



**FACULTAD de  
CIENCIAS ECONÓMICAS**

# **REPASO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA I**

**ALAN REYES-FIGUEROA**

**ELEMENTS OF MACHINE LEARNING**

**(AULA 02) 12.ENERO.2023**

Construcción. Punto de partida: un experimento

- Resultado del experimento es  $\omega \in \Omega \rightsquigarrow$  *espacio muestral*.

# Probabilidades

Construcción. Punto de partida: un experimento

- Resultado del experimento es  $\omega \in \Omega \rightsquigarrow$  *espacio muestral*.
- Interés en ciertos eventos  $A \rightsquigarrow$   $\sigma$ -álgebra

# Probabilidades

Construcción. Punto de partida: un experimento

- Resultado del experimento es  $\omega \in \Omega \rightsquigarrow$  *espacio muestral*.
- Interés en ciertos eventos  $A \rightsquigarrow \sigma$ -álgebra
- Una probabilidad  $\mathbb{P}$  es una función sobre ciertos eventos  $\mathbb{P} : A \mapsto \mathbb{R}$ .

Construcción. Punto de partida: un experimento

- Resultado del experimento es  $\omega \in \Omega \rightsquigarrow$  *espacio muestral*.
- Interés en ciertos eventos  $A \rightsquigarrow$   $\sigma$ -álgebra
- Una probabilidad  $\mathbb{P}$  es una función sobre ciertos eventos  $\mathbb{P} : A \mapsto \mathbb{R}$ .

## Ejemplo 1

Experimento: lanzar un dado.

Construcción. Punto de partida: un experimento

- Resultado del experimento es  $\omega \in \Omega \rightsquigarrow$  *espacio muestral*.
- Interés en ciertos eventos  $A \rightsquigarrow$   $\sigma$ -álgebra
- Una probabilidad  $\mathbb{P}$  es una función sobre ciertos eventos  $\mathbb{P} : A \mapsto \mathbb{R}$ .

## Ejemplo 1

Experimento: lanzar un dado.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = [1..6]$$

# Probabilidades

Construcción. Punto de partida: un experimento

- Resultado del experimento es  $\omega \in \Omega \rightsquigarrow$  *espacio muestral*.
- Interés en ciertos eventos  $A \rightsquigarrow$   $\sigma$ -álgebra
- Una probabilidad  $\mathbb{P}$  es una función sobre ciertos eventos  $\mathbb{P} : A \mapsto \mathbb{R}$ .

## Ejemplo 1

Experimento: lanzar un dado.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = [1..6]$$

Algunos eventos

| Representación         | Evento                             |
|------------------------|------------------------------------|
| $A_1 = \{2, 4, 6\}$    | obtener un número par              |
| $A_2 = \{3\}$          | obtener 3                          |
| $A_3 = \{1, 2, 4, 5\}$ | obtener un número no múltiplo de 3 |

# Probabilidades

Construcción. Punto de partida: un experimento

- Resultado del experimento es  $\omega \in \Omega \rightsquigarrow$  *espacio muestral*.
- Interés en ciertos eventos  $A \rightsquigarrow$   $\sigma$ -álgebra
- Una probabilidad  $\mathbb{P}$  es una función sobre ciertos eventos  $\mathbb{P} : A \mapsto \mathbb{R}$ .

## Ejemplo 1

Experimento: lanzar un dado.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = [1..6]$$

Algunos eventos

| Representación         | Evento                             |
|------------------------|------------------------------------|
| $A_1 = \{2, 4, 6\}$    | obtener un número par              |
| $A_2 = \{3\}$          | obtener 3                          |
| $A_3 = \{1, 2, 4, 5\}$ | obtener un número no múltiplo de 3 |



## **Ejemplo 2**

Experimento: lanzar dos dados.

## Ejemplo 2

Experimento: lanzar dos dados.

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), \dots, (5, 6), (6, 6)\}$$

## Ejemplo 2

Experimento: lanzar dos dados.

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), \dots, (5, 6), (6, 6)\}$$

Probablemente aquí sea más simple representarlo como

$$\Omega = \{(a, b) : a, b \in [1..6]\} = [1..6] \times [1..6]$$

## Ejemplo 2

Experimento: lanzar dos dados.

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), \dots, (5, 6), (6, 6)\}$$

Probablemente aquí sea más simple representarlo como

$$\Omega = \{(a, b) : a, b \in [1..6]\} = [1..6] \times [1..6]$$

Algunos eventos

| Representación                                    | Evento                     |
|---|----------------------------|
| $A_1 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), \dots, (6, 1)\}$ | que los dados sumen 7      |
| $A_2 = \{(1, 3), (3, 1), \dots, (6, 3), (3, 6)\}$ | que aparezca al menos un 3 |

## Ejemplo 2

Experimento: lanzar dos dados.

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), \dots, (5, 6), (6, 6)\}$$

Probablemente aquí sea más simple representarlo como

$$\Omega = \{(a, b) : a, b \in [1..6]\} = [1..6] \times [1..6]$$

Algunos eventos

| Representación                                    | Evento                     |
|---|----------------------------|
| $A_1 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), \dots, (6, 1)\}$ | que los dados sumen 7      |
| $A_2 = \{(1, 3), (3, 1), \dots, (6, 3), (3, 6)\}$ | que aparezca al menos un 3 |

Otros espacios asociados:  $\Omega_1 = [1..6]$ , ¿Cuál es el mínimo de los dos dados?

## Otros ejemplos (para pensar)

Especificar un espacio muestral para los siguientes experimentos:

- a) Lanzar una moneda.
- b) Lanzar una moneda hasta que aparezca “cruz”.
- c) Distancia recorrida por un automóvil con un litro de gasolina.
- d) Señal de radio que se recibe durante dos segundos.
- e) Juego entre tres jugadores:  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . El juego consiste en jugar partidas por parejas, comenzando  $P$  contra  $Q$ . Quien gane un partida juega con el otro jugador, hasta que uno de los jugadores gane dos partidas consecutivas, ganando entonces el juego.

Pregunta: ¿Cómo definir  $\mathbb{P}$ ? ¿Cómo interpretarla?

Pregunta: ¿Cómo definir  $\mathbb{P}$ ? ¿Cómo interpretarla?

## Definición (Espacio de probabilidad)

Un **espacio de probabilidad** es una estructura  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , donde

- $\Omega$  es un conjunto (no vacío). Los elementos  $\omega \in \Omega$  se llaman eventos.
- $\mathcal{F} \subseteq \Omega$  es una  $\sigma$ -álgebra.
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad.



## Definición

Una  $\sigma$ -**álgebra**  $\mathcal{F}$  sobre un conjunto  $\Omega$  es una colección de subconjuntos de  $\Omega$  que satisface:

- $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$  (es cerrada bajo complementos);
- $A_i \in \mathcal{F}$ , para  $i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$  (es cerrada bajo uniones enum).

## Definición

Una  $\sigma$ -**álgebra**  $\mathcal{F}$  sobre un conjunto  $\Omega$  es una colección de subconjuntos de  $\Omega$  que satisface:

- $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$  (es cerrada bajo complementos);
- $A_i \in \mathcal{F}$ , para  $i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$  (es cerrada bajo uniones enum).

## Definición

Una función  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  es una **medida de probabilidad** si

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ,  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ;
- para cualquier colección enumerable de eventos exclusivos  $E_i \in \mathcal{F}$ , vale

$$\mathbb{P}\left(\bigcup E_i\right) = \sum \mathbb{P}(E_i) \text{ (enumerablemente aditiva).}$$

# Axiomas

Axiomas de la probabilidad, introducidos por Kolmogorov en 1933.

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de medida con  $\mathbb{P}(E)$  la probabilidad de un evento  $E \in \mathcal{F}$ . Asumimos los siguientes supuestos para  $\mathbb{P}$ :

## Axiomas

# Axiomas

Axiomas de la probabilidad, introducidos por Kolmogorov en 1933.

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de medida con  $\mathbb{P}(E)$  la probabilidad de un evento  $E \in \mathcal{F}$ . Asumimos los siguientes supuestos para  $\mathbb{P}$ :

## Axiomas

1.  $\mathbb{P}(E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{F}$  (*no-negativa*).

Axiomas de la probabilidad, introducidos por Kolmogorov en 1933.

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de medida con  $\mathbb{P}(E)$  la probabilidad de un evento  $E \in \mathcal{F}$ . Asumimos los siguientes supuestos para  $\mathbb{P}$ :

## Axiomas

1.  $\mathbb{P}(E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{F}$  (*no-negativa*).
2.  $\mathbb{P}(E)$  es siempre finita, y  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  (*unitariedad*).

Axiomas de la probabilidad, introducidos por Kolmogorov en 1933.

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de medida con  $\mathbb{P}(E)$  la probabilidad de un evento  $E \in \mathcal{F}$ . Asumimos los siguientes supuestos para  $\mathbb{P}$ :

## Axiomas

1.  $\mathbb{P}(E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{F}$  (*no-negativa*).
2.  $\mathbb{P}(E)$  es siempre finita, y  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  (*unitariedad*).
3. *Cualquier colección enumerable y mutuamente excluyente de eventos  $E_i \in \mathcal{F}$ , satisface*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i), \quad (\sigma\text{-aditiva}).$$

## Propiedades

*Si  $\mathbb{P}$  es una medida de probabilidad sobre  $\Omega$ , entonces*

- 1. (Monotonicidad) Si  $A \subseteq B$  son eventos, entonces  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .*

## Propiedades

*Si  $\mathbb{P}$  es una medida de probabilidad sobre  $\Omega$ , entonces*

- 1. (Monotonicidad) Si  $A \subseteq B$  son eventos, entonces  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .*
- 2. (Conjunto vacío)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .*



## Propiedades

Si  $\mathbb{P}$  es una medida de probabilidad sobre  $\Omega$ , entonces

1. (Monotonicidad) Si  $A \subseteq B$  son eventos, entonces  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .
2. (Conjunto vacío)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
3. (Complemento)  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ , para todo evento  $A \in \mathcal{F}$ .

## Propiedades

Si  $\mathbb{P}$  es una medida de probabilidad sobre  $\Omega$ , entonces

1. (Monotonicidad) Si  $A \subseteq B$  son eventos, entonces  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .
2. (Conjunto vacío)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
3. (Complemento)  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ , para todo evento  $A \in \mathcal{F}$ .
4. (Cotas para  $\mathbb{P}$ ) Para todo evento  $E \in \mathcal{F}$ ,  $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ .

## Propiedades

Si  $\mathbb{P}$  es una medida de probabilidad sobre  $\Omega$ , entonces

1. (Monotonicidad) Si  $A \subseteq B$  son eventos, entonces  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .
2. (Conjunto vacío)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
3. (Complemento)  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ , para todo evento  $A \in \mathcal{F}$ .
4. (Cotas para  $\mathbb{P}$ ) Para todo evento  $E \in \mathcal{F}$ ,  $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$ .
5.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .

# Caso finito

Sea  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .

# Caso finito

Sea  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .

Distribución de conteo o distribución uniforme: Corresponde a elegir un elemento al azar.

Para cada  $A \subseteq \Omega$ , se tiene

$$\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = |A|/k.$$

# Caso finito

Sea  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .

Distribución de conteo o distribución uniforme: Corresponde a elegir un elemento al azar.

Para cada  $A \subseteq \Omega$ , se tiene

$$\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = |A|/k.$$

En particular, sin  $A_i = \{\omega_i\}$ , entonces

$$\mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1/k.$$

# Caso finito

Sea  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .

Distribución de conteo o distribución uniforme: Corresponde a elegir un elemento al azar.

Para cada  $A \subseteq \Omega$ , se tiene

$$\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = |A|/k.$$

En particular, sin  $A_i = \{\omega_i\}$ , entonces

$$\mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1/k.$$

Caso general: Suponga que  $\mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ .  
Entonces

# Caso finito

Sea  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .

Distribución de conteo o distribución uniforme: Corresponde a elegir un elemento al azar.

Para cada  $A \subseteq \Omega$ , se tiene

$$\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = |A|/k.$$

En particular, sin  $A_i = \{\omega_i\}$ , entonces

$$\mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1/k.$$

Caso general: Suponga que  $\mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Entonces

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$



- Lefebvre. *Basic Probability Theory with Applications*. Springer.