Introducción al curso

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial

(Aula 01) 09.enero.2024

Motivación

La geometría diferencial es el estudio de ciertos objetos geométricos y sus propiedades (variedades). En particular, nos interesa el estudio de las propiedades diferenciables de estos objetos (variedades diferenciables).

Motivación

La geometría diferencial es el estudio de ciertos objetos geométricos y sus propiedades (variedades). En particular, nos interesa el estudio de las propiedades diferenciables de estos objetos (variedades diferenciables).

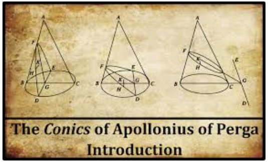
Esta es un área que integra muchas ramas de la matemática. Por ejemplo, haremos uso extensivo de

- cálculo (vectorial)
- integración (formas diferenciables)
- ecuaciones diferenciales (EDO)
- análisis real (en $\mathbb{R}^n$)
- topología (de espacios métricos)
- álgebra lineal

Un poco de historia

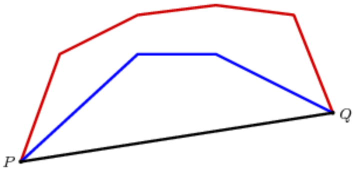
Antes del cálculo. Aplicaciones de infinitesimales a geometría, principalmente cuadraturas y rectificaciones de curvas y sólidos, o estudios de curvas especiales.

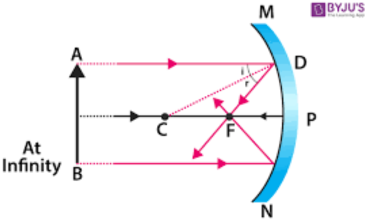
- (*circa* Siglo IV B.C.) Euclides en Los Elementos, libro III. Naturaleza de la tangencia en curvas. Caso del círculo.
- (*circa* Siglo IV B.C.) Apolonio (astrónomo, matemático griego). Usa la normal a una curva plana. Muestra que hay envolvente a la normal a una sección cónica, y la calcula en tres casos: elipse, hipérbola y parábola. Se acerca al concepto de curvatura usado por Kepler.



Un poco de historia

- (*circa* 250 B.C.) ARQUÍMEDES Noción de geodésica. Define la recta como la distancia más corta entre dos puntos del plano. Discute propiedades de curvas cóncavas y superficies convexas. Muestra que entre dos curvas convexas, la envolvente es mayor que la envuelta.

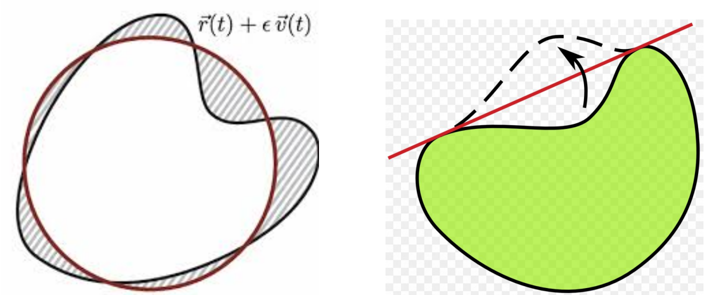




UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Un poco de historia

- (*circa* 150 B.C.) Polibio discute sobre el problema de figuras isoperimétricas. Zenodoro establece que el círculo es mayor que todas las figuras planas de igual perímetro, y que la esfera es la figura con mayor volumen entre los sólidos de igual superficie.

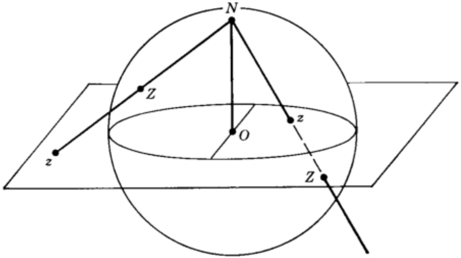


Curvas isoperimétricas

Un poco de historia

Otro problema que se discute es el de mapear la tierra a un plano (mapear una esfera sobre un plano).

- (150 A.D.) La mayor contribución vino de la mano de PTOLOMEO, aunque sus ideas pueden originarse en HIPARCO tres siglos antes. En su trabajo de Geografía, capítulo 24, aparece la proyección estereográfica. Esto permitió muy buenas representaciones de la parte de la Tierra conocida en la época de Ptolomeo.



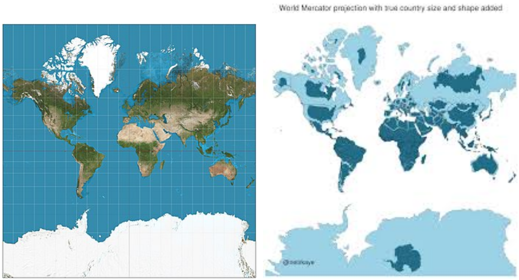
Proyección estereográfica

Un poco de historia

Otros métodos para mapear la tierra en un plano fueron inventados hasta el siglo XV.

- (1540), Gemma Frisius profesor en Lovaina, usa de nuevo la proyección estereográfica.

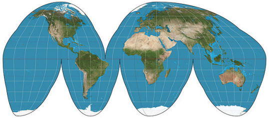
- (1512-1594) Gerhard Krämer, más conocido como Mercator, cartógrafo flamenco, inventa su proyección en 1569, la cual mapea meridianos y paralelos en rectas. Usa términos como "*plaga*", "*directio*" (caminos más cortos entre dos puntos, en la esfera y en el mapa).

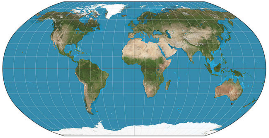
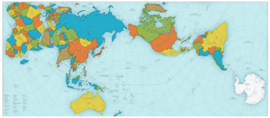


Proyección de Mercator

Un poco de historia

Otras proyecciones usadas hoy: Equirectangular (Marino de Tiro, *circa* 120 AD), Cassini (1745), Goode (1923), Robinson (1963), Winkel-Tripel (1921), *Butterfly* (1909, 1996), AuthaGraph (Narukawa, 1999), Google Mercator (2005).



Ver *en.wikipedia.org/wiki/List_of_map_projections*.

Un poco de historia

- Otras personas que trabajaron en el tema de proyecciones: Stevin, Snellius, Wallis, Leibniz. El nombre de *curva loxodrómica* se debe a Snellius Typhys Batavus (1624). Otras proyecciones por Werner, Staber, Finaeus.

Hay muchas investigaciones sobre infinitesimales, que se conectan a nombres como Kepler, Descartes, Fermat, Cavalieri y otros.

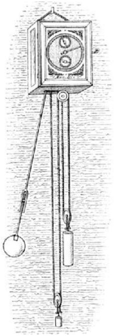
- Por ejemplo, Fermat (1679) usa por primera vez el término de *puntos de inflexión*.

Un poco de historia

Período inicial. Ligado al desarrollo de la física y la mecánica. Concepto clave: *curvatura*.

- (1670's) Interés en estudiar curvas planas.

- (1673) C. HUYGENS (astrónomo, matemático e inventor holandés). En *Horologium oscillatorium* inventa el reloj de péndulo. Introdujo el concepto de **involuta** y de **evoluta** de una curva, como la trayectoria de los centros de curvatura; y mostró la relación entre estos conceptos.

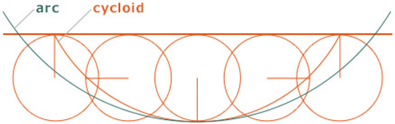


UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Un poco de historia

Cycloid

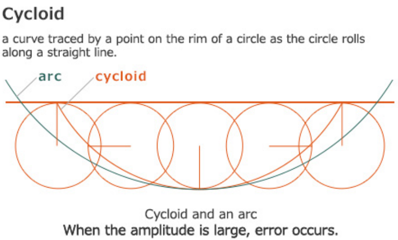
a curve traced by a point on the rim of a circle as the circle rolls along a straight line.

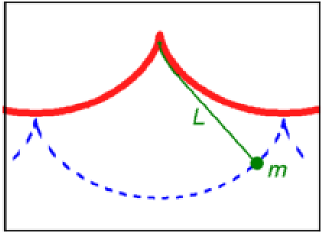


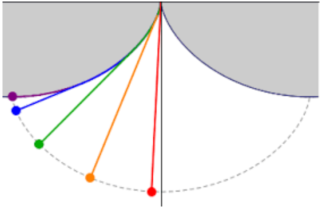
Cycloid and an arc

When the amplitude is large, error occurs.

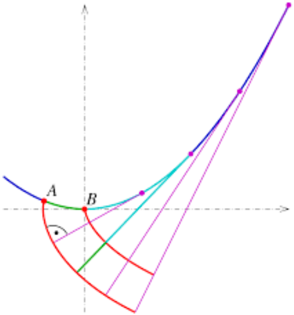
Un poco de historia



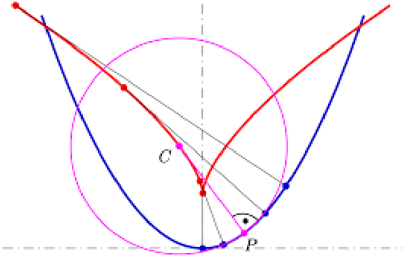




Un poco de historia

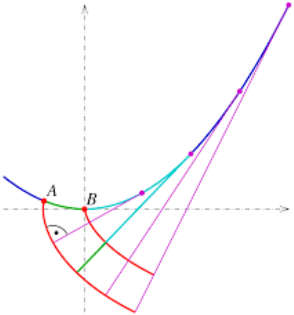


(a) involuta

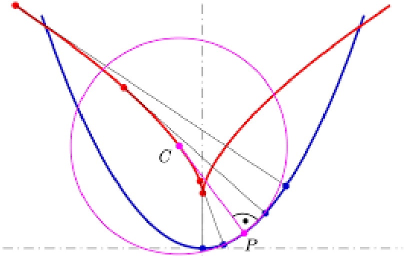


(b) evoluta

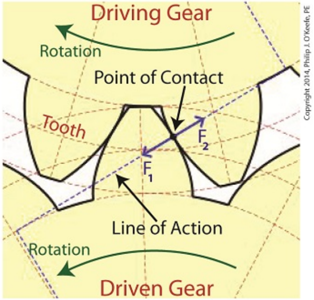
Un poco de historia



(a) involuta



(b) evoluta



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

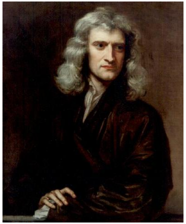
Un poco de historia

Primeros conocimientos sistemáticos.

- (1684) LEIBNIZ inicia trabajos en geometría analítica del plano, aplicaciones de cuadraturas infinitesimales. Mayores contribuciones a la geometría diferencial en artículos de 1684, 1686 y 1692.
- En *Nova methodus pro maximis and minimis* (Acta Eruditorum 1684), ya encontramos la interpretación de la ecuación

$$d^2y = 0$$

como puntos de inflexión (concepto introducido por DESLUSE y FERMAT).
- En (1686), hallamos el concepto de círculo **osculador**.



Un poco de historia

- En 1692 Leibniz publica su teoría de envolventes de una familia de curvas planas $f(x, y, a) = 0$. En otro paper de 1692, hallamos una discusión sobre evolutas e involutas, un resultado debido a Huygens con la observación que diferentes involutas son curvas *paralelas*.

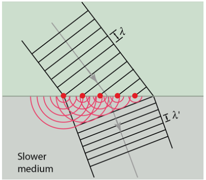
- En 1692 Leibniz publica su teoría de envolventes de una familia de curvas planas $f(x, y, a) = 0$. En otro paper de 1692, hallamos una discusión sobre evolutas e involutas, un resultado debido a Huygens con la observación que diferentes involutas son curvas *paralelas*.

- (1691-92) Johann Bernoulli calcula tangentes a curvas planas (cicloide, cissoide, quadratriz). Halla máximos y mínimos tomando $dy = 0$. Se introducen las coordenadas polares.

- (1690's) Aparece el cálculo de variaciones.
- (1696) Al mismo tiempo, L'Hôpital escribe su *Analyse des infiniments petits*.

Un poco de historia

- (1697-98) Los BERNOULLI estudian **geodésicas** sobre una superfície. Johan BERNOULLI descubre que el plano osculador y el plano tangente son perpendiculares. Jakob BERNOULLI trabaja en problemas isoperimétricos. Ambos hermanos investigan trayectorias más generales en el plano.
- Aplicaciones a óptica.



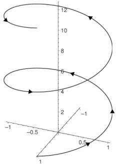
Principio de Huygens-Fresnel

- (1736) NEWTON. Asegura escribir su *Theory of Fluxions* en 1671. Él o HUYGENS serían los primeros en hallar una expresión analítica para el radio de curvatura de una curva plana

$$\rho = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} \Big/ \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Siglo XVIII.

- (1713-1765) Alexis Claude CLAIRAUT, en 1731 escribe su *Recherches sur les courbes a double courbure*. Habla de la geometría del espacio. Se introducen las curvas en el espacio como intersección entre superficies. Plano tangente, intersección entre rectas tangentes y planos de proyección.



- De importancia es el nombre de "*courbe a double courbure*". Este nombre se toma de Henri PITOT (1695-1771), un ingeniero mecánico que lo usó en un paper de 1724 para hablar de la hélice.

Un poco de historia

- CLAIRAUT se interesa en problemas de geodesia, y en 1733 publica su famoso teorema sobre superficies de revolución. Este teorma establece que sobre una curva geodésica C vale que
$$\rho \sin \alpha = const.,$$
donde ρ es el radio del círculo paralelo y α es el ángulo de C con dicho círculo.

- Luego trabaja en condiciones de integrabilidad de EDPs en hidroestática. Es de mencionar que da los primeros pasos para resolver un problema de PFAFF. En particular, halla que la EDO $M\,dx + N\,dy + P\,dz = 0$ es exacta si, y sólo si,
$$M\Big(\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) + N\Big(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\Big) + P\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big) = 0.$$

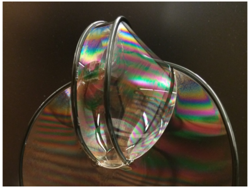
Un poco de historia

- (1707-1783) Leonard Euler trabaja en mucho, desde 1927 en su trabajo de aplicaciones del cálculo a la geometría; hasta su trabajo en 1782 sobre curvas en el espacio. Trabaja en el tema de geodésicas.
- Hizo aplicaciones a muchos tipos de superficies. En 1732, discute sobre la cicloide como tautocrona. Introduce a la **longitud de arco** s, y el **radio de curvatura** como coordenadas, e inicia el área de geometría intrínseca.

- En 1740, en mecánica, muestra que una masa sobre una superficie sin un campo de fuerza se mueve sobre geodésicas.
- En 1748, publica *Introductio in analysin infinitorum* (sólo hace observaciones sobre puntos singulares, asíntotas de curvas, propiedades osculantes).

Un poco de historia

- Sólo hasta 1760, EULER abre una nueva rama de la geometría diferencial. Su trabajo en cálculo de variaciones culmina en su *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, 1744, no sólo da soluciones a problemas isoperimétricos sino que establece **propiedades globales de curvas** y de superficies mínimas.



Soap surface

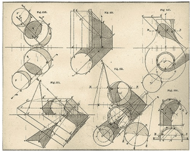
- En 1760, su paper *Recherches sur la courbure des surfaces* contiene contribuciones importantes a la teoría de superficies. Consideró curvaturas sobre superficies (curvaturas seccionales) y desarrolló el concepto de curvaturas principales κ_1, κ_2.

Un poco de historia

- Con excepción de los papers de Euler y trabajo ocasional de Lagrange (en 1762 publica su paper importante sobre cálculo de variaciones), se hace muy poco avance.
- (Segunda mitad del siglo XVIII) Decadencia del feudalismo (en ésa época, reyes, nobles y mecenas eran quienes daban aporte económico para promover el trabajo de los eruditos).
- Todo esto cambia con la influencia de la Revolución Francesa en las ciencias.

Un poco de historia

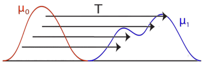
- (1746-1818) Gaspard MONGE, profesor desde 1768. Considerado el padre de la geometría diferencial. (Podemos decir que es el real creador de la geometría diferencial, la geometría descriptiva, y la geometría moderna.
- Inventó la geometría descriptiva (la base matemática del dibujo técnico). Durante la Revolución Francesa sirvió como Ministro de la Marina, acompañó a Napoleón en sus expediciones a Egipto, y estuvo involucrado en la reforma del sistema de educación francés, ayudando a fundar al *École Polytechnique*.



Un poco de historia

- En 1780 publica un segundo paper, donde retoma el trabajo de Euler en teoría de superficies. Introdujo el estudio de las curvas de curvatura de una superficie en *Application de l'analyse à la géométrie*.
- Otros trabajos importantes en esa dirección: Jean Baptiste Meusnier de La Place (1754-1793), y de Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783).

- En 1781 publica una memoria, donde se anticipa lo que hoy se conoce como programación lineal, y lo aplica a problemas de transporte: el problema de Monge-Kantorovich. (Kantorovich recibió el Nobel en economía en 1975). El problema de transporte de Monge condujo a una definición de topología débil y de distancia entre distribuciones, redescubierta por Kantorovich, Lévy, y Vaseršteĭn.



UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Un poco de historia

- Pupilos y colegas de Monge: entre los colegas mayores de Monge están Lagrange, Lazare Carnot; y entre sus pupilos, Fourier, Ampère, Poisson, Poncelet, Rodrigues, Lancret, Coriolis, Malus, Dupin, Fresnel, Cauchy, Adi Carnot, Sophie Germain. Los más importantes para la geometría diferencial fueron Ampère, Lancret, Malus, Rodrigues, y especialmente Dupin.
- A. M. Ampère (1775-1846). ρ y s como coordenadas instrínsecas.
- Lazare Carnot (1753-1823). Define **normal afín**, coordenadas intrínsecas.
- E. L. Malus (1775-1812). Trabaja superficies desarrollables y normales.
- Michel Ange Lancret (1774-1807). Escribe dos papers en geometría diferencial. El primero contiene dos cantidades fundamentales, $d\mu$ y $d\nu$, la primera y segunda flexión. Precursores de la curvatura y la torsión. Muestra que $d\omega^2 = d\mu^2 + d\nu^2$.

Un poco de historia

- Olinde RODRIGUES (1794-1851). Trabajos sobre líneas de curvatura.
- Charles DUPIN (1784-1873), el más importante de los sucesores y continua los trabajos de de MONGE. Define lineas de curvatura, lineas normales. Extremos de curvaturas principales κ_1 y κ_2.
- (1798-1857) Agustin Louis CAUCHY estudió la mecánica del continuo (elasticidad, deformaciones). Introdujo lo que hoy se conoce como el tensor de tensión (*stress tensor*). Estudió la relación de la geometría de variedades planas con el análisis complejo. Trabaja en aplicaciones. Definición gemétrica de **contacto** entre dos curvas.

La era de Gauss:

- (1777-1855) Carl Friedrich Gauss introduce otro importante concepto de curvatura, la **curvatura de Gauss**. Esto lleva a un resultado importante llamado el *Theorema Egregium* (remarkable theorem), y establece propiedades importantes de la curvatura.

- Gauss escribe el elemento de área de una superficie como $ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$, donde p y q son coordenadas gaussianas curvilineas. Muestra que la cantidad $1/R_1R_2$ (Euler, 1760), sólo depende de E, F y G, y de sus primeras y segundas derivadas. Discute sobre geodésicas. Establece otros resultados y conceptos importantes: el **Teorema de Gauss-Bonnet** y **aplicación de Gauss**, sobre la representación esférica de la curvatura.

Un poco de historia

- Gauss, al contrario que Monge, no creó una escuela directa (las condiciones en Prusia no eran las mismas que en Francia). La única excepción fue Ferninand Minding (1806-1885), que llenó en Alemania el vacío dejado por Gauss. Entendió y continuó las ideas de Gauss. Trabajó en superficies aplicables y superficies de rotación.

- (1804-1851) Carl Gustav Jakov Jacobi. Generaliza el teorema de Gauss en triángulos geodésicos. Combinó las ideas de Gauss con las suyas. Integró las geodésicas sobre elipsoides, lo que condujo a la teoría de integrales elípticas e hiperelípticas. Establece la existencia de puntos conjugados, campos de Jacobi.

- Otros pupilos de Gauss o Jacobi fueron Joachimsthal, Heinrich F. Scherk; y otros como Steiner, Möbius, Plücker, Chasles, Poncelet.

Un poco de historia

La escuela francesa de los '40s:

- Desarrollo alcanzado con FRESNEL y AMPÈRE, se revolucionó el pensamiento científico: óptica, electricidad, elasticidad, teoría del calor, astronomía. Colaboraron en esta época MALUS, CHLADLI, POISSON, FOURIER, FRESNEL, ARAGO, Sadi CARNOT, CLAPERYON, NAVIER, S. GERMAIN, S. VENANT.
- (1795-1870) Gabriel LAMÉ. Trabajó en la solución de la ecuación de calor y de elasticidad, sólidos rectangulares. Desarrolló una teoría de coordenadas curvilíneas rectangulares.
- (1809-1882). JOSEPH LIOUVILLE. Fundador y editor del *Journal de mathematiques pures et appliquees*, 1836. En Prusia establa el journal de CRELLE con mismo título.
- Otros que contribuyeron al journal fueron J. A. SERRET, V. PUISEUX, O. BONNET, J. BERTRAND en París; F. FRENET en Lyon, el belga E. CATALAN.

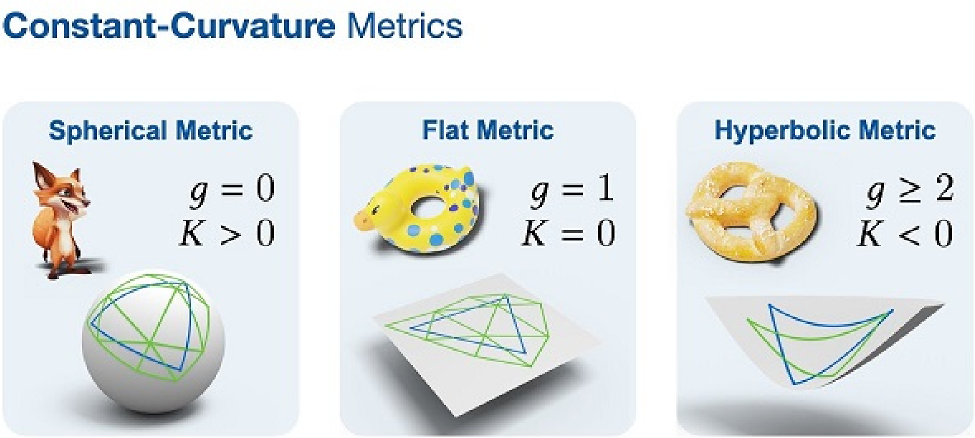
Un poco de historia

Riemann:

- (1826-1866) Bernard Riemann. En 1854 da su disertación *Dozentur*, donde habla de las "hipótesis que fundamentan la geometría"; Gauss estaba en la audiencia. Riemann desarrola la concepción de una geometría de variedades n-dimensionales, en el sentido del *analysis situs*. Introduce un elemento cuadrático ds^2 para la curvatura en estas variedades.

- Describe cómo la curvatura de una variedad puede medirse. Se especializa en variedades de curvatura constante. Establece que la geometría plana de Euclides, y la geometría no-euclideana de Bolyay son casos especiales de su **geometría riemanniana**.
- Cambio sustancial en la geometría diferencial.

Un poco de historia



Un poco de historia

Después de Riemann:

- (1809- 1877) Hermann Grassmann. Problema de Pfaff. Introduce los métodos simbólicos para geometría n-dimensional.
- (1789-1860) A. M. Bordoni, publica aplicaciones del análisis a la geometría (influencia de Gauss y Liouville). Otros: G. Mainardi (1800-1879), D. Codazzi (1824-1875), Julius Weingarten (1836-1910), F. Brioschi (1824-1897), L. Cremona (1830-1903), F. Casorati (1835-1890) y E. Beltrami (1835-1900). Otro geómetra de influencia es el padre D. Chelini (1802-1878).

Un poco de historia

Después de Riemann:

- (1809- 1877) Hermann GRASSMANN. Problema de PFAFF. Introduce los métodos simbólicos para geometría n-dimensional.
- (1789-1860) A. M. BORDONI, publica aplicaciones del análisis a la geometría (influencia de Gauss y Liouville). Otros: G. MAINARDI (1800-1879), D. CODAZZI (1824-1875), Julius WEINGARTEN (1836-1910), F. BRIOSCHI (1824-1897), L. CREMONA (1830-1903), F. CASORATI (1835-1890) y E. BELTRAMI (1835-1900). Otro geómetra de influencia es el padre D. CHELINI (1802-1878).
- Otros desarrollos: KUMMER, WEIERSTRASS, KLEIN, DARBOUX, LIE.
- Motivados por la física: HELMHOLTZ, CHRISTOFFEL, RICCI, EINSTEIN.
- La geometría diferencial se especializa en diferentes ramas. Hablaremos de eso al final del curso.

Referencias

- D. J. Struik (1933). **Outline of a History of Differential Geometry: I**, en *Isis*, 19 (1): 92–120.
- D. J. Struik (1933). **Outline of a History of Differential Geometry: II**, en *Isis*, 20 (1): 161–191.