

## **DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL**

ALAN REYES-FIGUEROA  
MÉTODOS NUMÉRICOS II

(AULA 02) 09.JULIO.2024

# Descomposición Espectral

## Definición

Una **descomposición espectral** de una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una factoración de la forma

$$A = X\Lambda X^{-1},$$

donde  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es no singular, y  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal, cuyas entradas  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  corresponden a los autovalores de  $A$ .

La definición anterior puede escribirse como  $AX = X\Lambda$ , esto es

$$\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{x}_1 & \lambda_2 \mathbf{x}_2 & \dots & \lambda_n \mathbf{x}_n \end{pmatrix}.$$

La descomposición espectral expresa un cambio de base en las coordenadas dadas por los autovectores de  $A$ .

# Descomposición Espectral

El conjunto de autovectores correspondientes a un solo autovalor  $\lambda$  de  $A$ , junto con el vector cero, forma un subespacio de  $E_\lambda$  conocido como el **autoespacio asociado a  $\lambda$** .

**Obs!**  $E_\lambda \subseteq \mathbb{C}^n$ . Es un subespacio invariante:  $AE_\lambda \subseteq E_\lambda$ .

## Definición

La **multiplicidad geométrica** de  $\lambda$  es  $\dim_{\mathbb{R}} E_\lambda = \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(\lambda I - A)$ .

Recordemos que el polinomio característico de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es el polinomio de grado  $n$  dado por  $p_A(z) = \det(zI - A)$ .

## Teorema

$\lambda$  es un autovalor de  $A$  si, y sólo si,  $p_A(\lambda) = 0$ .

# Descomposición Espectral

## Prueba:

$$\begin{aligned}\lambda \text{ es autovalor de } A &\Leftrightarrow \text{ existe } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow \lambda\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \lambda I - A \text{ es singular} \Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0. \quad \square\end{aligned}$$

Por el Teorema Fundamental del Álgebra, una consecuencia del teorema anterior es que

$$p_A(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n),$$

donde los  $\lambda_j$  son todos autovalores de  $A$ .

## Definición

La **multiplicidad algebraica** del autovalor  $\lambda$  es su multiplicidad como raíz del polinomio característico  $p_A(z)$ .

# Descomposición Espectral

## Observaciones:

- Toda matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  posee  $n$  autovalores (contados con multiplicidad).
- Si las raíces de  $p_A(z)$  son todas simples,  $A$  posee  $n$  autovalores distintos.
- Cuando  $X$  es no singular, las matrices  $A$  y  $XAX^{-1}$  poseen igual polinomio característico, autovalores, y multiplicidades algebraicas y geométricas, ya que

$$p_{XAX^{-1}}(z) = \det(zI - XAX^{-1}) = \det(X(zI - A)X^{-1}) = \det X \det(zI - A)(\det X)^{-1} = \det(zI - A) = p_A(z).$$

y  $E_\lambda$  es autoespacio para  $A \Leftrightarrow X^{-1}E_\lambda$  es autoespacio para  $XAX^{-1}$ .

## Teorema

*multiplicidad algebraica  $\lambda \geq$  multiplicidad geométrica  $\lambda$ ,  $\forall \lambda$  autovalor.*

# Descomposición Espectral

Prueba: Sea  $k$  la multiplicidad geométrica de  $\lambda$  para la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Formamos una matriz  $V \in \mathbb{R}^{n \times k}$  cuyas  $k$  columnas constituyen una base ortonormal del autoespacio  $E_\lambda = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$ . Extendemos  $V$  a una matriz unitaria cuadrada  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , y obtenemos  $V^*AV$  en la forma

$$B = V^*AV = \begin{pmatrix} \lambda I_k & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix},$$

donde  $C \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ .

Luego,  $\det(zI - B) = \det(zI - \lambda I_k) \det(zI - D) = (z - \lambda)^k \det(zI - D)$ .

De ahí que la multiplicidad algebraica de  $\lambda$  como autovalor de  $B$  es al menos  $k$ , y dado que las transformaciones de semejanza preservan multiplicidades, lo mismo es cierto para  $A$ .  $\square$

# Descomposición Espectral

## Definición

Un autovalor cuya multiplicidad algebraica excede su multiplicidad geométrica es un **autovalor defectuoso**. Una matriz que tiene uno o más autovalores defectuosos se llama una **matriz defectuosa**.

- Las matrices diagonales no son defectuosas.
- Veremos luego que las matrices simétricas no son defectuosas.

## Definición

Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es **diagonalizable** si admite una descomposición espectral.

## Teorema

Una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es diagonalizable si, y sólo si, no es defectuosa.

# Descomposición Espectral

Prueba: ( $\Rightarrow$ ) Dada una descomposición espectral  $A = X\Lambda X^{-1}$  para  $A$ ,  $\Rightarrow \Lambda$  es similar a  $A$ , con los mismos autovalores y las mismas multiplicidades. Como  $\Lambda$  es diagonal, no es defectuosa y, por lo tanto, lo mismo vale para  $A$ .

( $\Leftarrow$ ) Una matriz no defectuosa debe tener  $n$  autovectores l.i. (ya que autovectores de diferente autovalor son l.i., y cada cada autovalor contribuye exactamente con tantos autovectores l.i. como su multiplicidad geométrica). Si estos  $n$  autovectores l.i. se forman en las columnas de una matriz  $X$ , entonces  $X$  es no singular y tenemos  $A = X\Lambda X^{-1}$ .  $\square$



# Descomposición Espectral

Ejemplo: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tanto  $A$  como  $B$  tienen un polinomio característico  $(z - 2)^3$ , por lo que hay un solo autovalor  $\lambda = 2$  de multiplicidad algebraica 3.

En el caso de  $A$ , el autoespacio  $E_\lambda = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ , mientras que para  $B$ ,  $E_\lambda = \langle \mathbf{e}_1 \rangle$ , de modo que  $\lambda$  es un autovalor defectuoso para  $B$ .

Portanto,  $A$  es diagonalizable, pero  $B$  no.

(Ver libro *Linear Algebra* de HOFFMAN Y KUNZE).

# Descomposición Espectral

En ocasiones, no sólo ocurre que una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  admite  $n$  autovectores l.i., sino que éstos son ortogonales.

## Definición

Decimos que  $A$  es **unitariamente diagonalizable** si existe una matriz ortogonal  $U$  tal que  $A = U\Lambda U^T$ .

## Teorema (Teorema espectral / Descomposición espectral)

Sea  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  una matriz simétrica (operador auto-adjunto). Entonces,  $A$  admite una descomposición de la forma

$$A = U\Lambda U^T,$$

donde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$  es la matriz diagonal formada por los autovalores  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_d$  de  $A$ , y

# Descomposición Espectral

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

es una matriz ortogonal cuyas columnas son los autovectores de  $A$ , con  $\mathbf{u}_i$  el autovector correspondiente a  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ .

En otras palabras,  $A$  es una suma de matrices de rango 1:  $A = \sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$ .

## Comentarios:

- El teorema espectral dice que toda matriz cuadrada  $A$ , real, simétrica, posee una base ortonormal, formada por autovectores de  $A$ .
- Para  $1 \leq k \leq d$ , la suma  $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$ , es una matriz de rango  $k$ .

# Descomposición Espectral

## Observaciones:

- $A$  simétrica y semi-definida positiva,  $\Rightarrow$  existe  $A^{1/2}$  tal que  $A^{1/2}A^{1/2} = A$ .
- Si todos los autovalores de  $A$  son no-negativos,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0$ , entonces  $\Lambda^{1/2}$  existe y

$$\Lambda^{1/2} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)^{1/2} = \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_d^{1/2}).$$

- A partir de la descomposición espectral podemos calcular  $A^{1/2}$ . De hecho, si  $A = U\Lambda U^T$ , definimos  $A^{1/2} = U\Lambda^{1/2}U^T$ , y

$$\begin{aligned} A^{1/2}A^{1/2} &= (U\Lambda^{1/2}U^T)(U\Lambda^{1/2}U^T) = U\Lambda^{1/2}(U^T U)\Lambda^{1/2}U^T \\ &= U\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}U^T = U\Lambda U^T = A. \end{aligned}$$

- En general  $A \succeq 0 \Rightarrow A^p = U\Lambda^p U^T$ , para todo  $p \in \mathbb{R}$ .

# Teorema Espectral

Prueba: (Teorema espectral).

La prueba es por inducción sobre  $n = \dim A$ . Para  $n = 1$ , el resultado es inmediato pues

$$A = [a] = [1][a][1] = [1][a][1]^T.$$

Suponga que el resultado es válido para  $n - 1$ . Mostramos que es posible extenderlo a  $n$ . Para  $n > 1$ , sea  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  una base ortonormal cualquiera para  $\mathbb{R}^n$ , y representamos un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  arbitrario por

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n.$$

Podemos pensar  $\mathbf{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como una función de las coordenadas, esto es

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Consideramos el problema de optimización:

$$\text{maximizar } \langle \mathbf{w}, A\mathbf{w} \rangle = \mathbf{w}^T A \mathbf{w}, \text{ sujeto a } \|\mathbf{w}\|_2 = \mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1. \quad (1)$$

# Teorema Espectral

El lagrangiano de este problema es  $\mathcal{L}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T A \mathbf{w} - \lambda(\mathbf{w}^T \mathbf{w} - 1)$ . Del criterio de optimalidad, resulta

$$\nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = 2A\mathbf{w} - 2\lambda\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad \nabla_{\lambda} \mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^T \mathbf{w} - 1 = 0. \quad (2)$$

La primera condición en (2) implica que  $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$ , de modo que el  $\mathbf{w}^*$  óptimo debe ser un autovector de  $A$ , y  $\lambda$  su autovalor. La segunda condición implica que  $\|\mathbf{w}^*\|_2 = 1$ . De hecho  $\max \mathbf{w}^T A \mathbf{w} = \max \mathbf{w}^T (\lambda \mathbf{w}) = \max \lambda \|\mathbf{w}\|_2^2 = \max \lambda$ , implica que  $\mathbf{w}^*$  corresponde al autovector de  $\lambda_1$ , el mayor autovalor de  $A$ .

Hallado el máximo  $\mathbf{w}^*$ , hacemos  $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|_2}$  y  $\lambda_1 = \lambda$ . Consideramos ahora el subespacio  $W_2 = (\langle \mathbf{w} \rangle)^\perp \equiv \mathbb{R}^{n-1}$ . Como  $A : \langle \mathbf{w} \rangle \rightarrow \langle \mathbf{w} \rangle$ , entonces también  $A : \langle \mathbf{w} \rangle^\perp \rightarrow \langle \mathbf{w} \rangle^\perp$

# Teorema Espectral

Esto se debe a que si  $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{w} \rangle^\perp$ , entonces

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0 \Rightarrow \langle A\mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0, \text{ así } A\mathbf{x} \in \langle \mathbf{w} \rangle^\perp.$$

Por inducción, el espacio  $(n - 1)$ -dimensional  $W_0$  tiene una base ortonormal  $\{\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  formada por autovectores de  $A$ , cada uno con un autovalor real, y por construcción  $\mathbf{u}_1$  es un vector unitario ortogonal a cada uno de  $\{\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ .

Entonces  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  es una base ortonormal para  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores de  $A$ , lo que prueba el teorema.  $\square$