

Geometría Diferencial 2023

Lista 04

23.marzo.2023

1. Mostrar que la ecuación del plano tangente en $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ a una superficie regular $S : f(x, y, z) = 0$, con 0 un valor regular de f es

$$f_x(\mathbf{p})(x - x_0) + f_y(\mathbf{p})(y - y_0) + f_z(\mathbf{p})(z - z_0) = 0.$$

¿Cómo queda la ecuación del plano tangente en el caso de una superficie regular de la forma $z = f(x, y)$?

2. Pruebe que las normales a una superficie parametrizada de la forma

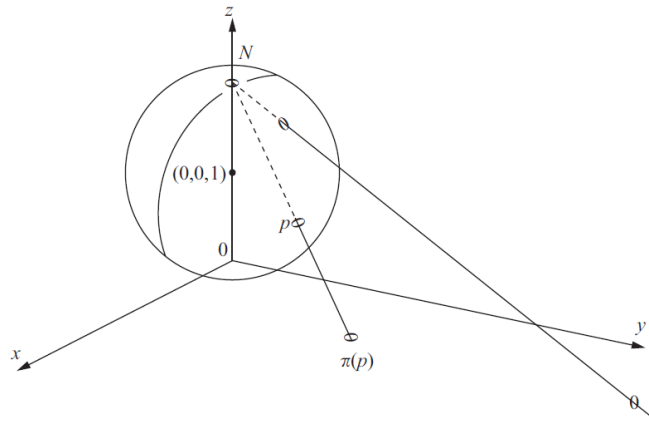
$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad f(u) \neq 0, \quad g'(u) \neq 0,$$

pasan todas por el eje Oz .

3. Un punto crítico de una función diferenciable $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre una superficie regular S es un punto $\mathbf{p} \in S$ tal que $Df(\mathbf{p}) = 0$.

- a) Si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es dada por $f(\mathbf{p}) = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|$, con $\mathbf{p}_0 \notin S$, mostrar que \mathbf{p} es punto crítico de f si, y sólo si, la recta de \mathbf{p} a \mathbf{p}_0 es normal a S .
- b) Si $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ es dada por $h(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vector unitario, mostrar que \mathbf{p} es punto crítico de f si, y sólo si, \mathbf{v} es un vector normal a S en \mathbf{p} .

4. Obtenga la primera forma fundamental de la parametrización de la esfera S^2 dada por la proyección estereográfica.



5. Muestre que el área A de una región limitada R sobre la superficie $z = f(x, y)$, con f diferenciable, es

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy,$$

donde Q es la proyección ortogonal de R sobre el plano Oxy .

6. Las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{x}(u, v)$ de S constituyen una *red de Tchebyshev* si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales.

a) Pruebe una condición necesaria y suficiente para que esto suceda es que

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

b) Mostrar que si las curvas coordenadas forman una red de Tchebyshev, entonces es posible reparametrizar la vecindad coordenada de tal forma que $E = 1$, $F = \cos \theta$ y $G = 1$.

7. Sea S una superficie de revolución y $C : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ su curva generatriz (en el plano Oxz). Sea s la longitud de arco de la curva, y denotamos por $\rho = \rho(s)$ la distancia del punto correspondiente $C(s)$ al eje de rotación.

a) Mostrar el Teorema de Pappus: El área de S está dada por

$$A = 2\pi \int_0^L \rho(s) ds,$$

donde L es la longitud de la curva C .

b) Aplicar la parte (a) para calcular el área de la superficie de un toro.

8. El *gradiente* de una función diferenciable $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es la aplicación diferenciable $\nabla f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asocia a cada punto $\mathbf{p} \in S$ un vector $\nabla f(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}S$ tal que

$$\langle \nabla f(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} = Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

Demuestre que si E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental en una parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, entonces el gradiente $\nabla f(\mathbf{p})$ en $\mathbf{x}(U)$ está dado por

$$\nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} \mathbf{x}_v.$$

En particular, si $S = \mathbb{R}^2$, con coordenadas x, y , entonces

$$\nabla f = f_x \mathbf{e}_1 + f_y \mathbf{e}_2.$$

9. La orientación puede no ser preservada por difeomorfismos.

Sea $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo entre superficies.

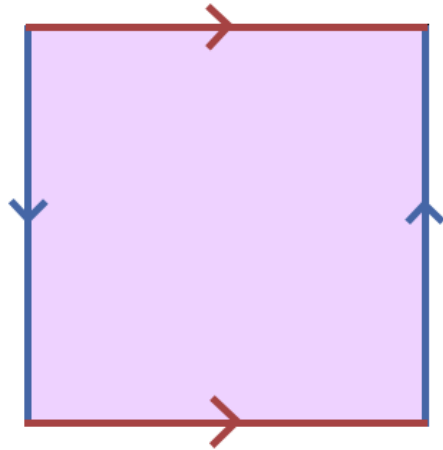
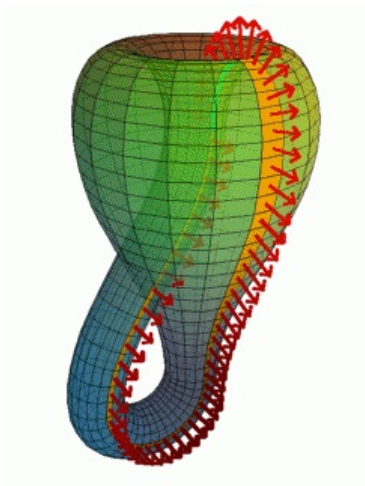
a) Muestre que S_1 es orientable si, y sólo si, S_2 es orientable.

b) Considera la aplicación antípoda $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ dada por $\varphi(\mathbf{p}) = -\mathbf{p}$. Utilizar esta aplicación para mostrar que en (a), la orientación inducida por φ puede ser distinta de la original.

10. Mostrar que la botella de Klein \mathbb{K} no es orientable. Para ello, puede considerar el siguiente modelo de la botella de Klein:

$$\mathbb{K} = [0, 1] \times [0, 1] / \sim, \quad \text{donde } (u, 0) \sim (u, 1), \text{ y } (0, v) \sim (1, 1 - v),$$

u otro modelo similar, como se ilustra en la Figura 1.



\mathbb{K}

Figure 1: Botella de Klein. (a) como superficiei en \mathbb{R}^3 , (b) como espacio cociente.