

# **TRANSFORMACIONES RÍGIDAS**

ALAN REYES-FIGUEROA  
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 06) 26.ENERO.2023

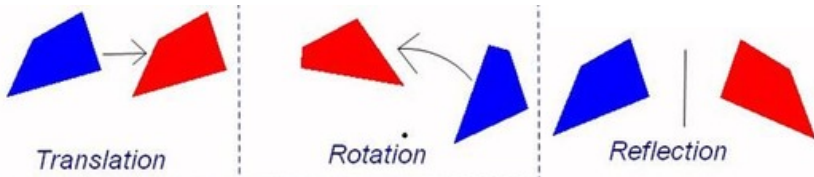
# Transformaciones rígidas

## Definición

Sea  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de distancia en  $\mathbb{R}^n$  (e.g. la distancia euclideana). Una **transformación rígida** (**movimiento rígido** o **euclideano**) en  $\mathbb{R}^n$  es una transformación  $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisface

$$d(M\mathbf{x}, M\mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

¿Qué tipos de transformaciones rígidas hay?



# Transformaciones rígidas

- Traslaciones:

Todo vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  define una única traslación  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}$ . Representamos el grupo de traslaciones por  $\mathbb{R}^n$ .

- Rotaciones y Reflexiones: Se representan por una transformación lineal  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisface la propiedad de *isometría*

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

En consecuencia,  $A$  es una *matriz ortogonal* real (sus columnas son una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ ). El grupo de matrices ortogonales se llama el **grupo ortogonal**  $O(n)$ .

$$\begin{aligned} A \in O(n) &\Rightarrow A^T A = I \Rightarrow A^{-1} = A^T, \\ &\Rightarrow \det(A)^2 = \det(A^T) \det(A) = \det(A^T A) = \det(I) = 1 \\ &\Rightarrow \det(A) = \pm 1. \end{aligned}$$

# Transformaciones rígidas

- Rotaciones: se caracterizan por tener determinante 1, Ellas forman la mitad del grupo ortogonal. El grupo de rotaciones se llama el **grupo especial ortogonal**  $SO(n)$ .
- Reflexiones: se caracterizan por tener determinante  $-1$ . Forman la otra mitad del grupo ortogonal.

## Propiedad

*Una transformación rígida en  $\mathbb{R}^n$  es de la forma*

$$M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}, \text{ donde } A \in O(n), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

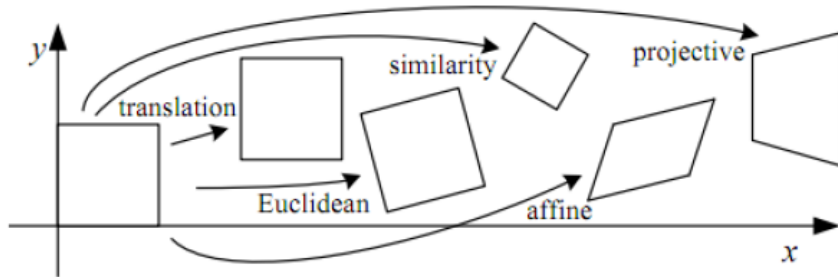
Prueba: Traslaciones, rotaciones y reflexiones, son de la forma  $A\mathbf{x} + \mathbf{t}$ . La composición es de esa forma:

$$A_2(A_1\mathbf{x} + \mathbf{t}_1) + \mathbf{t}_2 = A_2A_1\mathbf{x} + (A_2\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}.$$

# Transformaciones rígidas

## Definición

El grupo de transformaciones rígidas en  $\mathbb{R}$  se llama el **grupo euclideo**  $E(n)$ .



# Transformaciones rígidas

## Propiedad

*La longitud de arco es invariante bajo transformaciones rígidas.*

Prueba:

Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  curva regular,  $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$  un movimiento rígido. Entonces  $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s)$ . Luego

$$\beta'(s) = (M \circ \alpha)'(s) = (A\alpha(s) + \mathbf{v})' = A\alpha'(s).$$

De ahí

$$\begin{aligned}\ell_\beta(s) &= \int_{s_0}^s |\beta'(u)| \, du = \int_{s_0}^s |A\alpha'(u)| \, du = \int_{s_0}^s \langle A\alpha'(u), A\alpha'(u) \rangle^{1/2} \, du \\ &= \int_{s_0}^s \langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle^{1/2} \, du = \int_{s_0}^s |\alpha'(u)| \, du = \ell_\alpha(s), \quad \forall s.\end{aligned}$$

Esto muestra que  $\ell$  es invariante bajo movimientos rígidos.  $\square$

# Transformaciones rígidas

## Propiedad

*La curvatura  $\kappa$  y la torsión  $\tau$  son invariantes bajo transformaciones rígidas.*

Prueba:

Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  curva regular,  $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$  un movimiento rígido. Sea  $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s)$ . Ya vimos que  $\beta'(s) = A\alpha'(s)$ . Luego,  $\beta''(s) = A\alpha''(s)$  y  $\beta'''(s) = A\alpha'''(s)$ . En particular,

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_\beta(s) &= \beta'(s) = A\alpha'(s) = A\mathbf{t}_\alpha(s), \\ \mathbf{n}_\beta(s) &= A\mathbf{n}_\alpha(s) \quad (\text{ya que } \beta''(s) = A\alpha''(s)), \\ \mathbf{b}_\beta(s) &= \mathbf{t}_\beta(s) \times \mathbf{n}_\beta(s) = A\mathbf{t}_\alpha(s) \times A\mathbf{n}_\alpha(s) = A(\mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{n}_\alpha(s)) = A\mathbf{b}_\alpha(s).\end{aligned}$$

Luego  $A$  lleva el triedro de Frenet de  $\alpha$ , en el triedro de Frenet de  $\beta$ .

# Transformaciones rígidas

Además,

$$\begin{aligned}\kappa_\beta(s) &= \langle \beta''(s), \mathbf{n}_\beta(s) \rangle = \langle A\alpha''(s), A\mathbf{n}_\alpha(s) \rangle = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle \\ &= \kappa_\alpha(s), \quad \forall s;\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tau_\beta(s) &= \langle \mathbf{b}'_\beta(s), \mathbf{n}_\beta(s) \rangle = \langle A\mathbf{b}'_\alpha(s), A\mathbf{n}_\alpha(s) \rangle = \langle \mathbf{b}'_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle \\ &= \tau_\alpha(s), \quad \forall s.\end{aligned}$$

De ahí que  $\kappa$  y  $\tau$  son invariantes bajo movimientos rígidos.  $\square$