

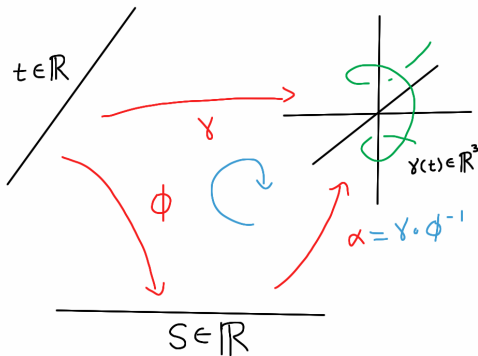
## **PARAMETRIZACIÓN POR LONGITUD DE ARCO**

ALAN REYES-FIGUEROA  
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 03) 12.ENERO.2023

# Reparametrizaciones

Reparametrizar una curva  $\gamma$  consiste en componer su parametrización  $\gamma(t)$  con otra función  $t = \phi(s)$ , para obtener una nueva representación  $\alpha(s) = (\gamma \circ \phi)(s)$  de la curva.



# Longitud de arco

- Parametrizar una curva como función de su longitud de arco es equivalente a que

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau = t - t_0, \quad \forall t \in I.$$

También es equivalente a hacer  $|\alpha'(t)| = 1, \forall t \in I$ .

(El vector velocidad tiene magnitud constante 1). Esta propiedad será importante para el desarrollo de la geometría de curvas.

# Ejemplo

Consideremos un círculo de radio  $r$ , parametrizado por

$$\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La derivada es  $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ , y  $|\alpha'(t)| = \sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t} = r$ . La longitud de arco a partir de punto  $\mathbf{p} = \alpha(0) = (1, 0)$  es

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(\tau)| d\tau = \int_0^t r d\tau = rt.$$

Despejando  $t$  (como función de  $s$ ), resulta  $t = \frac{s}{r}$ . Podemos entonces representar la curva como

$$\alpha(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

# Ejemplo

Con la representación anterior

$$\alpha(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Se cumple

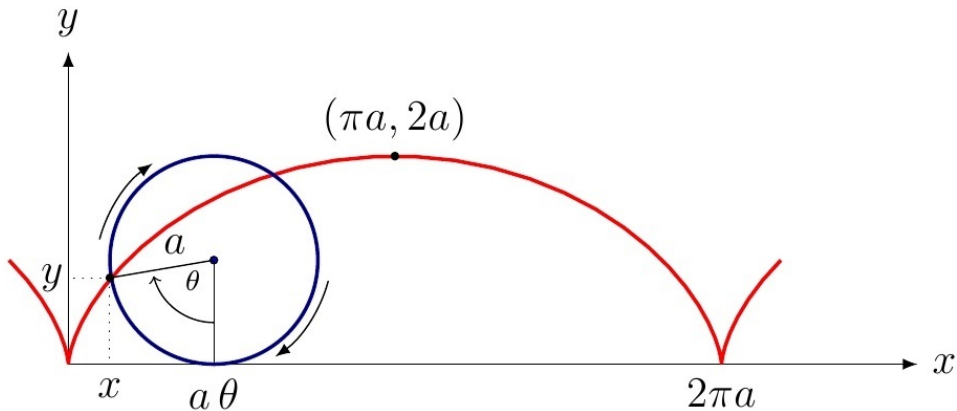
- $|\alpha'(s)| = |(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r})| = \sqrt{\cos^2 \frac{s}{r} + \sin^2 \frac{s}{r}} = 1, \forall s.$

- 

$$\int_0^s |\alpha'(\sigma)| d\sigma = \int_0^s 1 d\sigma = s, \quad \forall s.$$

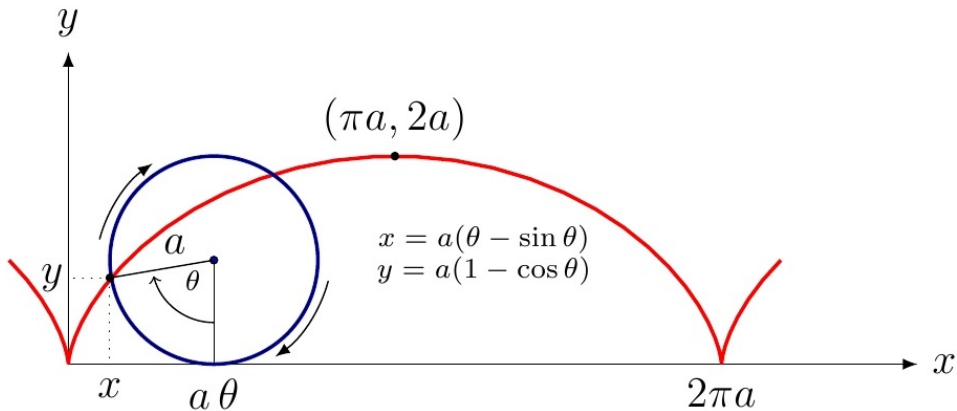
# Ejemplo

## La cicloide



# Ejemplo

## La cicloide



# Ejemplo

Obtenemos la siguiente parametrización de la cicloide:

$$\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La derivada es  $\gamma'(t) = a(1 - \cos t, \sin t)$ . Observe que para los puntos  $t = 2an\pi, n \in \mathbb{Z}$ , son puntos singulares para  $\gamma$ .

Entonces,  $\gamma(t)$  es una curva regular en el intervalo  $(0, 2\pi)$ . En este caso

$$|\gamma'(t)| = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = a\sqrt{2 - 2\cos t} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

Luego, la longitud de arco desde  $t = 0$  es

$$s = \int_0^t |\gamma'(\tau)| d\tau = \int_0^t 2a \sin \frac{\tau}{2} d\tau = 4a - 4a \cos \frac{t}{2}.$$



# Ejemplo

Despejando  $t$  en función de  $s$ , obtenemos  $t = 2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4a}\right)$ , para  $s \in (0, 8a)$

Así, obtenemos la reparametrización

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= a \left( 2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4a}\right) - \sin \left[ 2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4a}\right) \right], 1 - \cos \left[ 2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4a}\right) \right] \right) \\ &= a \left( 2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4a}\right) - 2 \left(1 - \frac{s}{4a}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2}, 2 - 2 \left(1 - \frac{s}{4a}\right)^2 \right).\end{aligned}$$

## Otra reparametrización

Dada una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , parametrizada por  $s \in I = (a, b)$ , podemos considerar una nueva curva  $\beta = \alpha \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , haciendo la reparametrización  $\varphi : t(s) = a + b - s$ .

Ambas  $\alpha$  y  $\beta$  tienen el mismo trazo, pero recorrido en sentido contrario:

$$\beta'(t) = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d(\alpha \circ \varphi)}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \alpha'(s) \cdot (-1) = -\alpha'(s).$$

Esta reparametrización se llama un *cambio de orientación* de  $\alpha$ .

# Comentarios sobre curvas regulares

Kühnel define una *curva regular* como una cierta clase de equivalencia.

## Definición

Una **curva regular** es una clase de equivalencia de curvas parametrizadas regulares, donde la relación de equivalencia se obtiene a partir de cualquier transformación (que preserva la orientación) del tipo

$$\varphi : (a, b) \rightarrow (a, b),$$

$\varphi$  biyectiva, continuamente diferenciable, con  $\varphi' > 0$ .

Así,  $\alpha$  y  $\alpha \circ \varphi$  se consideran equivalentes.

**Obs!** Una transformación  $\varphi$  biyectiva, diferenciable (clase  $C^1$ ), y con inversa  $\varphi^{-1}$  diferenciable, se llama un *difeomorfismo*. Si  $\varphi' > 0$ , este es un difeomorfismo que preserva la orientación.

# Ejercicio

1. Calcular la parametrización por longitud de arco de una hélice

$$\alpha(t) = (r \cos at, r \sin at, bt), \quad t \in \mathbb{R}, \quad r, a, b > 0$$

a partir del punto  $\mathbf{p} = \alpha(0) = (r, 0, 0)$ .