

Métodos Numéricos II 2023

Lista 05

02.noviembre.2023

1. Implementar los siguientes métodos de gradiente:

- un algoritmo de gradiente conjugado (Fletcher-Reeves, Polak-Ribière, Hestenes-Stiefel)
- un algoritmo Quasi-Newton (SR1, DFP, BFGS)

2. Aplicar los algoritmos del Ejercicio 1 en las siguientes funciones:

a) La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + \frac{1}{2}y + 1.$$

Punto inicial: $\mathbf{x}_0 = (3, 1, -3, 1)^T$, Óptimo: $\mathbf{x}^* = (-1.01463, -1.04453)^T$, $f(\mathbf{x}^*) = -1.51132$.

b) La función de Rosembrock 2-dimensional $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Punto inicial: $\mathbf{x}_0 = (1.2, 1)^T$, Óptimo: $\mathbf{x}^* = (1, 1)^T$, $f(\mathbf{x}^*) = 0$.

c) La función de Rosembrock 10-dimensional $f : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^9 100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2.$$

Punto inicial: $\mathbf{x}_0 = (1.2, 1, 1, \dots, 1, 1.2, 1)^T$, Óptimo: $\mathbf{x}^* = (1, 1, \dots, 1)^T$, $f(\mathbf{x}^*) = 0$.

y comparar su desempeño con los algoritmos de la Lista 04.

Para este tamaño de paso, comparar:

- la solución aproximada obtenida
- el error de aproximación
- la norma del gradiente en la solución

Elabore gráficas que muestren el error de aproximación, en función del número de iteración, y muestre la comparación de la evolución de la convergencia de todos los algoritmos (los de la Lista 04 y los de ahora). A partir de estas gráficas, discuta cuál de los métodos es más efectivo en cada caso.

3. Tomar una imagen en escala de grises (de su elección) de tamaño $h \times w$ y tomar una línea específica de la matriz de valores. Vamos a considerar esa línea como los valores imagen \mathbf{y} de una cierta función $f(\mathbf{t})$ desconocida, cuando es evaluada en el vector

$$\mathbf{t} = [0, 1, 2, \dots, w - 1].$$

Su objetivo consiste en implementar un modelo de regresión no-lineal, usando una base de funciones gaussianas $\varphi_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$\varphi_j(t) = e^{(t - \mu_j)^2 / 2\sigma^2}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

En este caso, su modelo de regresión es de la forma

$$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}(t) = \sum_{j=1}^k c_j \varphi_j(t).$$

Considere usted a su elección los siguientes parámetros que quedarán fijos en su modelo:

- el número k de gaussianas a utilizar en el modelo,
- la varianza σ^2 de las gaussianas φ_j (todas iguales)

Deberá resolver el problema:

$$\min_{\mathbf{x}=(\mathbf{c},\mu)\in\mathbb{R}^{2k}} \|\mathbb{X}\mathbf{c} - \mathbf{y}\|_2^2.$$

optimizando los parámetros siguientes:

- el vector $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ de constantes (alturas),
- el vector $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \in \mathbb{R}^k$ de centros de las gaussianas.

Puede utilizar cualquiera de los métodos de optimización vistos en el curso para resolver el problema

4. Implementar un algoritmo genético para resolver el problema del TSP, en el conjunto de 25 ciudades, cuyas coordenadas $(x, y) = (latitud, longitud)$ están indicadas en el archivo **cities.txt**.

Indicar la mejor solución obtenida:

- el vector del recorrido (comenzando a partir de la ciudad 0).
- la distancia total recorrida.