

Métodos Numéricos II 2023

Lista 04

03.octubre.2023

1. Implementar los siguientes métodos de descenso gradiente (naïve = tamaño de paso α constante):

- descenso gradiente naïve con dirección de descenso aleatoria
- descenso máximo naïve
- descenso gradiente con Backtracking
- descenso gradiente de Newton, con Hessiano aproximado
- descenso gradiente de Newton, con Hessiano exacto.

En cada uno de los métodos, su función debe recibir los siguientes argumentos: la función objetivo f , el gradiente de la función objetivo df , el hessiano ddf (cuando sea necesario), un punto inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, el tamaño de paso $\alpha > 0$, el número máximo de iteraciones $maxIter$, la tolerancia ε , así como un criterio de paro. En los casos que se use Backtracking, $\alpha = \alpha_0$ corresponde al inicio de la búsqueda lineal, y se debe incorporar un parámetro $\rho > 0$ de tasa de decaimiento. En el caso del Backtracking, usted decide si usar las condiciones de Wolfe o de Goldstein.

Como resultado, sus algoritmos deben devolver: la mejor solución encontrada *best x* (la última de las aproximaciones calculadas); la secuencia de iteraciones \mathbf{x}_k ; la secuencia de valores $f(\mathbf{x}_k)$; la secuencia de errores en cada paso (según el error de su criterio de paro).

Además, es deseable indicar el número de iteraciones efectuadas por el algoritmo, y si se obtuvo o no convergencia del método.

2. Testar sus algoritmos del Ejercicio 1 con las siguientes funciones:

a) La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + \frac{1}{2}y + 1.$$

Punto inicial: $\mathbf{x}_0 = (3, 1, -3, 1)^T$, Óptimo: $\mathbf{x}^* = (-1.01463, -1.04453)^T$, $f(\mathbf{x}^*) = -1.51132$.

b) La función de Rosembrock 2-dimensional $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Punto inicial: $\mathbf{x}_0 = (1.2, 1)^T$, Óptimo: $\mathbf{x}^* = (1, 1)^T$, $f(\mathbf{x}^*) = 0$.

b) La función de Rosembrock 10-dimensional $f : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^9 100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2.$$

Punto inicial: $\mathbf{x}_0 = (1.2, 1, 1, \dots, 1, 1.2, 1)^T$, Óptimo: $\mathbf{x}^* = (1, 1, \dots, 1)^T$, $f(\mathbf{x}^*) = 0$.

En cada uno de los casos, hallar un tamaño de paso α que garantice la convergencia de los métodos, y elabore una tabla con las primeras 3 y las últimas 3 aproximaciones \mathbf{x}_k obtenidas.

Para este tamaño de paso, comparar:

- la solución aproximada obtenida
- el error de aproximación
- la norma del gradiente en la solución

Elabore gráficas que muestren el error de aproximación, en función del número de iteración, y muestre la comparación de la evolución de la convergencia en sus cinco métodos. A partir de estas gráficas, discuta cuál de los métodos es más efectivo, en cada caso.

3. Construya una función “suma de gaussianas” 2-dimensional, en la forma

$$f(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^k \exp \left(- \frac{1}{2\sigma} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_2^2 \right),$$

donde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ son puntos en el rectángulo $[0, 8] \times [0, 8]$ elegidos de forma aleatoria (distribución uniforme). Use $k = 8$, Aquí, $\sigma > 0$ es un parámetro de escala definido por el usuario.

Aplique varias veces alguno de los métodos implementados a la función f , con inicializaciones \mathbf{x}_0 distintas, de forma que se puedan obtener los diferentes mínimos locales de la función.

Muestre visualizaciones de diferentes secuencias de aproximaciones $\{\mathbf{x}_k\}$ convergiendo a cada uno de los mínimos locales de su función.

