

PROPIEDADES GLOBALES DE CURVAS PLANAS

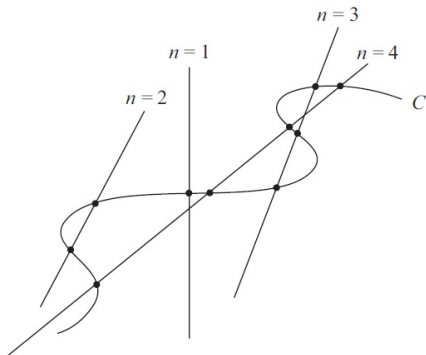
ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 10) 08.FEBRERO.2024

Intersecciones entre curvas y rectas

Definición

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular plana, y sea ℓ una recta en \mathbb{R}^2 . La **multiplicidad** de ℓ es el número de intersecciones $|\alpha \cap \ell|$.

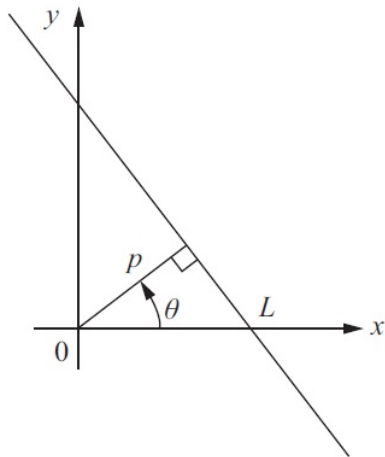


Intersecciones entre curvas y rectas

Asociamos una medida a un subconjunto de rectas del plano. Primero, observemos que toda recta ℓ en \mathbb{R}^2 está determinada por la menor distancia de ℓ al origen O , denotada $p \geq 0$, y por el ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ que la recta normal a ℓ hace con el eje Ox .

La ecuación de la recta ℓ está dada por

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p.$$



Intersecciones entre curvas y rectas

Identificamos el conjunto de rectas en el plano por el conjunto

$$\mathcal{L} = \{(p, \theta) \in \mathbb{R}^2 : p \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, \infty) \times S^1.$$

Recordemos que el área de un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ como

$$A(S) = \int_S d\omega = \int_S dx dy,$$

donde $\omega = dx \wedge dy$ es la 2-forma diferencial del elemento de área.

Objetivo 1: Mostrar que a menos de multiplicación por constantes, $\omega = dx dy$ es la única 2-forma invariante por movimientos rígidos del plano.

Definición

Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ es **mesurable** (o **medible**), si la integral

$$\int_S dx dy$$

existe (puede ser finita o no).

Equivalentemente, S es mesurable si, y sólo si, la función indicadora

$$\mathbf{1}_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{x} \in S; \\ 0, & \text{si } \mathbf{x} \notin S. \end{cases}$$

es mesurable.

En ese caso, el valor de la integral $A(S) = \int_S dx dy$ es el área de S .

Teorema (Cambio de variable)

Sean A y B subconjuntos abiertos y con volumen de \mathbb{R}^n , y sea $g : A \rightarrow B$ un difeomorfismo clase C^1 . Entonces, para toda función integrable $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, la función $f \circ g : A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en A , y vale

$$\int_B f = \int_A (f \circ g) \det Dg.$$

En particular, para \mathbb{R}^2 , usando una notación más común

$$\iint_{g(A)} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_A f(g(\tilde{x}, \tilde{y})) \det Dg(\tilde{x}, \tilde{y}) \, d\tilde{x} \, d\tilde{y}.$$

Aquí, $x = g_1(\tilde{x}, \tilde{y})$, $y = g_2(\tilde{x}, \tilde{y})$ son las funciones componentes de g .

Invarianza del área

Propiedad

El área es una función invariante por movimientos rígidos.

Prueba:

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ movimiento rígido. Entonces T es difeomorfismo ($T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ es diferenciable, con inversa $T^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{v})$, también diferenciable). Además, $DT = A \Rightarrow \det DT = \det A = 1$, ya que $A \in SO(2)$.

Si $S \subseteq \mathbb{R}^2$ es medible, entonces $\tilde{S} = T(S)$ es medible.

Del teorema del cambio de variable, con $f = 1$, $g = T$ y $f \circ T = 1$:

$$A(\tilde{S}) = \int_{\tilde{S}} dx dy = \int_{T(S)} dx dy = \int_S \det T d\tilde{x} d\tilde{y} = \int_S d\tilde{x} d\tilde{y} = A(S). \quad \square$$

Propiedad

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Para cualquier subconjunto medible $S \subseteq \mathbb{R}^2$ definamos la función

$$F(S) = \int_S f(x, y) \, dx \, dy.$$

Si F es invariante por movimientos rígidos, esto es, para todo $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mov. rígido, y para todo S , $\tilde{S} = T(S)$ vale

$$F(\tilde{S}) = \int_{\tilde{S}} f(\tilde{x}, \tilde{y}) \, d\tilde{x} \, d\tilde{y} = \int_S f(x, y) \, dx \, dy = F(S),$$

entonces f es constante.

Invarianza del área

Prueba:

Del teorema del cambio de variable

$$\int_{g(S)} f = \int_S (f \circ g) \det Dg.$$

En particular, para $g = T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ movimiento rígido, tenemos $\det DT = 1$, de modo que

$$\int_{T(S)} f(x, y) dx dy = \int_S f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}.$$

Como esto vale para todo subconjunto medible $S \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces

$$f(\tilde{x}(x, y), \tilde{y}(x, y)) = f(x, y), \forall x, y.$$

Ahora, para todo par de puntos (x, y) y (\tilde{x}, \tilde{y}) en \mathbb{R}^2 , existe un movimiento rígido T_0 tal que $T_0(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$. Luego

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(T_0(x, y)) = (f \circ T_0)(x, y) = f(x, y).$$

Como esto vale para todo movimiento rígido T , entonces f es constante. \square

El espacio de rectas en \mathbb{R}^2

Recordemos nuestro espacio de rectas en el plano:

$$\mathcal{L} = \{(p, \theta) \in \mathbb{R}^2 : p \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, \infty) \times S^1.$$

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un movimiento rígido, con $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$. Como $A \in SO(2)$, podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

para algún $\varphi \in [0, 2\pi)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces T induce la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= a + \tilde{x} \cos \varphi - \tilde{y} \sin \varphi, \\ y &= b + \tilde{x} \sin \varphi + \tilde{y} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Este cambio de coordenadas induce una transformación en \mathcal{L} .

El espacio de rectas en \mathbb{R}^2

Aplicando T a la ecuación de la recta $\ell : x \cos \theta + y \sin \theta = p$, obtenemos

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p$$

$$(a + \tilde{x} \cos \varphi - \tilde{y} \sin \varphi) \cos \theta + (b + \tilde{x} \sin \varphi + \tilde{y} \cos \varphi) \sin \theta = p$$

$$a \cos \theta + b \sin \theta + \tilde{x}(\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) + \tilde{y}(\cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \cos \theta) = p$$

$$a \cos \theta + b \sin \theta + \tilde{x} \cos(\theta - \varphi) + \tilde{y} \sin(\theta - \varphi) = p.$$

En particular, $\tilde{x} \cos(\theta - \varphi) + \tilde{y} \sin(\theta - \varphi) = p - a \cos \theta - b \sin \theta$.

Haciendo $\tilde{\theta} = \theta - \varphi$, y $\tilde{p} = p - a \cos \theta - b \sin \theta$, la nueva ecuación de la recta $T(\ell)$ es

$$\tilde{x} \cos \tilde{\theta} + \tilde{y} \sin \tilde{\theta} = \tilde{p}.$$

El espacio de rectas en \mathbb{R}^2

Entonces, T induce una transformación en el espacio coordenado (p, θ) :

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= p - a \cos \theta - b \sin \theta, \\ \tilde{\theta} &= \theta - \varphi,\end{aligned}$$

cuyo determinante jacobiano está dado por

$$\det DT(p, \theta) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a \sin \theta - b \cos \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Obs!: $T : (p, \theta) \rightarrow (\tilde{p}, \tilde{\theta})$ de alguna forma define también una transformación que preserva áreas en el espacio de rectas \mathcal{L} .

El teorema de Cauchy-Crofton

Definición

Sea $S \subseteq \mathcal{L}$. Definimos la **medida** o “**área**” de S por

$$A(S) = \iint_S dp d\theta.$$

Teorema (Fórmula de Cauchy-Crofton)

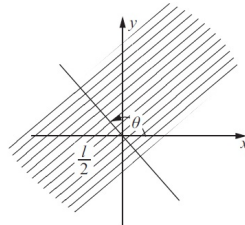
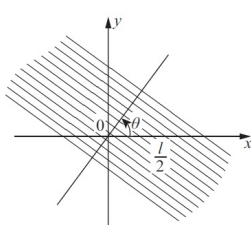
Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular, de longitud L . La medida del conjunto de rectas en el plano, que intersectan a α , contadas con multiplicidad, es $2L$.

El teorema de Cauchy-Crofton

Esquema de prueba:

Caso 1: Segmentos.

Supongamos que α es un segmento de recta de longitud L . Como la medida es invariante por movimientos rígidos, podemos mover el origen O está en el punto medio de α , y el eje Ox es paralelo a α .



El teorema de Cauchy-Crofton

La medida del conjunto S de rectas que intersecan a α ($n = 1$) es

$$\iint_S n \, dp \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}L|\cos \theta|} dp \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{L}{2} |\cos \theta| \, d\theta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \iint_S n \, dp \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{L}{2} |\cos \theta| \, d\theta = \frac{L}{2} \left(\int_0^{\pi} \cos \theta \, d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \cos \theta \, d\theta \right) \\ &= 4 \cdot \frac{L}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = 2L \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 2L, \end{aligned}$$

y el resultado vale para segmentos de recta.

El teorema de Cauchy-Crofton

Caso 2: Poligonales.

Sea ahora α es una curva poligonal, esto es $\alpha = \bigcup_{i=1}^k \alpha_i$ es la unión de un número finito de segmentos α_i , cada uno de longitud L_i , $i = 1, \dots, k$, con $L = \sum_{i=1}^k L_i$.

Del caso anterior, el área del conjunto de rectas que intersecan a segmento α_i es

$$A(S_i) = \int_{S_i} n \, dp \, d\theta = 2L_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Haciendo la suma para cada segmento, tenemos que la medida del total de rectas que intersecan α es

$$A(S) = \int_S n \, dp \, d\theta = \int_{S_1 \cup \dots \cup S_k} n \, dp \, d\theta = \sum_{i=1}^k \int_{S_i} n \, dp \, d\theta = \sum_{i=1}^k 2L_i = 2L.$$

El teorema de Cauchy-Crofton

Caso 3: Caso general.

Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana diferenciable y regular (clase C^1). A nivel local, α puede aproximarse por una poligonal $P_0 P_1 \dots P_k$, tomando una partición $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ del intervalo $[a, b]$, con $P_i = \alpha(t_i)$, de modo que la poligonal $\tilde{\alpha} = P_0 P_1 \dots P_k$ tiene longitud L , y satiface

$$\left| \int_{S(\alpha)} n \, dp \, d\theta - \int_{S(\tilde{\alpha})} n \, dp \, d\theta \right| < \varepsilon.$$

Tomando el límite cuando $\Delta P \rightarrow 0$, resulta

$$\int_{S(\alpha)} n \, dp \, d\theta = \int_{S(\tilde{\alpha})} n \, dp \, d\theta = 2L.$$

El teorema de Cauchy-Crofton

Portanto, la propiedad requerida vale para curvas C^1 .

Caso 4: Curvas C^1 por partes.

Finalmente, de la igualdad en el caso anterior, es posible extender el resultado del teorema a curvas C^1 por partes, descomponiendo $\alpha = \bigcup_{i=1}^r \alpha_i$ como unión finita de curvas α_i , todas de clase C^1 .

$$A(S) = \int_S dp d\theta = \int_{S_1 \cup \dots \cup S_r} dp d\theta = \sum_{i=1}^r \int_{S_i} dp d\theta = \sum_{i=1}^r 2L_i = 2L. \quad \square$$

El teorema de Cauchy-Crofton puede utilizarse para obtener una forma eficiente de estimar longitudes de curvas.

De hecho, una buena aproximación para la integral $\iint_S n \, dp \, d\theta$ se da de la siguiente manera:

- Considere una familia de líneas rectas paralelas tal que dos líneas consecutivas están a una distancia r . Gire esta familia por ángulos de θ (e.g. $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$) para obtener cuatro familias de líneas rectas.
- Sea n el número de puntos de intersección de una curva α con todas estas líneas.
- Entonces

$$L = \frac{1}{2} \iint_S n \, dp \, d\theta \approx \frac{1}{2} nr \frac{\pi}{4}.$$

