

MÉTODOS ITERATIVOS PARA SISTEMAS LINEALES

ALAN REYES-FIGUEROA
MÉTODOS NUMÉRICOS II

(AULA 09) 02.AGOSTO.2022

Refinamiento Iterativo

El **refinamiento iterativo** es una técnica para mejorar la precisión en la solución de un sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, hallada por un método directo.

Suponga que el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ha sido resuelto mediante factoración LU (con pivoteo parcial o completo), y sea $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ la solución calculada. Habiendo fijado una tolerancia de error, tol , el refinamiento iterativo se realiza de la siguiente manera:

Algoritmo: (Refinamiento iterativo, FPR):

While end condition doesn't hold.

 Compute the residual $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(k)}$,

 Solve the system $\mathbf{Az} = \mathbf{r}^{(k)}$,

 Update the solution $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{z}$,

Los términos $\mathbf{r}^{(k)}$ se denominan residuos. En ausencia de errores de redondeo, el proceso se detendría en el primer paso, dando como resultado la solución exacta.

A este procedimiento lo llamamos refinamiento iterativo de precisión simple o fija (FRP), aunque existen mejoras como el refinamiento iterativo de precisión mixta (MPR).

Métodos Iterativos

Una técnica iterativa para resolver el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, comienza con una aproximación $\mathbf{x}^{(0)}$ de \mathbf{x} , y genera una secuencia de aproximaciones $\{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}$.

Estas técnicas transforman el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en un sistema equivalente $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Usualmente se obtiene este sistema equivalente buscando alguna forma de “despejar” la \mathbf{x} en el sistema original. Luego, se aproxima la solución mediante la secuencia

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Para estudiar la convergencia de estas técnicas de iteración, necesitamos analizar la fórmula (1), con $\mathbf{x}^{(0)}$ arbitrario.

Recordemos que una matriz $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es **convergente** si $T^k \rightarrow \mathbf{0}$.

Lema Sea $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si el radio espectral $\rho(T) < 1$, entonces $(I - T)^{-1}$ existe y

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + \dots = \sum_{k \geq 0} T^k.$$

Métodos Iterativos

Prueba: Observe que para cualquier autovalor λ de T , $1 - \lambda$ es autovalor de $I - T$, pues

$$T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow (I - T)\mathbf{x} = \mathbf{x} - T\mathbf{x} = \mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = (1 - \lambda)\mathbf{x}.$$

Como $|\lambda| \leq \rho(T) < 1$, entonces $|1 - \lambda| > ||1| - |\lambda|| = 1 - |\lambda| > 0$. Así, ningún autovalor de $I - T$ es cero, y $I - T$ es no singular, y la inversa $(I - T)^{-1}$ existe.

Por otro lado, $\rho(T) < 1$ implica que T es convergente y $\lim T^k = \mathbf{0}$.

Sea $S_m = I + T + T^2 + \dots + T^m$. Entonces

$$(I - T)S_m = (I - T)(I + T + T^2 + \dots + T^m) = I - T^{m+1},$$

y como T es convergente, entonces

$$(I - T) \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (I - T)S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (I - T^{m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} I - \underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} T^{m+1}}_{=0} = I.$$

Portanto, $(I - T)^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$. \square

Métodos Iterativos

Teorema Para cualquier $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, la secuencia $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geq 0}$ definida por

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{ y } \mathbf{c} \neq \mathbf{0}, \quad (2)$$

converge a la solución única de $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ si, y sólo si, $\rho(T) < 1$.

Prueba: De (2), para todo $k \in \mathbb{N}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k)} &= T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c} = T(T\mathbf{x}^{(k-2)} + \mathbf{c}) + \mathbf{c} = T^2\mathbf{x}^{(k-2)} + (T + I)\mathbf{c} \\ &= T^2(T\mathbf{x}^{(k-3)} + \mathbf{c}) + \mathbf{c} = T^3\mathbf{x}^{(k-3)} + (T^2 + T + I)\mathbf{c} \\ &= \dots \\ &= T^k\mathbf{x}^{(0)} + (T^{k-1} + \dots + T^2 + T + I)\mathbf{c}. \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Si $\rho(T) < 1$, entonces T es convergente y $\lim_k T^k = \mathbf{0}$. Luego,

$$\mathbf{x}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k\mathbf{x}^{(0)} + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{k-1} T^j \right) \mathbf{c} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} T^k \right) \mathbf{x}^{(0)} + (I - T)^{-1} \mathbf{c} = (I - T)^{-1} \mathbf{c}.$$

Así, $(I - T)\mathbf{x}^* = \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{x}^* = T\mathbf{x}^* + \mathbf{c}$, y $\mathbf{x}^{(k)}$ converge a la única solución de (2).

Métodos Iterativos

(\Rightarrow) Sea \mathbf{x}^* la solución de $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$, y suponga que $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}^*$. Para todo $k \geq 0$ vale

$$\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)} = T(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k-1)}) = T^2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k-2)}) = \dots = T^k(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(0)}). \quad (3)$$

Sea $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Haciendo $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^* - \mathbf{z}$, resulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k \mathbf{z} = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(0)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{x}^* - \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}.$$

Esto equivale a tener $\rho(T) < 1$. \square

Observaciones: Si $\|T\| < 1$ para alguna norma matricial, entonces la ecuación (3) nos produce fórmulas para medir el error del k -ésimo iterado $\mathbf{x}^{(k)}$ con respecto a la solución exacta \mathbf{x}^* :

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq \|T\|^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^*\|, \quad (4)$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|. \quad (5)$$

Métodos Iterativos

Una técnica general para diseñar métodos iterativos lineales se basa en una descomposición aditiva de A , en la forma $A = P - N$, con P no singular. P se llama **matriz de preconditionamiento** o **precondicionador**.

Dado $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, se puede calcular la secuencia $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ para $k \geq 1$, resolviendo

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad k \geq 0. \quad (6)$$

La matriz de iteración en (6) es $T = P^{-1}N$, mientras que $\mathbf{c} = P^{-1}\mathbf{b}$. Alternativamente, (6) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}, \quad k \geq 0. \quad (7)$$

donde $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$ es el vector residual en el paso k .

- P debe ser no singular,
- Además, P debería ser fácilmente invertible, para mantener bajo el costo computacional general.
- Si $P = A$ y $N = \mathbf{0}$, (6) convergería en una iteración, pero en el mismo costo de un método directo).

Métodos Iterativos

Mencionamos dos resultados que aseguran la convergencia de la iteración (6).

Propiedad

Sea $A = P - N$, con A y P simétricas y positivas definidas. Si la matriz $2P - A = N + P$ es positiva definida, entonces el método iterativo definido en (6) converge para cualquier elección del dato inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, y

$$\rho(T) = \|T\|_A = \|T\|_P < 1.$$

Además, la convergencia de la iteración es monótona con respecto a las normas $\|\cdot\|_P$ y $\|\cdot\|_A$ (es decir, $\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|_P < \|\mathbf{e}^{(k)}\|_P$ y $\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|_A < \|\mathbf{e}^{(k)}\|_A$, para $k = 0, 1, 2, \dots$).

Propiedad

Sea $A = P - N$, con A simétrica y positiva definida. Si la matriz $P + P^T - A$ es positiva definida, entonces P es invertible, el método iterativo en (6) es monótonamente convergente con respecto a la norma $\|\cdot\|_A$, para cualquier $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, y

$$\rho(T) \leq \|T\|_A < 1.$$

Método de Jacobi

Considere el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A \in \mathbb{R}^{nn}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. El **método de JACOBI** es un método iterativo que parte de descomponer la matriz A como una suma $A = -L + D - U$,

$$A = - \underbrace{\begin{pmatrix} -a_{21} & & \\ \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} \end{pmatrix}}_L + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}}_D - \underbrace{\begin{pmatrix} -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & -a_{n-1,n} \end{pmatrix}}_U.$$

Entonces, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puese escribirse como

$$(-L + D - U)\mathbf{x} = -L\mathbf{x} + D\mathbf{x} - U\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad D\mathbf{x} = (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Si D^{-1} existe, entonces

$$\mathbf{x} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}.$$

y hemos escrito el sistema en la forma $\mathbf{x} = T_j\mathbf{x} + \mathbf{c}_j$, donde $T_j = D^{-1}(L + U)$ y $\mathbf{c}_j = D^{-1}\mathbf{b}$.

Método de Jacobi

Algoritmo: (Método de JACOBI).

Inputs: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no-singular y diagonal dominante, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Outputs: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Initialize $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$.

while end conditions doesn't hold:

for $i = 1$ to n :

$$x_i = (b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j) / a_{ii},$$

If $(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\| \leq tol)$ or $(iter \geq MaxIter)$: end condition = True.

Algoritmo: (Método de JACOBI en forma vectorial).

Inputs: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no-singular y diagonal dominante, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Outputs: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Initialize $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$, $T = D^{-1}(L + U)$, $\mathbf{c} = D^{-1}\mathbf{b}$.

while end conditions doesn't hold:

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c},$$

If $(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\| \leq tol)$ or $(iter \geq MaxIter)$: end condition = True.

Método de Seidel

Consideramos de nuevo el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A \in \mathbb{R}^{nn}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. El **método de SEIDEL** es un método iterativo que también descompone la matriz A como la suma $A = -L + D - U$,

$$A = - \underbrace{\begin{pmatrix} -a_{21} & & \\ \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} \end{pmatrix}}_L + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}}_D - \underbrace{\begin{pmatrix} -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & -a_{n-1,n} \end{pmatrix}}_U.$$

Sin embargo, ahora el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se reescribe como

$$(-L + D - U)\mathbf{x} = -L\mathbf{x} + D\mathbf{x} - U\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad (D - L)\mathbf{x} = U\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Si $(D - L)^{-1}$ existe, entonces

$$\mathbf{x} = (D - L)^{-1}U\mathbf{x} + (D - L)^{-1}\mathbf{b}.$$

y hemos escrito el sistema en la forma $\mathbf{x} = T_s\mathbf{x} + \mathbf{c}_s$, donde $T_s = (D - L)^{-1}U$ y $\mathbf{c}_s = (D - L)^{-1}\mathbf{b}$.

Método de Seidel

Algoritmo: (Método de SEIDEL).

Inputs: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no-singular y diagonal dominante, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Outputs: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Initialize $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$.

while end conditions doesn't hold:

$\mathbf{z} = \mathbf{x}$,

 for $i = 1$ to n :

$$x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}z_j) / a_{ii},$$

 If $(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\| \leq tol)$ or $(iter \geq MaxIter)$: end condition = True.

Algoritmo: (Método de SEIDEL en forma vectorial).

Inputs: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no-singular y diagonal dominante, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Outputs: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Initialize $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$, $T = (D - L)^{-1}U$, $\mathbf{c} = (D - L)^{-1}\mathbf{b}$.

while end conditions doesn't hold:

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c},$$

Métodos Iterativos

Para que funcione el método de JACOBI es necesario:

1. $a_{ii} > 0 \forall i$, (para que D^{-1} exista).
2. $\rho(D^{-1}(L + U)) < 1$, (condición de convergencia).

Definición

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El **radio espectral** de A es el mayor módulo de sus autovalores. Esto es

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|, \quad \text{donde } \lambda_i \text{ es autovalor de } A.$$

Lema

$\rho(A) \leq \|A\|$, para cualquier norma inducida $\|\cdot\|$.

Prueba: Sea λ autovalor de A . Entonces existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, con $\|\mathbf{x}\| = 1$, tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Luego

$$|\lambda| = \|\lambda\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\| = \|A\| \quad \Rightarrow \quad \rho(A) = \max |\lambda| \leq \|A\|. \quad \square$$

Métodos Iterativos

Teorema Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, una matriz estrictamente diagonal dominante. Para cualquier elección inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, el método iterativo de JACOBI,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T_j \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}_j, \quad \text{con } T_j = D^{-1}(L + U), \quad \mathbf{c}_j = D^{-1}\mathbf{b},$$

converge a la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Prueba: Basta mostrar las condiciones (1) y (2) anteriores. Como A es diagonal dominante, entonces $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. En particular $|a_{ii}| > 0$ $a_{ii} \neq 0$, para todo $1 \leq i \leq n$, de modo que D es invertible.

Por otro lado, las entradas t_{ij} de la matriz $D^{-1}(L + U)$ son de la forma $t_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j; \\ 0, & i = j. \end{cases}$
Tomando la norma $\|\cdot\|_\infty$ para $T_j = D^{-1}(L + U)$, obtenemos

$$\rho(T_j) \leq \|T_j\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |t_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \max_{1 \leq i \leq n} \underbrace{\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}|}_{< 1} < 1. \quad \square$$

Métodos Iterativos

Teorema Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, una matriz estrictamente diagonal dominante. Para cualquier elección inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, el método iterativo de SEIDEL,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T_s \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}_s, \quad \text{con } T_s = (D - L)^{-1}U, \quad \mathbf{c}_s = (D - L)^{-1}\mathbf{b},$$

converge a la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Prueba: Basta mostrar las condiciones (1) y (2). \square

Referencias: Para este teorema (y los subsiguientes sin demostración), consultar

- Axelsson O. (1994). *Iterative Solution Methods*. Cambridge University Press.
- Young D. (1971). *Iterative Solution of Large Linear Systems*. Academic Press.
- Varga R. (1962). *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall.

Métodos de Relajación

Sea $\mathbf{r}_i^{(k)} = (r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, \dots, r_{in}^{(k)})$ el vector residual para el método de SEIDEL correspondiente a la solución aproximada $\mathbf{x}^{(k)}$

$$\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}).$$

El m -ésimo componente de $\mathbf{r}_i^{(k)}$ es

$$r_{mi}^{(k)} = b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^n a_{mj} x_j^{(k-1)}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

En particular, el i -ésimo componente de $\mathbf{r}_i^{(k)}$ es

$$r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} - a_{ii} x_i^{(k-1)}.$$

así que

$$a_{ii} x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} = a_{ii} x_i^{(k)}. \quad (8)$$

o equivalentemente

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}}. \quad (9)$$

El método de SEIDEL está diseñado para que el residuo $r_{i,i+1}^{(k)}$ sea 0. Sin embargo, reducir a cero una coordenada del vector residuo no siempre es el camino más eficiente para reducir la norma del vector $\mathbf{r}_i^{(k)}$. Es posible modificar la ecuación (9) de modo que

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}}, \quad (10)$$

para ciertos valores de ω .

Los métodos que usan (10) se llaman **métodos de relajación**. Para valores $0 < \omega < 1$ se llaman *de subrelajación*, mientras que valores $\omega > 1$ se llaman *de sobre-relajación*, y se utilizan para acelerar la convergencia de los métodos iterativos. Los métodos de **sobre relajación sucesiva** (*Succesive Over Relaxation*), se abrevian como **SOR**, ó, **OR**.

Métodos de Sobre-relajación

Llamaremos JOR a la implementación de sobre-relajación en el caso de la iteración de JACOBI. En este caso, tenemos

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega) x_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La matriz de iteración en este caso es $T_{j,\omega} = \omega D^{-1}(L + U) + (1 - \omega)I$. Así, en forma matricial el método se escribe

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = [\omega D^{-1}(L + U) + (1 - \omega)I] \mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1} \mathbf{b}.$$

Equivalentemente,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1} \mathbf{r}^{(k)}.$$

En el caso del método de SEIDEL, la iteración para el método SOR resulta

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega) x_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Métodos Iterativos

La matriz de iteración en este caso es $T_{s,\omega} = (I - \omega D^{-1}L)^{-1}[\omega D^{-1}U + (1 - \omega)I]$. Así, en forma matricial el método se escribe

$$(I - \omega D^{-1}L)\mathbf{x}^{(k+1)} = [\omega D^{-1}U + (1 - \omega)I]\mathbf{x}^{(k)} + \omega D^{-1}\mathbf{b}.$$

Equivalentemente,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1}\mathbf{r}^{(k)}.$$

Resultados sobre convergencia: Resumimos algunos resultados de convergencia para los métodos de JACOBI , SEIDEL, JOR y SOR.

Teorema

Si A y $2D - A$ son simétricas y positiva definidas, entonces el método de Jacobi es convergente y $\rho(T_j) = \|T_j\|_A = \|T_j\|_D$.

En el caso del método JOR, la suposición en $2D - A$ se puede eliminar, produciendo el siguiente resultado.

Teorema

Si A es simétrica y positiva definida, entonces el método JOR es convergente si $0 < \omega < \frac{2}{\rho(D^{-1}A)}$.

Con respecto al método de Gauss-Seidel, se cumple el siguiente resultado.

Teorema (Teorema de Kahan)

Para cualquier $\omega \in \mathbb{R}$, se tiene que $\rho(T_{s,\omega}) \geq |\omega - 1|$; por lo tanto, el método SOR converge sólo si, $0 < \omega < 2$.

Prueba: Si $\{\lambda_i\}$ son los autovalores de la matriz de iteración SOR, entonces

$$\left| \prod_{i=1}^n \lambda_i \right| = \left| \det [\omega D^{-1}L + (1 - \omega)I] \right| = |1 - \omega|^n.$$

Por lo tanto, debe existir al menos un autovalor λ_i tal que $|\lambda_i| \geq |1 - \omega|$ y por lo tanto, para que se mantenga la convergencia, se debe tener $|1 - \omega| < 1$, es decir $0 < \omega < 2$. \square

Métodos Iterativos

Suponiendo que A es simétrica y definida positiva, la condición $0 < \omega < 2$, además de ser necesario, también se vuelve suficiente para la convergencia.

Teorema (Teorema de Ostrowki-Reich)

Si A es simétrica y positiva definida, entonces el método SOR es convergente si $0 < \omega < 2$. Además, su convergencia es monótona con respecto a $\|\cdot\|_A$.

Finalmente, si A es estrictamente diagonalmente dominante, el método SOR converge si $0 < \omega \leq 1$. Los resultados anteriores muestran que el método SOR es más o menos rápidamente convergente, dependiendo de la elección del parámetro de relajación ω .

La pregunta de cómo determinar el valor óptimo ω_{opt} para el que la tasa de convergencia es la más alta posible se puede dar una respuesta satisfactoria sólo en casos especiales.

Teorema

Si la matriz A es tridiagonal T_j tiene autovalores reales, entonces el método SOR converge para cualquier elección de $\mathbf{x}^{(0)}$ si $\rho(T_j) < 1$ y $0 < \omega < 2$. Además,

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_j)^2}},$$

y el factor de convergencia asintótica correspondiente es

$$\rho(T_{S, \omega_{opt}}) = \frac{1 - \sqrt{1 - \rho(T_j)^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_j)^2}}.$$