

Geometría diferencial

- Superficies mínimas: Scherk 1 y Scherk 2

Rudik Rompich

1 de junio de 2023

Universidad del Valle de Guatemala

1. Introducción
2. Historia y parametrizaciones
3. Propiedades importantes e interesantes
4. Superficies mínimas

Introducción

Historia y parametrizaciones

Historia de las superficies de Scherk 1 y Scherk 2

- Las superficies de Scherk llevan el nombre de Heinrich Scherk, nacido el 27 de octubre de 1798 en Posen, Prusia (ahora Poznań, Polonia), y fallecido el 4 de octubre de 1885¹.
- Describió las dos superficies mínimas completas incrustadas, la primera superficie de Scherk y la segunda superficie de Scherk, en 1834².

¹Fuente: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Scherk/>

²Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Scherk_surface

Historia de las superficies de Scherk 1 y Scherk 2

- La primera superficie de Scherk es asintótica a dos familias infinitas de planos paralelos, ortogonales entre sí. Estos planos se encuentran cerca de $z = 0$ en un patrón de tablero de ajedrez de arcos de puente³.

³Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Scherk_surface

- Para un número natural n , encontrar una superficie mínima Σ_n , definida en

$$u_n : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\lim_{y \rightarrow \pm\pi/2} u_n(x, y) = +n \text{ para } -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\pi/2} u_n(x, y) = -n \text{ para } -\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$$

¿Qué pasa si n tiende a infinito?

La respuesta la dio Scherk in 1834: la superficie cuando n tiene al infinito es Σ definida como:

$$u : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$u(x, y) = \log \left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)} \right).$$

La superficie de Scherk 1 sobre el cuadrado

$$\Sigma = \left\{ \left(x, y, \log \left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)} \right) \right) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{\pi}{2} < x, y < +\frac{\pi}{2} \right\}$$

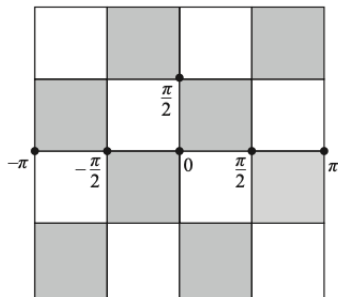


Figura 1: Grid en el que se define

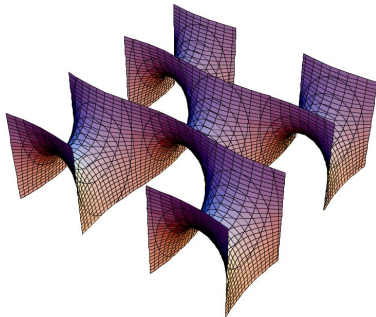


Figura 2: $x(u, v) = (u, v, \log(\frac{\cos u}{\cos v}))$

Scherk 1 (el de verdad)

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\arg \frac{\zeta + i}{\zeta - i}, \arg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}, \log \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right| \right),$$
$$\zeta \neq \pm 1, \zeta \neq \pm i$$

Historia de las superficies de Scherk 1 y Scherk 2

- La segunda superficie de Scherk se parece globalmente a dos planos ortogonales cuya intersección consta de una secuencia de túneles en direcciones alternas⁴.
- Tiene la ecuación implícita $\sin(z) - \sinh(x) \sinh(y) = 0$ y puede ser parametrizada como

$$x(r, \theta) = 2\Re(\ln(1 + re^{i\theta}) - \ln(1 - re^{i\theta})) = \ln\left(\frac{1+r^2+2r\cos\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}\right),$$

$$y(r, \theta) = \Re(4i \tan^{-1}(re^{i\theta})) = \frac{1+r^2-2r\sin\theta}{1+r^2+2r\sin\theta},$$

$$z(r, \theta) = \Re(2i(-\ln(1 - r^2 e^{2i\theta}) + \ln(1 + r^2 e^{2i\theta}))) = 2 \tan^{-1}\left(\frac{2r^2 \sin 2\theta}{r^4}\right).$$

⁴Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Scherk_surface

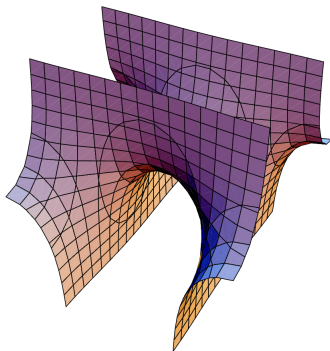
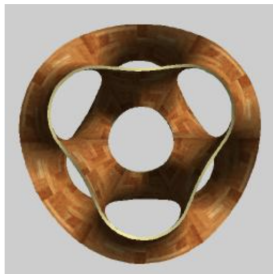
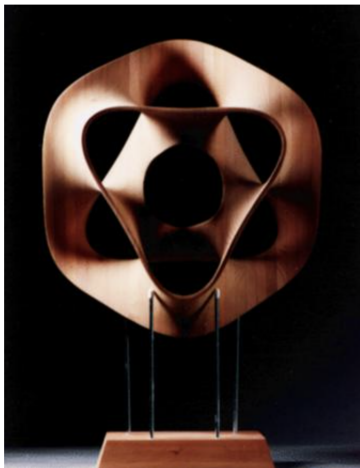


Figura 3: $\mathbf{x}(u, v) = \left(\ln \left(\frac{1+r^2+2r \cos \theta}{1+r^2-2r \cos \theta} \right), \frac{1+r^2-2r \sin \theta}{1+r^2+2r \sin \theta}, 2 \tan^{-1} \left(\frac{2r^2 \sin 2\theta}{r^4} \right) \right)$

- En 2006, Harold Rosenberg y Pascal Collin utilizaron superficies hiperbólicas de Scherk para construir un difeomorfismo armónico desde el plano complejo al plano hiperbólico, refutando así la conjetura de Schoen-Yau.

Historia de las superficies de Scherk 1 y Scherk 2

- El trabajo de Scherk sobre superficies mínimas no solo es significativo en matemáticas sino también en las artes. El artista estadounidense Brent Collins ha basado muchas de sus esculturas en la segunda superficie mínima de Scherk.



Propiedades importantes e interesantes

La periodicidad de las superficies de Scherk es evidente en las funciones de coseno y coseno presentes en sus formas paramétricas. Estas funciones son periódicas con periodos de 2π y $2\pi i$ respectivamente.

La conjetura de Schoen-Yau fue una proposición en geometría hiperbólica, nombrada así por los matemáticos Richard Schoen y Shing-Tung Yau. Se inspiró en un teorema de Erhard Heinz en 1952, pero desde entonces ha sido refutada.

Configuración y Declaración de la Conjetura

Dejemos que \mathbb{C} sea el plano complejo considerado como una variedad Riemanniana con su métrica Riemanniana usual (plana). Dejemos que \mathbb{H} denote el plano hiperbólico, es decir, el disco unitario

$$\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

dotado de la métrica hiperbólica

$$ds^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - (x^2 + y^2))^2}.$$

Heinz demostró que no puede existir ninguna difeomorfismo armónico $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$. A la luz de este teorema, Schoen conjeturó que no existe ningún difeomorfismo armónico $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$.

1. La conjetura de Schoen-Yau fue refutada con el uso de superficies de Scherk. Harold Rosenberg y Pascal Collin en 2006 mostraron que existen difeomorfismos armónicos del plano complejo al plano hiperbólico utilizando superficies mínimas periódicas con simetría de traslación.
2. Esta prueba se basa en la convergencia de ciertas secuencias de superficies mínimas en el espacio euclidiano tridimensional, cuyos límites son difeomorfismos armónicos del plano complejo al plano hiperbólico.

Se pueden generar con la parametrización de Enneper-Weierstrass

$$\begin{bmatrix} x(r, \phi) \\ y(r, \phi) \\ z(r, \phi) \end{bmatrix} = \Re \int \begin{bmatrix} f(1 - g^2) \\ if(1 + g^2) \\ 2fg \end{bmatrix} dz$$

donde $z = re^{i\phi}$ y $\Re[z]$ es la parte real de z . Para el caso particular de la segunda superficie de Scherk: $\frac{4}{1-z^4}$, $g(z) = iz$.

Superficies mínimas

Lema

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular, con parámetros (u, v) y $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ su parametrización. Entonces,

- \mathbf{x} es isotérmica $\Leftrightarrow F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0$.
- Si \mathbf{x} es isotérmica, entonces S es mínima $\Leftrightarrow F_1, F_2, F_3$ son holomorfas.

Dada por

$$\mathbf{x}(t, \theta) = \left(\arg \frac{\zeta + i}{\zeta - i}, \arg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}, \log \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right| \right), \quad \zeta \neq \pm 1, \zeta \neq \pm i,$$

donde $\zeta = u + iv$, y $\arg \zeta$ es el ángulo que el eje real hace con ζ .

Calculamos que

$$\arg \frac{\zeta + i}{\zeta - i} = \tan^{-1} \frac{2u}{u^2 + v^2 - 1}$$

$$\arg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} = \tan^{-1} \frac{-2v}{u^2 + v^2 - 1}$$

$$\log \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{(u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2}{(u^2 - v^2 - 1)^2 + 4u^2v^2}$$

por lo tanto,

$$\varphi_1 = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2}{1 + \zeta^2}, \quad \varphi_2 = -\frac{2i}{1 - \zeta^2}, \quad \varphi_3 = \frac{4\zeta}{1 - \zeta^4}.$$

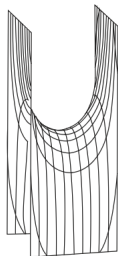
Dado que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$ y φ_1, φ_2 , y φ_3 son analíticos, \mathbf{x} es una parametrización isotérmica de una superficie mínima.

A partir de las expresiones de x , y , y z que

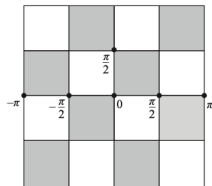
$$z = \log \frac{\cos y}{\cos x}$$

Esta representación muestra que la superficie de Scherk se define en el patrón de ajedrez (excepto en los vértices de los cuadrados, donde la superficie es en realidad una línea vertical).

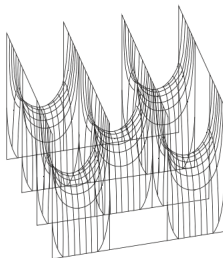
Scherk 1



(a)



(b)



(c)

Figure 3-45. Scherk's surface.

Definición

El Laplaciano Δf de una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se define por $\Delta f = (\partial^2 f / \partial u^2) + (\partial^2 f / \partial v^2)$, $(u, v) \in U$. Decimos que f es armónica en U si $\Delta f = 0$.

Corolario

Sea $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ una superficie parametrizada y supongamos que \mathbf{x} es isotérmica. Entonces \mathbf{x} es mínima si y solo si sus funciones de coordenadas x, y, z son armónicas.

Superficie mínima: Scherk 2

Dado dado por

$$\mathbf{x}(r, \theta) = \left(\ln \left(\frac{1 + r^2 + 2r \cos \theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \right), \frac{1 + r^2 - 2r \sin \theta}{1 + r^2 + 2r \sin \theta}, 2 \tan^{-1} \left(\frac{2r^2 \sin 2\theta}{r^4} \right) \right)$$

$$x_r = \left(\frac{-4(-1 + r^2) \cos(\theta)}{1 + r^4 - 2r^2 \cos(2\theta)}, \frac{4(-1 + r^2) \sin(\theta)}{1 + r^4 + 2r^2 \cos(2\theta)}, \right. \\ \left. \frac{-8r \sin(2\theta)}{r^4 + 4 \sin(2\theta)^2} \right)$$

$$x_\theta = \left(\frac{-4r(1 + r^2) \sin(\theta)}{1 + r^4 - 2r^2 \cos(2\theta)}, \frac{-4r(1 + r^2) \cos(\theta)}{1 + r^4 + 2r^2 \cos(2\theta)}, \right. \\ \left. \frac{8r^2 \cos(2\theta)}{r^4 + 4 \sin(2\theta)^2} \right)$$

$$x_{rr} = \left(\frac{8r \cos(\theta)(-1 - 2r^2 + r^4 + 2 \cos(2\theta))}{(1 + r^4 - 2r^2 \cos(2\theta))^2}, \right. \\ \left. \frac{8r(-(r^2(-2 + r^2) \sin(\theta)) + \sin(3\theta))}{(1 + r^4 + 2r^2 \cos(2\theta))^2}, \frac{8(-2 + 3r^4 + 2 \cos(4\theta)) \sin(2\theta)}{(r^4 + 4 \sin(2\theta)^2)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
x_{\theta\theta} = & \left(\frac{-4r(1+r^2)\cos(\theta)(1-4r^2+r^4+2r^2\cos(2\theta))}{(1+r^4-2r^2\cos(2\theta))^2}, \right. \\
& \frac{4r(1+r^2)((1-3r^2+r^4)\sin(\theta)-r^2\sin(3\theta))}{(1+r^4+2r^2\cos(2\theta))^2}, \\
& \left. \frac{-16r^2(6+r^4+2\cos(4\theta))\sin(2\theta)}{(r^4+4\sin(2\theta)^2)^2} \right) \\
x_{r\theta} = & \left(\frac{4(-1+r^2)(1+4r^2+r^4+2r^2\cos(2\theta))\sin(\theta)}{(1+r^4-2r^2\cos(2\theta))^2}, \right. \\
& \frac{4(-1+r^2)\cos(\theta)(1+4r^2+r^4-2r^2\cos(2\theta))}{(1+r^4+2r^2\cos(2\theta))^2}, \\
& \left. \frac{-16r\cos(2\theta)(-2+r^4+2\cos(4\theta))}{(r^4+4\sin(2\theta)^2)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$x_{\theta r} = \left(\frac{4(-1 + r^2)(1 + 4r^2 + r^4 + 2r^2 \cos(2\theta)) \sin(\theta)}{(1 + r^4 - 2r^2 \cos(2\theta))^2}, \right. \\ \frac{4(-1 + r^2) \cos(\theta)(1 + 4r^2 + r^4 - 2r^2 \cos(2\theta))}{(1 + r^4 + 2r^2 \cos(2\theta))^2}, \\ \left. \frac{-16r \cos(2\theta)(-2 + r^4 + 2 \cos(4\theta))}{(r^4 + 4 \sin(2\theta)^2)^2} \right)$$

Superficie mínima: Scherk 2

Primera forma

$$E = \frac{16(1+r^2)^2}{1+r^8-2r^4\cos(4\phi)}$$

$$F = 0$$

$$G = \frac{16r^2(1+r^2)^2}{1+r^8-2r^4\cos(4\phi)}$$

Segunda forma

$$e = \frac{8(1+r^4)\sin(2\phi)}{1+r^8-2r^4\cos(4\phi)}$$

$$f = \frac{8(1-r^4)\cos(2\phi)}{1+r^8-2r^4\cos(4\phi)}$$

$$g = \frac{8r^2(1+r^4)\sin(2\phi)}{1+r^8-2r^4\cos(4\phi)}.$$

Curvatura media y gaussiana

$$K = -\frac{1 + r^8 - 2r^4 \cos(4\phi)}{4(1 + r^2)^4}$$

$$H = 0.$$

Definición

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular, $\mathbf{p} \in S$. Sean κ_1 y κ_2 las curvaturas principales de S en \mathbf{p} . Definimos la curvatura media de S en \mathbf{p} como

$$H = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} DN(\mathbf{p}).$$

Definimos la curvatura de Gauss de S en \mathbf{p} como

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \det DN(\mathbf{p})$$

- Para una superficie mínima, la curvatura media es cero en cada punto, es decir, $H = \frac{k_1+k_2}{2} = 0$.
- Por lo tanto, para la superficie Scherk 1 y Scherk 2, las curvaturas principales en cada punto deben ser opuestas entre sí, es decir, $k_1 = -k_2$.

- Do Carmo, M. P. (2016). Differential geometry of curves and surfaces: Revised and updated second edition. Dover Publications.
- Gray, A. "Minimal Surfaces via the Weierstrass Representation." Ch. 32 in Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, pp. 735-760, 1997
- Hazewinkel, Michiel, ed. (2001), "Scherk surface", Encyclopedia of Mathematics, Springer Science+Business Media B.V. /