Propiedades de Integrabilidad

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 04) 23.enero.2023

Teorema (Modificación de la Integral)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas. Si la derivada g' existe y es continua en (a, b), y f es g-integrable en $[a, b]$, entonces el producto fg es Riemann-integrable en $[a, b]$, y

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$$

Teorema (Modificación de la Integral)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas. Si la derivada g' existe y es continua en (a, b), y f es g-integrable en $[a, b]$, entonces el producto fg es Riemann-integrable en $[a, b]$, y

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$$

Prueba: Como g' es continua en $[a, b]$, entonces g' es uniformmente continua.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Teorema (Modificación de la Integral)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas. Si la derivada g' existe y es continua en (a, b), y f es g-integrable en $[a, b]$, entonces el producto fg es Riemann-integrable en $[a, b]$, y

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$$

Prueba: Como g' es continua en $[a, b]$, entonces g' es uniformmente continua.
Sea $\varepsilon > 0$, y tomemos un partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$, tal que si

$$\xi_i, \zeta_i \in [t_i, t_{i-1}] \qquad \Longrightarrow \qquad \big|g'(\xi_i) - g'(\zeta_i)\big| < \tfrac{\varepsilon}{|f||(b-a)},$$

donde $||f|| = \sup f$ en $[a, b]$.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Teorema (Modificación de la Integral)

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitadas. Si la derivada g' existe y es continua en (a,b), y f es g-integrable en $[a,b]$, entonces el producto fg es Riemann-integrable en $[a,b]$, y

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$$

Prueba: Como g' es continua en $[a,b]$, entonces g' es uniformmente continua. Sea $\varepsilon > 0$, y tomemos un partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$, tal que si

$$\xi_i, \zeta_i \in [t_i, t_{i-1}] \qquad \Longrightarrow \qquad \left|g'(\xi_i) - g'(\zeta_i)\right| < \tfrac{\varepsilon}{||f||(b-a)},$$

donde $||f|| = \sup f$ en $[a,b]$.

Consideramos la diferencia entre las sumas $s(P,f,g)$ y $s(P,fg')$, usando los puntos ξ_i como representantes de P:

Propiedades

$$\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| \;=\; \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(t\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right|.$$

Por el teorema del valor medio, existe $\zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que $g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)$.

Propiedades

$$\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(t\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right|.$$

Por el teorema del valor medio, existe $\zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que $g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)$. Luego,

Propiedades

$$\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| \quad = \quad \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(t\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right|.$$

Por el teorema del valor medio, existe $\zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que $g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)$. Luego,

$$\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| \quad = \quad \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right|$$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Propiedades

$$\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| \;=\; \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(t\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right|.$$

Por el teorema del valor medio, existe $\zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que
$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| \left|g'(\zeta_i) - g'(\xi_i)\right| \left(t_i - t_{i-1}\right)
\end{aligned}$$

$$\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(t\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right|.$$

Por el teorema del valor medio, existe $\zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que $g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| \left|g'(\zeta_i) - g'(\xi_i)\right| \left(t_i - t_{i-1}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} ||f|| \cdot \tfrac{\varepsilon}{||f||(b-a)} \left(t_i - t_{i-1}\right)
\end{aligned}$$

Propiedades

$$\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(t\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right|.$$

Por el teorema del valor medio, existe $\zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que $g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| \left|g'(\zeta_i) - g'(\xi_i)\right| \left(t_i - t_{i-1}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} ||f|| \cdot \tfrac{\varepsilon}{||f||(b-a)} \left(t_i - t_{i-1}\right) = \varepsilon. \square
\end{aligned}$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Propiedades

$$\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(t\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right|.$$

Por el teorema del valor medio, existe $\zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que $g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\left|s(P,f,g) - s(P,fg')\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\zeta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\xi_i)\left(t_i - t_{i-1}\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| \left|g'(\zeta_i) - g'(\xi_i)\right| \left(t_i - t_{i-1}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} ||f|| \cdot \tfrac{\varepsilon}{||f||(b-a)} \left(t_i - t_{i-1}\right) = \varepsilon. \square
\end{aligned}$$

Ejemplos

Ejemplo 1: Calcular $\int_0^{\pi/2} \sin t \, d \sin t$.

Ejemplos

Ejemplo 1: Calcular $\int_0^{\pi/2} \sin t \, d \sin t$.

Ejemplo 2: Calcular $\int_0^{\pi/2} x^2 \, d(x - \lfloor x \rfloor)$.

Definición

*Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, y sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos la **variación** de f respecto de P como*

$$v_f(P) = \sum_{i=1}^{n} \big|f(t_i) - f_(t_{i-1})\big|.$$

Variación Limitada

Definición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, y sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos la ***variación*** *de f respecto de P como*

$$v_f(P) = \sum_{i=1}^{n} \big| f(t_i) - f_(t_{i-1}) \big|.$$

Definición

Sean f y P como arriba. Decimos que la función f es ***de variación limitada*** *(**de variación acotada**), cuando el conjunto $\{v_f(P) : P \text{ es partición de } [a, b]\}$ es limitado.*

Definición

*Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, y sea $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos la **variación** de f respecto de P como*

$$v_f(P) = \sum_{i=1}^{n} \big| f(t_i) - f_(t_{i-1}) \big|.$$

Definición

*Sean f y P como arriba. Decimos que la función f es **de variación limitada** (**de variación acotada**), cuando el conjunto $\{v_f(P) : P \text{ es partición de } [a, b]\}$ es limitado.*
*En ese caso, definimos la **variación total** de f en $[a, b]$ por*

$$V_f\,[a, b] = \sup\{v_f(P) : P \textit{ es partición de } [a, b]\}.$$

Definición

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función, y sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$. Definimos la ***variación*** *de f respecto de P como*

$$v_f(P) = \sum_{i=1}^{n} \Big|f(t_i) - f_(t_{i-1})\Big|.$$

Definición

Sean f y P como arriba. Decimos que la función f es ***de variación limitada*** *(**de variación acotada**), cuando el conjunto $\{v_f(P) : P \text{ es partición de } [a,b]\}$ es limitado.*
En ese caso, definimos la ***variación total*** *de f en $[a,b]$ por*

$$V_f\,[a,b] = \sup\{v_f(P) : P \text{ es partición de } [a,b]\}.$$

Denotamos por $\mathbf{BV[a,b]}$ al conjunto de las funciones de variación limitada en $[a,b]$.

Definición

*Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función, y sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$. Definimos la **variación** de f respecto de P como*

$$v_f(P) = \sum_{i=1}^{n} \big| f(t_i) - f_(t_{i-1}) \big|.$$

Definición

*Sean f y P como arriba. Decimos que la función f es **de variación limitada** (**de variación acotada**), cuando el conjunto $\{v_f(P) : P \text{ es partición de } [a,b]\}$ es limitado.*
*En ese caso, definimos la **variación total** de f en $[a,b]$ por*

$$V_f\,[a,b] = \sup\{v_f(P) : P \textit{ es partición de } [a,b]\}.$$

Denotamos por $\mathbf{BV}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ al conjunto de las funciones de variación limitada en $[a,b]$.

Teorema (Propiedades)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, P, Q *particiones de* $[a, b]$. *Entonces:*

i) $P \subseteq Q \;\Rightarrow\; v_f(P) \leq v_Q(P)$.

Teorema (Propiedades)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, P, Q particiones de $[a, b]$. Entonces:

i) $P \subseteq Q \;\Rightarrow\; v_f(P) \leq v_Q(P)$.

ii) *Si f es monótona no-decreciente, entonces $v_f(P) = f(b) - f(a)$. Si f es monótona no-creciente, entonces $v_f(P) = f(a) - f(b)$.*
En cualquiera de los dos casos, f es de variación limitada, y $V_f[a, b] = |f(b) - f(a)|$.

Teorema (Propiedades)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, P, Q *particiones de* $[a, b]$. *Entonces:*

i) $P \subseteq Q \;\Rightarrow\; v_f(P) \leq v_Q(P)$.

ii) *Si* f *es monótona no-decreciente, entonces* $v_f(P) = f(b) - f(a)$. *Si* f *es monótona no-creciente, entonces* $v_f(P) = f(a) - f(b)$.
En cualquiera de los dos casos, f *es de variación limitada, y* $V_f[a, b] = |f(b) - f(a)|$.

iii) *Si* f *es constante, entonces* $v_f(P) = 0$. *En este caso,* f *es de variación limitada y* $V_f[a, b] = 0$.

Teorema (Propiedades)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, P, Q *particiones de* $[a, b]$. *Entonces:*

i) $P \subseteq Q \;\Rightarrow\; v_f(P) \leq v_Q(P)$.

ii) *Si* f *es monótona no-decreciente, entonces* $v_f(P) = f(b) - f(a)$. *Si* f *es monótona no-creciente, entonces* $v_f(P) = f(a) - f(b)$.
En cualquiera de los dos casos, f *es de variación limitada, y* $V_f[a, b] = |f(b) - f(a)|$.

iii) *Si* f *es constante, entonces* $v_f(P) = 0$. *En este caso,* f *es de variación limitada y* $V_f[a, b] = 0$.

iv) *Si* f *es Lispchitz, con constante* L, *entonces* f *es de variación limitada y* $V_f[a, b] \leq L(b - a)$.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Teorema (Propiedades)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, P, Q *particiones de* $[a, b]$. *Entonces:*

i) $P \subseteq Q \;\Rightarrow\; v_f(P) \leq v_Q(P)$.

ii) *Si* f *es monótona no-decreciente, entonces* $v_f(P) = f(b) - f(a)$. *Si* f *es monótona no-creciente, entonces* $v_f(P) = f(a) - f(b)$.
En cualquiera de los dos casos, f *es de variación limitada, y* $V_f[a, b] = |f(b) - f(a)|$.

iii) *Si* f *es constante, entonces* $v_f(P) = 0$. *En este caso,* f *es de variación limitada y* $V_f[a, b] = 0$.

iv) *Si* f *es Lispchitz, con constante* L, *entonces* f *es de variación limitada y* $V_f[a, b] \leq L(b - a)$.

v) *Si* f *es diferenciable y tal que* $|f'(t)| \leq L$ *en* $[a, b]$, *entonces* f *es de variación limitada y* $V_f[a, b] \leq L(b - a)$.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Teorema (Propiedades)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, P, Q particiones de $[a, b]$. Entonces:

i) $P \subseteq Q \;\Rightarrow\; v_f(P) \leq v_Q(P)$.

ii) *Si f es monótona no-decreciente, entonces $v_f(P) = f(b) - f(a)$. Si f es monótona no-creciente, entonces $v_f(P) = f(a) - f(b)$.*
En cualquiera de los dos casos, f es de variación limitada, y $V_f[a, b] = |f(b) - f(a)|$.

iii) *Si f es constante, entonces $v_f(P) = 0$. En este caso, f es de variación limitada y $V_f[a, b] = 0$.*

iv) *Si f es Lispchitz, con constante L, entonces f es de variación limitada y $V_f[a, b] \leq L(b - a)$.*

v) *Si f es diferenciable y tal que $|f'(t)| \leq L$ en $[a, b]$, entonces f es de variación limitada y $V_f[a, b] \leq L(b - a)$.*

Variación Limitada

Ejemplo: Consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Proposición

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funciones en* $\in BV[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Entonces, valen las siguientes propiedades:*

i) $|f(x)| \leq |f(a)| + V_f[a, b]$, *para todo* $x \in [a, b]$.

Proposición

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones en $\in BV[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, valen las siguientes propiedades:

i) $|f(x)| \leq |f(a)| + V_f[a, b]$, *para todo* $x \in [a, b]$.

ii) $\alpha f \in BV[a, b]$ *y* $V_{\alpha f}[a, b] = |\alpha| V_f[a, b]$.

Proposición

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funciones en* $\in BV[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Entonces, valen las siguientes propiedades:*

i) $|f(x)| \leq |f(a)| + V_f[a, b]$, *para todo* $x \in [a, b]$.

ii) $\alpha f \in BV[a, b]$ *y* $V_{\alpha f}[a, b] = |\alpha| V_f[a, b]$.

iii) $f + g \in BV[a, b]$ *y* $V_{f+g}[a, b] \leq V_f[a, b] + V_g[a, b]$.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Proposición

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funciones en* $\in BV[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Entonces, valen las siguientes propiedades:*

i) $|f(x)| \leq |f(a)| + V_f[a, b]$, *para todo* $x \in [a, b]$.

ii) $\alpha f \in BV[a, b]$ *y* $V_{af}[a, b] = |\alpha| V_f[a, b]$.

iii) $f + g \in BV[a, b]$ *y* $V_{f+g}[a, b] \leq V_f[a, b] + V_g[a, b]$.

iv) $fg \in BV[a, b]$ *y* $V_{fg}[a, b] \leq ||g|| V_f[a, b] + ||f|| V_g[a, b]$.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Proposición

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones en $\in BV[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, valen las siguientes propiedades:

i) $|f(x)| \leq |f(a)| + V_f[a, b]$, *para todo* $x \in [a, b]$.

ii) $\alpha f \in BV[a, b]$ *y* $V_{\alpha f}[a, b] = |\alpha| V_f[a, b]$.

iii) $f + g \in BV[a, b]$ *y* $V_{f+g}[a, b] \leq V_f[a, b] + V_g[a, b]$.

iv) $fg \in BV[a, b]$ *y* $V_{fg}[a, b] \leq ||g|| V_f[a, b] + ||f|| V_g[a, b]$.

v) $BV[a, b]$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

Proposición

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones en $\in BV[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, valen las siguientes propiedades:

i) $|f(x)| \leq |f(a)| + V_f[a, b]$, *para todo* $x \in [a, b]$.

ii) $\alpha f \in BV[a, b]$ *y* $V_{\alpha f}[a, b] = |\alpha| V_f[a, b]$.

iii) $f + g \in BV[a, b]$ *y* $V_{f+g}[a, b] \leq V_f[a, b] + V_g[a, b]$.

iv) $fg \in BV[a, b]$ *y* $V_{fg}[a, b] \leq ||g|| V_f[a, b] + ||f|| V_g[a, b]$.

v) $BV[a, b]$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

vi) *La función* $f \to V_f[a, b]$ *no es una norma para* $BV[a, b]$.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Proposición

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones en $\in BV[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, valen las siguientes propiedades:

i) $|f(x)| \leq |f(a)| + V_f[a,b]$, *para todo* $x \in [a,b]$.

ii) $\alpha f \in BV[a,b]$ *y* $V_{\alpha f}[a,b] = |\alpha| V_f[a,b]$.

iii) $f + g \in BV[a,b]$ *y* $V_{f+g}[a,b] \leq V_f[a,b] + V_g[a,b]$.

iv) $fg \in BV[a,b]$ *y* $V_{fg}[a,b] \leq ||g|| V_f[a,b] + ||f|| V_g[a,b]$.

v) $BV[a,b]$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

vi) *La función* $f \to V_f[a,b]$ *no es una norma para* $BV[a,b]$*. Sin embargo,* $f \to ||f||_{BV} = |f(a)| + V_f[a,b]$ *sí lo es.*

Prueba: Ejercicio! $\square$

Teorema (Integración por Partes)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones limitadas. Entonces, f es g-integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, g es f-integrable en $[a, b]$. En este caso, vale

$$\int_a^b f\, dg + \int_a^b g\, df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Teorema (Integración por Partes)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones limitadas. Entonces, f es g-integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, g es f-integrable en $[a, b]$. En este caso, vale

$$\int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Prueba: Sean $\int_a^c f\,dg = I_1$ y $\int_c^b f\,dg = .\square$

Teorema (Criterio de Integrabilidad de Riemann)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones limitadas, g monótona no-decreciente en $[a, b]$. Entonces, f es g-integrable en $[a, b] \iff$ para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de $[a, b]$ tal que si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es refinamiento de P_ε, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) \leq \varepsilon,$$

donde $m_i = \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f$ y $M_i = \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f$.

Teorema (Criterio de Integrabilidad de Riemann)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funciones limitadas, g monótona no-decreciente en* $[a, b]$*. Entonces,* f *es g-integrable en* $[a, b] \iff$ *para todo* $\varepsilon > 0$*, existe una partición* P_ε *de* $[a, b]$ *tal que si* $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ *es refinamiento de* P_ε*, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) \leq \varepsilon,$$

donde $m_i = \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f$ *y* $M_i = \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f$*.*

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA