

## **CONDICIONAMIENTO Y ESTABILIDAD II**

ALAN REYES-FIGUEROA  
MÉTODOS NUMÉRICOS II

(AULA 06B) 21.JULIO.2023

## IEEE 754 (estándar):

Representación puntual de  $\mathbb{R}$ . En un sistema de punto flotante, las brechas entre los números representados adyacentes escalan en proporción a la magnitud de los números.

Tenemos base =  $\beta = 2$ , precisión =  $t$  ( $t = 24$  precisión simple,  $t = 53$  precisión doble).

La representación de un número es de la forma

$$x = \left(\frac{m}{\beta^t}\right)\beta^e,$$

donde  $m$  es un número entero en el rango  $\beta^{t-1} \leq m \leq \beta^t - 1$ , y  $e$  es un entero arbitrario. La cantidad  $\frac{m}{\beta^t}$  se conoce entonces como la **mantisa**, mientras que  $e$  es el **exponente**.

# Punto Flotante

La resolución de la máquina se resume tradicionalmente en un número conocido como el **épsilon de máquina**

$$\varepsilon_{maq} = \frac{1}{2}\beta^{1-t}. \quad (1)$$

Este número es la mitad de la distancia entre 1 y el siguiente número de punto flotante representable. En un sentido relativo, este es tan grande como los espacios entre los números de punto flotante. Es decir,  $\varepsilon_{maq}$  tiene la siguiente propiedad:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ existe } x' \text{ representable, tal que } |x - x'| < \varepsilon_{maq}|x|. \quad (2)$$

Denotamos por  $fl : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{F}$  la función que da la aproximación más cercana de punto flotante a un número real. Esto es,  $fl(x)$  es el equivalente a  $x$  redondeado en el sistema de punto flotante.

# Punto Flotante

La desigualdad (2) se expresa en términos de  $fl$  como

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ existe } \varepsilon \text{ con } |\varepsilon| < \varepsilon_{maq} \text{ tal que } fl(x) = x(1 + \varepsilon). \quad (3)$$

Es decir, la diferencia entre un número real y su punto flotante más cercano, siempre menor que  $\varepsilon_{maq}$  (en términos relativos).

**Operaciones de punto flotante:** Denotamos las operaciones  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$  y  $\div$  por  $x \oplus y = fl(x + y)$ ,  $x \ominus y = fl(x - y)$ ,  $x \odot y = fl(x \cdot y)$ ,  $x \oslash y = fl(x/y)$ .

## Teorema (Axioma fundamental aritmética de punto flotante)

*Para todo  $x, y \in \mathbf{F}$ , existe  $\varepsilon$  con  $|\varepsilon| < \varepsilon_{maq}$  tal que*

$$x \odot y = (x \cdot y)(1 + \varepsilon). \quad (4)$$

Así, cada operación aritmética en punto flotante es exacta, hasta un error relativo máximo del tamaño de  $\varepsilon_{maq}$ .

# Estabilidad

Hemos definido un problema matemático como una función  $f : X \rightarrow Y$  desde un espacio vectorial  $X$  de datos a un espacio vectorial  $Y$  de soluciones.

Un algoritmo puede verse como otro mapa  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ .

Más precisamente, sea  $f$  es un problema, y dado un computador cuyo sistema de punto flotante satisface (4), un **algoritmo** para  $f$  (en el sentido amplio del término), y una implementación de este algoritmo en forma de programa informático. Dado un dato  $\mathbf{x} \in X$ , estos datos se redondean y se alimentan como entrada en el algoritmos  $\tilde{f}$ . Al correr el programa, el resultado es una colección de números de punto flotante que pertenecen al espacio vectorial  $Y$ . Denotamos este resultado por  $\tilde{f}(\mathbf{x})$ .

En el mínimo caso,  $\tilde{f}(\mathbf{x})$  se verá afectado por errores de redondeo (pero existen otros posibles problemas que pueden afectar  $\tilde{f}(\mathbf{x})$ ).

Así como  $\tilde{f}$  es el análogo calculado de  $f$ , otras cantidades calculadas se marcarán por tildes. Por ejemplo, la solución calculada del sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  se denotará por  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

Típicamente,  $\tilde{f}$  no es continua, pero aún así un buen algoritmo debe aproximarse al problema asociado  $f$ . Consideramos el **error absoluto** de un cálculo,  $\|\tilde{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\|$ , o el **error relativo**,  $\frac{\|\tilde{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\|}{\|f(\mathbf{x})\|}$ .

## Definición

Decimos que un algoritmo  $\tilde{f}$  para un problema  $f$  es **preciso** si para cada  $\mathbf{x} \in X$ ,

$$\frac{\|\tilde{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\|}{\|f(\mathbf{x})\|} = O(\varepsilon_{maq}). \quad (5)$$

Sin embargo, si el problema  $f$  está mal condicionado, el objetivo de precisión definido por (5) es muy ambicioso. En ese caso, es mejor dar una definición alternativa para la exactitud de un algoritmo.

## Definición

Un algoritmo  $\tilde{f}$  para un problema  $f$  es **estable** si para cada  $\mathbf{x} \in X$ ,

$$\frac{\|\tilde{f}(\mathbf{x}) - f(\tilde{\mathbf{x}})\|}{\|f(\tilde{\mathbf{x}})\|} = O(\varepsilon_{maq}), \quad (6)$$

para alguna  $\tilde{\mathbf{x}}$  con  $\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} = O(\varepsilon_{maq})$ .

Muchos algoritmos de álgebra lineal numérica satisfacen una condición que es a la vez más fuerte y simple que la estabilidad.

## Definición

Decimos que un algoritmo  $\tilde{f}$  para un problema  $f$  es **estable hacia atrás** (backward stable) si para cada  $\mathbf{x} \in X$ ,

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \text{para algún } \tilde{\mathbf{x}} \text{ con } \frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} = O(\varepsilon_{maq}). \quad (7)$$

**Obs!** En cualquier aritmética de máquinas, el número  $\varepsilon_{maq}$  es una cantidad fija. Al hablar del límite  $\varepsilon_{maq} \rightarrow 0$  estamos considerando una idealización de un computador. Las ecuaciones (5)-(7) hablan de la rapidez con la que la solución calculada del algoritmo  $\tilde{f}$  tiende a la solución del problema  $f$ , a medida que la precisión de la máquina se mejora (de forma hipotética).