

# Geometría Diferencial 2023

Lista 01

26.enero.2023

1. a) Sea  $\alpha(t)$  una curva parametrizada en  $\mathbb{R}^n$ , que no pasa por el origen  $O$ . Si  $\alpha(t_0)$  es un punto del trazo de  $\alpha$  que está más próximo a  $O$ , y  $\alpha'(t_0) \neq 0$  entonces  $\alpha(t_0)$  es ortogonal a  $\alpha'(t_0)$   
b) Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada, con  $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$ . Mostrar que  $|\alpha(t)|$  es una constante  $> 0$  si, y sólo si,  $\alpha(t)$  es ortogonal a  $\alpha'(t)$ , para todo  $t \in I$ .
2. Considere la parametrización de la cicloide de radio  $r$  vista en aula.
  - a) Calcular la longitud de arco de la cicloide en el primero de sus arcos, esto es correspondiente a una rotación completa del círculo.
  - b) Calcular el área bajo la curva (entre la curva y el eje  $x$ ) para este arco de cicloide.
3. Sea  $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  la curva dada por
$$\left( \sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right),$$
donde  $t$  es el ángulo que el eje  $Oy$  hace con el vector  $\alpha'(t)$ . Esta curva se llama la *tractriz* (Figura en pág. 8 de Do Carmo). Mostrar que
  - $\alpha$  es una curva parametrizada diferenciable, regular excepto en  $t = \frac{\pi}{2}$ .
  - La longitud del segmento de la tangente a la tractriz, entre el punto de tangencia y el eje  $Oy$  es constante e igual a 1.
4. Sea  $\alpha$  una curva plana regular en coordenadas polares  $(r, \varphi)$ , dada por  $r = r(\varphi)$ . Usando la notación  $r' = \frac{\partial r}{\partial \varphi}$ , verificar que la longitud de arco en el intervalo  $[\varphi_1, \varphi_2]$  es
$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi,$$
y que la curvatura está dada por
$$\kappa(\varphi) = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}.$$
5. Calcular la curvatura de la *espiral de Arquímedes*, la cual está dada por  $r(\varphi) = a\varphi$ ,  $a$  constante (Figura 1(a)).
6. Para la *espiral logarítmica*, dada en coordenadas polares por  $r(t) = ae^t, \varphi(t) = bt$ ,  $a, b$  constantes (Figura 1(b)), probar lo siguiente:
  - a) La longitud de la curva en el intervalo  $(-\infty, t]$  es proporcional al radio  $r(t)$
  - b)  $\alpha(t) \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\alpha$  tiene longitud de arco finita en el intervalo  $[t_0, \infty)$ .
  - c) El vector  $\alpha(t)$  tiene ángulo constante con el vector tangente  $\alpha'(t)$ .
  - d)
7. Mostrar que la curva de menor longitud entre dos puntos  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el segmento de recta que los une. (Sugerencia: ver las ideas en el Ejercicio 10, pág 11 de Do Carmo.)

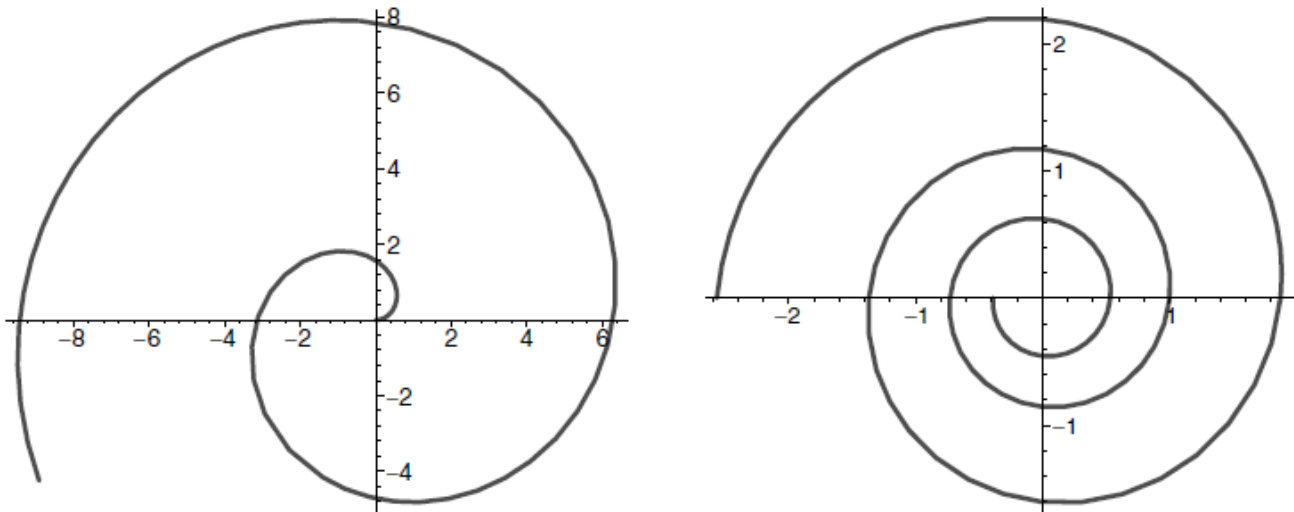


Figure 1: (a) espiral de Arquímedes, (b) espiral logarítmica.

8. Probar que la curvatura y la torsión de una curva de Frenet  $\alpha(t)$  en  $\mathbb{R}^3$ , parametrizada de forma arbitraria, están dadas por

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}.$$

En particular, en el caso de curvas planas,

$$\kappa(t) = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3}.$$

(Sugerencia: ver las ideas en el Ejercicio 12, pág 26 de Do Carmo.)

9. Sea  $\alpha$  la *hélice* en  $\mathbb{R}^3$ , dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Muestre que la curvatura y la torsión de  $\alpha$  son constantes.

10. Construir una curva plana, parametrizada por longitud de arco, cuya curvatura esté dada exactamente por  $\kappa(s) = s^{-1/2}$ .

11. (Ejercicio opcional, no es necesario entregar).

Suponga que para una curva de Frenet  $\alpha(s)$  en  $\mathbb{R}^n$ , todas las curvaturas  $\kappa_i$  en la matriz  $K$  del sistema de Frenet son constantes,  $\kappa_i \neq 0, \forall i$ .

- a) Mostrar que la solución de las ecuaciones de Frenet, está dada por una matriz exponencial  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 e^{sK}$ , donde

$$\exp(sK) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (sK)^n,$$

y  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(s_0) \in \mathbb{R}^n$  es un punto o condición inicial de la curva.

- b) Para el caso de  $\mathbb{R}^3$ , demuestre que una curva de Frenet con curvatura  $\kappa > 0$  y torsión  $\tau > 0$  constantes, es necesariamente una hélice.

Así, en  $\mathbb{R}^3$  tenemos que

$$\text{Si } \alpha(t) \text{ tiene } \kappa, \tau \text{ constantes} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ es una recta,} & \text{cuando } \kappa = 0; \\ \alpha \text{ es un círculo,} & \text{cuando } \kappa > 0, \tau = 0; \\ \alpha \text{ es una hélice,} & \text{cuando } \kappa, \tau > 0. \end{cases}$$