangle + \eta_j \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle \right) = \sum_{i,j} \xi_i \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} g_{jk} + \eta_j \Gamma_{ij,k} \right)\end{aligned}$$

Se suele usar la notación $\Gamma_{ij,k} = \left\langle \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \right\rangle = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle$. Ya mostramos (ver Aula 23) que

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \quad \square$$

Obs! En la notación de Einstein, esto es $\langle \nabla_X Y, \mathbf{x}_k \rangle = \xi^i \left(\frac{\partial \eta^j}{\partial u_i} g_{jk} + \eta^j \Gamma_{ij}^\ell g_{\ell k} \right)$.

Símbolos de Christoffel, versión general

Para hipersuperficies en \mathbb{R}^{n+1} , tenemos

Definición

i) Las cantidades $\Gamma_{ij,k} = \left\langle \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k} \right\rangle = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_k \rangle$,

se llaman los **símbolos de Christoffel del primer tipo**.

ii) Las cantidades Γ_{ij}^k definidas por

$$\mathbf{x}_{ij}^T = \nabla_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k},$$

se llaman los **símbolos de Christoffel del segundo tipo**.

Obs! Vimos que (Aula 23), estas cantidades satisfacen $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}$ y $\Gamma_{ij,k} = \sum_{\ell} \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k}$.

Símbolos de Christoffel

En consecuencia,

$$\nabla_X Y = \sum_{i,k} \xi_i \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial u_i} + \sum_j \eta_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_k}. \quad (1)$$

En notación compacta, esto es

$$\nabla_X Y = \xi^i \left(\frac{\partial \eta^k}{\partial u_i} + \eta^j \Gamma_{ij}^k \right) \mathbf{x}_k.$$

Ecuación de las geodésicas

Consideremos ahora $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva diferenciable sobre una superficie S , parametrizada por $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, y sea $\alpha(0) = \mathbf{p}$.

Definición

Sea X un campo vectorial tangente a S . La **derivada covariante** de X a lo largo de α es

$$\nabla_{\alpha} X(\mathbf{p}) = \left. \frac{d}{dt}(X \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(\alpha(t)) - X(\mathbf{p})}{t}.$$

En particular, como α' define un campo vectorial tangente a S , definido sobre la trayectoria de α , podemos escribir

$\nabla_{\alpha} \alpha' = (\alpha'')^T$, la componente tangencial de la aceleración de α .

Ecuación de las geodésicas

De la teoría de geodésicas desarrollada en la clase anterior (Aula 25), tenemos

Teorema (Caracterización de las geodésicas)

$\alpha : [a, b] \rightarrow S$ es una geodésica, si y sólo si,

$$\nabla_{\alpha} \alpha'(t) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Prueba: Basta recordar que

$$\alpha \text{ es geodésica} \Leftrightarrow \alpha''(t) \in T_{\alpha(t)} S^{\perp} \Leftrightarrow \nabla_{\alpha} \alpha'(t) = (\alpha''(t))^T = \mathbf{0}, \quad \forall t. \quad \square$$

Ecuación de las geodésicas

Sean $X = \sum_i \xi_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$, y $\alpha(t) = \sum_i a_i(t) \mathbf{e}_i$ las coordenadas de la curva α .
Entonces

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha} X &= ((X \circ \alpha)'(t))^T = \left(\sum_i [\xi_i \mathbf{x}_i(\alpha(t))] \right)'^T \\&= \sum_i \left(\xi_i' \mathbf{x}_i(\alpha(t)) + \xi_i \sum_j (\mathbf{x}_i)_j a_j'(t) \right)^T \\&= \sum_i (\xi_i' \mathbf{x}_i)^T(\alpha(t)) + \sum_{i,j} (\xi_i a_j'(t) \mathbf{x}_{ij})^T \\&= \sum_k \xi_k' \mathbf{x}_k + \sum_{i,j} \xi_i a_j' \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k \\&= \sum_k \left(\xi_k' + \sum_{i,j} \xi_i a_j' \Gamma_{ij}^k \right) \mathbf{x}_k.\end{aligned}$$

Ecuación de las geodésicas

En particular, cuando $X = \alpha'$, se tiene que

$$\nabla_{\alpha} \alpha' = \sum_k \left(a''_k + \sum_{i,j} a'_i a'_j \Gamma_{ij}^k \right) \mathbf{x}_k.$$

Hemos probado

Corolario (Ecuación de las Geodésicas)

Una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ es una geodésica, si y sólo si

$$\sum_k \left(a''_k + \sum_{i,j} a'_i a'_j \Gamma_{ij}^k \right) \mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Esto es, α es geodésica \Leftrightarrow vale el sistema de EDO $a''_k + \Gamma_{ij}^k (a^i)'(a^j)' = 0$,
para $k = 1, 2, \dots, n$.

Ecuación de las geodésicas

Geodesic Equation of Motion

Curvature of trajectory

Generalized gradient

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0$$

Christoffel symbol

Path length element