

Métodos Numéricos II 2021

Lista 01

16.julio.2021

1. Algunas p -normas vectoriales y matriciales están relacionadas por desigualdades, casi siempre envolviendo a las dimensiones m y n . Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pruebe que:

a) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2$.

c) $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_2$.

b) $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty$.

d) $\|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$.

2. En clase mostramos que si A es una matriz de rango 1, de la forma $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$, entonces $\|A\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2$. ¿Vale lo mismo para la norma de Frobenius? Muestre o dé un contraejemplo.

3. Calcular (a mano) la descomposición SVD de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Sugerencia: puede ayudarse primero calculando la descomposición espectral de alguna de las matrices $A^T A$ ó AA^T , y luego usar las relaciones entre los vectores singulares derechos e izquierdos).

4. Utilice la descomposición SVD de la matriz B en el ejercicio anterior, para calcular los siguientes:

a) $\text{rank}(B)$.

c) $\text{Im}(B)$.

b) $\text{Ker}(B)$.

d) $\|B\|_2$ y $\|B\|_F$.

5. a) Calcular el número de condición en la norma 2, para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 1000 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Qué se puede decir del error esperado, al resolver los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, cuando se perturba la matriz del sistema?

- b) Compruebe su respuesta anterior comparando la soluciones de los sistemas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0.001 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- c) En contraste, compare ahora las soluciones de los sistemas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 1000 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1000 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 1001 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Discuta sus resultados.

6. a) Enuncie de nuevo las definiciones de algoritmo *estable* y *estable hacia atrás*. Explique con sus palabras la diferencia entre ambos.
- b) Leer el Capítulo 15 de Trefethen y Bau. Enuncie y demuestre el teorema 15.1. Explique las implicaciones de los números $\kappa(\mathbf{x})$ y ε_{maq} en este contexto.
-