

# Geometría Diferencial 2023

Lista 02

13.febrero.2023

1. Let  $\alpha$  una curva de Frenet en  $\mathbb{R}^n$ . Muestre que

$$\det[\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(n)}] = \prod_{i=1}^{n-1} \kappa_i^{(n-i)}.$$

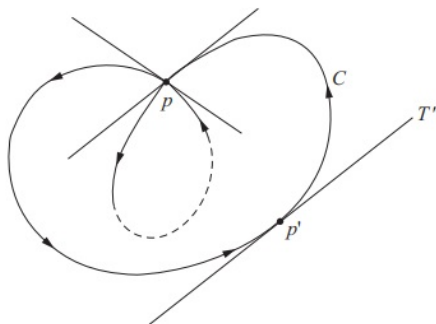
2. Construir una curva, no planar, de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^3$ , que sea una curva de Frenet, excepto en un único punto, y que fuera de ese punto, satisfice  $\tau \equiv 0$ .
3. (a) Sea  $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva plana, cerrada y simple, parametrizada por longitud de arco. Suponga que  $0 \leq \kappa(s) \leq c$ ,  $\forall s \in [0, L]$ , para alguna constante  $c > 0$ . Probar que  $L \geq \frac{2\pi}{c}$ .  
(b) Si reemplazamos la hipótesis de  $\alpha$  ser simple por  $\alpha$  tiene índice de rotación  $I$ , probar que  $L \geq \frac{2\pi I}{c}$ .

4. Sea  $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva plana, cerrada y convexa, orientada de forma positiva. La curva

$$\beta(s) = \alpha(s) - r\mathbf{n}(s),$$

donde  $r > 0$  es una constante positiva y  $\mathbf{n}(s)$  es el vector normal de  $\alpha$  en  $s$ , se llama una *curva paralela* a  $\alpha$ . Muestre que

- a)  $\ell(\beta) = \ell(\alpha) + 2\pi r$ .  
b)  $A(\beta) = A(\alpha) + rL + \pi r^2$ .  
c)  $\kappa_\beta(s) = \frac{\kappa_\alpha(s)}{1 + r\kappa_\alpha(s)}$ .
5. Sea  $C : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva plana, cerrada, orientada positivamente, con  $\kappa > 0$ . Asuma que  $C$  posee al menos un punto de auto-intersección  $\mathbf{p}$ . Demostrar que
- a)  $C$  posee al menos una tangente doble.  
b) Existe un punto  $\mathbf{p}'$  cuya tangente a  $\alpha$  en  $\mathbf{p}'$  es paralela a la tangente a  $\alpha$  en  $\mathbf{p}$ .  
c) El ángulo de rotación de la tangente en el arco positivo de  $C$  dado por  $\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{p}$  es mayor a  $\pi$ .  
d) El índice de rotación de  $C$  es  $I \geq 2$ .



6. Hallar todos los vértices de la elipse  $\gamma(t) = (p \cos t, q \sin t)$ , cuando  $p \neq q$  (aquí,  $p, q > 0$ ).
-