



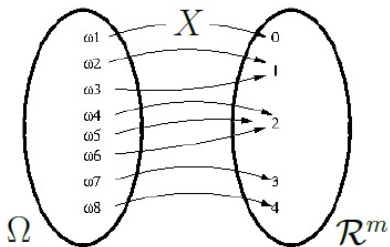
FACULTAD de
CIENCIAS ECONÓMICAS

VARIABLES ALEATORIAS

ALAN REYES-FIGUEROA
ELEMENTS OF MACHINE LEARNING

(AULA 04) 24.ENERO.2023

Variables aleatorias



Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una **variable aleatoria** (v.a.) es una función medible $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplo: Elegimos al azar una persona de un grupo. De cada persona tenemos un registro de su edad, altura, peso, ...

Mapeamos cada persona ω a $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_d(\omega))$, donde por ejemplo $X_1(\omega)$ representa su edad, $X_2(\omega)$ su altura, etc.

Si el grupo de personas corresponde a una base de datos, entonces X regresa los campos de interés de cada registro. Las variables X_1, \dots, X_d son variables aleatorias. En este ejemplo llamaremos a X como una variable aleatoria (en realidad X es un **vector aleatorio**).

Variables aleatorias

Observación: una variable aleatoria induce una función de probabilidad.

Definimos $\mathbb{P}_X(\cdot)$ como

$$\mathbb{P}_X(A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}).$$

Escribimos $\mathbb{P}_X(\cdot)$ como $\mathbb{P}(\cdot)$.

Por ejemplo

- $\mathbb{P}(X = x)$ denota $\mathbb{P}_X(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = x\})$.
- $\mathbb{P}(X < a)$ denota $\mathbb{P}_X(X < a) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) < a\})$.

Casi siempre vamos a medir qué ocurre con la probabilidad de nuestros eventos, mediante la probabilidad que describe una variable aleatoria de ellos (es más fácil medir en \mathbb{R} que en abstracto).

Variables aleatorias

Caso discreto:

Definición

Diremos que X es una variable aleatoria **discreta** si su contradominio $I = X(\Omega)$ es enumerable y $\mathbb{P}_X(i) = \mathbb{P}(X = i)$ existe para cada $i \in I$. (Comunmente se identifica el contradominio I con los naturales).

Definición

Al conjunto de probabilidades $\{\mathbb{P}_X(i)\}_{i \in I}$ le llamamos la **distribución** de X . (En general, a \mathbb{P}_X se le llama la **función de masa de probabilidad**).

Definición

Si $X \in \mathbb{R}$, llamamos a $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ la **función de distribución** (acumulativa) de X .

Variables aleatorias

Caso continuo:

Definición

Considere la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Diremos que X es una variable aleatoria **continua** si existe una función no-negativa $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx.$$

Definición

En ese caso, a la función f_X le llamamos la **densidad de probabilidad** de X .

Obs! La función de densidad f_X no tiene por qué ser continua.

Ya sea en el caso discreto o continuo,

Definición

Si $x \in \mathbb{R}$, llamamos a $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ la **función de distribución** (acumulativa) de X .

En general, definimos la función de distribución para un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_d)$ como

$$F_X(x_1, \dots, x_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d), \quad \forall (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

En este caso, llamamos a F_X la **función de distribución conjunta** de X_1, \dots, X_d .

Otros nombres:

- distribución **univariada**, es la distribución en \mathbb{R} de una variable aleatoria.
- distribución **multivariada**, es la distribución en \mathbb{R}^d de un vector aleatorio.

Propiedades

Propiedades de \mathbb{P}_X y f_X :

Propiedad	X discreta	X continua
no-negativa	$\mathbb{P}_X(A) \geq 0$	$f_X(x) \geq 0$
suma total	$\sum_x \mathbb{P}_X(x) = 1$	$\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$
relación entre f_X y F_X	$\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$	$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$
relación entre f_X y F_X	$F_X(x) = \sum_{t \leq x} \mathbb{P}(X = t)$	$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$

Propiedades

Propiedades de F_X :

Propiedad	X discreta	X continua
limitada	$0 \leq F_X(x) \leq 1$	$0 \leq F_X(x) \leq 1$
monotonía	F_X no-decreciente	F_X no-decreciente
límite inferior	$F_X(t) = 0, \forall t < \min_{x \in I(\Omega)}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
límite superior	$F_X(t) = 1, \forall t \geq \max_{x \in I(\Omega)}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

Además, F_X tiene la propiedad de semi-continuidad inferior: F_X es continua por la derecha, con límites por la izquierda.

Distribuciones conjuntas

Cuando tenemos varias variables aleatorias (definida sobre el mismo espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$), podemos estudiar la distribución conjunta de dichas variables, esto es, la distribución de (X, Y) .

Definición

La **distribución conjunta** de las v.a. X y Y se define por

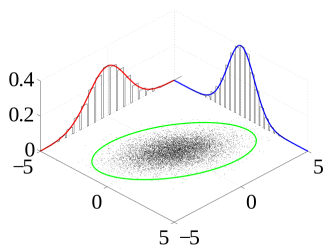
$$F_{X,Y}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

En el caso que X y Y son v.a. discretas, su **probabilidad conjunta** es

$$\mathbb{P}_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

En el caso en que X y Y son continuas, su **densidad conjunta** es

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$



La normal bivariada es la distribución conjunta entre dos normales.

Distribuciones marginales

Cuando tenemos varias variables aleatorias y su distribución conjunta, podemos “regresar” a las distribuciones originales.

Definición

Dadas X y Y v.a. discretas y su distribución conjunta $\mathbb{P}_{X,Y}$, la **distribución marginal** para X y para Y son

$$\mathbb{P}_X(x) = \sum_y \mathbb{P}(x, y), \quad \mathbb{P}_Y(y) = \sum_x \mathbb{P}(x, y).$$

En el caso que X y Y son v.a. continuas, y $f_{x,y}$ es su densidad conjunta, la **densidad marginal** de X y de Y son

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx.$$

Ahora, si X, Y toman valores en $[a, b] \times [c, d]$, la **distribución marginal** se calcula como

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_a^x \int_b^y f_{X,Y}(s, t) ds dt.$$

luego $F_X(x) = F_{X,Y}(x, d)$, $F_Y(y) = F_{X,Y}(b, y)$, y en el caso $b = \infty$ ó $d = \infty$

$$F_X(x) = \lim_{d \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, d), \quad F_Y(y) = \lim_{b \rightarrow \infty} F_{X,Y}(b, y).$$

Distribuciones condicionales

Definición

Sean X, Y v.a. discretas tales que $\mathbb{P}(X = x) > 0$. La **probabilidad condicional** de Y dado $X = x$ es

$$\mathbb{P}_{Y|X}(y | x) = \mathbb{P}(Y = y | X = x) = \frac{\mathbb{P}(Y = y, X = x)}{\mathbb{P}(X = x)} = \frac{\mathbb{P}_{X,Y}(x, y)}{\mathbb{P}_X(x)}.$$

En el caso continuo, la **densidad condicional** de Y dado X es

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}.$$

Podemos escribir

- $\mathbb{P}_X(x) = \sum_y \mathbb{P}_{X|Y}(x | y) \mathbb{P}_Y(y).$
- $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x | y) f_Y(y) dy.$

Independencia

Definimos la independencia de variables aleatorias de la siguiente manera:

Definición

*Dos variables aleatorias discretas X y Y definidas sobre el mismo espacio Ω son **independientes** si*

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

o equivalentemente, $\mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X \cdot \mathbb{P}_Y$.

*En general, las v.a. discretas X_1, \dots, X_n son **mutuamente independientes** si*

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i), \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

o equivalentemente, $\mathbb{P}_{X_1, \dots, X_n} = \mathbb{P}_{X_1} \cdot \mathbb{P}_{X_2} \cdot \dots \cdot \mathbb{P}_{X_n}$.

Definición

Dos variables aleatorias continuas X y Y definidas sobre el mismo espacio Ω son **independientes** si

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y), \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

En general, las v.a. continuas X_1, \dots, X_n son **mutuamente independientes** si

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i), \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y), \quad \forall x,y \in \mathbb{R},$$

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i), \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$