

FUNCIONES CONVEXAS

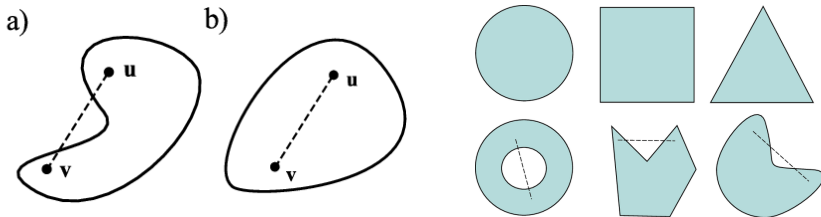
ALAN REYES-FIGUEROA
MÉTODOS NUMÉRICOS II

(AULA 16) 25.AGOSTO.2021

Funciones Convexas

Definición

Un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$, el segmento de recta $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} : t \in [0, 1]\}$ está totalmente contenido en Ω .



(a) Conjunto no convexo, (b) Conjunto convexo.

Ejemplos:

- Convexos: esferas, hiperplanos, semiespacios, conos, ...
- No Convexos: conjunto no conexos, uniones de rectas, uniones en general, ...

Funciones Convexas

Definición

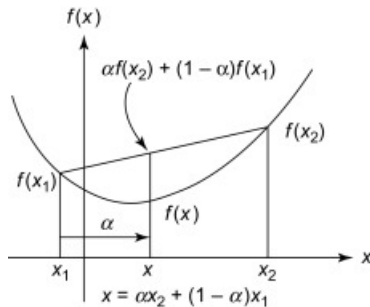
Una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **convexa** si $\Omega = \text{dom } f$ es un conjunto convexo, y para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$, y todo $t \in [0, 1]$ vale

$$f((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leq (1-t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y}). \quad (1)$$

Geométricamente, la desigualdad (1) significa que el segmento de recta entre $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ y $(\mathbf{y}, f(\mathbf{y}))$ está por encima de la gráfica de f .

La función f es **estrictamente convexa** si en (1) vale la desigualdad estricta, siempre que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ y $t \neq 0, 1$. Decimos que f es **cóncava (estrictamente cóncava)** si $-f$ es convexa (estrictamente convexa).

A la desigualdad (1) se le llama usualmente **desigualdad de Jensen**.



Funciones Convexas

Propiedad

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto convexo. La función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa \iff para todo $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \Omega$, y cualesquiera $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$, con $\sum_{i=1}^k t_i = 1$, se tiene que

$$f\left(\sum_{i=1}^k t_i \mathbf{x}_i\right) \leq \sum_{i=1}^k t_i f(\mathbf{x}_i). \quad (2)$$

Prueba: (\Leftarrow) Para $k = 2$, tome $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y} \in \Omega$, y sean $t_1 = 1 - t$, $t_2 = t$, con $t \in [0, 1]$. La desigualdad (2) se reduce a $f((1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leq (1 - t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y})$, lo que implica que f es convexa.

(\Rightarrow) Mostramos la desigualdad (2) por inducción sobre k .

Para $k = 1$, necesariamente $t_1 = 1$ de modo que $f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}_1)$ y (2) se cumple de manera automática. El caso $k = 2$ se cumple a partir de la definición de convexidad (1).

Suponga que (2) se cumple para cualesquiera k puntos $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k \in \Omega$, siempre que se forme una combinación lineal convexa $s_1\mathbf{p}_1 + \dots + s_k\mathbf{p}_k$, con $0 \leq s_i \leq 1$ y $\sum_{i=1}^k s_i = 1$.

Funciones Convexas

Suponga ahora que $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} \in \Omega$, se combinan para formar un punto

$$\mathbf{x} = t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2 + \dots + t_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} \in \Omega, \quad \sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1, \quad 0 \leq t_i \leq 1.$$

Definamos $t = t_{k+1}$, $1 - t = \sum_{j=1}^k t_j = t_1 + \dots + t_k$. Ambos coeficientes satisfacen $0 \leq t, 1 - t \leq 1$. En particular, si $\mathbf{p} = \sum_{j=1}^k s_j \mathbf{x}_j \in \Omega$, con $\sum_{j=1}^k s_j = 1$, podemos escribir

$$\mathbf{x} = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{x}_{k+1} = (1 - t) \sum_{j=1}^k s_j \mathbf{x}_j + t\mathbf{x}_{k+1} \implies t_j = (1 - t)s_j, \quad j = 1, \dots, k;$$

y

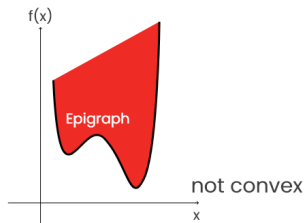
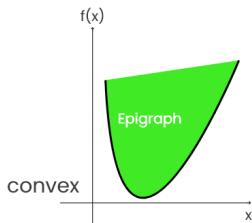
$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} t_i \mathbf{x}_i\right) &= f((1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{x}_{k+1}) \leq (1 - t)f(\mathbf{p}) + tf(\mathbf{x}_{k+1}) \\ &\leq (1 - t)f\left(\sum_{j=1}^k s_j \mathbf{x}_j\right) + tf(\mathbf{x}_{k+1}) \leq (1 - t) \sum_{j=1}^k s_j f(\mathbf{x}_j) + tf(\mathbf{x}_{k+1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^k t_j f(\mathbf{x}_j) + tf(\mathbf{x}_{k+1}) \leq \sum_{i=1}^{k+1} t_i f(\mathbf{x}_i). \quad \square \end{aligned}$$

Funciones Convexas

Definición

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos el **epígrafo** de f , como el conjunto

$$\text{Epi}(f) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y \geq f(\mathbf{x})\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$



Teorema

f es convexa \iff su epígrafo $\text{Epi}(f)$ es un conjunto convexo.

Prueba: (\Rightarrow). Supongamos que f es convexa, y sean $(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_k, y_k) \in \text{Epi}(f)$.

Funciones Convexas

Tomemos cualquier juego de coeficientes $t_1, t_2, \dots, t_k \in [0, 1]$, tales que $\sum_{i=1}^k t_i = 1$. Consideramos el punto

$$(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=1}^k t_i (\mathbf{x}_i, y_i) = \left(\sum_{i=1}^k t_i \mathbf{x}_i, \sum_{i=1}^k t_i y_i \right) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Este punto satisface

$$y = \sum_{i=1}^k t_i y_i \geq \sum_{i=1}^k t_i f(\mathbf{x}_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^k t_i \mathbf{x}_i\right) = f(\mathbf{x}),$$

de modo que $(\mathbf{x}, y) \in \text{Epi}(f)$, lo que muestra que $\text{Epi}(f)$ es convexo.

(\Leftarrow) Tomamos $(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1)), \dots, (\mathbf{x}_k, f(\mathbf{x}_k)) \in \text{Epi}(f)$. Como $\text{Epi}(f)$ es convexo, entonces se cumple que

$$\sum_{i=1}^k t_i (\mathbf{x}_i, f(\mathbf{x}_i)) = \left(\sum_{i=1}^k t_i \mathbf{x}_i, \sum_{i=1}^k t_i f(\mathbf{x}_i) \right) \in \text{Epi}(f).$$

Esto implica que $f\left(\sum_{i=1}^k t_i \mathbf{x}_i\right) \leq \sum_{i=1}^k t_i f(\mathbf{x}_i)$, y portanto f es convexa. \square

Funciones Convexas

Observaciones:

- Directamente de la definición, tenemos que f es convexa $f|_{[a,b]}$ es convexa, cuando se restringe a cualquier segmento $[a, b]$, con $a, b \in \Omega$.

De ahí que f es convexa para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, y para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, la función $g(t) = (\mathbf{x} + t\mathbf{h})$ es convexa en el dominio $\{t \in \mathbb{R} : \mathbf{x} + t\mathbf{h} \in \Omega\}$.

- En ocasiones conviene extender una función convexa $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a valores en la recta extendida $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, por

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega; \\ +\infty, & \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega. \end{cases}$$

Claramente $\hat{f}|_{\Omega} = f$, y se tiene que f es convexa $\iff \hat{f}$ es convexa.

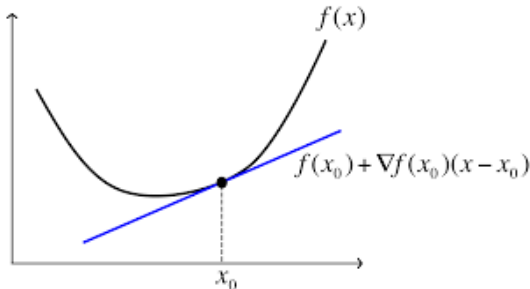
- En el caso de \hat{f} , la convexidad sigue siendo definida por la desigualdad (1), con la diferencia que se usa aritmética extendida.

Condiciones de Optimalidad

Teorema (Condición de 1er Orden)

Suponga que $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y que Ω es convexo. Entonces f es convexa si, y sólo si, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$ vale

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$



Si f es convexa, el plano tangente a f en \mathbf{x}_0 está por debajo del grafo de f .

Condiciones de Optimalidad

Prueba: (\Rightarrow) Como Ω es convexo, para $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$ se tiene que $(1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x} \in \Omega$, $\forall 0 \leq t \leq 1$. Si f es convexa, de la desigualdad de Jensen (1), tenemos

$$f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) = f((1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}) \leq (1-t)f(\mathbf{x}_0) + tf(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + t(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)),$$

para todo $0 < t < 1$. Luego $f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f(\mathbf{x}_0) \leq t(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0))$, y

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0), \quad \text{para } 0 < t < 1.$$

Como f es diferenciable, tomando el límite cuando $t \rightarrow 0^+$, obtenemos

$$\nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0),$$

lo que produce $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.

(\Leftarrow) Tome $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$, y sea $\mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x} \in \Omega$, con $0 \leq t \leq 1$. Por hipótesis

Condiciones de Optimalidad

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}_0) &\geq f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T (\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}), \\f(\mathbf{x}) &\geq f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T (\mathbf{x} - \mathbf{z}).\end{aligned}$$

Haciendo una combinación convexa de ambas ecuaciones, resulta

$$\begin{aligned}(1-t)f(\mathbf{x}_0) + tf(\mathbf{x}) &\geq (1-t)[f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T (\mathbf{x}_0 - \mathbf{z})] + t[f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T (\mathbf{x} - \mathbf{z})] \\&\geq [(1-t) + t]f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T [(1-t)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}) + t(\mathbf{x} - \mathbf{z})] \\&\geq f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T \underbrace{[(1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x} - \mathbf{z}]}_{=0} = f(\mathbf{z}) \\&\geq f((1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Dado que \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 son arbitrarios, esto muestra que f es convexa. \square

Corolario

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y convexa. Si $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, para $\mathbf{x}^* \in \Omega$, entonces \mathbf{x}^* es un mínimo global de f .

Condiciones de Optimalidad

Prueba: El teorema anterior implica que $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*)$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$.
Portanto, \mathbf{x}^* es mínimo global de f . \square

Teorema (Condición de 2do Orden)

Suponga que $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable y que Ω es abierto y convexo. Entonces f es convexa si, y sólo si, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$, $D^2f(\mathbf{x}) \succeq \mathbf{0}$.

Prueba: (\Leftarrow) Suponga que $D^2f(\mathbf{x})$ es positiva semidefinida, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Tomemos $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$ y definamos $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. De la Fórmula de Taylor

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T D^2f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) \mathbf{h},$$

para algún $0 < t < 1$.

Peero $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (1 - t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x} \in \Omega$, ya que es una combinación convexa de $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$. Esto implica que el término $\frac{1}{2} \mathbf{h}^T D^2f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) \mathbf{h} \geq 0$, de modo que

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

De la Condición de optimalidad de 1er. orden, f es convexa.

Condiciones de Optimalidad

(\Rightarrow) Suponga ahora que f es convexa. Tome $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Como Ω es abierto, existe $r > 0$ tal que $\mathbb{D}_r(\mathbf{x}) \subseteq \Omega$. Tomamos $\tilde{\mathbf{p}} = \frac{1}{k}\mathbf{p}$ un múltiplo suficientemente pequeño de \mathbf{p} , de modo que $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{p}} \in \mathbb{D}_r(\mathbf{x})$. Como f es convexa,

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \tilde{\mathbf{p}}.$$

Por el Teorema de Taylor,

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{p}}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \tilde{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{p}}^T D^2 f(\mathbf{x} + t\tilde{\mathbf{p}}) \tilde{\mathbf{p}}, \quad t \in (0, 1).$$

Combinando las dos expresiones anteriores, obtenemos

$$f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \tilde{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{p}}^T D^2 f(\mathbf{x} + t\tilde{\mathbf{p}}) \tilde{\mathbf{p}} \geq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \tilde{\mathbf{p}}.$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{p}}^T D^2 f(\mathbf{x} + t\tilde{\mathbf{p}}) \tilde{\mathbf{p}} \geq 0.$$

Haciendo $t \rightarrow 0$, se obtiene que $\tilde{\mathbf{p}}^T D^2 f(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{p}} \geq 0$. Y como esto vale para todo $\tilde{\mathbf{p}} \in \mathbb{D}_r(\mathbf{x})$, se tiene que $D^2 f(\mathbf{x}) \succeq 0$ es positiva semidefinida. \square

Condiciones de Optimalidad

Corolario

Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa y 2-veces diferenciable, cualquier punto estacionario $\mathbf{x}^* \in \Omega$ de f , es un mínimo global.

Prueba: Como \mathbf{x}^* es punto estacionario de f , entonces $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Además, como f es convexa y 2-veces diferenciable, entonces $D^2f(\mathbf{x}^*) \succeq \mathbf{0}$. De las condiciones de optimalidad, se obtiene que para todo $\mathbf{x} \in \Omega$

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T D^2f(\mathbf{x}^*) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}^*), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Portanto, \mathbf{x}^* es mínimo global de f . \square

Proposición

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, Ω convexo. Entonces f es convexa \iff
 $(\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y}))^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$

Condiciones de Optimalidad

Prueba: Como f es convexa, de la condición de 1er orden tenemos

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{y}) &\geq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ f(\mathbf{x}) &\geq f(\mathbf{y}) + \nabla f(\mathbf{y})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 \geq (\nabla f(\mathbf{x})^T - \nabla f(\mathbf{y})^T)(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

Portanto, $(\nabla f(\mathbf{x})^T - \nabla f(\mathbf{y})^T)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0$.

(\Rightarrow) (pendiente).

Proposición

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y convexa, entonces \mathbf{x}^* es un óptimo global de f
 $\iff \nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Prueba: Haga $\mathbf{x} = -\nabla f(\mathbf{x}^*)^T + \mathbf{x}^*$. Entonces, $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = -\|\nabla f(\mathbf{x}^*)\|^2 \leq 0$.

De ahí que $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ implica que $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T = \mathbf{0}$, y \mathbf{x}^* es un punto crítico. La convexidad de f implica entonces que \mathbf{x}^* es un mínimo global. \square

Ejemplos

Ejemplos de funciones convexas en \mathbb{R} :

- (Exponencial): $f(x) = e^{ax}$ es convexa en todo \mathbb{R} , para todo $a \in \mathbb{R}$.
Basta ver que $f'(x) = ae^{ax}$ y $f''(x) = a^2 e^{ax} \geq 0$. Luego f es convexa.
(De hecho, f es estrictamente convexa para $a \neq 0$).
- (Potencias): $f(x) = x^a$ es estrictamente convexa sobre \mathbb{R}^+ , para $a \geq 1$ o $a \leq 0$.
Basta ver que $f'(x) = ax^{a-1}$ y $f''(x) = a(a-1)x^{a-2} > 0$, cuando $a < 0$ ó $a > 1$.
- (Potencias del valor absoluto): Las funciones $f(x) = |x|^p$ son convexas para $p \geq 1$.

$$f'(x) = p|x|^{p-1} \cdot \frac{d}{dx}|x| = p|x|^{p-1} \cdot \frac{x}{|x|} = p x|x|^{p-2}.$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= p|x|^{p-2} + p(p-2)x|x|^{p-3} \cdot \frac{d}{dx}|x| = p|x|^{p-2} + p(p-2)x^2|x|^{p-4} \cdot \frac{x}{|x|} \\ &= p|x|^{p-4}(|x|^2 + (p-2)x^2) = p|x|^{p-4}(x^2 + (p-2)x^2) \\ &= p(p-1)x^2|x|^{p-4} \geq 0 \end{aligned}$$

cuando $p \geq 1$.

Ejemplos

- (Logaritmo negativo): $f(x) = -\log(x)$ es convexa en todo \mathbb{R}^+ , para todo $a \in \mathbb{R}$. Basta ver que $f'(x) = -\frac{1}{x}$ y $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. Luego f es estrictamente convexa.
- (Entropía): $f(x) = x \log(x)$ es estrictamente convexa sobre \mathbb{R}^+ . Observe que $f'(x) = \log(x) + 1$ y $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$.
- (Funciones lineales): Las funciones $f(x) = ax + b$ son siempre convexas y cóncavas, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

Ejemplos

Ejemplos de funciones convexas en \mathbb{R}^n :

- (Normas): Toda norma en \mathbb{R}^n es convexa.

De la homogeneidad y la desigualdad triangular, tenemos

$$\|(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| \leq \|(1-t)\mathbf{x}\| + \|t\mathbf{y}\| = (1-t)\|\mathbf{x}\| + t\|\mathbf{y}\|, \quad \text{para } t \in [0, 1].$$

- (Máximos): La función $f(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$ es convexa.

Recuerde que $\max_i \{a_i + b_i\} \leq \max_i \{a_i\} + \max_i \{b_i\}$. (¿Por qué?)

De ahí que

$$\max_i ((1-t)x_i + ty_i) \leq \max_i (1-t)x_i + \max_i ty_i = (1-t) \max_i x_i + t \max_i y_i.$$

- (Log-sum-exp): La función $f(\mathbf{x}) = \log \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right)$ es convexa en \mathbb{R}^n . (Hay que calcular la Hessiana y mostrar que es $\succeq 0$ + Cauchy-Schwarz).

Ejemplos

- (Media geométrica): La función $f(\mathbf{x}) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$ es convexa en \mathbb{R}^n .
(De nuevo, calcular la Hessiana y mostrar que es $\succeq 0$ + Cauchy-Schwarz).
- (Log-det): El logaritmo negativo del determinante $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $f(X) = -\log \det X$ es convexa en el conjunto de matrices positivas definidas en $\mathbb{R}^{n \times n}$.