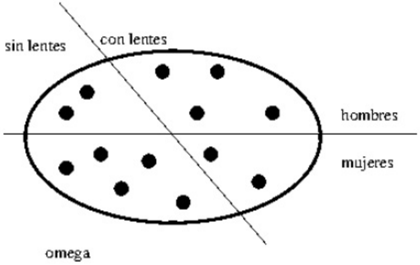
FACULTAD de CIENCIAS ECONÓMICAS

Repaso de probabilidad y estadística II

Alan Reyes-Figueroa

Introducción a la Ciencia de Datos (Aula 04) 19.enero.2023

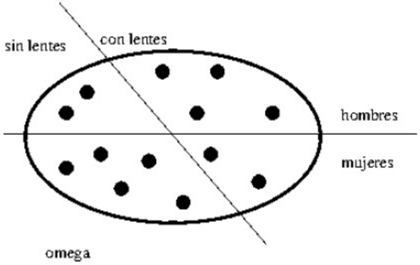
Conceptos derivados: Probabilidad condicional



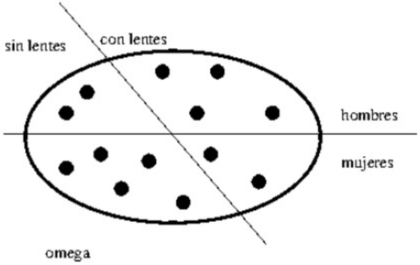
UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Conceptos derivados: Probabilidad condicional

Se elige una persona al azar.
¿Cuál es la probabilidad que sea una persona con lentes? $\frac{6}{13}$.



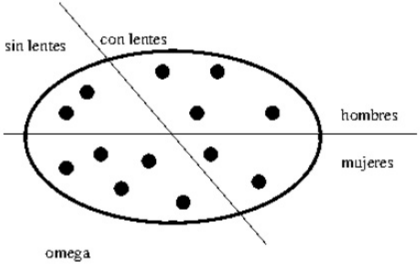
Conceptos derivados: Probabilidad condicional



Se elige una persona al azar.
¿Cuál es la probabilidad que sea una persona con lentes? $\frac{6}{13}$.

Alguien dice que es un hombre: ¿cuál es ahora la probabilidad que sea una persona con lentes? $\frac{2}{3}$.

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN



Se elige una persona al azar.
¿Cuál es la probabilidad que sea una persona con lentes? $\frac{6}{13}$.

Alguien dice que es un hombre: ¿cuál es ahora la probabilidad que sea una persona con lentes? $\frac{2}{3}$.

Definición

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces la probabilidad condicional de A dado B se define como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Probabilidad condicional

Observaciones:

- $\mathbb{P}(\cdot|B)$ define una nueva función de probabilidad sobre el espacio $\Omega' = B$.

Probabilidad condicional

Observaciones:

- $\mathbb{P}(\cdot|B)$ define una nueva función de probabilidad sobre el espacio $\Omega' = B$.

- En consecuencia, $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.

Probabilidad condicional

Observaciones:

- $\mathbb{P}(\cdot|B)$ define una nueva función de probabilidad sobre el espacio $\Omega' = B$.
- En consecuencia, $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.
- Observar que no hay ninguna relación directa entre $\mathbb{P}(A|B)$ y $\mathbb{P}(A|B^c)$.

Probabilidad condicional

Observaciones:

- $\mathbb{P}(\cdot|B)$ define una nueva función de probabilidad sobre el espacio $\Omega' = B$.

- En consecuencia, $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.

- Observar que no hay ninguna relación directa entre $\mathbb{P}(A|B)$ y $\mathbb{P}(A|B^c)$.

- Siempre podemos escribir $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)$.

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Probabilidad condicional

Observaciones:

- $\mathbb{P}(\cdot|B)$ define una nueva función de probabilidad sobre el espacio $\Omega' = B$.

- En consecuencia, $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.

- Observar que no hay ninguna relación directa entre $\mathbb{P}(A|B)$ y $\mathbb{P}(A|B^c)$.

- Siempre podemos escribir $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)$.
  (Esto no requiere el supuesto que $\mathbb{P}(B) > 0$) ¿Por qué?

Ejemplo

Experimento: Elegir al azar dos letras consecutivas de alguna palabra con alfabeto $T = \{a, b, c, d, e\}$.

Suponemos la siguiente distribución:

	a	b	c	d	e
a	0.10	0.05	0.10	0.04	0
b	0.01	0.01	0.10	0.01	0.04
c	0.02	0.05	0.05	0.10	0.01
d	0.04	0.10	0.01	0.01	0.02
e	0	0.10	0	0.01	0.02

¿Cuál es la probabilidad que la letra anterior fue una vocal dado que sabemos que la segunda letra seleccionada fue "b"?

Ejemplo

Solución: Queremos calcular $\mathbb{P}(B|A)$, donde $B = \{\textit{primera letra es vocal}\}$ y $A = \{\textit{ letra es b}\}$.

Ejemplo

Solución: Queremos calcular $\mathbb{P}(B|A)$, donde $B = \{primera\ letra\ es\ vocal\}$ y $A = \{\ letra\ es\ b\}$.

Entonces, de la definición de probabilidad condicional, tenemos

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Ejemplo

Solución: Queremos calcular $\mathbb{P}(B|A)$, donde $B = \{\textit{primera letra es vocal}\}$ y $A = \{\ \textit{letra es b}\}$.

Entonces, de la definición de probabilidad condicional, tenemos

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Pero, $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(\{ab, eb\}) = \mathbb{P}(ab) + \mathbb{P}(eb) = 0.05 + 0.10 = 0.15$,

Ejemplo

Solución: Queremos calcular $\mathbb{P}(B|A)$, donde $B = \{\textit{primera letra es vocal}\}$ y $A = \{\ \textit{letra es b}\}$.

Entonces, de la definición de probabilidad condicional, tenemos

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Pero, $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(\{ab, eb\}) = \mathbb{P}(ab) + \mathbb{P}(eb) = 0.05 + 0.10 = 0.15$, y $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{ab, bb, cb, db, eb\}) = 0.05 + 0.01 + 0.05 + 0.10 + 0.10 = 0.31$.

Ejemplo

Solución: Queremos calcular $\mathbb{P}(B|A)$, donde $B = \{primera\ letra\ es\ vocal\}$ y $A = \{\ letra\ es\ b\}$.

Entonces, de la definición de probabilidad condicional, tenemos

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Pero, $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(\{ab, eb\}) = \mathbb{P}(ab) + \mathbb{P}(eb) = 0.05 + 0.10 = 0.15$, y $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{ab, bb, cb, db, eb\}) = 0.05 + 0.01 + 0.05 + 0.10 + 0.10 = 0.31$.

De allí que

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.15}{0.31} = 0.48387$$

Teorema (Ley de la probabilidad total, caso finito)

Dada una partición $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ de Ω, tal que $\mathbb{P}(B_i) > 0, \forall i$, entonces

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i).$$

Ley de la probabilidad total

Teorema (Ley de la probabilidad total, caso finito)

Dada una partición $\{B_i\}_{i=1}^n$ de Ω, tal que $\mathbb{P}(B_i) > 0$, $\forall i$, entonces

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i).$$

Prueba: $\Omega = \bigcup B_i$, ya que es una partición. Luego

$$A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup B_i = \bigcup (A \cap B_i),$$

y los $A \cap B_i$ forman una partición de A.

Ley de la probabilidad total

Teorema (Ley de la probabilidad total, caso finito)

Dada una partición $\{B_i\}_{i=1}^n$ *de* Ω*, tal que* $\mathbb{P}(B_i) > 0$*,* $\forall i$*, entonces*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i).$$

<u>Prueba</u>: $\Omega = \bigcup B_i$, ya que es una partición. Luego

$$A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup B_i = \bigcup (A \cap B_i),$$

y los $A \cap B_i$ forman una partición de A. Por el axioma de aditividad, y la definición de probabilidad condicional

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i).$$

Ejemplo

Se tienen tres cajas, cada una conteniendo 100 cartas:
La caja 1 contiene 75 cartas rojas, y 25 cartas azules,
la caja 2 contiene 60 cartas rojas, y 40 cartas azules,
la caja 3 contiene 55 cartas rojas, y 45 cartas azules.

Se elige una de las cajas al azar, y luego se elige una carta dentro de la caja seleccionada.
¿Cuál es la probabilidad de elegir una carta roja?

Ejemplo

Solución: Considere los eventos $A =$ elegir carta roja, y

$$E_1 = \text{elegir caja } 1, \; E_2 = \text{elegir caja } 2, \; E_3 = \text{elegir caja } 3.$$

Ejemplo

<u>Solución</u>: Considere los eventos $A =$ elegir carta roja, y

$$E_1 = \text{elegir caja 1}, \; E_2 = \text{elegir caja 2}, \; E_3 = \text{elegir caja 3}.$$

Sabemos que $\mathbb{P}(A|E_1) = \frac{75}{100}$, $\mathbb{P}(A|E_2) = \frac{60}{100}$ y $\mathbb{P}(A|E_3) = \frac{55}{100}$.

Ejemplo

Solución: Considere los eventos $A =$ elegir carta roja, y

$$E_1 = \text{elegir caja 1}, \; E_2 = \text{elegir caja 2}, \; E_3 = \text{elegir caja 3}.$$

Sabemos que $\mathbb{P}(A|E_1) = \frac{75}{100}$, $\mathbb{P}(A|E_2) = \frac{60}{100}$ y $\mathbb{P}(A|E_3) = \frac{55}{100}$.

Entonces, por la ley de probabilidad total

$$\mathbb{P}(A) \; = \; \mathbb{P}(A|E_1)\,\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(A|E_2)\,\mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(A|E_3)\,\mathbb{P}(E_3)$$

Ejemplo

Solución: Considere los eventos $A =$ elegir carta roja, y

$$E_1 = \text{elegir caja } 1, \; E_2 = \text{elegir caja } 2, \; E_3 = \text{elegir caja } 3.$$

Sabemos que $\mathbb{P}(A|E_1) = \frac{75}{100}$, $\mathbb{P}(A|E_2) = \frac{60}{100}$ y $\mathbb{P}(A|E_3) = \frac{55}{100}$.

Entonces, por la ley de probabilidad total

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|E_1)\,\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(A|E_2)\,\mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(A|E_3)\,\mathbb{P}(E_3) \\ &= \frac{75}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{60}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{55}{100} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo

Solución: Considere los eventos $A =$ elegir carta roja, y

$$E_1 = \text{elegir caja } 1, \; E_2 = \text{elegir caja } 2, \; E_3 = \text{elegir caja } 3.$$

Sabemos que $\mathbb{P}(A|E_1) = \frac{75}{100}$, $\mathbb{P}(A|E_2) = \frac{60}{100}$ y $\mathbb{P}(A|E_3) = \frac{55}{100}$.

Entonces, por la ley de probabilidad total

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|E_1)\,\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(A|E_2)\,\mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(A|E_3)\,\mathbb{P}(E_3) \\
&= \frac{75}{100}\cdot\frac{1}{3} + \frac{60}{100}\cdot\frac{1}{3} + \frac{55}{100}\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{190}{300} = 0.6333
\end{aligned}$$

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Teorema (Regla de Bayes)

Si $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$*, entonces*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Teorema (Regla de Bayes)

Si $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$*, entonces*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

<u>Prueba</u>: Por hipótesis, $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, entonces

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Teorema (Regla de Bayes)

Si $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, *entonces*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

<u>Prueba</u>: Por hipótesis, $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, entonces

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Despejando $\mathbb{P}(A \cap B)$ de la segunda ecuación, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)$, y sustituyendo en la primera

Regla de Bayes

Teorema (Regla de Bayes)

Si $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$*, entonces*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Prueba: Por hipótesis, $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, entonces

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Despejando $\mathbb{P}(A \cap B)$ de la segunda ecuación, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)$, y sustituyendo en la primera

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A))}{\mathbb{P}(B)}.$$

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Ejemplo

Una compañía ha desarrollado una prueba para detectar la presencia de SARS-CoV-2 (Covid-19). Se pretende que
$\mathbb{P}(\text{prueba es positiva}|\text{tiene covid}) = 0.97$ y
$\mathbb{P}(\text{prueba es negativa}|\text{no tiene covid}) = 0.98$.

Si el 1% de la población tiene Covid, calcular la probabilidad de que la persona no tiene Covid, cuando el test da positivo.

Ejemplo

Una compañía ha desarrollado una prueba para detectar la presencia de SARS-CoV-2 (Covid-19). Se pretende que $\mathbb{P}(\text{prueba es positiva}|\text{tiene covid}) = 0.97$ y $\mathbb{P}(\text{prueba es negativa}|\text{no tiene covid}) = 0.98$.

Si el 1% de la población tiene Covid, calcular la probabilidad de que la persona no tiene Covid, cuando el test da positivo.

Bajo las mismas condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que la persona tenga Covid, cuando el test da negativo?

Ejemplo

Solución:

y: Test x: Real	No $= 0$	Sí $= 1$
No $= 0$		
Sí $= 1$		

Datos: $\mathbb{P}(x = 1) = 1/100$, $\mathbb{P}(y = 1|x = 1) = 0.97$, $\mathbb{P}(y = 0|x = 0) = 0.98$. Queremos calcular $\mathbb{P}(x = 1|y = 0)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(x = 1|y = 0) &= \frac{\mathbb{P}(y = 0|x = 1)\,\mathbb{P}(x = 1)}{\mathbb{P}(y = 0)} \\
&= \frac{(1 - \mathbb{P}(y = 1|x = 1))\,\mathbb{P}(x = 1)}{\mathbb{P}(y = 0|x = 0)\,\mathbb{P}(x = 0) + \mathbb{P}(y = 0|x = 1)\,\mathbb{P}(x = 1)} \\
&= \frac{0.03(0.01)}{0.02(0.99) + 0.03(0.01)} = 0.01492
\end{aligned}$$

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Conceptos derivados: Independencia

La idea de **independencia** es determinar si hay o no relación entre dos eventos A y B.

Conceptos derivados: Independencia

La idea de **independencia** es determinar si hay o no relación entre dos eventos A y B.
En otras palabra, si al conocer A, cambia nuestro conocimiento sobre B (o al conocer B cambia nuestro conocimiento sobre A).

Conceptos derivados: Independencia

La idea de **independencia** es determinar si hay o no relación entre dos eventos A y B.
En otras palabra, si al conocer A, cambia nuestro conocimiento sobre B (o al conocer B cambia nuestro conocimiento sobre A).

¿Cómo determinar esta relación? Comparar $\mathbb{P}(A|B)$ con $\mathbb{P}(A)$.

Conceptos derivados: Independencia

La idea de **independencia** es determinar si hay o no relación entre dos eventos A y B.
En otras palabra, si al conocer A, cambia nuestro conocimiento sobre B (o al conocer B cambia nuestro conocimiento sobre A).

¿Cómo determinar esta relación? Comparar $\mathbb{P}(A|B)$ con $\mathbb{P}(A)$.

Definición

*Si $\mathbb{P}(B) > 0$, decimos que A y B son **independientes** si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.*

Conceptos derivados: Independencia

La idea de **independencia** es determinar si hay o no relación entre dos eventos A y B.
En otras palabra, si al conocer A, cambia nuestro conocimiento sobre B (o al conocer B cambia nuestro conocimiento sobre A).

¿Cómo determinar esta relación? Comparar $\mathbb{P}(A|B)$ con $\mathbb{P}(A)$.

Definición

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, decimos que A y B son ***independientes*** *si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.*

Definición

Dos eventos A y B son ***independientes*** *si, y sólo si,*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Ejemplo

Lanzamiento de dos dados D_1 y D_2. Consideremos los eventos
$A = \{D_1 + D_2 \text{ es par}\}$, $B = \{D_1 < 5\}$, $C = \{D_1 \leq 3, D_2 \leq 3\}$.
Sabemos que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{5}{9}$.

D_1 D_2	1	2	3	4	5	6
1	X		X		X	
2		X		X		X
3	X		X		X	
4		X		X		X
5						
6						

D_1 D_2	1	2	3	4	5	6
1	X		X			
2		X				
3	X		X			
4						
5						
6						

Luego, A y B son independientes; mientras que A y C no lo son.