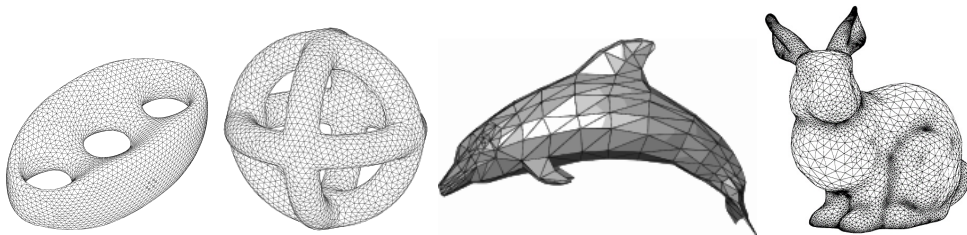


## **EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET II**

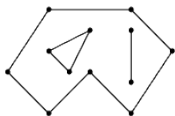
ALAN REYES-FIGUEROA  
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 33) 25.MAYO.2023

# Triangulaciones



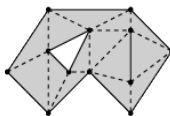
ejemplos de triangulaciones para algunas superficies.



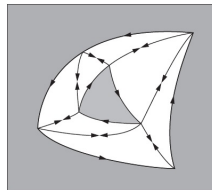
(a)



(b)



(c)



Triangulaciones para una región regular  $R$ .

# Triangulaciones

La pregunta de si es posible triangular cualquier variedad ha sido ampliamente investigada. Algunos resultados:

- Toda variedad diferenciable (*smooth manifold*) admite una triangulación (J. H. C. Whitehead, L. E. J. Brouwer, 1949), (James Munkres, 1967).
- Toda variedad topológica (*topological manifold*) de dimensión 1, 2 ó 3, admite una triangulación. Provado para superficies por Tibor Radó (1920s), y para 3-variedades por Edwin E. Moise y R. H. Bing (1950s).
- En dimensión 4, la variedad  $E8$  no admite triangulación.
- R. Kirby y L. Siebenmann, (1970s) hallaron ejemplos de variedades en dimensión 4 que no admiten triangulaciones lineales por pedazos: contraejemplo al *Hauptvermutung* (conjetura principal).
- En 2013, Ciprian Manolescu desprueba la *Triangulation Conjecture*. Muestra que existen variedades en dimensión  $\geq 5$  que no son homeomorfas a un complejo simplicial.

# Característica de Euler

## Definición

Sea  $\mathcal{K}$  un complejo simplicial de dimensión  $n$ . Para  $d = 0, 1, 2, \dots, n$ , el  **$d$ -esqueleto** de  $\mathcal{K}$  es el conjunto  $\mathcal{K}_d = \{\sigma \in \mathcal{K} : \dim \sigma = d\}$  de los  $d$ -simplejos contenidos en  $\mathcal{K}$ . Las cardinalidades

$$\beta_i = \beta_i(\mathcal{K}) = |\mathcal{K}_i| = \dim H_i(\mathcal{K}, \mathbb{Z}),$$

se llaman los **números de Betti** de  $\mathcal{K}$ .

## Definición

La **característica de Euler** de un complejo simplicial  $\mathcal{K}$  es el número

$$\chi(\mathcal{K}) = \sum_{i=0}^{\dim \mathcal{K}} (-1)^i \beta_i(\mathcal{K}) = \sum_{i=0}^{\dim \mathcal{K}} (-1)^i |\mathcal{K}_i|.$$

# Característica de Euler

## Propiedades:

- $\chi(\mathcal{K})$  es un invariante topológico.
- En particular, si  $R$  es una variedad topológica (o una región), y  $\mathcal{K}$  es una triangulación para  $R$ , vale

$$\chi(R) = \chi(\mathcal{K}).$$

- En el caso de superficies, si  $R \subseteq \mathbf{x}(U)$  es una región regular sobre una superficie, y  $\mathcal{K}$  es una triangulación de  $R$ , entonces

$$\begin{aligned}\chi(R) &= \chi(\mathcal{K}) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i |\mathcal{K}_i| = |\mathcal{K}_0| - |\mathcal{K}_1| + |\mathcal{K}_2| \\ &= V - A + F.\end{aligned}$$

( $V = \#$  vértices,  $A = \#$  de aristas,  $F = \#$  de caras).

# Característica de Euler

## Ejemplos:

- La característica de Euler de la esfera  $S^2$  es  $\chi(S^2) = 2$ .
- La característica de Euler de una superficie compacta orientable de género  $g$  es  $\chi(S) = 2 - 2g$ .
- El **Teorema de Clasificación de Superficies Compactas**, establece que toda superficie compacta está determinada por su característica de Euler, a menos de homeomorfismo.
  - Para  $S_g$  orientable:  $\chi(S_g) = 2 - 2g$
  - Para  $N_g$  no-orientable:  $\chi(N_g) = 2 - g$
- En general, para superficies o regiones (orientables), con género  $g$ , y  $b$  componentes frontera,  $\chi(R) = 2 - 2g - b$ .
- Para el disco  $\mathbb{D}$  o cualquier región simple  $R$ ,  $\chi(R) = 1$ .
- Para el cilindro  $C = S^1 \times \mathbb{R}$ ,  $\chi(C) = 0$ .

# Triangulaciones

Recordemos que  $\mathcal{K}$  es una triangulación de una región  $R$  si:

- $T_i, T_j \in \mathcal{K}$  y  $T_i \cap T_j \neq \emptyset \Rightarrow T_i \cap T_j$  es una arista o vértice común.
- $R = \bigcup_{T \in \mathcal{K}} T$ .

## Proposición

Sea  $S$  una superficie regular orientada,  $R \subseteq S$  una región regular, y sea  $\mathbf{x}_\alpha : \bigcup_\alpha U_\alpha \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  una colección de parametrizaciones positivas tales que  $R \subseteq \bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ . Entonces, existe una triangulación  $\mathcal{K} = \{T_j\}_{j=1}^r$  de  $R$  de modo que para  $j = 1, 2, \dots, r$  existe  $\alpha_j$  con

$$T_j \subseteq \mathbf{x}_{\alpha_j}(U_{\alpha_j}).$$

Más aún, si orientamos los  $\partial T_j$  positivamente, triángulos adyacentes inducen orientaciones opuestas sobre la arista común.  $\square$

**Obs!** Sabemos que cada triángulo  $T_j$  de la triangulación  $\mathcal{K}$  está contenido en la imagen de una parametrización ortogonal ( $F = 0$ ).

# Teorema de Gauss-Bonnet

Nuestro objetivo ahora es elaborar una versión del Teorema de Gauss-Bonnet para una región regular  $R$  limitada cualquiera.

Sea  $S$  superficie orientada,  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrización regular, y sea  $R \subseteq \mathbf{x}(U)$  una región regular, cuya frontera  $\partial R$  está parametrizada por una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{x}(U)$ , regular por partes, en  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , y parametrizada por longitud de arco, y  $\partial R = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_c$ .

Entonces

## Teorema (Teorema de Gauss-Bonnet global)

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{\ell=1}^c \theta_\ell = 2\pi \chi(R).$$



# Teorema de Gauss-Bonnet

## Prueba:

Sea  $\mathcal{K} = \{T_j\}_{j=1}^r$  una triangulación de la región  $R$  (sobre  $S$ ), orientada positivamente. Para cada triángulo  $T_j$ , el teorema de Gauss-Bonnet local establece

$$\int_{T_j} K dS + \int_{\partial T_j} \kappa_g ds + \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi, \quad j = 1, 2, \dots, r;$$

donde  $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$  son los ángulos externos a  $T_j$ .

Denotamos

$V$  = número de vértices en  $\mathcal{K}$ ,

$A$  = número de aristas en  $\mathcal{K}$ ,

$F$  = número de caras o regiones triangulares en  $\mathcal{K}$ .

# Teorema de Gauss-Bonnet

Sumando las ecuaciones anteriores, para  $j = 1, 2, \dots, r$ , obtenemos

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = 2\pi F. \quad (1)$$

Los ángulos internos de los triángulos  $T_j$  son

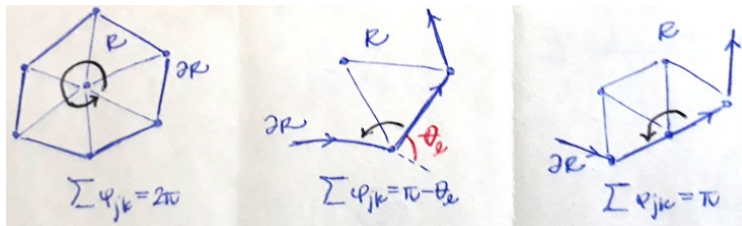
$$\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk} \Rightarrow \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 (\pi - \varphi_{jk}) = 3\pi F - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk}.$$

Entonces (1) puede escribirse como

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk} = -\pi F. \quad (2)$$

# Teorema de Gauss-Bonnet

Observe ahora que en una triangulación  $\mathcal{K}$  tenemos varios tipos de vértices:



Denotemos

- $V_i$  = número de vértices internos en  $\mathcal{K}$ ,
- $V_e$  = número de vértices externos en  $\mathcal{K}$ ,
- $V_c$  = número de vértices externos que son vértices de la curva  $\partial R$ ,
- $V_t$  =  $V_e - V_c$  = número de vértices externos de la triangulación  $\mathcal{K}$ .

# Teorema de Gauss-Bonnet

y

$A_i$  = número de aristas internos en  $\mathcal{K}$ ,

$A_e$  = número de aristas externos en  $\mathcal{K}$ .

Como las componentes  $\alpha_j$  de  $\partial R$  son curvas cerradas, entonces  $V_e = A_e$ . Además, en la triangulación  $\mathcal{K}$  vale  $3F = 2A_i + A_e \Rightarrow A_e + 3F = 2A_i + 2A_e = 2A \Rightarrow A_e = 2A - 3F$ .

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} &= 3\pi F - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk} = \pi(2A_i + A_e) - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk} \\ &= 2\pi A_i + \pi A_e - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk}.\end{aligned}$$

# Teorema de Gauss-Bonnet

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \theta_{jk} &= 2\pi A_i + \pi A_e - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^3 \varphi_{jk} \\&= 2\pi A_i + \pi A_e - \left( 2\pi V_i + \pi V_t + \sum_{\ell=1}^c (\pi - \theta_{\ell}) \right) \\&= 2\pi A_i + \pi A_e - 2\pi V_i - \pi V_t - \pi V_c + \sum_{\ell=1}^c \theta_{\ell} \\&= 2\pi A_i + \pi A_e + (\pi A_e - \pi V_e) - 2\pi V_i - \pi V_t - \pi V_c + \sum_{\ell=1}^c \theta_{\ell} \\&= 2\pi(A_i + A_e) - 2\pi(V_i + V_e) + \sum_{\ell=1}^c \theta_{\ell} = 2\pi A - 2\pi V + \sum_{\ell=1}^c \theta_{\ell}.\end{aligned}$$

# Teorema de Gauss-Bonnet

Sustituyendo lo anterior en (1), resulta

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \left( 2\pi A - 2\pi V + \sum_{\ell=1}^c \theta_\ell \right) = 2\pi F. \quad (3)$$

Como la característica de Euler de  $R$  se calcule mediante la triangulación  $\mathcal{K}$  como  $\chi(R) = V - A + F$ , entonces (3) equivale a

$$\begin{aligned} \int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{\ell=1}^c \theta_\ell &= 2\pi V - 2\pi A + 2\pi F \\ &= 2\pi(V - A + F) \\ &= 2\pi\chi(R). \quad \square \end{aligned}$$

## Corolario

Si  $R$  es una región simple sobre  $S$ , (satisfaciendo todas las hipótesis en el Teorema de Gauss-Bonnet), entonces

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum_{\ell=1}^c \theta_\ell = 2\pi.$$

Prueba: Si  $R$  es una región simple, entonces  $\chi(R) = \chi(\mathbb{D}) = 1$ .

## Corolario

Si  $S$  es una superficie compacta, orientable, entonces

$$\int_S K dS = 2\pi\chi(S).$$

Prueba: En este caso,  $R = S$  y  $\partial R = \emptyset \Rightarrow \sum \theta_\ell = 0$ .

## Corolario (Triángulos geodésicos)

Si  $R$  es un triángulo geodésico sobre  $S$ , con ángulos internos  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , entonces

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i = \pi + \int_R K dS.$$

Prueba:  $\theta_i = \pi - \varphi_i, i = 1, 2, 3 \Rightarrow \sum \theta_i = 3\pi - \sum \varphi_i$ . Por Gauss-Bonnet

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \left(3\pi - \sum_{i=1}^3 \varphi_i\right) = 2\pi\chi(R).$$

Como  $R$  es región simple  $\Rightarrow \chi(R) = 1$ . Además, como los lados de  $R$  son geodésicas, entonces  $\kappa_g = 0$  sobre  $\partial R$ . Así

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i = \pi + \int_R K dS. \quad \square$$



## Corolario

*Toda superficie compacta, conexa, orientable, con curvatura positiva, es homeomorfa a  $S^2$ .*

Prueba: Sea  $S$  orientable, compacta, conexa con curvatura  $K > 0$ . Por Gauss-Bonnet

$$2\pi\chi(S) = \int_S K dS > 0 \Rightarrow \chi(S) > 0.$$

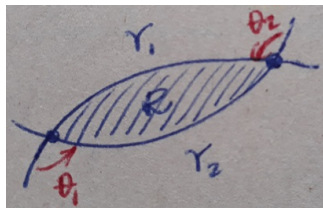
Como  $S$  es compacta, también  $\chi(S) = 2 - 2g$ , donde  $g$  es el género de  $S$ .

En particular, la única posibilidad es que  $g = 0$ . Por el Teorema de clasificación de superficies compactas,  $S \simeq S^2$ .



## Corolario

Sea  $S$  superficie orientable, con  $K \leq 0$ . Entonces, dos geodésicas  $\gamma_1, \gamma_2$  en  $S$  que parten de un punto  $\mathbf{p} \in S$  no pueden encontrarse nuevamente en un punto  $\mathbf{q} \in S$  de tal forma que los trazos de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , constituyen la frontera de una región simple  $R \subset S$ .



Prueba: De Gauss-Bonnet,  $\int_R K dS + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi$ .

Como  $\theta_1, \theta_2 < \pi$  (¿por qué?)  $\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 < 2\pi$

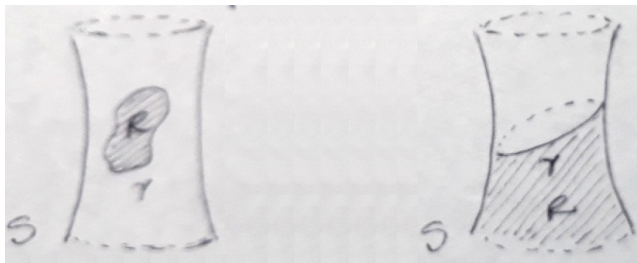
$$\Rightarrow \int_R K dS > 0.$$

Pero  $K \leq 0$ , un absurdo.  $\square$

## Corolario

Sea  $S$  una superficie homeomorfa al cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ , con  $K < 0$ . Entonces,  $S$  posee a lo sumo una geodésica cerrada simple.

Prueba: Tenemos dos curvas cerradas posibles sobre  $S$ :



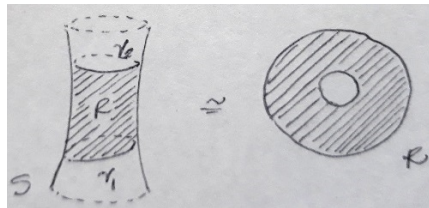
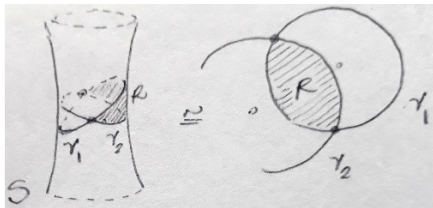
$$R \simeq \mathbb{D}^2$$

$$R \simeq \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

# Aplicaciones

Como  $K < 0$ , y por el corolario anterior, una geodésica cerrada  $\gamma$  sobre  $S$  no puede ser simple. De lo contrario,  $\gamma$  encierra una región  $R$ , homeomorfa al disco  $\mathbb{D}$ , pues  $\partial R$  consistiría de dos geodésicas, encerrando una región simple ( $\rightarrow \leftarrow$ ). Portanto el primer caso no ocurre.

Supongamos ahora que  $\gamma_1, \gamma_2$  son geodésicas cerradas simples sobre  $S$ , como en el segundo caso. Tenemos de nuevo dos posibilidades:



El caso  $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$  es imposible. En ese caso, la región limitada  $R$  (limitada por  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ ) sería una región simple limitada por dos geodésicas, lo cual contradice de nuevo el corolario anterior.

Luego,  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ . Entonces la región comprendida entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  es homeomorfa al cilindro  $S^1 \times \mathbb{R} \Rightarrow \chi(R) = 0$ . Por Gauss-Bonnet

$$0 > \int_R K dS = 2\pi\chi(R) = 0,$$

un absurdo ( $\rightarrow \leftarrow$ ). Este caso tampoco es posible.

Portanto, existe a lo suma una geodésica cerrada simple.  $\square$