UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN
VERITAS • LIBERTAS • JVSTITIA

FACULTAD de CIENCIAS ECONÓMICAS

Repaso de probabilidad y estadística I

Alan Reyes-Figueroa

Elements of Machine Learning (Aula 02) 12.enero.2023

Probabilidades

Construcción. Punto de partida: un experimento

- Resultado del experimento es $\omega \in \Omega$ $\rightsquigarrow$ *espacio muestral.*
- Interés en ciertos eventos A $\rightsquigarrow$ $\sigma-$*álgebra*
- Una probabilidad $\mathbb{P}$ es una función sobre ciertos eventos $\mathbb{P} : A \mapsto \mathbb{R}$.

Ejemplo 1

Experimento: lanzar un dado.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = [1..6]$

Algunos eventos

Representación	Evento
$A_1 = \{2, 4, 6\}$	obtener un número par
$A_2 = \{3\}$	obtener 3
$A_3 = \{1, 2, 4, 5\}$	obtener un número no múltiplo de 3

Ejemplo 2

Experimento: lanzar dos dados.

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),\dots,(5,6),(6,6)\}$

Probablemente aquí sea más simple representarlo como

$\Omega = \{(a,b) : a,b \in [1..6]\} = [1..6] \times [1..6]$

Algunos eventos

Representación	Evento
$A_1 = \{(1,6),(2,5),(3,4),\dots,(6,1)\}$	que los dados sumen 7
$A_2 = \{(1,3),(3,1),\dots,(6,3),(3,6)\}$	que aparezca al menos un 3

Otros espacios asociados: $\Omega_1 = [1..6]$, ¿Cuál es el mínimo de los dos dados?

Probabilidad

Otros ejemplos (para pensar)

Especificar un espacio muestral para los siguientes experimentos:

a) Lanzar una moneda.
¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de "caras"?

Otros ejemplos (para pensar)

Especificar un espacio muestral para los siguientes experimentos:

a) Lanzar una moneda.
¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de "caras"?

b) Lanzar una moneda n veces. (Hacer para $n = 2, 3, 4$)
¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de "caras"?

Otros ejemplos (para pensar)

Especificar un espacio muestral para los siguientes experimentos:

a) Lanzar una moneda.
¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de “caras”?

b) Lanzar una moneda n veces. (Hacer para $n = 2, 3, 4$)
¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de “caras”?

c) Lanzar una moneda hasta que aparezca “cara”. ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de lanzamientos?

Otros ejemplos (para pensar)

Especificar un espacio muestral para los siguientes experimentos:

a) Lanzar una moneda.
¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de “caras”?

b) Lanzar una moneda n veces. (Hacer para $n = 2, 3, 4$)
¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de “caras”?

c) Lanzar una moneda hasta que aparezca “cara”. ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de lanzamientos?

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Definición

Una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ es una ***medida de probabilidad*** *si satisface*

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- *para cualquier colección enumerable de eventos exclusivos $E_i \in \mathcal{F}$, vale*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup E_i\right) = \sum \mathbb{P}(E_i) \quad \textit{(enumerablemente aditiva)}.$$

UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Propiedads

Propiedades de una probabilidad (introducidos por Kolmogorov en 1933).

Propiedades

1. $\mathbb{P}(E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{F}$ *(no-negativa).*
2. $\mathbb{P}(E)$ *es siempre finita, y* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(unitariedad).*
3. *Cualquier colección enumerable y mutuamente excluyente de eventos* $E_i \in \mathcal{F}$*, satisface*
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i), \qquad (\sigma\text{-aditiva}).$$

Consecuencias

Propiedades

Si $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad sobre Ω, entonces

1. *(Monotonicidad) Si $A \subseteq B$ son eventos, entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*
2. *(Conjunto vacío) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.*
3. *(Complemento) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, para todo evento $A \in \mathcal{F}$.*
4. *(Cotas para $\mathbb{P}$) Para todo evento E, $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$.*
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Caso finito

Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$.

Distribución de conteo o distribución uniforme: Corresponde a elegir un elemento al azar.

Para cada $A \subseteq \Omega$, se tiene

$$\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = |A|/k.$$

En particular, sin $A_i = \{\omega_i\}$, entonces

$$\mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1/k.$$

Caso general: Suponga que $\mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$, para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Entonces

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Referencias

- Lefebvre. *Basic Probability Theory with Applications*. Springer.

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN