

## **CONDICIONES DE OPTIMALIDAD**

ALAN REYES-FIGUEROA  
MÉTODOS NUMÉRICOS II

(AULA 18) 08.SEPTIEMBRE.2023

## Definición

Suponga que  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función con valores reales, definida sobre  $\Omega$ . Un punto  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  es un **mínimo local** o **minimizador local** de  $f$  si existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*), \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega - \{\mathbf{x}^*\} \text{ con } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon.$$

## Definición

Suponga que  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función con valores reales, definida sobre  $\Omega$ . Un punto  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  es un **mínimo global** o **minimizador global** de  $f$  sobre  $\Omega$  si

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*), \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*.$$

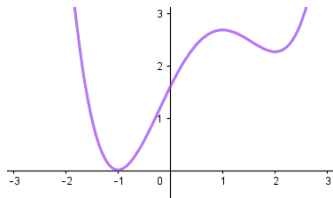
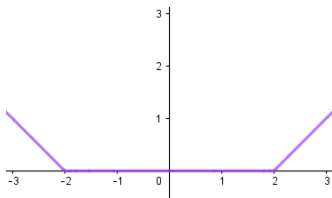
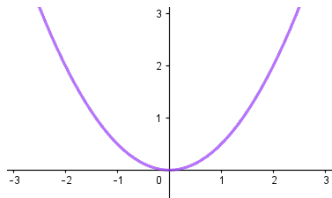
**Obs!** Reemplazando  $\geq$  con  $>$  en las definiciones anteriores obtenemos el concepto de un **mínimo local estricto** y de un **mínimo global estricto**, respectivamente.

# Optimización

**Ejemplo:** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$  tiene un mínimo global estricto en  $x = 0$ . Claramente,  $x = 0$  también es un mínimo local de  $f$ .

**Ejemplo:** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \max\{0, |x - 2|\}$  tiene a todos los puntos de intervalo  $[-2, 2]$  como mínimos globales. Estos no son estrictos.

**Ejemplo:** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 12x$  tiene mínimos locales estricto en  $x = -1$  y  $x = 2$ . De éstos, sólo  $x = -1$  es un mínimo global.



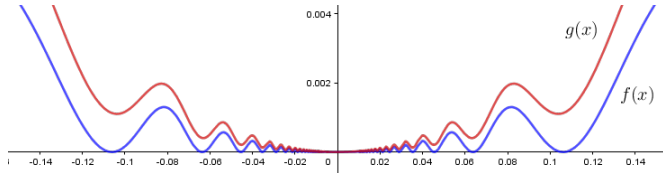
## Definición

Un punto  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  es un **mínimo local aislado** de  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $\mathbf{x}^*$  es mínimo local de  $f$  y existe una vecindad  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $\mathbf{x}^*$  tal que  $\mathbf{x}^*$  es el único mínimo local de  $f$  en  $U$ .

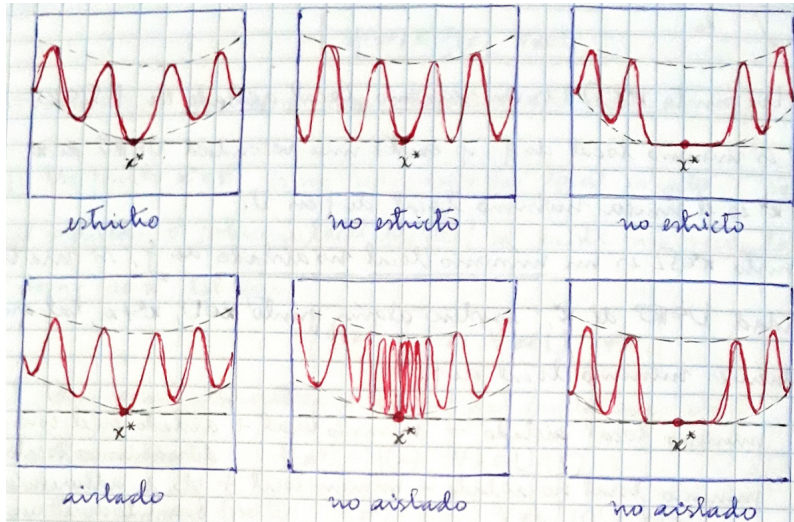
Un punto  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  es un **mínimo local no aislado** de  $f$ , si para toda vecindad  $U$  de  $\mathbf{x}^*$ , existe  $\mathbf{x} \in U$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ , tal que  $\mathbf{x}$  también es mínimo local de  $f$ .

**Ejemplo:** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} + x^2$ ,  $f(0) = 0$ , posee un mínimo local no estricto y no aislado en  $x = 0$ .

**Ejemplo:** La función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} + 2x^2$ ,  $g(0) = 0$ , posee un mínimo local estricto y no aislado en  $x = 0$ .

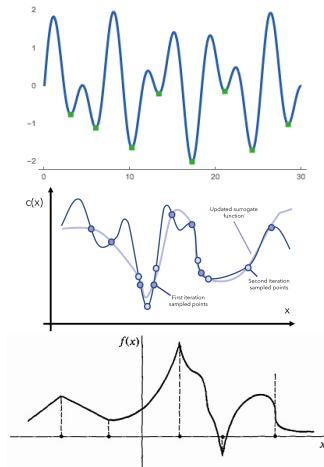


# Optimización



## Dificultades de la optimización global:

- funciones con muchos mínimos;
- los algoritmos tienden a quedarse atrapados en mínimos locales,
- en el caso de métodos de búsqueda, puede que el óptimo global esté en una región no explorada;
- cuando el mínimo se encuentra dentro de una región donde la función es muy plana (curvatura cercana a 0), los métodos de optimización suelen ser muy lentos;
- no-diferenciabilidad en un punto mínimo.



# Optimización

## Fórmula de Taylor:

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^{m+1}$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , y  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ , entonces

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} D^{(k)}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}^{(k)} + \frac{1}{(m+1)!} D^{(m+1)}f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}^{(m+1)},$$

donde  $t \in (0, 1)$  y

$$D^{(k)}f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}^k = \sum_{|l|=k} \frac{\partial^k f}{\partial \mathbf{x}_l}(\mathbf{x}_0) \mathbf{h}_l = \sum_{|l|=k} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} h_1^{i_1} h_2^{i_2} \cdots h_n^{i_n},$$

$l = (i_1, \dots, i_n)$ ,  $\mathbf{x}_l = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ ,  $\mathbf{h}_l = (h_{i_1}, \dots, h_{i_n})$ .

## Casos particulares:

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$ , podemos escribir

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + Df(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}), \quad t \in (0, 1).$$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + Df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T D^2f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) \mathbf{h}, \quad t \in (0, 1).$$

# Condiciones de Optimalidad

## Teorema (Condiciones de Optimalidad de Primer Orden)

Si  $\mathbf{x}^*$  es un mínimo local (o un máximo local) de la función  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $f$  es de clase  $C^1$  en una vecindad abierta de  $\mathbf{x}^*$ , entonces  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ .

Prueba: Hacemos la prueba para  $\mathbf{x}^*$  mínimo local. Suponga que  $\nabla f(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$ . Por lo tanto, podemos encontrar una dirección  $\mathbf{h} = -\alpha \frac{\nabla f(\mathbf{x}^*)}{\|\nabla f(\mathbf{x}^*)\|} = -\alpha \mathbf{u}$ , tal que  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{u} < 0$ .

Por el Teorema de Taylor, si  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{h}$ , tenemos  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|)$ . Cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , entonces  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ , resulta que  $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|) < 0$ , ya que  $o(\|\mathbf{h}\|)$  se acerca a cero, mucho más rápido que  $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{h}$ . De hecho,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|\nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{u} < 0.$$

De ahí que,  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^*)$ , y esto contradice el la hipótesis de que  $\mathbf{x}^*$  es un mínimo local. Portanto,  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ .  $\square$



# Condiciones de Optimalidad

## Definición

Un punto  $\mathbf{x} \in \Omega = \text{dom } f$  que satisface que  $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  se llama un **punto crítico** o **punto estacionario** de  $f$ .

De acuerdo a la condición de Optimalidad de Primer Orden, todo mínimo local debe ser un punto estacionario de  $f$ .

## Teorema (Condiciones de Optimalidad de Segundo Orden)

Si  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  es un mínimo (máximo) local de  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $f$  es de clase  $C^2$  es una vecindad abierta de  $\mathbf{x}^*$ , entonces  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , y la hessiana

$$D^2f(\mathbf{x}^*) \succeq \mathbf{0}$$

es positiva semidefinida (negativa semidefinida).

Prueba: Al igual que antes, hacemos la prueba para el caso de  $\mathbf{x}^*$  mínimo local. El caso del máximo se prueba de forma similar.

# Condiciones de Optimalidad

Suponga que  $D^2f(\mathbf{x}^*)$  no es positiva semidefinida. Entonces, existe  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbf{h}^T D^2f(\mathbf{x}^*) \mathbf{h} < 0$ .

Por continuidad de  $D^2f$ , y la preservación de signo, existe una bola  $\mathbb{D}_r(\mathbf{x}^*)$  y un intervalo  $(0, \varepsilon)$ , tal que  $\mathbf{h}^T D^2f(\mathbf{x}^* + \hat{\varepsilon}\mathbf{h}) \mathbf{h} < 0$ , para todo  $\hat{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ .

Aplicando el Teorema de Taylor alrededor de  $\mathbf{x}^*$ , existe  $t \in (0, 1)$ , tal que

$$f(\mathbf{x}^* + \hat{\varepsilon}\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^*) + \hat{\varepsilon}\nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{h} + \frac{1}{2}\hat{\varepsilon}^2 \mathbf{h}^T D^2f(\mathbf{x}^* + t\hat{\varepsilon}\mathbf{h}) \mathbf{h}.$$

Usando el hecho que  $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{h} = 0$  (ya que  $\mathbf{x}^*$  es mínimo local), y el hecho que  $\mathbf{h}^T D^2f(\mathbf{x}^* + t\hat{\varepsilon}\mathbf{h}) \mathbf{h} < 0$ , obtenemos

$$f(\mathbf{x}^* + \hat{\varepsilon}\mathbf{h}) < f(\mathbf{x}^*),$$

lo cual contradice la hipótesis de que  $\mathbf{x}^*$  es un mínimo local de  $f$ . Portanto,  $D^2f(\mathbf{x}^*)$  es positiva semidefinida.  $\square$

# Condiciones de Optimalidad

## Teorema (Condiciones Suficientes de Optimalidad)

Suponga que  $D^2f$  existe y es continua en una vecindad de  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ , que  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , y que la hessiana  $D^2f(\mathbf{x}^*)$  es positiva definida (negativa definida).

Entonces  $\mathbf{x}^*$  es un mínimo (máximo) local estricto de  $f$ .

Prueba: Existe una bola  $\mathbb{D}_r(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < r\}$  para la cual

$q(t) = \mathbf{h}^T D^2f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h}) \mathbf{h} > 0$ , para todo  $\mathbf{x}^* + t\mathbf{h} \in \mathbb{D}_r$ , con  $t \in (0, 1)$  y  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ .

(Esto es consecuencia de la preservación de signo, ya que la función  $q$  es continua y  $q(0) = \mathbf{h}^T D^2f(\mathbf{x}^*) \mathbf{h} > 0$ ).

Usando el Teorema de Taylor, con  $\|\mathbf{h}\| < r$ , y como  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , se tiene que existe  $t \in (0, 1)$  tal que

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T D^2f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h}) \mathbf{h},$$

Como  $\mathbf{x}^* + t\mathbf{h} \in \mathbb{D}_r(\mathbf{x}^*)$ , luego  $\mathbf{h}^T D^2f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h}) \mathbf{h} > 0 \Rightarrow f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^*)$ , para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{D}_r(\mathbf{x}^*)$ . Esto muestra que  $\mathbf{x}^*$  es un mínimo local estricto de  $f$ .  $\square$

# Condiciones de Optimalidad

Podemos encontrar y clasificar puntos estacionarios de la siguiente manera:

1. Encontrar los puntos críticos  $\mathbf{x}$  en los que  $f(\mathbf{x}) = 0$ .
2. Obtener la Hessiana  $Hf(\mathbf{x}) = D^2f(\mathbf{x})$ .
3. Determinar el carácter de  $Hf(\mathbf{x})$  para cada punto crítico  $\mathbf{x}$ .
  - Si  $D^2f(\mathbf{x})$  es positiva (negativa) definida, entonces  $\mathbf{x}$  es un mínimo (máximo) local.
  - Si  $D^2f(\mathbf{x})$  es indefinida,  $\mathbf{x}$  es un punto silla.
  - Si  $D^2f(\mathbf{x})$  es positiva (negativa) semidefinida,  $\mathbf{x}$  puede ser un mínimo (máximo) local. En este caso, es necesario seguir trabajando para clasificar el punto estacionario.

Un posible enfoque sería para deducir las terceras derivadas parciales de  $f(\mathbf{x})$  y luego calcular el término correspondiente en la serie de Taylor. Si este término es cero, entonces el siguiente término necesita ser calculado y así por delante.

# Condiciones de Optimalidad

- En el caso especial donde  $D^2f(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x}$  puede ser un minimizador o maximizador ya que las condiciones necesarias se satisfacen tanto en casos.
- Si  $D^2f(\mathbf{x})$  es semidefinida, se requiere más información para caracterización completa de un punto estacionario y más el trabajo es necesario en este caso.
- Un posible enfoque podría ser calcular el tercer término de la serie de Taylor de  $f(\mathbf{x})$ ,

$$D^3f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}^{(3)} = \frac{1}{3!} \sum_{|I|=3} \frac{\partial^3 f}{\partial \mathbf{x}_I}(\mathbf{x}_0) \mathbf{h}_I = \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \partial x_3^{i_3}} h_1^{i_1} h_2^{i_2} h_3^{i_3};$$

y se debe determinar el signo de este término. Si este término es cero, entonces debe calcularse el siguiente término  $D^4f(\mathbf{x})$ .

- En general, si los primeros  $i$  términos  $D^i f(\mathbf{x})$  de la serie de Taylor son todos nulos, debe calcularse el signo de primer término  $D^k f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}^{(k)}$  que no se anule.

# Condiciones de Optimalidad

**Ejemplo:** Considere la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}[(x_1 - 2)^3 + (x_2 - 3)^3]$ . En este caso, el gradiente es

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (x_1 - 2)^2 & (x_2 - 3)^2 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo  $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , se obtiene que el único punto crítico es  $\mathbf{x}^* = (2, 3)^T$ . La Hessiana de  $f$  es

$$D^2f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - 2 & 0 \\ 0 & x_2 - 3 \end{pmatrix}.$$

Así, en el punto crítico,  $D^2(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ . Las terceras derivadas de  $f$  son todas cero, excepto

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(\mathbf{x}) = 1.$$

Luego, el término

$$D^3f(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{h}^{(3)} = \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \partial x_3^{i_3}} h_1^{i_1} h_2^{i_2} h_3^{i_3} = \frac{1}{6}(h_1^3 + h_2^3)$$

es positivo si  $h_1, h_2 > 0$ , pero es negativo si  $h_1, h_2 < 0$ . Portanto,  $D^3f(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{h}^{(3)}$  toma ambos signos, y  $\mathbf{x}^*$  es un punto silla de  $f$ .