

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA Facultad de

Ciencias y Humanidades



¿Cómo envolver la 3-esfera en la 2-esfera? Una propuesta  
para facilitar el acceso y la comprensión de las estructuras  
fundamentales de la topología algebraica

Trabajo de graduación presentado por Javier Enrique Mejia Esquivel  
para optar al grado académico de Licenciado en Matemática Aplicada

Guatemala, 2022



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA Facultad de

Ciencias y Humanidades



¿Cómo envolver la 3-esfera en la 2-esfera? Una propuesta  
para facilitar el acceso y la comprensión de las estructuras  
fundamentales de la topología algebraica

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por Javier  
Enrique Mejia Esquivel para optar al grado académico de Licenciado  
en Matemática Aplicada

Guatemala, 2022

Vo.Bo.

---

Lic. José Ricardo Barrientos Quezada

Tribunal examinador:

---

Lic. José Ricardo Barrientos Quezada

---

MSc. Dorval José Manuel Carias Samayoa

---

MSc. Alan Gerardo Reyes Figueroa

Fecha de aprobación del examen de graduación:

(Guatemala, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2022 )

# Índice general

|   |          |
|---|----------|
| <b>1. Introducción</b>                            | <b>1</b> |
| <b>2. Visiones de la topología algebraica</b>     | <b>3</b> |
| 2.1. Visión histórica . . . . .                   | 3        |
| 2.1.1. Homología: . . . . .                       | 4        |
| 2.1.2. El grupo fundamental: . . . . .            | 8        |
| 2.2. Visión intuitiva . . . . .                   | 9        |
| 2.2.1. Categorías y funtores . . . . .            | 10       |
| 2.2.2. Homología, como marco conceptual . . . . . | 12       |
| 2.2.3. Homotopía intuitiva . . . . .              | 14       |
| 2.3. Visión formal . . . . .                      | 14       |
| 2.3.1. Homología formal . . . . .                 | 15       |
| 2.3.2. Homotopía formal . . . . .                 | 16       |
| 2.3.3. Grupos de homotopía superior . . . . .     | 18       |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 2.4.      | Aplicaciones . . . . .   | 20        |
| 2.4.1.    | Física . . . . .   | 20        |
| 2.4.2.    | Química . . . . .  | 20        |
| 2.4.3.    | Ingeniería . . . . .   | 21        |
| <b>3.</b> | <b>Presentación actual de la topología algebraica</b>  | <b>23</b> |
| 3.1.      | ¿Por qué es fácil entender el grupo fundamental, pero no los grupos de homotopía superior? . . . . . | 26        |
| <b>4.</b> | <b>Grupos de Homotopía</b>   | <b>29</b> |
| 4.0.1.    | Fibrados . . . . .   | 32        |
| 4.0.2.    | Suspensiones . . . . .   | 35        |
| 4.1.      | Propiedades y teoremas auxiliares . . . . .  | 37        |
| 4.1.1.    | Teoremas sobre los grupos de homotopía . . . . .   | 38        |
| 4.1.2.    | Teoremas sobre fibrados . . . . .  | 39        |
| 4.1.3.    | Teoremas sobre suspensiones . . . . .  | 40        |
| <b>5.</b> | <b>Ejemplos</b>  | <b>41</b> |
| 5.1.      | $\pi_1(S^1)$ . . . . .   | 41        |
| 5.2.      | $\pi_1(T^2)$ . . . . .   | 44        |
| 5.3.      | $\pi_2(S^2)$ . . . . .   | 46        |

|           |                     |           |
|-----------|---------------------|-----------|
| 5.4.      | $\pi_2(S^1)$        | 47        |
| 5.5.      | $\pi_3(S^2)$        | 48        |
| <b>6.</b> | <b>Conclusiones</b> | <b>55</b> |

# Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| 2.1. Diagrama de una homotopía entre dos curvas, $\gamma_0$ y $\gamma_1$ . Extraída de [1] . . . . .                       | 16 |
| 2.2. Diagrama de la operación concatenación de clases de homotopía actuando en representantes $f$ y $g$ . . . . .          | 18 |
| 2.3. Diagrama de la operación concatenación en dimensiones más altas . . . . .   | 19 |
| 4.1. Fibrado de $\mathbb{R}$ a $S^1$ . Extraído de [2] . . . . .   | 32 |
| 4.2. Suspensión de $S^1$ . . . . .   | 36 |
| 4.3. Suspensión de $S^0$ . . . . .   | 36 |
| 5.1. Representación de $S^1$ en $\mathbb{C}$ . . . . .   | 48 |
| 5.2. Representación de $S^2$ como $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . . . . .   | 49 |
| 5.3. Representación de $S^3$ en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ . . . . .   | 49 |
| 5.4. Ilustración de $S^3$ como una colección de toros concéntricos de todos los posibles radios. Extraída de [2] . . . . . | 50 |



|   |    |
|---|----|
| 5.5. Etiquetado de toros de $S^3$ . . . . .                               | 51 |
| 5.6. Interpretación geométrica de $p(T_\rho)$ . . . . .                   | 51 |
| 5.7. Fibra de $p$ . . . . .   | 52 |
| 5.8. Visualización de secciones del fibrado de Hopf. Extraído de [3]      | 53 |
| 5.9. Visualización desde el eje $z$ del fibrado de Hopf. Extraído de [3]  | 53 |
| 5.10. Visualización desde el eje $y$ del fibrado de Hopf. Extraído de [3] | 53 |

## Resumen

En este trabajo partimos del escrito de Poincaré que da origen a la topología algebraica, *Analysis Situs* para cuestionar el nivel técnico requerido para calcular  $\pi_3(S^2)$ . Notamos que las ideas originales de Poincaré no tenían altos requerimientos técnicos y eran más bien intuitivas.

Planteamos y resolvemos la pregunta ¿por qué es fácil entender el grupo fundamental pero no el resto de grupos de homotopía? y encontramos que la respuesta está en el uso de trayectorias y el orden de los números reales. Planteamos que las trayectorias son intuitivas pues son una idea impresa en la naturaleza humana, en particular en la abstracción del movimiento y de los recorridos.

Luego hacemos una presentación más ligera de las herramientas necesarias para calcular algunos grupos de homotopía. Esta se basa en una definición formal que se puede traducir a un algoritmo más intuitivo. Presentamos dos herramientas auxiliares, los fibrados y las suspensiones.

Por último calculamos varios grupos de homotopía,  $\pi_1(S^1)$ ,  $\pi_1(T^2)$ ,  $\pi_2(S^2)$ ,  $\pi_2(S^1)$  y  $\pi_3(S^2)$ . Para calcular  $\pi_1(S^1)$  utilizamos herramientas de variable compleja. Para  $\pi_1(T^2)$  utilizamos un teorema auxiliar completamente contenido en la teoría. Para  $\pi_2(S^2)$  utilizamos suspensiones y el teorema de Freudenthal. Generalizamos el resultado a  $\pi_n(S^n)$ . Para  $\pi_2(S^1)$  utilizamos un fibrado y su secuencia exacta. Lo generalizamos a  $\pi_n(S^1)$ ,  $n > 1$

$\pi_3(S^2)$  es el objetivo de este trabajo. Para su cálculo detallamos completamente el fibrado de Hopf, y damos una interpretación geométrica. Para afianzar la intuición mostramos imágenes de secciones del fibrado. Luego utilizamos algunos de los cálculos anteriores, y la secuencia exacta del fibrado para mostrar que  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$

# Capítulo 1

## Introducción

La historia de la topología algebraica inicia en 1895 cuando Henri Poincaré publica *Analysis Situs* [4]. Dividido en 18 capítulos, *Analysis Situs* presenta la idea de estudiar puntos, líneas, y superficies solamente a través de su posición relativa, sin tomar en cuenta sus dimensiones. El trabajo de Poincaré está escrito de forma muy intuitiva. Las definiciones y teoremas no son el hilo conductor de *Analysis Situs*. En cambio, Poincaré utiliza ejemplos, cálculos, e ideas vagas para cumplir su objetivo. Este estilo intuitivo le costó muchas críticas de sus colegas. En respuesta a esas críticas publicó cinco trabajos suplementarios a *Analysis Situs* entre 1899 y 1904. En el último de estos trabajos suplementarios se plantea la conjetura de Poincaré resuelta por Perelman en 2003. [5]

Con el paso del tiempo la teoría de la topología algebraica se fue haciendo cada vez más formal. Casi 30 años después de publicado el trabajo de Poincaré, empiezan a aparecer textos de topología que incluyen el estudio de Homología, por ejemplo los textos de Veblen, Lefschetz, Seifert, Threlfall, Alexandroff y Hopf. Estos nombres aparecerán más adelante en este mismo trabajo. En la década que sigue a estas publicaciones empiezan a aparecer

textos que incluyen el estudio de Homotopía. [6]

El hecho de que los grupos de Homotopía no se hayan estudiado sino hasta 10 años después de los grupos de Homología es consistente con la preferencia de los cursos de topología algebraica modernos de presentar las estructuras en el siguiente orden:

1. Grupo fundamental (primer grupo de homotopía)
2. Grupos de Homología
3. Otras herramientas (principalmente complejos simpliciales)
4. Grupos de Homotopía

También es consistente con la percepción de la mayoría de matemáticos de que los grupos de homología son más cómodos de trabajar que los grupos de homotopía. Veremos, más adelante, que esta percepción es adecuada cuando uno se refiere al cálculo de dichos grupos. Los grupos de homología son mucho más fáciles de calcular que los grupos de homotopía.

Esta visión de que los grupos de homotopía no son adecuados para un primer acercamiento a la topología algebraica ha sido costosa para esta rama de la matemática. El costo es que, al posponer el estudio de Homotopía, se limita el desarrollo de esta teoría.

En este trabajo presentamos los grupos de Homotopía usando herramientas accesibles para no posponer su estudio. De esta forma, podemos adelantar el enfrentamiento con las preguntas más importantes de topología algebraica, y así impulsar el desarrollo de la teoría. Para esto, presentamos las distintas visiones de la topología algebraica, luego comparamos la presentación actual con el trabajo de Poincaré, y, por último presentamos la teoría de la forma más accesible posible, con ejemplos.

## Capítulo 2

# Visiones de la topología algebraica

Cuando se habla de topología algebraica, identificamos tres presentaciones. Las llamaremos visiones, y las identificaremos con las etiquetas: histórica, intuitiva, y formal.

### 2.1. Visión histórica

La visión histórica sigue el hilo conductor de la historia de la topología algebraica. El objetivo de esta visión es resolver los problemas clásicos de topología, cuya meta es clasificar los espacios topológicos salvo homeomorfismos.

La clasificación de espacios salvo homeomorfismos es un problema sumamente complejo. Sabemos que dos espacios homeomorfos tienen las mismas invariantes topológicas, pero para enfrentar el problema de la clasificación de espacios nos debemos de preguntar la implicación contraria ¿qué invariantes

topológicas determinan si dos espacios son homeomorfos?

Los esfuerzos para hallar estas invariantes clasificadoras han resultado inútiles. [6] La complejidad del problema sobrepasa la información disponible en un espacio topológico. La topología, como estructura, no tiene suficiente resolución.

No pasó mucho tiempo para que la complejidad de este problema empujara a los matemáticos a metas menos ambiciosas. Primero se limitó el problema a la clasificación de manifolds (espacios que localmente se parecen a  $\mathbb{R}^n$ ). La estructura de los manifolds otorga herramientas que facilitan la generación de invariantes topológicas de forma algebraica.

Una primera característica de los manifolds que se puede aprovechar para buscar invariantes topológicas de forma algebraica es la dimensión. Para presentar esta idea y generar su primera invariante Poincaré define la idea de homología. A continuación presentamos cómo Poincaré genera esta primera invariante, para entender el mecanismo general para generar nuevas invariantes topológicas de forma algebraica.

### 2.1.1. Homología:

« Sea  $V$  un manifold de  $p$  dimensiones. Sea  $W$  un manifold de  $q$  dimensiones, con  $q \leq p$  que sea parte de  $V$ . Supóngase que la frontera de  $W$  está compuesta de  $\lambda$  manifolds de  $q - 1$  dimensiones:

$$v_1, v_2, \dots, v_\lambda$$

Expresamos esto con la notación:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_\lambda = 0$$

De forma más general, la notación

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4$$

donde los  $k$  son enteros, y los  $v$  son manifolds de  $q - 1$  dimensiones, denota que existe un manifold  $W$  de  $q$  dimensiones que forma parte de  $V$ , y cuya frontera está compuesta de  $k_1$  manifolds similares a  $v_1$ ,  $k_2$  manifolds similares a  $v_2$ ,  $k_3$  manifolds similares a  $v_3$  pero con orientación contraria,  $k_4$  manifolds similares a  $v_4$  pero con orientación contraria.

Estas relaciones se llamarán Homologías. Las homologías se pueden combinar como ecuaciones ordinarias.» [4]

Notamos que las homologías son una forma algebraica de manipular a un manifold. La manera informal e intuitiva en que Poincaré define las homologías de un manifold facilita la definición de su primera invariante topológica: los números de Betti. Poincaré define estos números como sigue:

« Decimos que los manifolds

$$v_1, v_2, \dots, v_\lambda$$

que tienen el mismo número de dimensiones y forman parte de  $V$  son linealmente independientes si no están conectados por una homología de coeficientes enteros. Si existen  $P_m - 1$  manifolds cerrados de  $m$  dimensiones que son linealmente independientes y forman parte de  $V$ , pero no más de  $P_m - 1$ , entonces la conectividad de  $V$  respecto a los manifolds de  $m$  dimensiones es  $P_m$ . Luego, para un manifold  $V$  de  $m$  dimensiones hay  $m - 1$  números que llamaré

$$P_1, P_2, \dots, P_{m-1}$$

que son las conectividades de  $V$  respecto a los manifolds de  $1, 2, \dots, m - 1$  dimensiones. Llamaré a esta la secuencia de números de Betti. » [4]

En el mismo trabajo de *Analysis Situs*, Poincaré calcula los números de Betti para esferas y toros, inmersos en  $\mathbb{R}^3$ :

« Para la región dentro de una esfera:

$$P_1 = 1, P_2 = 1$$

Para la región dentro de una dos esferas:

$$P_1 = 1, P_2 = 2$$

Para la región dentro de un toro:

$$P_1 = 2, P_2 = 1$$

Para la región dentro de dos toros:

$$P_1 = 2, P_2 = 2$$

»

Este es un cálculo sumamente sencillo, pero que no corresponde al contenido de este trabajo. Lo que sí es pertinente para este capítulo es notar la intuición detrás de los números de Betti. Poincaré menciona que los números de Betti son las conectividades del espacio respecto a sus submanifolds de cada dimensión menor a la propia. De esta intuición tenemos dos comentarios:

- Poincaré no define los números de Betti para dimensiones mayores a la dimensión del espacio. Actualmente, para la mayoría de espacios de dimensión finita son 0,  $P_q = 0, \forall q > \dim(V)$ .
- ¿Qué significa la conectividad de  $V$  respecto a sus submanifolds de dimensión  $m$ ? Poincaré responde: La conectividad se refiere al número de *cortes* que se pueden realizar antes de desconectar al espacio en



cada una de sus dimensiones. Con esta idea, notamos que podemos hacer 1 corte de 1 dimensión sin dividir a la región dentro de una esfera, y 2 cortes de 1 dimensión sin dividir la región dentro de un toro. (Con un corte nos referimos a un submanifold cuya frontera es parte de la frontera de  $V$ )

Vemos que esta primera invariante es intuitiva, y resulta ser fácil de calcular también. La pregunta: ¿cuántos cortes de  $m$  dimensión puedo hacer antes de dividir un espacio? parece tener mucha información del espacio, y uno estaría tentado a pensar que es toda la información necesaria. Para cuestionar si esta información es suficiente, nos hacemos la pregunta de clasificación:

1. ¿Los números de Betti son una invariante topológica?
2. ¿Dos espacios con los mismos números de Betti son homeomorfos?

Ambas preguntas fueron contestadas por Poincaré en *Analysis Situs* [4].

Los números de Betti son una invariante topológica. De hecho, son un componente de una invariante más general. Los grupos de Homología son una invariante topológica que contienen a los números de Betti, y los números de torsión. [7]

Para la segunda pregunta, la respuesta es no siempre. Los números de Betti solo implican homeomorfismo en el caso de manifolds de 2 dimensiones (superficies). Poincaré presenta el ejemplo de dos espacios que tienen los mismos números de Betti pero que no son homeomorfos para 3 dimensiones. Poincaré construye una *esfera homológica*, es decir, un espacio que tiene la misma homología que la esfera, pero que no necesariamente es homeomorfo

a una esfera. Para esto, parte de un dodecahedro y hace algunas transformaciones.

Con esto, notamos que la homología (según Poincaré) es una relajación de la equivalencia topológica, no una caracterización. Se han relajado mucho las características del espacio al concentrarnos solo en la secuencia de combinaciones lineales de submanifolds que lo generan. Es evidente entonces que la homología no es la caracterización que buscamos, aunque si tiene información útil.

### 2.1.2. El grupo fundamental:

Al notar que la homología no caracteriza a los homeomorfismos, Poincaré busca otra invariante: el grupo fundamental. La idea original de Poincaré fue seguir explorando invariantes que se interpreten como conectividad. La homología la reconoce como la *conectividad simple*, pues su intuición depende de la definición de conexidad topológica, y su composición es vía combinaciones lineales. Ahora, con el grupo fundamental, Poincaré presenta la intuición de *conectividad múltiple*. Para hablar de conectividad múltiple Poincaré presenta el grupo fundamental como el grupo de todos los posibles *contornos* del espacio  $V$ , dibujados desde un punto  $M_0$ , salvo deformaciones continuas. Que esta estructura forma un grupo es declarado como evidente por Poincaré. Elaboraremos esta intuición en el capítulo posterior.

Uno de los aportes de Poincaré sobre el grupo fundamental es la definición de *simplemente conexo*, que se refiere a espacios que son de una sola pieza (un solo *componente conexo*). Poincaré lo usa como sinónimo de ser una esfera topológica.

Esta definición cobrará importancia en la Conjetura de Poincaré. Ahora

nos acercamos a su enunciación.

Luego de proponer el grupo fundamental como invariante topológica, Poincaré se hace la pregunta ¿El grupo fundamental determina homeomorfismos? La respuesta sigue siendo no. Un ejemplo rápido es que un punto y un espacio simplemente conexo (como un plano) tienen el mismo grupo fundamental, pero claramente no son homeomorfos. Relajamos la pregunta a ¿Bajo qué circunstancias una equivalencia de grupos fundamentales induce un homeomorfismo? Esta es una pregunta sumamente compleja que se sigue estudiando. Parte de esta pregunta es la conjetura de Poincaré, enunciada en el quinto suplemento de *Analysis Situs*.

« Queda lidiar con una pregunta. ¿Es posible que  $V$  (un manifold compacto de 3 dimensiones sin frontera) tenga grupo fundamental trivial, pero no sea simplemente conexo?...

Sin embargo, esta pregunta nos llevaría muy lejos. » [4]

Las últimas líneas de esa publicación de Poincaré dieron origen al resto de la teoría. La conjetura fue resuelta por Perelman en 2012, utilizando la técnica de Ricci Flow. Concluye con una respuesta positiva a la conjetura.

## 2.2. Visión intuitiva

La visión intuitiva de la topología algebraica no se centra en responder a las preguntas de la topología algebraica. En cambio, en esta visión es más importante entender las ideas que generan la pregunta. El marco más amplio que contiene a esta visión es el de categorías y funtores.

### 2.2.1. Categorías y funtores

Para generar una visión intuitiva de topología algebraica, es necesario crear un marco de acción que encierra los mecanismos con los que opera la topología algebraica. Podemos abstraer, de la idea de que la topología algebraica se dedica a resolver los problemas de la topología con herramientas del álgebra, la idea de *mover* problemas de una rama de la matemática a otra. Esta es la idea detrás de categorías y funtores, donde las ramas de la matemática son categorías, y los funtores son el mecanismo por el cual se puede *mover* un problema de una rama a otra.

**Definición:** Una *Categoría*  $\mathcal{C}$  consta de tres elementos:

1. Una clase de objetos  $obj\mathcal{C}$
2. Un conjunto de morfismos  $Hom(A, B)$  por cada pareja  $A, B \in obj\mathcal{C}$ .
3. Una operación de composición de morfismos  $\times$ ,

$$Hom(A, B) \times Hom(B, C) \rightarrow Hom(A, C)$$

, también denotado  $(f, g) \rightarrow f \circ g$  para cada trío  $A, B, C \in obj\mathcal{C}$

Que cumplen tres condiciones:

1. La familia de  $Hom(A, B)$ 's es disjunta a pares
2. La composición es asociativa
3. Para cada objeto  $A \in obj\mathcal{C}$ , existe un morfismo identidad  $1_A \in Hom(A, A)$  que satisface que  $1_A \circ f = f, \forall f \in Hom(B, A)$ , con  $B \in obj\mathcal{C}$  y  $g \circ 1_A = g, \forall g \in Hom(A, C)$ , con  $C \in obj\mathcal{C}$

En el caso particular de la topología, los objetos son los espacios topológicos, y los morfismos son los homeomorfismos. La composición es la composición natural de funciones. Un ejemplo más general es la categoría de los conjuntos, donde los objetos son todos los conjuntos, y los morfismos todas las funciones, con la composición natural.

Antes de definir un funtor, definimos otra herramienta auxiliar de categorías y funtores que define uno de los problemas de esta visión.

**Definición:** Un *Diagrama* en una categoría  $\mathcal{C}$  es un grafo dirigido donde los vértices son objetos de  $\mathcal{C}$  y las aristas son morfismos de  $\mathcal{C}$ . En particular, un *Diagrama conmutativo* es un diagrama en el que, para cada par de vértices, cada pareja de caminos es equivalente como morfismo.

Ejemplos de diagramas:

$$A \xrightarrow{\varphi} B$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \varrho_f \downarrow & & \downarrow \varrho_g \\ A_f & \xrightarrow{\varphi_f} & B_g \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \searrow \varrho_f & \downarrow \varrho_g \\ & & B_g \end{array}$$

Los diagramas son cruciales en la visión intuitiva de la topología algebraica pues son el mecanismo para comprender los problemas internos de cada categoría. Son particularmente útiles en la categoría de grupos, del lado algebraico de la topología algebraica.

Con los diagramas definimos uno de los problemas de la visión intuitiva de la topología algebraica, instanciado en la pregunta ¿Cómo traducir un diagrama en la categoría de espacios topológicos a un diagrama en la categoría de estructuras algebraicas (y viceversa), preservando la mayor cantidad de información posible?

La respuesta a esta pregunta se encuentra en la abstracción de un funtor.

**Definición:** Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{C}$  son categorías, un funtor  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  es una función, esto es

- $A \in \text{obj}\mathcal{A} \implies TA \in \text{obj}\mathcal{C}$
- Si  $f : A \rightarrow A'$  es un morfismo en  $\mathcal{A}$ , entonces  $Tf : TA \rightarrow TA'$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$
- Si  $f, g$  son morfismos en  $\mathcal{A}$ , tales que  $g \circ f$  está definido, entonces  $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$
- $T(1_A) = 1_{TA}, \forall A \in \text{obj}\mathcal{A}$

Notamos entonces que las ideas de Poincaré de homología y del grupo fundamental son casos particulares de funtores, que parten de la categoría de espacios topológicos. En esta visión de la topología algebraica se abstrae esta idea lo más posible, para ampliar su uso y aplicación.

### 2.2.2. Homología, como marco conceptual

Los números de Betti y los coeficientes de torsión mostraron ser insuficientes en cuanto a la información de la conexidad simple de un espacio. Sin embargo, la idea de homologías resulta ser muy útil. Podemos quedarnos

con la idea general de homología propuesta por Poincaré y prescindir de sus cálculos, para crear nuestros propios cálculos según el problema a resolver.

La idea general es descomponer un manifold en sus homologías en todas las dimensiones posibles, como un rompecabezas inductivo. La forma en que se suele trabajar este procedimiento es tratar de representar el manifold como una construcción iterativa o inductiva. Existen múltiples formas de definir un estas construcciones en un espacio topológico, pero el mecanismo de generación es siempre el mismo: descomponer un manifold de  $n$  dimensiones en submanifolds de  $n - 1$  dimensiones de forma iterativa, hasta sus componentes de 1 dimensión, i.e. sus curvas.

El mecanismo más usual para esta descomposición es la *triangulación* de un manifold. La triangulación es intuitiva en 2 dimensiones. Consiste en tomar puntos de la superficie, y unirlos para cubrir la superficie utilizando triángulos. El espacio resultante es homeomorfo al espacio original, y permite trabajar la homología de la forma más sencilla posible, porque genera automáticamente los submanifolds de todas las dimensiones inferiores. Este concepto se puede generalizar a más de dos dimensiones usando *complejos simpliciales*.

Cuando descomponemos un manifold de forma iterativa, podemos asignar una secuencia de estructuras algebraicas que describen la composición (conexidad simple) del espacio. Este es el marco de operación de la homología intuitiva. Nótese que este marco de operación se limita a espacios que se pueden descomponer de esta forma. No todos los espacios se pueden descomponer así. Este es el costo de proyectar la homología a una visión intuitiva.

### 2.2.3. Homotopía intuitiva

La visión intuitiva de la topología algebraica también ofrece homotopía, pero a un costo más alto que el de la homología. La idea de homotopía es transformar cosas de forma continua. En esta visión explotamos esa idea central sin restricciones. Abandonamos casi completamente la meta de clasificar los espacios salvo homeomorfismos, y nos quedamos con su versión relajada, la homotopía. Abandonamos los problemas de clasificación y nos centramos en la información que se preserva en la homotopía.

Para esta visión de la topología algebraica, esa información está limitada prácticamente al grupo fundamental. La intuición termina con esta estructura algebraica, que se convierte en la herramienta de los libros de texto para hablar de simplemente conexos y de la conjetura de Poincaré. Esto no tiene por qué ser así, y más adelante mostraremos una versión intuitiva para los grupos de homotopía superior.

## 2.3. Visión formal

Con el contenido cubierto hasta ahora, es claro que hace falta introducir matemática pesada para formalizar ideas como *deformar de forma continua* y *descomponer en submanifolds*, y el resto de ideas que Poincaré presento como naturales u obvias. Esta visión de la topología algebraica surge en respuesta para satisfacer esa necesidad. Es la más usada en libros introductorios porque ofrece la mayor cantidad de respuestas.

Para ofrecer estas respuestas presenta definiciones lo más abstractas posibles, que no dependan de la geometría, de la intuición, ni del análisis. Esto permite que el álgebra opere con más libertad, y otorgue resultados



más allá de la intuición.

Este acercamiento también trae sus problemas, usualmente cuando se instancian las definiciones y los teoremas que han sido planteados y resueltos de forma muy abstracta. El primer problema que aparece es el de formalizar mecanismos de cálculo de las estructuras. Para esto, esta visión aprecia necesario definir una gran cantidad de estructuras auxiliares, muy específicas y poco intuitivas, que permitan la instancia de sus teoremas en casos particulares.

### **2.3.1. Homología formal**

Para hacer un tratamiento formal de teoría de Homología, se empieza por delimitar la definición y el problema. La definición de Homología se limita a los grupos de homología de un espacio topológico, cuya definición es complicada por sí misma. Existen múltiples tipos de grupos de homología de un espacio, de los cuales los más usados son los grupos de homología singular.

El problema se delimita a hacer una selección (la mayoría de veces muy estricta) de espacios topológicos, y en esta selección hallar grupos de homología que sean fáciles de calcular y que preserven la mayor cantidad de información posible. Por ejemplo, para el caso de complejos simpliciales uno puede hablar de grupos de homología singular que preservan agujeros, o grupos de homología simplicial que preservan la composición de un manifold en sus submanifolds; en el caso de los poliedros uno puede quedarse con el trabajo de Poincaré en números de Betti.

Para generar una teoría de homología formal es necesario cubrir muchísimo contenido. Los teoremas son específicos para tipos muy particulares de

espacios topológicos, esto resulta en una teoría dividida en un alto número de casos particulares. Esta división hace que la teoría formal de homología sea muy complicada de definir, pero relativamente fácil de calcular dado el número de teoremas auxiliares de cálculo para cada caso particular.

### 2.3.2. Homotopía formal

La teoría formal de homotopía empieza con la definición de homotopía propuesta por Brouwer, quien formaliza la idea de *deformar de forma continua*. Esta definición establece una relación entre dos funciones o mapas, lo que obliga a que la teoría formal de homotopía se centre en funciones y mapas.

**Definición:** Una homotopía  $H$  entre dos mapas continuos  $g : A \rightarrow B, f : A \rightarrow B$  con  $A$  y  $B$  espacios topológicos es una función continua  $H : A \times [0, 1] \rightarrow B$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x), \forall x \in A$ .

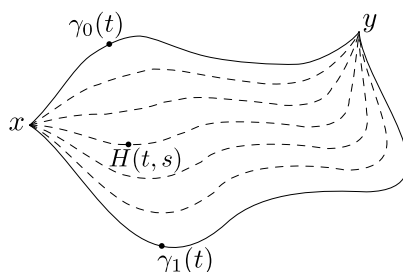


Figura 2.1: Diagrama de una homotopía entre dos curvas,  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ . Extraída de [1]

Esta definición facilita mucho trabajo, pues es sencillo demostrar que la relación homotopía:

$f \equiv g$  cuando existe una homotopía entre  $f$  y  $g$

es una relación de equivalencia en el conjunto de las funciones de  $A$  a  $B$ .

Las clases de equivalencia de esta relación se llaman clases de homotopía, y se denotan por  $[f]$ .

Definir el grupo fundamental también se vuelve un trabajo sencillo, pues es el conjunto de las clases de homotopía de las curvas cerradas de un espacio con un punto base, con la operación *concatenación*. Esta definición, propuesta por Brouwer, prescinde de herramientas externas. Al trabajar con esta definición se obtienen resultados más vinculados a la topología del espacio, no a su geometría, ni a sus características analíticas. Además, es fácil de escribir formalmente y de generalizar.

**Definición:** Sea  $X$  un espacio topológico y seleccionamos  $x_0 \in X$  como punto base. Considérense todos los mapas continuos  $f : S^1 \rightarrow X$  tales que  $f(1) = x_0$ . Sea  $[(S^1, 1), (X, x_0)]$  el conjunto cociente de los mapas continuos  $f$  con la relación de equivalencia homotopía  $\equiv$ . Defínase la operación *concatenación* entre los mapas continuos,  $f + g : S^1 \xrightarrow{c} S^1 \vee S^1 \rightarrow X$  como  $(f + g)(x) = f(x)$  si  $x$  está en el primer  $S^1$  y  $(f + g)(x) = g(x)$  si  $x$  está en el segundo  $S^1$ .  $[(S^1, 1), (X, x_0)]$  con la concatenación forman un grupo, llamado el grupo fundamental, denotado por  $\pi_1(X, x_0)$ .

Ilustramos la operación concatenación en Fig 2.2, que muestra la función continua  $c : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$

Notamos que esta definición es muy distinta a la presentada por Poincaré, y no depende de herramientas analíticas o geométricas. La definición si presenta problemas de intuición, y la estructura de grupo no es obvia y se trabajará en el capítulo 4 de este trabajo. La ventaja de esta definición es la fácil generalización.

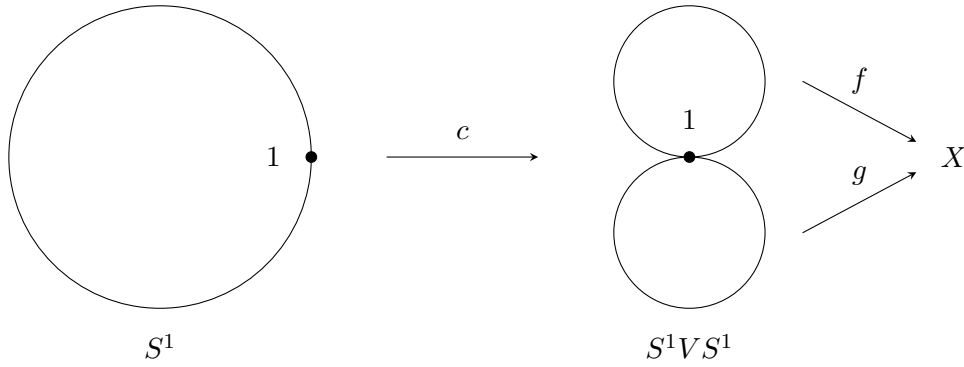


Figura 2.2: Diagrama de la operación concatenación de clases de homotopía actuando en representantes  $f$  y  $g$

### 2.3.3. Grupos de homotopía superior

De la definición formal del grupo fundamental sigue una generalización muy natural. Podemos cambiar el dominio de las funciones  $f$  para modificar la estructura resultante. La generalización natural es sustituir  $S^1$  por  $S^n$ . Esta idea lleva a la definición de grupos de homotopía superior.

**Definición:** Sea  $X$  un espacio topológico y seleccionamos  $x_0 \in X$ . Considérense todos los mapas continuos  $f : S^n \rightarrow X$  tales que  $f(1) = x_0$ . Sea  $[(S^n, 1), (X, x_0)]$  el conjunto cociente de los mapas continuos  $f$  con la relación de equivalencia homotopía  $\equiv$ . Defínase la operación *concatenación* entre los mapas continuos,  $f + g : S^n V S^n \equiv S^n \rightarrow X$  como  $(f + g)(x) = f(x)$  si  $x$  está en el primer  $S^n$  y  $(f + g)(x) = g(x)$  si  $x$  está en el segundo  $S^n$ .  $[(S^n, 1), (X, x_0)]$  con la concatenación forman un grupo de homotopía superior, denotado por  $\pi_n(X, x_0)$ .

Ilustramos la operación concatenación en los grupos de homotopía superior con un diagrama idéntico al de la concatenación en el grupo fundamental pero en dimensiones más altas Fig 2.3.

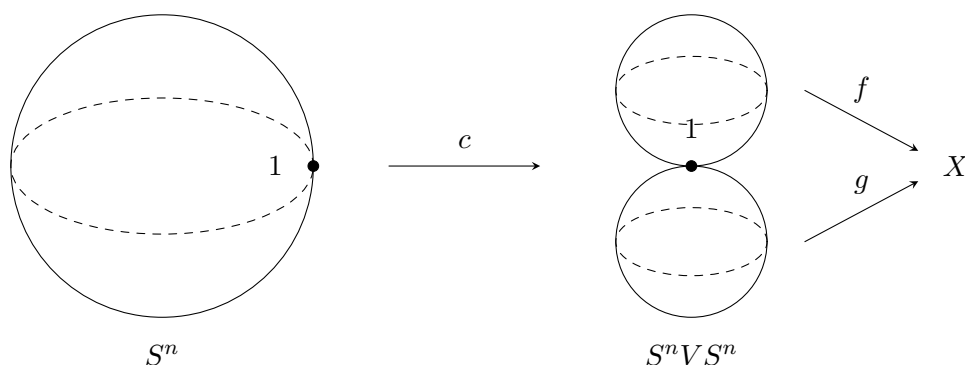


Figura 2.3: Diagrama de la operación concatenación en dimensiones más altas

Revisaremos la intuición de por qué esta estructura es un grupo en el capítulo 4 de este trabajo.

Esto es el comienzo del estudio formal de los grupos de homotopía, que se debe al trabajo de Brouwer. El siguiente avance fue el trabajo de Hopf en manifolds y mapas entre esferas, que influencia la definición de grupos de homotopía.

Sigue el trabajo de Hurewicz, que formaliza los grupos de homotopía e introduce conceptos como suspensión y estabilidad al estudio de los grupos de homotopía. El teorema que finaliza esta etapa de la teoría es el teorema de isomorfismo de Hurewicz, que establece una relación entre los grupos de homología y los grupos de homotopía de un espacio topológico.

Esta teoría genera herramientas cuya aplicación se extiende a otras áreas. Los grupos de homotopía tienen aplicaciones en otras áreas, incluyendo física, química, ingeniería, ciencia de datos y astrofísica.

## 2.4. Aplicaciones

### 2.4.1. Física

La topología tiene aplicaciones en toda la física. En particular, los grupos de homotopía encuentran una aplicación en la clasificación de defectos en materiales ferromagnéticos isótropos, cuyos espacios degenerados son esferas topológicas. La complejidad del campo magnético y su estabilidad se presta para la aplicación de grupos de homotopía superior.

Un defecto en un material ferromagnético es un punto en el material en el cual hay anomalías en el campo magnético a su alrededor. Esta idea esta rodeada de nociones topológicas. Si el material es un espacio topológico y un defecto es un punto en él, basta con caracterizar el comportamiento del campo magnético en una vecindad del punto para clasificarlo. Sea  $M$  el espacio material,  $x$  el candidato a defecto, entonces podemos encerrar  $x$  en una esfera, y estudiar el mapa del campo magnético en dicha esfera. Los mapas en esferas determinan grupos de homotopía, y los defectos tendrán efectos en la homotopía del material respecto a su campo magnético. De esto, uno puede simplificar el mecanismo por el cual una medición en el campo magnético indica un defecto en el material. [8]

### 2.4.2. Química

La química tiene múltiples aplicaciones, en especial a nivel atómico y molecular. Si consideramos un átomo o una molécula como un espacio topológico, entonces sus propiedades algebraicas determinan algunas de sus propiedades reactivas y de materiales.

Medir las propiedades reactivas de una molécula requiere mucho estudio de dicha molécula, pero se puede facilitar si se conoce su estructura interna. La naturaleza de una molécula hace que sea natural representarla como un espacio topológico. Más aún, el hecho de que la molécula está conformada de átomos y vínculos entre ellos hace que sea interesante estudiar la conexidad del espacio molécula. En general, la química estudia relaciones entre elementos, que se traducen en conexidad topológica entre subespacios. Esto hace que sea de interés estudiar la homología y la homotopía de los espacios en la química, a nivel subatómico, atómico, molecular, y material. Por ejemplo, las propiedades electrónicas de un polímero están totalmente determinadas por el polinomio característico de su red periódica. Este polinomio característico puede obtenerse al investigar la homotopía o la homología del espacio que representa la red periódica del polímero. [9]

### 2.4.3. Ingeniería

Existen diversas aplicaciones de topología algebraica en la ingeniería. Mencionamos dos que son particularmente relevantes para los grupos de homotopía.

#### Redes de sensores

Una aplicación inmediata que sigue de la idea de *identificar agujeros* en un espacio topológico, es identificar falta de cobertura de un sistema de monitoreo. En particular, una red de sensores puede representarse como un espacio topológico, en el cual se pueden identificar agujeros via el grupo fundamental.

## **Análisis de datos**

El análisis topológico de datos es una reciente aplicación de la topología que consiste en representar un conjunto de datos como un espacio topológico, y luego condensar la información usando homotopías. Para esto, se incrusta el conjunto de datos en un espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , y en cada punto se genera una bola de radio  $\rho$ . Al variar el radio, cambia la homología del espacio generado, y, a través de todos los radios posibles, se pueden calcular invariantes que están vinculadas al grupo fundamental de los espacios.



## Capítulo 3

# Presentación actual de la topología algebraica

Las presentaciones populares de topología algebraica se alejan mucho de la visión histórica presentada en el capítulo anterior. Con la aparición de aplicaciones de esta rama el enfoque de su estudio no está en las estructuras y su clasificación. En cambio, una presentación popular de topología algebraica se dedica a llegar lo más rápido posible a cálculos que se puedan aplicar.

El orden en el que se presentan las herramientas y las estructuras en la mayoría de acercamientos actuales es muy distinto al orden histórico, al orden intuitivo, y al orden lógico de dichas herramientas y estructuras. Actualmente, la presentación se hace en orden de facilidad. Esto significa que el grupo fundamental se presenta dentro de un curso de topología, como lo hacen los libros de Munkres (Topology 1975) [10], Runde (A taste of topology 2005) [11], y Mendelson (Introduction to Topology 1962) [12].

En estas presentaciones el grupo fundamental aparece como un dato curioso, no como elemento generador de la topología algebraica. La definición

de grupo fundamental que se maneja en estos textos es muy distinta a la definición del resto de grupos de homotopía, y, en más de un caso, requiere de herramientas de análisis. Estas presentaciones manejan una definición más similar a la que propuso Poincaré, basada en loops y en la intuición de la homotopía entre loops de una superficie. La operación del grupo fundamental no se presenta desde una perspectiva topológica, sino desde una perspectiva más bien intuitiva, basada en la concatenación de funciones. Todo esto hace que no sea fácil generalizar el grupo fundamental al resto de grupos de homotopía.

En los libros de topología algebraica, se presentan primero las herramientas a utilizar. Usualmente empiezan con teoría de categorías y funtores, seguido de una clasificación exhaustiva de todos los posibles espacios topológicos a estudiar: manifolds, simplejos, complejos simpliciales, fibrados y suspensiones. Posteriormente se desarrollan herramientas que facilitan cálculos sobre estos espacios. Luego se desarrolla la teoría de homología, y por último se introducen los grupos de homotopía superior. Esta es la estructura que vemos en libros como Rotman (An introduction to algebraic topology 1988) [1] y Hatcher (Algebraic topology 2001) [2].

El índice de uno de estos libros [1] se ve algo así:

1. Categorías y funtores
2. Nociones de topología: homotopía, convexidad, conexidad
3. Simplejos
4. El grupo fundamental
5. Homología singular
6. Secuencias exactas

7. Excisión
8. Complejos simpliciales
9. Complejos CW
10. Transformaciones naturales
11. Espacios cubierta
12. Grupos de Homotopía
13. Cohomología

El de Hatcher se ve algo así:

1. Nociones de Geometría: homotopía, complejos
2. El grupo fundamental
3. Homología
4. Cohomología
5. Teoría de Homotopía

En ambos casos de los libros más usados para el estudio de topología algebraica observamos una brecha entre el grupo fundamental y el resto de grupos de homotopía. Si partimos de que estos libros se ordenan por dificultad, entonces tenemos que resolver una pregunta.

### 3.1. ¿Por qué es fácil entender el grupo fundamental, pero no los grupos de homotopía superior?

Para entender por qué existe una diferencia tan grande entre el manejo del grupo fundamental y el resto de grupos de homotopía superior, debemos de investigar la interpretación de estas estructuras. Recordemos que la idea general de Poincaré era generar estructuras que expliquen la *conexidad múltiple* de un espacio.

Para explicar la conexidad múltiple notamos que Poincaré parte de una definición del grupo fundamental basada en *contornos* o *loops*, i.e. *trayectorias*. La razón por la que Poincaré lo define así es porque las trayectorias son una idea sumamente intuitiva, impresa en la naturaleza humana. Las trayectorias son parte de nuestra naturaleza porque los seres humanos somos seres móviles, y la trayectoria es la única forma que conocemos para movernos. Moverse es de las primeras cosas que las personas aprendemos a hacer, y con buena razón, pues es de las cosas necesarias para nuestra vida.

Para movernos, nuestro procedimiento es el siguiente:

1. Identificar inicio y final del movimiento, punto A (donde estoy) y punto B (donde quiero estar).
2. Identificar las trayectorias que unen los puntos A y B
3. Seleccionar una trayectoria
4. Recorrer la trayectoria seleccionada

Si bien las personas somos capaces de modificar la trayectoria seleccionada

en cualquier momento, el procedimiento sigue siendo válido, pues nuestro mecanismo de acción es repetir ese procedimiento en cada instante del movimiento, y en cada instante de la vida. [13]

Este procedimiento para moverse es perfectamente matematizable. Supongamos que nos movemos en un subespacio  $M \subseteq \mathbb{R}^3$ , entonces

1. Estamos en un punto  $A \in M$  y queremos llegar a un punto  $B \in M$
2. Tenemos el conjunto

$$\Gamma = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M \mid \gamma(0) = A, \gamma(1) = B, \text{ y } \gamma \text{ es continua}\}$$

de todas las trayectorias de  $A$  a  $B$ .

3. Sea  $\gamma_0$  la trayectoria seleccionada
4. Recorremos  $\gamma_0$  *moviendo* el parámetro  $t \in [0, 1]$  desde 0 hasta 1

Al presentarlo así, notamos que en la primera y última parte del movimiento es que tenemos un problema para generalizar la intuición a *trayectorias de más de una dimensión* como lo pretenden hacer los grupos de homotopía superior. No podemos generalizar la idea de un punto inicial y un punto final fuera de las trayectorias, porque fuera de los números reales no contamos con un orden intuitivo. Y no podemos generalizar la idea de *mover* un parámetro para recorrer una esfera de altas dimensiones, por dos razones:

- Las esferas de altas dimensiones requieren más de un parámetro.
- Cuando tenemos un solo parámetro real, podemos recorrerlo porque tenemos *orden* y este es intuitivo.

Entonces, la razón por la que el grupo fundamental es fácil de entender es porque podemos recorrer los loops de forma ordenada, tienen un comienzo, un final, y un orden que se puede recorrer. Cuando elevamos la dimensión, perdemos el orden de los números reales, y con él, la intuición de los elementos del grupo de homotopía.

## Capítulo 4

# Grupos de Homotopía

Ahora daremos un tratamiento accesible a los grupos de homotopía. Para esto prescindiremos de pruebas y definiciones excesivamente formales. En cambio, partiremos de las definiciones más abstractas de los grupos de homotopía, para no excluir al grupo fundamental, y para mantener en la mira el objetivo: estudiar la conexidad múltiple de un espacio en todas las dimensiones. Notamos que estas definiciones son relativamente procedimentales, por lo que seguiremos ese procedimiento para generar la intuición necesaria.

Empezamos por nuestras definiciones. Primero recordemos la definición formal de los grupos de homotopía para luego hacer una más intuitiva.

**Definición:** Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0 \in X$ . Considérense todos los mapas continuos  $f : S^n \rightarrow X$  tales que  $f(1) = x_0$ . Sea  $[(S^n, 1), (X, x_0)]$  el conjunto cociente de los mapas continuos  $f$  con la relación de equivalencia homotopía  $\equiv$ . Defínase la operación *concatenación* entre los mapas continuos,  $f + g : S^n \vee S^n \equiv S^n \rightarrow X$  como  $(f + g)(x) = f(x)$  si  $x$  está en el primer  $S^n$  y  $(f + g)(x) = g(x)$  si  $x$  está en el segundo  $S^n$ .  $[(S^n, 1), (X, x_0)]$  con la concatenación forman un grupo de homotopía superior, denotado por

$\pi_n(X, x_0)$ .

Notamos que esta definición es bastante algorítmica. Para ilustrarlo, detallamos el algoritmo para el caso de  $n = 1$ , el grupo fundamental. Sea  $X$  un espacio topológico al que le queremos calcular su grupo fundamental, entonces:

1. Seleccionamos  $x_0 \in X$  un punto ancla.
2. Consideramos todos los posibles mapas de  $(S^1, 1)$  a  $(X, x_0)$ . Esto es, consideramos todas las posibles formas en las que podemos *envolver* un círculo en el espacio  $X$ , partiendo de  $x_0$ .
3. Notamos las clases de homotopía de todos los círculos (mapas) considerados, es decir, agrupamos todos los mapas que se pueden deformar continuamente unos en otros. Dado que la homotopía es una relación de equivalencia, podemos considerar este paso como quitar todos los mapas duplicados, y nos quedamos únicamente con los mapas únicos o distintos.
4. Consideramos todas las posibles concatenaciones de estos mapas únicos. Para esto, consideramos todas las formas en las que podemos pegar los mapas entre ellos, usando el punto ancla como punto de contacto. Muchas de estas concatenaciones serán idénticas salvo homotopía, nos quedaremos solo con las que son distintas.

Para los grupos de homotopía superior solo debemos sustituir  $S^1$  por  $S^n$  en este algoritmo. Veremos ejemplos de implementación de este algoritmo en el próximo capítulo.

Tenemos pendiente probar que esta estructura es un grupo. Veamos la intuición detrás de esto. Recordando el diagrama para la operación  $+$ .



- Notamos que  $f + g$  es una función de  $S^n$  a  $X$ , y es continua dado que es la composición y unión por un punto de funciones continuas. Entonces esta operación es cerrada.
- La operación  $+$  es asociativa, pues podemos hacer el diagrama de  $f + g + h : S^n \rightarrow S^n V S^n V S^n$ , que se puede hacer en cualquier orden.
- La clase de homotopía de la función continua constante  $f(x) = x_0$  funciona como elemento neutro.
- Para cada función  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  podemos definir su inversa bajo  $+$  como  $f^{-1}(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$ , es decir, recorremos la envoltura en el sentido contrario. Esta concatenación  $f + f^{-1}$  se puede interpretar como *envolver* y luego *desenvolver*  $S^n$  en el espacio  $X$ , efectivamente dejando un mapa constante en  $x_0$ .

La ambigüedad en la definición de este algoritmo es un arma de doble filo. Por un lado, es suficientemente accesible para ser intuitivo. Por otro lado, no nos da detalles de cómo avanzar en cada paso, lo que dificulta la implementación. Este es, a grandes rasgos, el problema más grande de los grupos de homotopía. La magnitud de este problema es tal que no conocemos todos los grupos de homotopía de las esferas, que son el espacio más simple en esta teoría.

Para afrontar el problema de cálculo de los grupos de homotopía, es necesario indagar más en los mapeos entre esferas. Este fue el trabajo de Hopf, y es la base para el cálculo de muchos grupos de homotopía. Claramente, la definición carece de herramientas suficientes para la exploración profunda de los grupos de homotopía de las esferas. Irónicamente, la razón para estudiar homotopía es porque la topología no tiene información suficiente, pero la definición de grupos de homotopía no agrega ninguna información por sí misma. Sin embargo, la homotopía permite agregar información con mucha

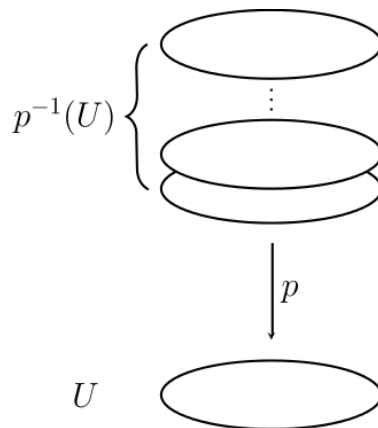


Figura 4.1: Fibrado de  $\mathbb{R}$  a  $S^1$ . Extraído de [2]

facilidad, pues contamos con transformaciones continuas que preservan toda la información que nos interesa. Esta idea también fue explorada por Hopf, y se traduce a los conceptos de *fibrados* y *suspensiones*.

#### 4.0.1. Fibrados

La idea de usar fibrados para el estudio de los grupos de homotopía es similar a la idea de usar complejos en homología, y es agregar la información necesaria al espacio, información que la topología no nos da. Pero existe una diferencia fundamental entre los fibrados y los complejos. Los complejos en homología pretenden descomponer y aproximar el espacio existente, dándonos herramientas de composición y de geometría en una simplificación del espacio. Por otro lado, la idea de un fibrado es tomar un espacio, y generar un espacio más complejo, y con mucha más información por punto que se proyecta al espacio original. Un ejemplo muy sencillo es trabajar con la recta  $\mathbb{R}$  en lugar de un círculo  $S^1$  (Fig. 4.1).

Estos fibrados no pueden ser cualquier espacio, ni cualquier proyección. Para ser realmente útiles en el estudio de homotopía, deben de conservar

toda la información del espacio, y más. Esta condición hace que la definición de un fibrado sea complicada, y depende de la **propiedad de la elevación de la homotopía**.

Nota: en los siguientes diagramas,  $B$  es nuestro espacio de interés,  $X$  es el espacio más complejo que contiene a  $B$ , y  $Y$  es el espacio de origen de las homotopías (para los grupos de homotopía haremos  $Y = S^n$ ).

**Definición:** Un mapeo  $p : X \rightarrow B$  se dice que tiene la **propiedad de la elevación de la homotopía** respecto a un espacio  $Y$  si, dados los mapeos  $f : Y \rightarrow X$  y  $H : Y \times [0, 1] \rightarrow B$  tales que  $H(y, 0) = p \circ f(y), \forall y \in Y$ , entonces existe un mapeo  $\tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\tilde{H}(y, 0) = f(y), \forall y \in Y$  y  $H = p \circ \tilde{H}$

El problema de hallar el levantamiento de un mapa es equivalente a hacer que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{f} & X \\
 \downarrow \cap & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\
 Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

La idea es que si tenemos una homotopía  $H$  entre dos mapeos de  $Y$  a  $B$ , en la que al menos uno de los mapeos se puede descomponer como  $p \circ f$ , entonces podemos descomponer la homotopía  $H$  como  $p \circ \tilde{H}$ . Esta propiedad recae en  $p$ , pues es esa sección de la homotopía la que se simplifica. Esencialmente, si  $p$  descompone un mapeo de  $Y$  a  $B$ , entonces  $p$  descompone a todos los mapeos homotópicos a ese. Lo que queremos ahora es definir qué condiciones hacen que  $p$  sea un fibrado  $B$ , es decir, que hagan que  $X$  sea un espacio con más información que  $B$  y que preserve todas sus propiedades de homotopía. Lo más sencillo es obligar a que  $p$  preserve su propiedad de

elevación de la homotopía respecto a todos los espacios posibles. Luego se buscarán facilidades técnicas.

**Definición:** Un mapeo  $p : X \rightarrow B$  se llama un **fibrado** si tiene la propiedad de elevación de homotopía respecto a **todos** los espacios.

Esto es,  $p$  descompone homotopías siempre que descomponga mapeos, en todos los espacios posibles. En este caso llamamos a  $B$  el espacio base, y  $X$  el espacio total. Si  $b \in B$ ,  $F = p^{-1}(b)$  se llama una fibra sobre  $b$ .

Suele usarse la notación  $F \hookrightarrow X \xrightarrow{p} B$  para decir que  $p$  es un fibrado y  $F$  es la fibra para un punto específico  $b \in B$ .

Regresemos al ejemplo mencionado. Tenemos  $\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1$ , con  $p(t) = (\cos t, \sin t)$ . En este caso notamos que  $p$  es una función continua y que permite descomponer cualquier mapa de  $X$  a  $S^1$ , pues es una definición de  $S^1$ . Si tomamos un punto  $(x, y) \in S^1$  notamos que su preimagen (fibra) es  $F = p^{-1}(x, y) = \{t : \arctan(y/x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\} \equiv \mathbb{Z}$ . Es decir, en cada punto estamos agregando un contable de información al espacio. En lugar de trabajar con  $S^1$  estaríamos trabajando con un contable de copias de  $S^1$ . Esta información adicional es valiosa para calcular grupos de homotopía de  $S^1$ .

La definición de fibrado es consistente con el resto de esta teoría: sumamente compleja, abstracta, y técnica. Pero la idea sigue siendo simple, se trata de darnos la información que la topología de un espacio no nos da. Recordemos que la idea de un fibrado es estudiar un espacio más complejo y con más información, pero que preserve toda la información del espacio original salvo homotopía.

### 4.0.2. Suspensiones

Similar a la idea de un fibrado, una suspensión es una forma de añadir información a un espacio sin alterar sus propiedades homotópicas. Esencialmente, la suspensión de un espacio  $V$  de dimensión  $m$  es otro espacio  $SV$  de dimensión  $m + 1$  que contiene a  $V$ . Esta dimensión adicional le adiciona información al espacio  $V$  para facilitar el estudio de sus propiedades.

La ventaja de usar una suspensión es que su cálculo es sumamente sencillo, y tiene propiedades particularmente relevantes en el estudio de esferas. Para calcular la suspensión de un espacio  $V$ , hacemos un cilindro  $V \times [0, 1]$ , y luego colapsamos los extremos del cilindro a puntos,  $V \times \{0\} = x$ ,  $V \times \{1\} = y$ . De aquí el nombre suspensión, pues se *suspende* a  $V$  desde los puntos 0 y 1, como una hamaca.

**Definición:** Sea  $V$  un espacio topológico. Entonces la suspensión de  $V$ ,  $SV$  es el cilindro  $V \times [0, 1]$  con la relación de equivalencia  $V \times \{0\} \rightarrow 0$ ,  $V \times \{1\} \rightarrow 1$ .

Nótese que la definición de suspensión no tiene ninguna restricción sobre el espacio  $V$ . Esto nos permite componer suspensiones, y hablar de suspensiones múltiples. Por ejemplo  $SSV$  es la doble suspensión de  $V$ .

Ilustramos la suspensión de  $S^1$  en el siguiente diagrama. Para calcular esta suspensión hacemos un cilindro  $S^1 \times [0, 1]$  y luego colapsamos los extremos del cilindro a puntos, formando un doble cono.

Notamos algo particular de la suspensión de  $S^1$ , y es que  $SS^1$  es homeomorfa a  $S^2$ , basta con sustituir las rectas del cono por arcos. Este resultado nos permite construir todas las esferas como suspensiones de esferas de dimensión inferior. Podemos empezar con  $S^1 = SS^0$  (Fig. 4.3).

**Teorema:** La suspensión de una esfera es la esfera (topológica) de la

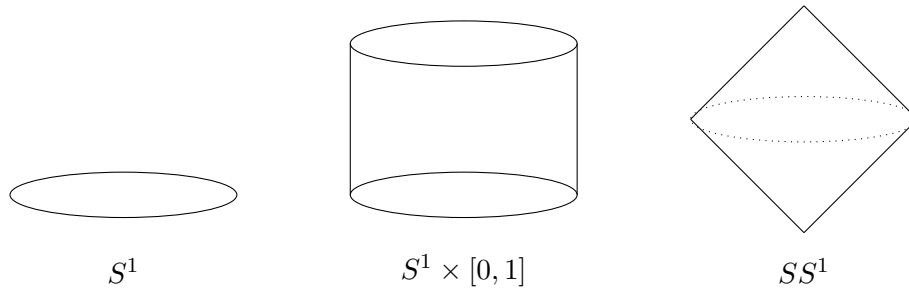


Figura 4.2: Suspensión de  $S^1$

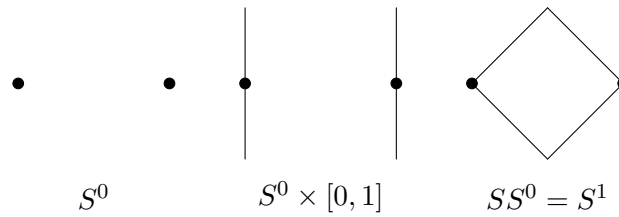


Figura 4.3: Suspensión de  $S^0$

siguiente dimensión

$$SS^n = S^{n+1}$$

Una demostración de este resultado se puede encontrar en [14]. Usaremos este resultado en los ejemplos.

También tiene sentido hablar de la suspensión de un mapeo continuo  $f$ , dado que la suspensión de un espacio nos da suficiente información para extender un mapeo existente.

**Definición:** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua, entonces la *suspensión* de  $f$ ,  $\tilde{f} : SX \rightarrow SY$ , es una función continua tal que  $\tilde{f}|_X = f$  y extendemos  $f$  de forma lineal sobre la recta  $f(x) \times [0, 1]$

Vemos que una suspensión añade muchísima información a un espacio. En primer lugar, aumenta la dimensión preservando en un subconjunto al espacio original. En segundo lugar, al incorporar el intervalo  $[0, 1]$  a la com-

posición del espacio, la suspensión tiene orden.

Con estas definiciones adicionales, tenemos suficiente para explorar los grupos de homotopía. Para empezar, enunciaremos propiedades relevantes, seguidas de algunos teoremas auxiliares que son clave para la teoría.

## 4.1. Propiedades y teoremas auxiliares

**Propiedad 1:** Los grupos de homotopía son independientes de la elección de punto ancla dentro de un espacio simplemente conexo. (Para el grupo fundamental basta la conexidad por trayectorias)

Si  $X$  es simplemente conexo, entonces los grupos de homotopía son independientes del punto ancla seleccionado, es decir

$$\pi_n(X, x_0) = \pi_n(X, x_1), \forall n, \forall x_0, x_1 \in X$$

Este resultado viene del hecho de que siempre podemos encontrar una trayectoria entre  $x_0$  y  $x_1$ , que nos permite *mover* cada uno de los mapas de un punto ancla al otro de forma continua, es decir, a un mapa homotópico, lo cual no cambia las clases de homotopía, y por lo tanto no cambia el grupo de homotopía.

En este caso suele omitirse de la notación el punto ancla, dejando solo  $\pi_n(X)$ . Este será el caso para todos nuestros ejemplos.

#### 4.1.1. Teoremas sobre los grupos de homotopía

**Teorema 1:** (grupos de homotopía de espacio producto) Sean  $(X, x_0), (Y, y_0)$  espacios topológicos conexos por trayectorias, entonces

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$$

En general, para un producto arbitrario de espacios conexos por trayectorias  $\prod_{\alpha} X_{\alpha}$

$$\pi_n\left(\prod_{\alpha} X_{\alpha}\right) = \prod_{\alpha} \pi_n(X_{\alpha})$$

Con el producto de grupos usual.

**Esquema de demostración:** Si  $\prod_{\alpha} X_{\alpha}$  es un producto arbitrario de espacios conexos por trayectoria, entonces los mapeos continuos  $f : S^n \rightarrow \prod_{\alpha} X_{\alpha}$  son colecciones de mapeos continuos  $f_{\alpha} S^n \rightarrow X_{\alpha}$ . Sus concatenaciones  $f + g$  son, entonces, la colección de las concatenaciones por componentes  $f_{\alpha} + g_{\alpha}$ . Al considerar esto notamos que todas las posibles combinaciones y concatenaciones corresponden exactamente al producto cartesiano de todas las concatenaciones por componentes, i.e.  $\prod_{\alpha} \pi_n(X_{\alpha})$ .

**Teorema 2:** (una función continua induce un homomorfismo) Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Entonces  $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  tal que

$$f_*([m]) = [f \circ m]$$

Es un homomorfismo.

**Esquema de demostración:** El hecho de que esta operación es un homomorfismo deriva enteramente de que la composición de funciones continuas es una función continua y de que la composición de funciones se distribuye respecto a la concatenación.



$$\begin{array}{ccc}
S^n & \xrightarrow{m} & X \\
& \searrow f \circ m & \downarrow f \\
& & Y
\end{array}$$

Sean  $[m_1], [m_2] \in \pi_n(X)$  entonces  $f_*([m_1] + [m_2]) = f_*([m_1 + m_2]) = [f \circ (m_1 + m_2)] = [(f \circ m_1) + (f \circ m_2)] = [(f \circ m_1)] + [(f \circ m_2)] = f_*([m_1]) + f_*([m_2])$

#### 4.1.2. Teoremas sobre fibrados

**Teorema 3:** (secuencia exacta de un fibrado) Sea  $B$  un espacio conexo por trayectorias y  $p$  un fibrado  $p : E \rightarrow B$  con fibra  $F$  entonces el homomorfismo inducido  $p_*$  es inyectivo para todo  $n$  y existe una secuencia exacta

$$\cdots \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(E) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B) \rightarrow \pi_0(F) \rightarrow \pi_0(E) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B)$$

en general

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F)$$

donde los mapeos no etiquetados son inclusiones, y tomamos en todos los espacios los puntos base  $b_0 \in B, x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$ .

#### Esquema de demostración:

Si  $[f], [\tilde{g}] \in \pi_n(E)$  tales que  $p_*([f]) = p_*([\tilde{g}])$  entonces  $p(\tilde{f})$  es homotópico a  $p(\tilde{g})$ , i.e. existe una homotopía  $G$  de  $p(\tilde{f})$  a  $p(\tilde{g})$ . Luego, podemos *levantar*\*  $G$  otra homotopía  $\tilde{G}$  vía la propiedad de levantamiento de homotopía de  $p$ , tal que  $\tilde{G}$  es una homotopía de  $\tilde{f}$  a  $\tilde{g}$ , luego  $[\tilde{f}] = [\tilde{g}]$ .

Luego, para mostrar que la secuencia es exacta notamos que  $\text{Ker}(p_*) = [b_0]$ . Entonces la imagen de la inclusión  $\pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E)$  es exactamente

$\pi_n(F) = \pi_n(p^{-1}(b_0))$  luego  $p_*(\pi_n(p^{-1}(b_0))) = \pi_n(pp^{-1}(b_0)) = [b_0]$ , el kernel de  $p_*$ .

Por otro lado el kernel de la inclusión  $\pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F)$  debe de ser exactamente  $Im(p_*)$  por la composición de funciones.

**\*Nota:** Este esquema de prueba omite el detalle de describir los levantamientos específicos de las funciones, dado que no aporta al objetivo de este trabajo.

#### 4.1.3. Teoremas sobre suspensiones

**Teorema 4:** (homomorfismo natural) La suspensión de  $S^n$  induce un homomorfismo  $E : \pi_m(S^n) \rightarrow \pi_{m+1}(S^{n+1}), [f] \rightarrow [\tilde{f}]$  Donde  $\tilde{f}$  es la suspensión de  $f$ .

**Teorema 5:** (Suspensión de Freudenthal) El homomorfismo natural

$$E : \pi_m(S^n) \rightarrow \pi_{m+1}(S^{n+1}), [f] \rightarrow [\tilde{f}]$$

es un isomorfismo para  $m < 2n - 1$  y es sobreyectivo para  $m \leq 2n - 1$

Para estos teorema no mostraremos un esquema de demostración dada su complejidad. Pero una prueba puede encontrarse en el libro *Elements of homotopy theory* [14]

## Capítulo 5

# Ejemplos

Procedemos ahora a calcular algunos ejemplos de grupos de homotopía. El primer ejemplo es (en teoría) el más sencillo que podemos imaginar, el grupo fundamental de un círculo.

### 5.1. $\pi_1(S^1)$

Para el cálculo de este grupo podemos seguir el algoritmo detallado en el capítulo anterior. Podemos considerar a  $S^1$  en su forma compleja, como  $S^1 : ||z|| = 1$

1. Seleccionamos como ancla el punto  $z = 1$ .
2. Consideramos todos los posibles mapeos continuos  $f$  de  $S^1$  a  $S^1$ , en los cuales tenemos las siguientes posibilidades:
  - $f$  no es sobreyectivo, entonces, como  $f$  es continuo y  $S^1$  es conexo,  $f$  es constante o es un intervalo de  $S^1$ .
  - $f$  es biyectivo.

- $f$  es sobreyectivo pero no inyectivo. En este caso podemos definir un número  $n$  que sea la cardinalidad mínima de las preimágenes de  $f$ , es decir  $n = \min_{x \in S^1} |f^{-1}(x)|$ . Ejemplos de esto son  $z^2, z^{-3}$  que tienen  $n = 2, n = 3$ .

Nótese que  $n$  es siempre un entero. De lo contrario, si tenemos un punto con cardinalidad de preimagen no finita,  $f$  no sería continua, o no sería sobreyectiva.

3. Revisamos los casos mencionados con anterioridad para hallar las clases de homotopía.

- $f$  no es sobreyectivo, entonces  $f$  es homotópico al mapeo constante 1.
- $f$  es biyectivo. Identificamos dos casos  $f(z) = z$  la identidad, y  $f(z) = 1/z$ . Cualquier otro mapeo biyectivo es homotópico a alguno de estos dos. Indagamos en esta aseveración.

Supóngase por contradicción que existe un mapeo continuo y biyectivo  $f : S^1 \rightarrow S^1$ , entonces  $f$  es homotópico a un mapeo holomorfo [15]  $\tilde{f} : S^1 \rightarrow S^1$  con serie de Laurent  $\sum_{-\infty}^{\infty} a_m z^m$ . Ahora tenemos dos casos.

Si la parte principal de esta serie de Laurent es cero, entonces  $\tilde{f} = \sum_0^{\infty} a_m z^m$ . Supóngase que esta serie es distinta a  $z$ . Entonces existe un  $m_0 > 1$  tal que  $a_{m_0} \neq 0$ , luego, la ecuación  $\tilde{f} = 1$  tiene múltiples soluciones, al menos  $m_0$  (Teorema fundamental del álgebra), y  $\tilde{f}$  no es inyectiva (podemos obligar a que al menos una de las soluciones tenga  $||z|| = 1$  y luego su conjugado también es raíz de  $\tilde{f} = 1$ ). Luego  $\tilde{f} = z$  y  $f$  es homotópica a  $z$ .

Si la parte principal de esta serie de Laurent no es cero, entonces  $\tilde{f}$  tiene una singularidad en  $z = 0$ . Si esta singularidad es un polo de orden finito, entonces, por el gran Teorema de Picard,  $\tilde{f}$  no es

inyectiva en  $S^1$ , lo cual es una contradicción. Si, por otro lado, la singularidad es un polo de orden  $m_1 > 1$ , entonces  $\tilde{f} = 1$  también tiene múltiples soluciones y  $\tilde{f}$  no es inyectiva. Esto nos deja únicamente con los casos en los que  $\tilde{f} = a_1 z + a_0$  y  $\tilde{f} = a_{-1} z^{-1} + a_0$  que son homotópicos a  $z$  y a  $z^{-1}$  respectivamente.

- $f$  es sobreyectivo pero no inyectivo y definimos  $n$ . En este caso, repitiendo la construcción de la serie de Laurent del punto anterior llegamos a dos posibilidades.  $\tilde{f}$  es homotópica a  $z^n$  o  $\tilde{f}$  es homotópica a  $z^{-n}$ .

4. Notamos que podemos concatenar  $z+z$  y obtener exactamente  $z^2$  pues recorreremos todo  $S^1$  exactamente dos veces. En general  $z^n$  es recorrer  $S^1$   $n$  veces, que se puede obtener como la concatenación de  $z$   $n$  veces. De forma similar  $z^{-1} + z^{-1} = z^{-2}$  y en general  $z^{-n}$  se puede obtener concatenando  $z^{-1}$   $n$  veces. Con esto tenemos los elementos:

- mapeo constante, sin pérdida de generalidad etiquetado como 0.
- mapeo inyectivo, homotópico a la identidad  $z$ , o a su reverso  $z^{-1}$ , etiquetados como 1 y  $-1$ .
- Concatenaciones estos dos elementos  $z^{-n}, z^n$  etiquetados con  $-n$  y  $n$ .

Y notamos que la estructura de este grupo es la estructura de  $\mathbb{Z}$ , a cada concatenación le asignamos un entero llamado su *grado* (o en este caso particular, su índice o *número de bobinado*), que representa el número de vueltas a  $S^1$  que recorre el mapeo. Esta estructura es consistente con las concatenaciones. Entonces

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

Podemos formalizar este resultado usando el fibrado  $\pi_1(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \pi_1(R) \xrightarrow{p_*} \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_0(\mathbb{Z})$  donde notamos que  $p_*$  debe de ser inyectivo y  $\pi_1(R) = 0$  (pues  $R$  es homotópico a un punto) entonces  $Im(p_*) = 0$  debe de ser el kernel de la inclusión  $\pi_1(S^1) \rightarrow \pi_0(\mathbb{Z})$  con lo que esta inclusión es inyectiva y por lo tanto es un isomorfismo, es decir  $\pi_1(S^1) = \pi_0(\mathbb{Z})$ , como  $\pi_0$  es el número de componentes conexos y  $\mathbb{Z}$  es completamente desconexo,  $\pi_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  y  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ .

Interpretamos este resultado como que hay 1 forma de envolver un círculo en sí mismo, que genera un contable de formas de envolverlo.

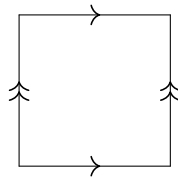
## 5.2. $\pi_1(T^2)$

Para el cálculo de este grupo utilizaremos un teorema auxiliar. Partimos de la definición del toro como producto  $T^2 = S^1 \times S^1$ . Sigue del teorema 1 que  $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

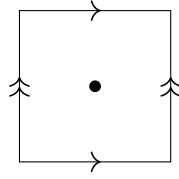
Veamos la construcción intuitiva.

Considérese la representación del toro plano:

$$T^2 = [0, 1] \times [0, 1] / \equiv \text{ con } (x, 0) \equiv (x, 1), (0, y) \equiv (1, y)$$

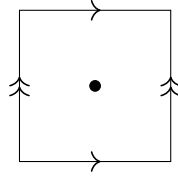


1. Seleccionamos como ancla un punto  $(1, 0.5)$

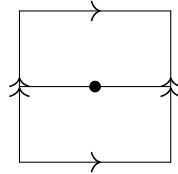


2. Consideramos todos los posibles mapeos continuos de  $S^1$  a  $S^1$ , es decir, formas de envolver un círculo en el toro, en los cuales tenemos cuatro posibilidades:

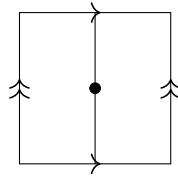
- El mapeo constante de todo  $S^1$  al punto  $x$ .



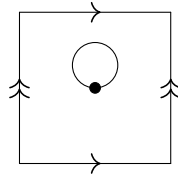
- Un mapeo horizontal en la representación



- Un mapeo vertical en la representación



- Un mapeo dentro de la representación



3. Notamos que los mapeos horizontales y verticales no se pueden deformar de forma continua uno en el otro. Los mapeos dentro de la representación si se pueden contraer a un punto. Con esto tenemos tres elementos generadores: un neutro, un horizontal y uno vertical.

4. Al considerar las composiciones nos basamos en las composiciones de mapeos del círculo en sí mismo. Notamos que podemos repetir mapeos horizontales y también considerar sus reversos, es el mismo caso con los verticales. Estas composiciones generan un grupo isomorfo a  $Z$  en la horizontal, y otro isomorfo a  $Z$  en la vertical. Si además consideramos la composición de mapeos verticales y horizontales, obtenemos un grupo isomorfo a  $Z \times Z$ .

De nuevo, interpretamos esto como que hay 3 formas de envolver un círculo en un toro: sin *amarrar* nada (el neutro), amarrando el círculo menor (vertical) y amarrando el círculo mayor (horizontal). Estas tres formas se pueden componer entre ellas, dándonos  $Z \times Z$  formas de envolver el círculo en el toro.

### 5.3. $\pi_2(S^2)$

Usaremos un teorema auxiliar para mostrar este resultado, y su generalización. Del teorema de suspensión de Freudenthal, si partimos de  $n \geq 2$  entonces  $n < 2n - 1$  y

$$E_n : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1})$$

son isomorfismos y  $\pi_n(S^n) \cong \pi_2(S^2)$ .

En el caso de  $n = 1$  entonces

$$E_1 : \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \rightarrow \pi_2(S^2)$$

es sobreyectivo. Recordemos ahora que un homomorfismo con dominio en  $\mathbb{Z}$  está completamente determinado por la imagen de 1 pues  $\mathbb{Z}$  es un grupo cíclico entonces su imagen homomorfa también es cíclica, generada por



$E_1(1)$ . Luego  $\pi_2(S^2)$  es un grupo cíclico y tiene entonces dos posibilidades: es finito, o es infinito.

Notamos que  $\pi_2(S^2)$  debe de ser infinito, pues  $E_1(1)$  es la identidad de  $S^2$ , y podemos concatenar la identidad para *envolver* a  $S^2$  cualquier número de veces, y la función que lo envuelve  $n$  veces no es homotópica a la que lo envuelve  $m$  veces para  $n \neq m$ .

Entonces  $\pi_2(S^2)$  es el grupo cíclico infinito, a saber  $\mathbb{Z}$ .

Luego

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

## 5.4. $\pi_2(S^1)$

De nuevo usaremos un teorema auxiliar, en este caso a punta de fibrados. Utilizando el mismo fibrado  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1$ ,  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  tal que  $p(t) = e^{it}$  pero enfocándonos en otra sección de la secuencia exacta:

$$\cdots \rightarrow \pi_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \pi_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{p_*} \pi_2(S^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{Z}) \rightarrow \cdots$$

Luego, como  $\mathbb{Z}$  es totalmente desconexo y  $\mathbb{R}$  es *contráctil* tenemos

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{p_*} \pi_2(S^1) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

Entonces  $Im(0) = 0 = Ker(0) = \pi_2(S^1)$ .

Nótese que podemos extender esta secuencia exacta para obtener

$$\pi_n(S^1) = 0, \forall n > 1$$

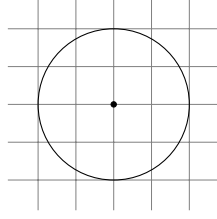


Figura 5.1: Representación de  $S^1$  en  $\mathbb{C}$

### 5.5. $\pi_3(S^2)$

Llegamos ahora a contestar la pregunta del título. La primera intuición es considerar que no existen mapeos continuos no homotópicos a una constante de  $S^3$  a  $S^2$ , como en el caso de  $S^2$  a  $S^1$ . La intuición falla en este caso. Para contestar a detalle la pregunta primero describiremos la construcción del fibrado de Hopf. Este es un mapeo continuo de  $S^3$  a  $S^2$  que no es homotópico a un punto. Esencialmente este fibrado es una forma de envolver la 3-esfera en la 2-esfera.

Revelado que esta construcción es un fibrado, lo describiremos desde esa perspectiva primero. Nuestro espacio base es  $S^2$ , nuestro espacio total será  $S^3$ , y haremos que cada fibra sea  $S^1$ . En la notación de fibrados, haremos

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{p} S^2$$

Para describir la proyección, usaremos la descripción en números complejos de  $S^1, S^2, S^3$ . Estas son:

El círculo unitario para  $S^1$ , usado con anterioridad:

$$S^1 : ||z|| = 1$$

$$S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

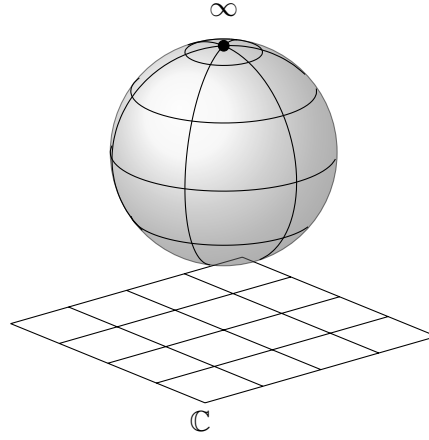


Figura 5.2: Representación de  $S^2$  como  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

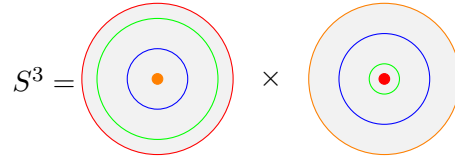


Figura 5.3: Representación de  $S^3$  en  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$S^3 = \{(z_1, z_2), ||z_1||^2 + ||z_2||^2 = 1\}$$

Esta representación es un subconjunto de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  muy particular, que podemos mostrar de forma gráfica como un subconjunto del producto de dos discos unitarios (Fig. 5.3) donde los radios de ambos números suman 1, es decir,  $r_1 + r_2 = 1$ .

Con esto describimos  $p : S^3 \rightarrow S^2$  como  $p(z_1, z_2) = z_1/z_2$ . Esta descripción sigue falta de intuición. Para ilustrarla mejor la detallamos en coordenadas polares, si  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  entonces  $p(z_1, z_2) = (r_1/r_2) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ . Con esta expresión podemos explorar *cómo* esta proyección envuelve  $S^3$  en  $S^2$ .

Primero, nos damos una interpretación de  $S^3$  que tenga sentido *envolver*

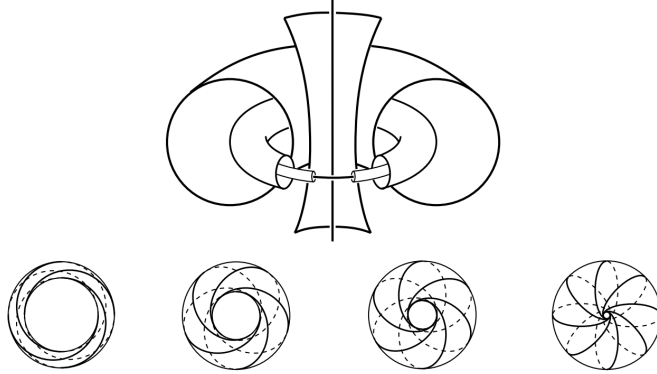


Figura 5.4: Ilustración de  $S^3$  como una colección de toros concéntricos de todos los posibles radios. Extraída de [2]

en 3 dimensiones (recordemos que  $S^2$  vive en  $\mathbb{R}^3$ ). Para un radio fijo  $r_1$  hacemos  $\rho = r_1/r_2 = \frac{r_1}{1-r_1}$  si dejamos libre los parámetros  $\theta_1, \theta_2$  (esto es, para una pareja de círculos, uno para  $z_1$  y otro para  $z_2$ ), notamos que la expresión  $(z_1, z_2) = (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2})$  es el producto cartesiano de dos círculos  $S^1 \times S^1$ , uno de radio  $r_1$  y otro de radio  $r_2$ , i.e. es un toro  $T_\rho$ . Luego, si liberamos el parámetro  $\rho \in$

¿Qué le hace  $p$  a cada  $T_\rho$ ? Notamos que  $p(T_\rho)$  es exactamente el círculo  $\|z\| = \rho$ . Entonces  $p$  desinfla, o contrae cada  $T_\rho$  a un círculo de radio  $\rho$ . Cuando consideramos la colección de todos los  $T_\rho$ , notamos que  $\{p(T_\rho)\}$  cubre todo el plano complejo y  $p(T_\infty) = \{\infty\}$ . Entonces,  $p$  cubre todo  $S^2$ , y no puede ser homotópico a un punto. Ilustramos esto en Fig. 5.6.

Falta describir cómo  $p$  comprime o desinfla a cada  $T_\rho$ . Para esto vamos a investigar las fibras de  $p$ . Sea  $z = \rho e^{i\theta} \in S^2$ , entonces  $f^{-1}(z) \subseteq T_\rho$ . Luego, notamos que dentro de  $T_\rho$  debemos hacer que  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  sea constante. Para esto recorreremos cada círculo que compone a  $T_\rho$  exactamente una vez y exactamente al mismo ritmo. En este caso, notamos que cada fibra circular da una vuelta en cada sentido del toro, una meridional y una longitudinal.

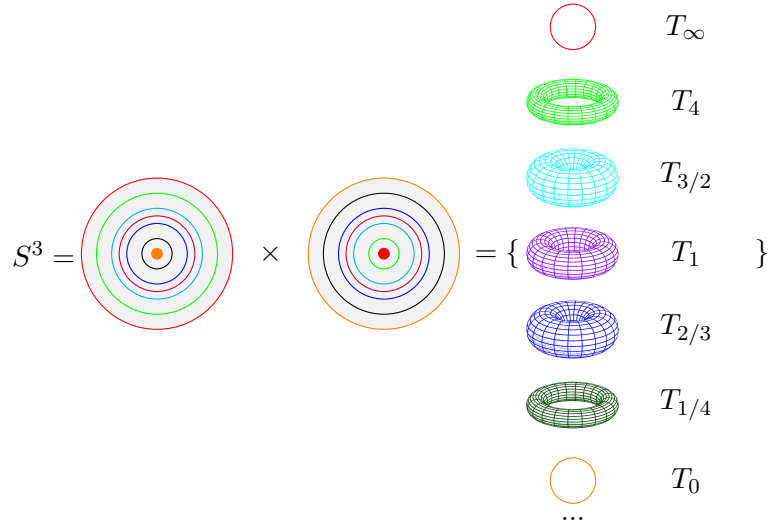


Figura 5.5: Etiquetado de toros de  $S^3$

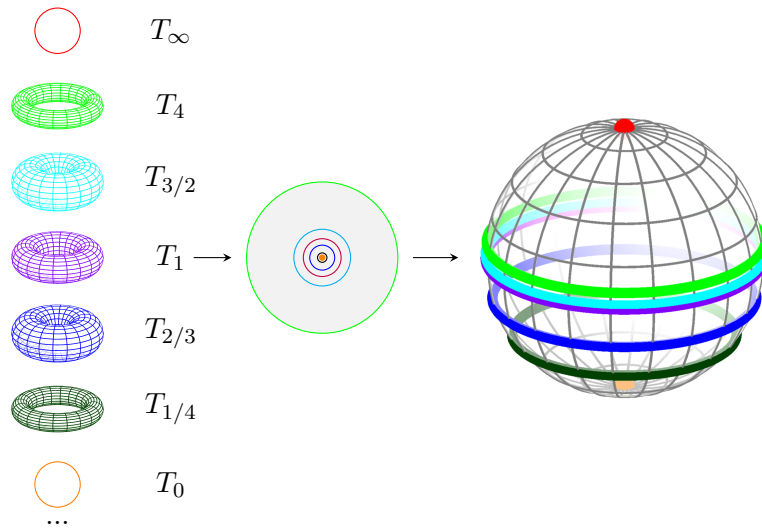


Figura 5.6: Interpretación geométrica de  $p(T_\rho)$

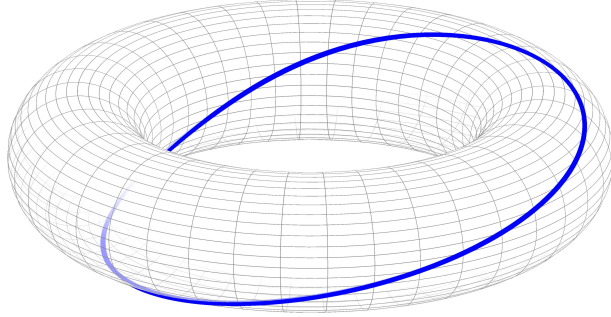


Figura 5.7: Fibra de  $p$

En los casos de  $T_0, T_\infty$  el toro degenerado completo es una fibra Fig ??.

Respondiendo a ¿Cómo envolver la 3-esfera en la 2-esfera? de forma algorítmica:

1. Representamos a la 3-esfera como una colección de toros concéntricos variando los radios de 0 a 1 tales que  $r_1 + r_2 = 1$ , o, lo que es lo mismo, variando  $\rho = r_1/r_2 = \frac{r_1}{1-r_1}$  de 0 a  $\infty$ .
2. Cada toro lo representamos como unión de fibras circulares de pendiente constante, esto es una vuelta meridional y una vuelta longitudinal.
3. Cada fibra la contraemos a un punto. Esto contrae  $T_\rho$  a un círculo de radio  $\rho$ .
4. Mapeamos los círculos en  $S^2$ .

Este procedimiento da origen a imágenes conocidas del fibrado de Hopf, como las figuras [5.8](#), [5.9](#), [5.10](#).

Con esto hemos descrito un mecanismo para envolver la 3-esfera en la

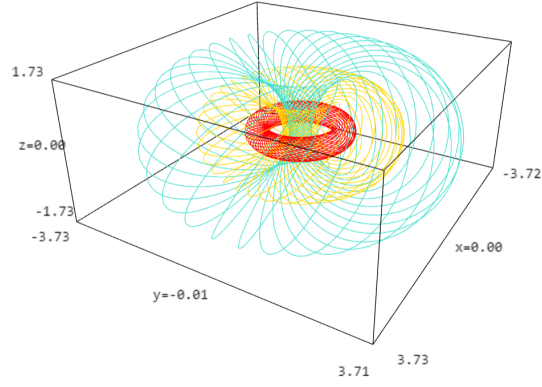


Figura 5.8: Visualización de secciones del fibrado de Hopf. Extraído de [3]

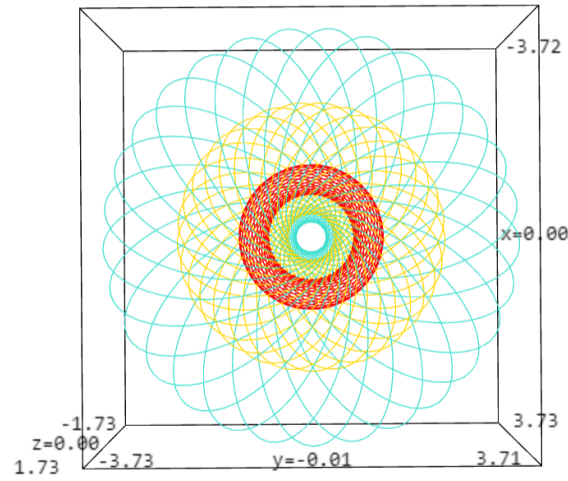


Figura 5.9: Visualización desde el eje  $z$  del fibrado de Hopf. Extraído de [3]

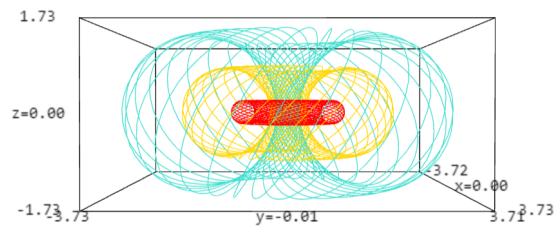


Figura 5.10: Visualización desde el eje  $y$  del fibrado de Hopf. Extraído de [3]

2-esfera que no es homotópico a un punto dado que ninguna etapa del mapa se puede contraer a un punto. Esto muestra que  $\pi_3(S^2)$  no es trivial, y tiene al menos un elemento, conocido como el *fibrado de Hopf*. Falta contestar, para mostrar todo  $\pi_3(S^2)$  ¿Es el fibrado de Hopf el único elemento? La respuesta es que no, de hecho  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ , y el fibrado de Hopf es un elemento generador.

Podemos formalizar este resultado al evaluar la secuencia exacta inducida por el fibrado, la cual es:

$$\cdots \rightarrow \pi_3(S^1) \rightarrow \pi_3(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_2(S^1) \rightarrow \pi_2(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow \cdots$$

Luego, como  $\pi_n(S^1) = 0, n > 1$  y  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ , tenemos

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \pi_3(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_3(S^2) \rightarrow 0 \rightarrow \pi_2(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_2(S^2) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \cdots$$

En donde los mapeos  $X \rightarrow 0$  son triviales, entonces  $Im(p_*) = Ker(0) = X$ , es decir que  $p_*$  es sobreyectivo. Además  $Im(0) = 0 = Ker(p_*)$ , entonces  $p_*$  es inyectivo. Luego,  $p_*$  es un isomorfismo, de lo cual

$$\pi_n(S^3) = \pi_n(S^2), \forall n \geq 3$$

y con el último mapa

$$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$$

en particular  $\mathbb{Z} = \pi_3(S^3) = \pi_3(S^2)$ .



## Capítulo 6

# Conclusiones

De lo recorrido en este trabajo tenemos varias cosas que concluir. Hemos explorado aspectos históricos, técnicos, y pedagógicos de una introducción a la topología algebraica para contestar a la pregunta del título.

La respuesta corta a la pregunta del título es que podemos envolver la 3-esfera en la 2-esfera utilizando el fibrado de Hopf. Este fibrado se basa en la representación compleja de  $S^1, S^2, S^3$ , y es explícitamente la función  $p : S^3 \rightarrow S^2, p(z_1, z_2) = z_2/z_1$ . Este fibrado es el elemento generador del grupo de homotopía de  $\pi_3(S^2)$ , que hemos calculado y conocemos que es  $\mathbb{Z}$ . Podemos visualizar el fibrado para afianzar la intuición.

En nuestro recorrido histórico notamos que el foco de la topología algebraica ha tomado un giro en el que intercambia la intuición de las ideas originales de Poincaré por las facilidades de cálculo de una teoría formal. Este intercambio tiene su ventaja en que hace más sencillo el cálculo de estructuras y su desventaja en que limita el avance de la teoría.

La pregunta ¿por qué es fácil entender el grupo fundamental y no el resto de grupos de homotopía? nos llevó a investigar la abstracción del mo-

vimiento desde la perspectiva de la naturaleza humana. Vimos que el grupo fundamental es fácil de entender porque se compone de trayectorias, que son una idea muy natural; también es fácil de entender porque se puede recorrer de forma ordenada, de la misma forma que uno se mueve. El resto de grupos de homotopía no están compuestos de trayectorias, y sus mapeos no se pueden recorrer de la forma en que se recorre una trayectoria.

De los ejemplos podemos abstraer varios puntos. El primero es que notamos que cada ejemplo se hizo con un mecanismo diferente, a pesar de venir de la misma definición y de trabajarse con un mismo algoritmo. Este es uno de los problemas de los grupos de homotopía, que no existe un mecanismo que permita calcularlos todos. Por esta razón es que aún se desconocen los grupos de homotopía superior de las esferas.

El segundo punto lo podemos abstraer del ejemplo de  $\pi_1(S^1)$  en el que hemos introducido herramientas de análisis de variable compleja. La universalidad e independencia de la definición de los grupos de homotopía superior se presta para introducir cualquier tipo de herramienta para su cálculo. En este caso hemos usado también un teorema que establece una relación de homotopía entre las funciones analíticas de las funciones continuas entre dos manifolds. Esencialmente este teorema hace indistinguibles (desde la perspectiva de la homotopía) a las funciones continuas de las funciones analíticas [15]. Es decir que para fines de homotopía podemos usar continuidad y analiticidad de forma indistinta. Este tipo de relaciones hace que los grupos de homotopía sean una herramienta particularmente poderosa para el estudio de la topología algebraica.

Como tercer punto a abstraer de los ejemplos es que notamos que para usar la intuición de *envolver* una esfera en otro espacio es necesario que tanto la esfera como el espacio estén contenidos en un mismo  $R^n$ . Este es el caso del último ejemplo, en el que llevamos las tres esferas a los números complejos, y luego representamos a  $S^3$  en  $R^3$ . Esto es para que los objetos que estamos

trabajando sean comparables, y es una dificultad intuitiva de los grupos de homotopía superior pues no siempre es sencillo llevar una esfera de altas dimensiones a una dimensión menor. Los mecanismos usuales para estas transformaciones involucran números complejos, cuaterniones, octoniones, y otras estructuras de dimensiones más altas.

# Bibliografía

- [1] J.J. Rotman. *An introduction to algebraic topology*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1988.
- [2] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Allen Hatcher, 2001.
- [3] Eric Gourgoulhon. Sagemanifolds gallery. [https://github.com/sagemanifolds/SageManifolds/blob/master/Notebooks/SM\\_sphere\\_S3\\_Hopf.ipynb](https://github.com/sagemanifolds/SageManifolds/blob/master/Notebooks/SM_sphere_S3_Hopf.ipynb), 2020.
- [4] H. (Translated by John Stillwell) Poincaré. *Papers on Topology: Analysis Situs and Its Five Supplements*. History of mathematics. American Mathematical Society, 2009.
- [5] D. Siersman. Poincaré and analysis situs, the beginning of algebraic topology. 2012.
- [6] J. Dieudonné. *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900 - 1960*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser, 2009.
- [7] M. R. Adhikari. *Basic Algebraic Topology and its Applications*. Graduate texts in mathematics. Springer, 2016.
- [8] A.B. Schwarz. *Quantum field theory and topology*. Springer, 1999.
- [9] Mekenyan O. G. Bonchev, D. D. *Graph Theoretical Approaches to Chemical Reactivity*. Springer, 2016.

- [10] J.R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall,, 2000.
- [11] V. Runde. *A taste of topology*. Universitext. Springer, 2005.
- [12] Mendelson B. *Introduction to topology*. Dover Publications, 1990.
- [13] J.B. Peterson. *Maps of meaning, the architecture of belief*. Routledge, 1999.
- [14] Whitehead G.W. *Elements of homotopy theory*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1978.
- [15] L. Bott, R. W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1982.