

# Superficie Catalana y Superficie de Bour

## Superficies Mínimas

Carlos Martínez

Geometría Diferencial  
Universidad del Valle de Guatemala

Guatemala, 30 de mayo de 2023

# Summary

## 1 Superficie de Catalán

- Historia
- Superficie Mínima
- Propiedades importantes

## 2 Superficie de Bour

- Historia
- Parametrizaciones
- Propiedades

# Superficie de Catalán

## Historia

# Historia

En 1865, Édouard Delaunay, un matemático e ingeniero francés, propuso la existencia de una superficie de área mínima sin proporcionar una demostración rigurosa. En 1867, Eugène Catalan, un matemático belga, demostró la existencia de la superficie de área mínima en forma rigurosa.



Figure: Eugène Catalan

# Superficie de Catalán

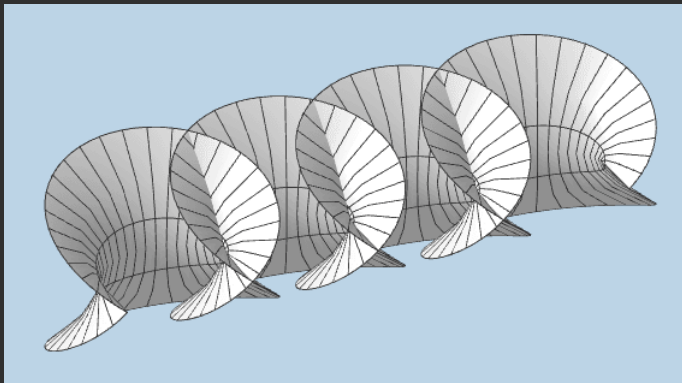


Figure: Superficie de Catalan

# Superficie de Catalán

## Superficie Mínima

# Parametrizaciones

Se tiene la siguiente parametrización

$$x(u, v) = \left(u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, -4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}\right)$$

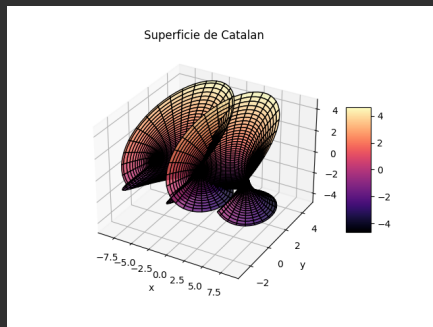


Figure: Superficie de Catalan generada en Python

# Demostración

Entonces,

$$x_u = (1 - \cos u \cosh v, \sin u \cosh v, -2 \cos \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2})$$

$$x_v = (-\sin u \sinh v, -\cos u \sinh v, -2 \sin \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2})$$

$$x_u \wedge x_v = (\cos \frac{3u}{2} \cosh \frac{v}{2} - \cos \frac{u}{2} \cosh \frac{3v}{2}, \sin \frac{u}{2} (2 \cosh \frac{v}{2} + \cosh \frac{3v}{2}) - \sin \frac{3u}{2} \cosh \frac{v}{2}, \sinh v (\cos v - \cos u))$$

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{2 \cosh^2 \frac{v}{2} (\cosh v - \cos u)}$$



# Demostración

$$x_{uu} = \left( \sin u \cosh v, \cos u \cosh v, \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2} \right)$$

$$x_{vu} = \left( -\cos u \sinh v, \sin u \sinh v, -\cos \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2} \right)$$

$$x_{vv} = \left( -\sin u \cosh v, -\cos u \cosh v, -\sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2} \right)$$

Encontramos los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental

$$E = 2 \cosh^2 \frac{v}{2} (\cosh v - \cos u)$$

$$F = 0$$

$$G = 2 \cosh^2 \frac{v}{2} (\cosh v) - \cos u$$

$$e = -\sin \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2}$$

$$f = \cos \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}$$

$$g = \sin \frac{u}{2} \cosh \frac{v}{2}$$

# Demostración

De lo anterior se tiene que  $E = G$  y  $e = -g$ . Como la curvatura media es:

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - Ff + Ge}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{Eg - Eg}{E^2} = 0$$

La curvatura media es igual a cero, por lo que hemos demostrado que la superficie de Catalan es superficie mínima ■.

Nótese que la parametrización que fue dada es isotérmica.

# Superficie de Catalán

## Propiedades importantes

# Propiedades

- 1 La curvatura media es constante e igual a cero, por lo que es superficie mínima
- 2 La curva cicloide es una geodésica en la superficie de Catalan
- 3 La superficie de Catalan es simétrica con respecto al plano en el que se encuentra la cicloide

# Curva Cicloide

Nótese que si hacemos  $v = 0$  en nuestra parametrización, se tiene la siguiente curva en el plano  $xy$ :

$$x(u, 0) = \alpha(u) = (u - \sin u, 1 - \cos u, 0)$$

La cual es una parametrización de la cicloide, por lo que podemos asegurar que la cicloide está contenida en la superficie. Para asegurar que es geodésica debemos probar que  $\alpha'' \wedge N = 0$ . Entonces,  $\alpha'(u) = (1 - \cos u, \sin u, 0)$  y  $\alpha''(u) = (\sin u, \cos u, 0)$ . Se puede verificar que:

$$x_u \wedge x_v = \left( -\cos \frac{u}{2} \operatorname{sech} \frac{v}{2}, \sin \frac{u}{2} \operatorname{sech} \frac{v}{2}, -\tanh \frac{v}{2} \right)$$

De este modo  $\alpha''(u) \cdot (x_u \wedge x_v) = 0$ . Por lo tanto la curva  $\alpha$  es una geodésica de la superficie de Catalan.

# Superficie de Bour

# Superficie de Bour

## Historia

# Historia

Jacques Edmond Émile Bour, nació el 19 de mayo de 1832 y falleció el 8 de marzo de 1866, vivió 34 años, en los cuales desarrolló grandes aportes a la geometría diferencial. En 1862, el matemático utilizó coordenadas semigeodésicas y encontró varios casos nuevos de deformaciones de superficies. Dio un conocido teorema sobre las superficies helicoidales y de rotación. Y también la ecuación de Bour-Enneper (hoy llamada ecuación de onda sinusoidal de Gordon). Las superficies mínimas aplicables a una superficie de rotación fueron determinadas por primera vez por E. Bour en 1862.



Figure: Edmond Bour



# Superficie de Bour

## Parametrizaciones

# Frame Title

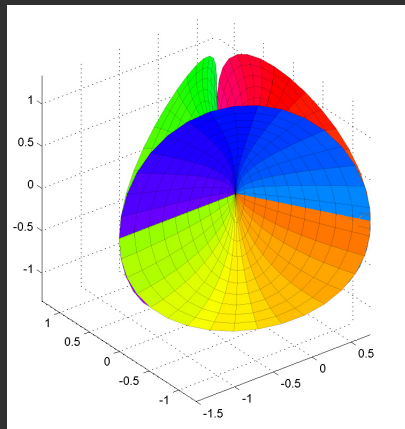


Figure: Superficie de Bour

# Preliminares

Todas las superficies mínimas reales aplicables a la configuración de superficies rotacionales

$$\mathfrak{F}(s) = Cs^{m-2}$$

en las ecuaciones de representación de Weierstrass, donde  $s, C \in \mathbb{C}$  y  $m \in \mathbb{R}$ , además  $\mathfrak{F}(s)$  es una función analítica.

# Teorema

Sea  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{G}$  dos funciones holomorfas definidas en un abierto y simple conexo  $U$  de  $\mathbb{C}$ . Entonces, el mapeo

$$x(\zeta) = \int^{\zeta} \begin{pmatrix} \mathfrak{F}(1 - \mathfrak{G}^2) \\ i\mathfrak{F}(1 + \mathfrak{G}^2) \\ 2\mathfrak{F}\mathfrak{G} \end{pmatrix} d\zeta$$

es un inmersión diferenciable en complejos de  $U$  a  $\mathbb{E}^2$ , y  $x$  es llamada parche de Weierstrass, determinada por  $\mathfrak{F}(\zeta)$  y  $\mathfrak{G}(\zeta)$

# Superficie de Bour $\mathfrak{B}_m$

**Lema.** Sea la curva de Bour de valor  $m$

$$\left( \frac{\zeta^{m-1}}{m-1} - \frac{\zeta^{m+1}}{m+1}, i \left( \frac{\zeta^{m-1}}{m-1} + \frac{\zeta^{m+1}}{m+1} \right), 2 \frac{\zeta^m}{m} \right)$$

es una curva minimal en  $\mathbb{E}^3$ , donde  $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ,  $\zeta \in U \subset \mathbb{C}$

# Superficie de Bour $\mathfrak{B}_m$

**Teorema.** La superficie de Bour de valor  $m$

$$\mathfrak{B}_m(r, \theta) = \begin{pmatrix} r^{m-1} \frac{\cos[(m-1)\theta]}{m-1} - r^{m+1} \frac{\cos[(m+1)\theta]}{m+1} \\ -r^{m-1} \frac{\sin[(m-1)\theta]}{m-1} - r^{m+1} \frac{\sin[(m+1)\theta]}{m+1} \\ 2r^m \frac{\cos(m\theta)}{m} \end{pmatrix}$$

es una superficie minima en  $\mathbb{E}^3$ , donde  $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

# Demostración superficie de Bour $\mathfrak{B}_m$

Los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie de Bour son

$$\begin{aligned}E &= r^{2m-4}(1+r^2) \\ F &= 0, \\ G &= r^{2m-2}(1+r^2)^2\end{aligned}$$

$$\text{Así que } \det(I) = r^{4m-6}(1+r^2)^4$$

El mapeo de Gauss de la superficie es:

$$e = \frac{1}{1+r^2} \begin{pmatrix} 2r \cos \theta \\ 2r \sin \theta \\ r^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así que } \det(I) = 4r^{2m-2}$$

# Demostración superficie de Bour $\mathfrak{B}_m$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie son

$$\begin{aligned}L &= -2r^{m-2} \cos m\theta \\M &= 2r^{m-1} \sin m\theta \\N &= 2r^m \cos m\theta\end{aligned}$$

De esta forma se determina que

$$H = 0, K = -\left(\frac{2r^{2-m}}{(1+r^2)^2}\right)$$

Entonces, la superficie mínima de Bour  $\mathfrak{B}_m$  es una superficie mínima y tiene curvatura Gaussiana negativa .



# Superficie de Bour

## Propiedades

# Superficie de Enneper

Si tomamos  $m = 2$  se tiene la superficie mínima de Enneper sin autointersecciones

$$\mathfrak{B}_2(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) - r^3 \frac{\cos(3\theta)}{3} \\ -r \sin(\theta) - r^3 \frac{\sin(3\theta)}{3} \\ r^2 \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

donde  $r \in [-1, 1]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ . Ahora si  $m = 2$ , tenemos la superficie de Bour con autointersecciones, para  $r \in [-3, 3]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$

# Superficie de Enneper

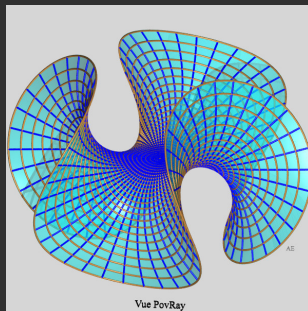


Figure: Superficie de Enneper

## Otros ejemplos

**Superficie mínima Richmond** Se da a partir de tomar  $m = 1/2$ , para  $r \in [-1, 1]$ ,  $\theta \in [-2\pi, \pi]$

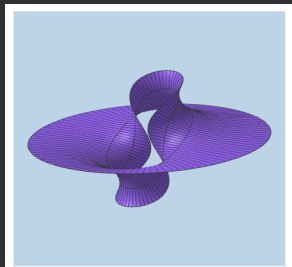


Figure: Superficie de Richmond

## Otros ejemplos

**Catenoide** Se da a partir de para  $C = 1$ ,  $m = 0$

**Helicoide** Se da a partir de  $C = 1$ ,  $m = 2$

# References

1. Abad Sánchez, J. M. *Superficies mínimas y su aplicación en ingeniería*. (2022).
2. Güler, E. *Class, degree and integral free forms for the family of Bour's minimal surfaces*. (2014).
3. Gullberg, E. *Minimalitytor och Björlings problem*. (2004).
4. Pineda Ramos, J. F. *Geometría de superficies minimales*. (2019).

# Gracias por su atención.