

# **FUNDAMENTOS DE OPTIMIZACIÓN**

ALAN REYES-FIGUEROA  
MÉTODOS NUMÉRICOS II

(AULA 16) 05.SEPTIEMBRE.2023

# Optimización

Comenzamos ahora el tema de Optimización numérica. Más precisamente, vamos a trabajar, optimización continua no restringida.

## Problema de Optimización:

Resolvemos el problema

$$\min_{x \in \Omega} f(x), \quad (1)$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la **función objetivo**.

Además,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  es un vector de variables independientes. Estas variables usualmente se llaman las **variables de decisión**.

EL conjunto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  se llama *conjunto factible* o **conjunto de restricciones**. En el caso de optimización no restringida,  $\Omega$  es el dominio de la función  $f$ , (por lo general  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ).

Casi siempre, requerimos que  $f$  posea alguna propiedad de interés. Por ejemplo,  $f$  es diferenciable,  $f$  es convexa, etc. Por lo general, en la **optimización continua** se diseñan métodos y algoritmos para optimizar funciones diferenciables  $f$  diferenciables (aunque esto no es un requisito indispensable).

# Optimización

## Ejemplos:

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}, \quad \text{donde } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ es simétrica.}$$

(cociente de Rayleigh)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2.$$

(mínimos cuadrados con regularización de Tychonoff)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n-1} [(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2].$$

(función de ROSENBROCK).

# Tipos de Extremos

## Definición

Suponga que  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función con valores reales, definida sobre  $\Omega$ . Un punto  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  es un **mínimo local** o **minimizador local** de  $f$  si existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*), \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega - \{\mathbf{x}^*\} \text{ con } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon.$$

## Definición

Suponga que  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función con valores reales, definida sobre  $\Omega$ . Un punto  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  es un **mínimo global** o **minimizador global** de  $f$  sobre  $\Omega$  si

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*), \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega - \{\mathbf{x}^*\}.$$

**Obs!** Reemplazando  $\geq$  con  $>$  en las definiciones anteriores obtenemos el concepto de un **mínimo local estricto** y de un **mínimo global estricto**, respectivamente.

# Notación

A lo largo de este tema, vamos a utilizar algunas notaciones comunes:

- Todos los vectores se consideran vectores columna. Esto es

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \quad \text{significa} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se representará como  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T \in \mathbb{R}^m$ . Así

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

# Algunos resultados

## Lema (Preservación del signo)

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $\mathbf{a}$ , y tal que  $f(\mathbf{a}) \neq 0$ . Entonces, existe un  $\delta > 0$  tal que para todo punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{D}_\delta(\mathbf{a})$ ,  $f(\mathbf{x})$  tiene el mismo signo que  $f(\mathbf{a})$ .

Prueba: Sin pérdida, suponga que  $f(\mathbf{a}) > 0$ . Tome  $\varepsilon > 0$ . Usando la continuidad de  $f$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta &\implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon \\ &\implies -\varepsilon < f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) < \varepsilon \\ &\implies f(\mathbf{a}) - \varepsilon < f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando,  $0 < \varepsilon < f(\mathbf{a})$ , por ejemplo  $\varepsilon = \frac{f(\mathbf{a})}{2}$ , se obtiene que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \implies f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a}) - \varepsilon > 0,$$

de modo que  $f(\mathbf{x}) > 0$  tiene el mismo signo que  $f(\mathbf{a})$  en el disco  $\mathbb{D}_\delta(\mathbf{a})$ .  $\square$

# Derivadas Vectoriales

En muchos métodos de optimización, se requiere información sobre la primera o segunda derivada de  $f$ .

Recordemos que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , es de clase  $C^1$ , entonces  $f$  tiene primeras derivadas continuas. La **derivada** o **Jacobiana** de  $f$  en el punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ , es el mapa lineal  $Df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$Df(\mathbf{p}) = Jf(\mathbf{p}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \right).$$

Si  $f$  es de clase  $C^2$ ,  $f$  tiene segundas derivadas parciales continuas. El **Hessiano** de  $f$  es

$$D^2f(\mathbf{p}) = Hf(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{p}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

**Obs!** Si  $f \in C^2$ , vale la igualdad de las segundas parciales mixtas, y  $D^2f(\mathbf{p})$  es simétrica.

# Derivadas Vectoriales

En el caso general de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $f = (f_1, \dots, f_m)^T \in \mathbb{R}^m$ , la derivada de  $f$  es

$$Df(\mathbf{p}) = Jf(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Valen las propiedades ya conocidas del cálculo. En particular, vale la pena recordar la

## Regla de la Cadena:

Si  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , son funciones diferenciables en  $g(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ , respectivamente, entonces  $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  es diferenciable en  $\mathbf{p}$  y

$$D(f \circ g)(\mathbf{p}) = Df(g(\mathbf{p})) \cdot Dg(\mathbf{p}).$$



# Derivadas Vectoriales

Revisamos algunas propiedades útiles de derivadas vectoriales y matriciales.

Sea  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable, recordemos que su gradiente es el vector

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{p}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \right)^T \in \mathbb{R}^n.$$

En ocasiones, representaremos  $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{p})$  como la aplicación lineal  $Df(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

La derivada direccional de  $f$  en la dirección del vector unitario  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  es

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}.$$

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable, recordemos que su derivada o gradiente es la aplicación lineal  $\nabla_{\mathbf{x}} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

# Derivadas Vectoriales

Observe que, en este caso, la matriz derivada de  $f$  puede verse como

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} f_1(\mathbf{p})^T \\ \nabla_{\mathbf{x}} f_2(\mathbf{p})^T \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{x}} f_m(\mathbf{p})^T \end{pmatrix},$$

o bien

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \nabla_{x_1} f(\mathbf{p}) & \nabla_{x_2} f(\mathbf{p}) & \dots & \nabla_{x_n} f(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

En particular, si  $\nabla_{\mathbf{x}} = (\nabla_{x_1}, \dots, \nabla_{x_n})^T$  y  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T \in \mathbb{R}^m$ , tenemos que

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \nabla_{x_1} \\ \dots \\ \nabla_{x_n} \end{pmatrix} (f_1(\mathbf{p}) \quad \dots \quad f_m(\mathbf{p})).$$

# Derivadas Vectoriales

**Ejemplo:**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , con  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Tenemos

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,  $\nabla_{\mathbf{x}} (A\mathbf{x}) = A$ .

**Ejemplo:**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A$ , con  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Tenemos

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n \\ \vdots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{nm}x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,  $\nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^T A) = A^T$ .

# Derivadas Vectoriales

En general,

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{Ax} + \mathbf{b}) &= \mathbf{A}, \\ \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} + \mathbf{b}^T) &= \mathbf{A}^T = (\nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}^T))^T = (\nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}))^T.\end{aligned}$$

Otra forma de verlo. Recordemos que el producto matriz-vector, puede verse como el producto punto  $\mathbf{Ax} = \langle \mathbf{A}^T, \mathbf{x} \rangle$ .

Tenemos la siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{A}^T, \mathbf{x} \rangle &= \mathbf{A}, & \nabla_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{A}, \mathbf{x} \rangle &= \mathbf{A}^T, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^T \rangle &= \mathbf{A}, & \nabla_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \rangle &= \mathbf{A}^T.\end{aligned}$$

Otras propiedades:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{b} &= \mathbf{o}, & \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{y}^T \mathbf{x} &= \mathbf{y}^T, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{x} &= \mathbf{I}, & \nabla_{\mathbf{x}} c\mathbf{x} &= c\mathbf{I}.\end{aligned}$$

# Derivadas Vectoriales

**Ejemplo:** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , con  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

El gradiente es

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle = \langle \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle = \langle I, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \rangle = \langle I, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{A}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x}.\end{aligned}$$

En el caso en que  $A$  es simétrica, obtenemos

$$\nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = 2\mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Otras propiedades similares:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|^2 &= 2I, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} &= \frac{\|\mathbf{x}\|^2 (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^4}.\end{aligned}$$

# Derivadas Matriciales

Ahora mencionamos algunas derivadas matriciales. Sea  $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$  una matriz con entradas  $X = (x_{ij})$ , y  $f : \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable. Entonces definimos

$$\nabla_X f(X) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_{ij}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \frac{\partial f}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1p}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{21}} & \frac{\partial f}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{2p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{n2}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{np}} \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo:** Sea  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(X) = \text{tr } X$ . En este caso

$$f(X) = \sum_{j=1}^n x_{jj} \implies \nabla_X f(X) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = I.$$

# Derivadas Matriciales

**Ejemplo:** Sea  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(X) = \text{tr}(AX)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

En este caso, las entradas de  $AX$  son de la forma  $(AX)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_{kj}$ .

Calculando la traza, obtenemos

$$f(X) = \text{tr}(AX) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (AX)_{jj} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}x_{kj}.$$

De ahí que

$$\nabla_X f(X) = \left( \nabla_{x_{ij}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}x_{kj} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A^T.$$

Portanto  $\nabla_X \text{tr}(AX) = A^T$ .

Similarmente,  $\nabla_X \text{tr}(XA) = A^T$ .

# Derivadas Matriciales

Otras propiedades útiles:

- $\nabla_X \mathbf{a}^T X \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T$ .
- $\nabla_X \text{tr}(AXB) = \nabla_X \text{tr}(BAX) = A^T B^T$ .
- $\nabla_X \text{tr}(X^T A X) = (A + A^T)X$ .
- $\nabla_X \text{tr}(X^{-1}) = -(X^{-T})^2$ .
- $\nabla_X \text{tr}(AX^{-1}) = \nabla_X \text{tr}(X^{-1}A) = -(X^T)^{-1}A^T(X^{-1})^T$ .
- $\nabla_X \det(X) = |X|(X^{-1})^T$ .

Ver una lista más completa de propiedades de derivadas vectoriales y matriciales en [https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix\\_calculus](https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_calculus)