

CURVAS EN EL ESPACIO DE MINKOWSKI

ALAN REYES-FIGUEROA
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

(AULA 09) 06.FEBRERO.2025

El espacio de Minkowski

Hasta ahora hemos considerado los espacios euclidianos \mathbb{R}^n como nuestro ambiente “estándar” de trabajo. El producto interno de \mathbb{R}^n

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

implica, entre otras cosas, que el tangente $\mathbf{t}(s)$ de una curva regular $\alpha(s)$ nunca se anula. Considerar espacios más generales.

Por ejemplo, en teoría de la relatividad especial, se trabaja con un espacio de $3 + 1$ dimensiones, en donde el tiempo es visto como una de estas dimensiones (3 dim. espaciales, 1 temporal).

Por simplicidad, trabajaremos con una versión reducida de $2 + 1$ dim.

El espacio de Minkowski

Definición

El espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}\}$ usual, equipado con el producto interno

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

es llamado el **espacio de Minkowski** o **espacio de Lorentz** \mathbb{R}_1^3 .

El caso general \mathbb{R}_1^n se define de forma análoga como \mathbb{R}^n con

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -x_1y_1 + \sum_{i=2}^n x_iy_i,$$

y más general aún \mathbb{R}_k^n , $1 \leq k \leq n$, se define como \mathbb{R}^n con el producto

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\sum_{i=1}^k x_iy_i + \sum_{j=k+1}^n x_jy_j.$$

El espacio de Minkowski

Recordemos que en los espacios euclidianos, la existencia de un producto interno $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ induce una *norma* mediante

$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle.$$

En consecuencia, todo vector tiene norma ≥ 0 .

En los espacios \mathbb{R}^n , la primer diferencia es que el producto interno $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ da origen a una *pseudo-norma*:

- pueden existir vectores con norma negativa. (e.g. en \mathbb{R}_1^3 el vector $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$ tiene norma $|\mathbf{x}|^2 = -1$).
- En ciertas áreas de física o matemática, los vectores con norma negativa se llaman fantasmas (*ghosts*).
- Otra diferencia es que $|\mathbf{x}| = 0$ no necesariamente implica que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Dependiendo del contexto físico, los vectores con norma cero o norma negativa tienen interpretaciones específicas.

El espacio de Minkowski

En los espacios euclidianos \mathbb{R}^n , típicamente cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ da origen a un producto interno, via una forma cuadrática:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j.$$

Para que este producto interno induzca una norma, es necesario que A sea simétrica y semi-definida positiva (todos los autovalores ≥ 0).

Por ejemplo, el producto interno usual en \mathbb{R}^4 está dado por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

El espacio de Minkowski

En \mathbb{R}_1^4 , el producto interno está dado por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

(esta matriz no es semi-definida positiva, tiene un autovalor -1).

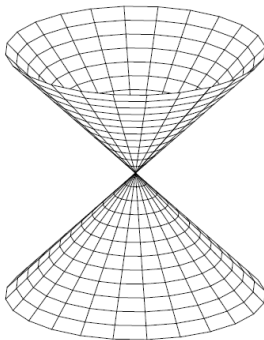
Definición

En el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^2 , un vector \mathbf{x} se llama

- **de tipo espacial** (space-like), si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$;
- **de tipo temporal** (time-like), si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} < 0$;
- **de tipo luz** (light-like) o **isotrópico**, si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, pero $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

El espacio de Minkowski

El conjunto de todos los vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, tales que $|\mathbf{x}| = 0$, se llama el **cono de luz**.



El cono de luz en \mathbb{R}_1^3 .

El espacio de Minkowski

Como \mathbb{R}_1^3 y \mathbb{R}^3 se comportan similares, podemos hacer inmersiones de curvas en \mathbb{R}^3 a curvas en \mathbb{R}_1^3 .

Definición

Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ se llama

- **espacial** (space-like), si $|\alpha'(t)|^2 > 0, \forall t \in I$;
- **temporal** (time-like), si $|\alpha'(t)|^2 < 0, \forall t \in I$;
- **de luz** (light-like) o **isotrópica** o **curva nula** si $|\alpha'(t)| = 0, \forall t \in I$.

Ejemplos:

- La hipérbola $x_1^2 = x_2^2 + 1, x_3 = 0$, se parametriza como $c(t) = (\cosh t, \sinh t, 0)$. Luego, $c'(t) = (\sinh t, \cosh t, 0)$, y $|c'(t)|^2 = 1, \forall t \Rightarrow c$ es una curva espacial.

El espacio de Minkowski

Ejemplos:

- La hipérbola $x_1^2 = x_2^2 - 1$, $x_3 = 0$, se parametriza como $c(t) = (\sinh t, \cosh t, 0)$. Luego, $c'(t) = (\cosh t, \sinh t, 0)$, y $|c'(t)|^2 = -1$, $\forall t \Rightarrow c$ es una curva temporal.
- La recta $c(t) = (t, t, 0)$. Luego, $c'(t) = (1, 1, 0)$ y $|c'(t)| = 0$, $\forall t \Rightarrow c$ es una curva isotrópica. Con excepción del origen, $c(t)$ cae completamente dentro del cono de luz.

Ecuaciones de Frenet

Para obtener ecuaciones del tipo Frenet en el espacio \mathbb{R}_1^3 , observemos que en \mathbb{R}^3

- es posible definir un producto vectorial (modificado) de modo que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}_1^3.$$

De la misma forma, es posible definir un referencial o triedro móvil, de la siguiente forma:

- Para dos vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, con las propiedades

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \pm 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \pm 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0,$$

un tercer vector está definido por la ecuación $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, y estos tres vectores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ forman una base ortonormal de \mathbb{R}_1^3 .

- Si denotamos $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \epsilon$ y $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \eta$, entonces $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -\epsilon\eta$.

- Luego, todo vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^3$ admite una descomposición de la forma

$$\mathbf{x} = \epsilon(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \eta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 - \epsilon\eta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3.$$

Resumimos esto en el siguiente resultado

Teorema (Ecuaciones de Frenet en el espacio de Minkowski)

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ una curva espacial o temporal, parametrizada por longitud de arco, y que satisface $|\alpha''(s)| \neq 0$, para todo $s \in I$.

Entonces, esta curva induce un triedro de Frenet $\mathbf{e}_1(s) = \alpha'(s)$, $\mathbf{e}_2(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|^2}$ y $\mathbf{e}_3(s) = \mathbf{e}_1(s) \times \mathbf{e}_2(s)$. En ese caso, se satisfacen las ecuaciones de Frenet

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1'(s) \\ \mathbf{e}_2'(s) \\ \mathbf{e}_3'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s)\eta(s) & 0 \\ -\kappa(s)\epsilon(s) & 0 & -\tau(s)\epsilon(s)\eta(s) \\ 0 & -\tau(s)\eta(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1(s) \\ \mathbf{e}_2(s) \\ \mathbf{e}_3(s) \end{pmatrix}.$$

Ecuaciones de Frenet

Las cantidades

$$\kappa(s) = \mathbf{e}'_1(s) \cdot \mathbf{e}_2(s), \quad \tau(s) = \mathbf{e}'_2(s) \cdot \mathbf{e}_3(s),$$

se llaman la *curvatura* y la *torsión* de α .

Prueba:

Al igual que en la prueba para el caso de \mathbb{R}^3 , basta calcular las componentes de

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1(s) &= \alpha''(s) = \eta(s) \langle \alpha''(s), \mathbf{e}_2(s) \rangle \mathbf{e}_2(s) = \eta(s) \kappa(s) \mathbf{e}_2(s), \\ \langle \mathbf{e}'_2(s), \mathbf{e}_1(s) \rangle &= -\langle \mathbf{e}'_1(s), \mathbf{e}_2(s) \rangle = -\kappa(s), \\ \langle \mathbf{e}'_3(s), \mathbf{e}_2(s) \rangle &= -\langle \mathbf{e}'_2(s), \mathbf{e}_3(s) \rangle = -\tau(s). \end{aligned}$$

Ecuaciones de Frenet

Obs! En el espacio pseudo-euclideo \mathbb{R}_k^n , tenemos el producto interno

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = - \sum_{i=1}^k x_i y_i + \sum_{j=k+1}^n x_j y_j.$$

y la curva $\alpha(s)$, parametrizada por longitud de arco, define un sistema de Frenet $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, con $\epsilon_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i$, que satisface

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_{n-1} \\ \mathbf{e}'_n \end{pmatrix}}_{F'(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 \epsilon_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1 \epsilon_1 & 0 & \kappa_2 \epsilon_3 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 \epsilon_2 & 0 & \kappa_3 \epsilon_4 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \kappa_{n-2} \epsilon_{n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\kappa_{n-2} \epsilon_{n-2} & \dots & \kappa_{n-1} \epsilon_n \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\kappa_{n-1} \epsilon_{n-1} & 0 \end{pmatrix}}_{K(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}}_{F(s)}, \quad \forall s.$$

Ecuaciones de Frenet

La prueba es similar al caso del Teorema de existencia y unicidad de curvas en el caso euclideo \mathbb{R}^n .

El único cambio es la modificación en la representación de un vector en términos de la base ortonormal dada por el referencial de Frenet:

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^n \epsilon_j \langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$