Enteros Algebraicos

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de Números (Aula 32) 10.noviembre.2022

En esta sección, haremos una pequeña introducción a la teoría algebraica de números. Introducimos algunos conceptos básicos (sin ahondar demasiado), pero que nos permitirán apreciar algunas de las técnicas usadas en esta área.

En esta sección, haremos una pequeña introducción a la teoría algebraica de números. Introducimos algunos conceptos básicos (sin ahondar demasiado), pero que nos permitirán apreciar algunas de las técnicas usadas en esta área.

Números Algebraicos:

Definición

Un número complejo $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ *es un* ***número algebraico*** *si existe un polinomio o nulo* $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *tal que* $f(\mathbf{z}) = 0$.

Enteros Algebraicos

En esta sección, haremos una pequeña introducción a la teoría algebraica de números. Introducimos algunos conceptos básicos (sin ahondar demasiado), pero que nos permitirán apreciar algunas de las técnicas usadas en esta área.

Números Algebraicos:

Definición

Un número complejo $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ *es un* ***número algebraico*** *si existe un polinomio o nulo* $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *tal que* $f(\mathbf{z}) = 0$.

Obs!: Todo número algebraico $\mathbf{z}$ satisface un único polinomio mónico e irreducible $g(x) = 0$, sobre $\mathbb{Q}$ (su polinomio minimal), y todo polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(\mathbf{z}) = 0$ es divisible por $g(x)$.

En esta sección, haremos una pequeña introducción a la teoría algebraica de números. Introducimos algunos conceptos básicos (sin ahondar demasiado), pero que nos permitirán apreciar algunas de las técnicas usadas en esta área.

Números Algebraicos:

Definición

Un número complejo $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ *es un* ***número algebraico*** *si existe un polinomio o nulo* $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *tal que* $f(\mathbf{z}) = 0$.

Obs!: Todo número algebraico $\mathbf{z}$ satisface un único polinomio mónico e irreducible $g(x) = 0$, sobre $\mathbb{Q}$ (su polinomio minimal), y todo polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(\mathbf{z}) = 0$ es divisible por $g(x)$. El **grado** de $\mathbf{z}$ es el grado de su polinomio minimal $g(x)$.

Enteros Algebraicos

En esta sección, haremos una pequeña introducción a la teoría algebraica de números. Introducimos algunos conceptos básicos (sin ahondar demasiado), pero que nos permitirán apreciar algunas de las técnicas usadas en esta área.

Números Algebraicos:

Definición

*Un número complejo $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ es un **número algebraico** si existe un polinomio o nulo $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(\mathbf{z}) = 0$.*

Obs!: Todo número algebraico $\mathbf{z}$ satisface un único polinomio mónico e irreducible $g(x) = 0$, sobre $\mathbb{Q}$ (su polinomio minimal), y todo polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(\mathbf{z}) = 0$ es divisible por $g(x)$. El **grado** de $\mathbf{z}$ es el grado de su polinomio minimal $g(x)$.

Definición

*Un número algebraico $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ es un **entero algebraico** si satisface una ecuación polinomial $f(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$, con coeficientes enteros.*

Ejemplo: Todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ es algebraico, pues satisface el polinomio $f(x) = x - r \in \mathbb{Q}[x]$.

Enteros Algebraicos

Ejemplo: Todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ es algebraico, pues satisface el polinomio $f(x) = x - r \in \mathbb{Q}[x]$.
De entre todos los racionales, los únicos enteros algebraicos son los números enteros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Enteros Algebraicos

Ejemplo: Todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ es algebraico, pues satisface el polinomio $f(x) = x - r \in \mathbb{Q}[x]$.
De entre todos los racionales, los únicos enteros algebraicos son los números enteros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Algunas propiedades:

- Si α, β son números algebraicos, también lo son $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ y $\alpha\beta$, $-\alpha$, $\frac{1}{\alpha}$ (cuando $\alpha \neq 0$).

Ejemplo: Todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ es algebraico, pues satisface el polinomio $f(x) = x - r \in \mathbb{Q}[x]$.
De entre todos los racionales, los únicos enteros algebraicos son los números enteros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Algunas propiedades:

- Si α, β son números algebraicos, también lo son $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ y $\alpha\beta$, $-\alpha$, $\frac{1}{\alpha}$ (cuando $\alpha \neq 0$).
- De hecho, los números algebraicos forman un cuerpo, llamado el **cuerpo de número algebraicos** $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$.

Enteros Algebraicos

Ejemplo: Todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ es algebraico, pues satisface el polinomio $f(x) = x - r \in \mathbb{Q}[x]$.
De entre todos los racionales, los únicos enteros algebraicos son los números enteros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Algunas propiedades:

- Si α, β son números algebraicos, también lo son $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ y $\alpha\beta$, $-\alpha$, $\frac{1}{\alpha}$ (cuando $\alpha \neq 0$).
- De hecho, los números algebraicos forman un cuerpo, llamado el **cuerpo de número algebraicos** $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$.
- Los enteros algebraicos forman un anillo, el**anillo de enteros algebraicos** A, contenido dentro de $\mathcal{A}$.

Enteros Algebraicos

Ejemplo: Todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ es algebraico, pues satisface el polinomio $f(x) = x - r \in \mathbb{Q}[x]$.
De entre todos los racionales, los únicos enteros algebraicos son los números enteros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Algunas propiedades:

- Si α, β son números algebraicos, también lo son $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ y $\alpha\beta$, $-\alpha$, $\frac{1}{\alpha}$ (cuando $\alpha \neq 0$).
- De hecho, los números algebraicos forman un cuerpo, llamado el **cuerpo de número algebraicos** $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$.
- Los enteros algebraicos forman un anillo, el**anillo de enteros algebraicos** A, contenido dentro de $\mathcal{A}$.

Definición

Un ***cuerpo de números*** *K es cualquier cuerpo contenido en $\mathbb{C}$.*

Ejemplo: Todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ es algebraico, pues satisface el polinomio $f(x) = x - r \in \mathbb{Q}[x]$.
De entre todos los racionales, los únicos enteros algebraicos son los números enteros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Algunas propiedades:

- Si α, β son números algebraicos, también lo son $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ y $\alpha\beta$, $-\alpha$, $\frac{1}{\alpha}$ (cuando $\alpha \neq 0$).
- De hecho, los números algebraicos forman un cuerpo, llamado el **cuerpo de número algebraicos** $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$.
- Los enteros algebraicos forman un anillo, el**anillo de enteros algebraicos** A, contenido dentro de $\mathcal{A}$.

Definición

*Un **cuerpo de números** K es cualquier cuerpo contenido en $\mathbb{C}$. El **anillo de enteros** de K, denotado $\mathcal{O}_K$, es la intersección $K \cap A$.*

Ejemplos:.

Ejemplos:.

- $\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$.

Ejemplos:.

- $\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$.
- $\mathbb{Z}[i]$

Enteros Algebraicos

Ejemplos:.

- $\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$

Ejemplos:.

- $\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Q}(i) \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)}$.

Ejemplos:.

- $\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Q}(i) \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)}$.

Ya vimos que $\mathcal{A}$ es un cuerpo.

Ejemplos:.

- $\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Q}(i) \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)}$.

Ya vimos que $\mathcal{A}$ es un cuerpo.

Definición

*Un **cuerpo de números algebraicos** es cualquier cuerpo contenido en $\mathcal{A}$.*

Ejemplos:.

- $\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Q}(i) \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)}$.

Ya vimos que $\mathcal{A}$ es un cuerpo.

Definición

*Un **cuerpo de números algebraicos** es cualquier cuerpo contenido en $\mathcal{A}$.*

La forma más común de construir cuerpos algebraicos de números es mediante extensiones de $\mathbb{Q}$.

Ejemplos:.

- $\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi: \ a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Q}(i) \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)}$.

Ya vimos que $\mathcal{A}$ es un cuerpo.

Definición

*Un **cuerpo de números algebraicos** es cualquier cuerpo contenido en $\mathcal{A}$.*

La forma más común de construir cuerpos algebraicos de números es mediante extensiones de $\mathbb{Q}$. Esto es, dado un número algebraicos $\xi \notin \mathbb{Q}$, consideramos la **extensión** de $\mathbb{Q}$ por ξ

$$\mathbb{Q}(\xi) = \text{el menor cuerpo contenido en } \mathcal{A} \text{ que contiene a } \mathbb{Q} \text{ y a } \xi.$$

Ejemplos:.

- $\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$.
- $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Q}(i) \cap A = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)}$.

Ya vimos que $\mathcal{A}$ es un cuerpo.

Definición

*Un **cuerpo de números algebraicos** es cualquier cuerpo contenido en $\mathcal{A}$.*

La forma más común de construir cuerpos algebraicos de números es mediante extensiones de $\mathbb{Q}$. Esto es, dado un número algebraicos $\xi \notin \mathbb{Q}$, consideramos la **extensión** de $\mathbb{Q}$ por ξ

$$\mathbb{Q}(\xi) = \text{el menor cuerpo contenido en } \mathcal{A} \text{ que contiene a } \mathbb{Q} \text{ y a } \xi.$$

Para dar una expresión más adecuada para $\mathbb{Q}(\xi)$, nos limitamos a extensiones finitas, esto es, donde $\deg(\xi) = n$ (ξ satisface un polinomio de grado n en $\mathbb{Q}[x]$).

Teorema

Si $\xi \in \mathcal{A}$ es un número algebraico de grado n, entonces todo número en $\mathbb{Q}(\xi)$ se escribe en forma única como una combinación lineal

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{n-1}\xi^{n-1}, \qquad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Teorema

Si $\xi \in \mathcal{A}$ es un número algebraico de grado n, entonces todo número en $\mathbb{Q}(\xi)$ se escribe en forma única como una combinación lineal

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{n-1}\xi^{n-1}, \qquad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Así, $\mathbb{Q}(\xi) \cong \mathbb{Q}^n$ como $\mathbb{Q}-$espacio vectorial, y $\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}\}$ es base de $\mathbb{Q}(\xi)$.

Teorema

Si $\xi \in \mathcal{A}$ es un número algebraico de grado n, entonces todo número en $\mathbb{Q}(\xi)$ se escribe en forma única como una combinación lineal

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{n-1}\xi^{n-1}, \qquad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Así, $\mathbb{Q}(\xi) \cong \mathbb{Q}^n$ como $\mathbb{Q}-$espacio vectorial, y $\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}\}$ es base de $\mathbb{Q}(\xi)$.

Ejemplo 1: Consideramos el número $\sqrt{3} \in \mathbb{C}$.

Teorema

Si $\xi \in \mathcal{A}$ es un número algebraico de grado n, entonces todo número en $\mathbb{Q}(\xi)$ se escribe en forma única como una combinación lineal

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{n-1}\xi^{n-1}, \qquad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Así, $\mathbb{Q}(\xi) \cong \mathbb{Q}^n$ como $\mathbb{Q}-$espacio vectorial, y $\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}\}$ es base de $\mathbb{Q}(\xi)$.

Ejemplo 1: Consideramos el número $\sqrt{3} \in \mathbb{C}$. $\sqrt{3}$ es un número algebraico, pues satisface $x^2 - 3 = 0$.

Teorema

Si $\xi \in \mathcal{A}$ es un número algebraico de grado n, entonces todo número en $\mathbb{Q}(\xi)$ se escribe en forma única como una combinación lineal

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{n-1}\xi^{n-1}, \qquad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Así, $\mathbb{Q}(\xi) \cong \mathbb{Q}^n$ como $\mathbb{Q}-$espacio vectorial, y $\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}\}$ es base de $\mathbb{Q}(\xi)$.

Ejemplo 1: Consideramos el número $\sqrt{3} \in \mathbb{C}$. $\sqrt{3}$ es un número algebraico, pues satisface $x^2 - 3 = 0$. Además, $\deg(\sqrt{3}) = 2$.

Teorema

Si $\xi \in \mathcal{A}$ es un número algebraico de grado n, entonces todo número en $\mathbb{Q}(\xi)$ se escribe en forma única como una combinación lineal

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{n-1}\xi^{n-1}, \qquad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Así, $\mathbb{Q}(\xi) \cong \mathbb{Q}^n$ como $\mathbb{Q}-$espacio vectorial, y $\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}\}$ es base de $\mathbb{Q}(\xi)$.

Ejemplo 1: Consideramos el número $\sqrt{3} \in \mathbb{C}$. $\sqrt{3}$ es un número algebraico, pues satisface $x^2 - 3 = 0$. Además, $\deg(\sqrt{3}) = 2$.

Entonces, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$, de grado 2, de modo que

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a_0 + a_1\sqrt{3} : \; a_0, a_1 \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{3}.$$

La suma en $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ es la suma usual por componentes (se suman las partes reales, y se suman las partes imaginarias).

Teorema

Si $\xi \in \mathcal{A}$ es un número algebraico de grado n, entonces todo número en $\mathbb{Q}(\xi)$ se escribe en forma única como una combinación lineal

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_{n-1}\xi^{n-1}, \qquad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Así, $\mathbb{Q}(\xi) \cong \mathbb{Q}^n$ como $\mathbb{Q}-$espacio vectorial, y $\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}\}$ es base de $\mathbb{Q}(\xi)$.

Ejemplo 1: Consideramos el número $\sqrt{3} \in \mathbb{C}$. $\sqrt{3}$ es un número algebraico, pues satisface $x^2 - 3 = 0$. Además, $\deg(\sqrt{3}) = 2$.

Entonces, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$, de grado 2, de modo que

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a_0 + a_1\sqrt{3} : \ a_0, a_1 \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{3}.$$

La suma en $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ es la suma usual por componentes (se suman las partes reales, y se suman las partes imaginarias). El producto en $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ funciona según la regla

$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}.$$

Ejemplo 2: Consideramos el número $\xi = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$.

Enteros Algebraicos

Ejemplo 2: Consideramos el número $\xi = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$. ξ es un número algebraico, pues satisface $x^3 - 2 = 0$.

Enteros Algebraicos

Ejemplo 2: Consideramos el número $\xi = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$. ξ es un número algebraico, pues satisface $x^3 - 2 = 0$. Además, $\deg(\xi) = 3$.

Ejemplo 2: Consideramos el número $\xi = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$. ξ es un número algebraico, pues satisface $x^3 - 2 = 0$. Además, $\deg(\xi) = 3$.

Entonces, $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$, de grado 3, y

$$\mathbb{Q}(\xi) = \{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q} + \xi\mathbb{Q} + \xi^2\mathbb{Q}.$$

La suma en $\mathbb{Q}(\xi)$ es la suma usual por componentes

$$(a + b\xi + c\xi^2) + (d + e\xi + f\xi^2) = (a + d) + (b + e)\xi + (c + f)\xi^2.$$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Enteros Algebraicos

Ejemplo 2: Consideramos el número $\xi = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$. ξ es un número algebraico, pues satisface $x^3 - 2 = 0$. Además, $\deg(\xi) = 3$.

Entonces, $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$, de grado 3, y

$$\mathbb{Q}(\xi) = \{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 : \; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q} + \xi\mathbb{Q} + \xi^2\mathbb{Q}.$$

La suma en $\mathbb{Q}(\xi)$ es la suma usual por componentes

$$(a + b\xi + c\xi^2) + (d + e\xi + f\xi^2) = (a + d) + (b + e)\xi + (c + f)\xi^2.$$

El producto en $\mathbb{Q}(\xi)$ funciona según la reglas

$$1 \cdot \xi = \xi, \qquad 1 \cdot \xi^2 = \xi^2, \qquad \xi \cdot \xi = \xi^2, \qquad \xi \cdot \xi^2 = \xi^3 = 2, \qquad \xi^2 \cdot \xi^2 = \xi^4 = 2\xi.$$

Ejemplo 2: Consideramos el número $\xi = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$. ξ es un número algebraico, pues satisface $x^3 - 2 = 0$. Además, $\deg(\xi) = 3$.

Entonces, $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$, de grado 3, y

$$\mathbb{Q}(\xi) = \{a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q} + \xi\mathbb{Q} + \xi^2\mathbb{Q}.$$

La suma en $\mathbb{Q}(\xi)$ es la suma usual por componentes

$$(a + b\xi + c\xi^2) + (d + e\xi + f\xi^2) = (a+d) + (b+e)\xi + (c+f)\xi^2.$$

El producto en $\mathbb{Q}(\xi)$ funciona según la reglas

$$1 \cdot \xi = \xi, \qquad 1 \cdot \xi^2 = \xi^2, \qquad \xi \cdot \xi = \xi^2, \qquad \xi \cdot \xi^2 = \xi^3 = 2, \qquad \xi^2 \cdot \xi^2 = \xi^4 = 2\xi.$$

En particular

$$(a + b\xi + c\xi^2)(d + e\xi + f\xi^2) = (ad + 2bf + 2ce) + (ae + bd + 2cf)\xi + (af + be + cd)\xi^2.$$

Cuerpos Cuadráticos

Cuerpos cuadráticos:

Cuerpos cuadráticos:

Definición

Un cuerpo cuadrático (o extensión cuadrática), es una extensión de la forma $\mathbb{Q}(\xi)$*, donde* ξ *satisface un polinomio de grado 2 sobre* $\mathbb{Q}$*. Esto es* $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = 2$*.*

Cuerpos cuadráticos:

Definición

Un cuerpo cuadrático (o extensión cuadrática), es una extensión de la forma $\mathbb{Q}(\xi)$, donde ξ satisface un polinomio de grado 2 sobre $\mathbb{Q}$. Esto es $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = 2$.

Obs!

- Sabemos que $\mathbb{Q}(\xi) = \{a + b\xi : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Cuerpos cuadráticos:

Definición

Un cuerpo cuadrático (o extensión cuadrática), es una extensión de la forma $\mathbb{Q}(\xi)$, donde ξ satisface un polinomio de grado 2 sobre $\mathbb{Q}$. Esto es $[\mathbb{Q}(\xi):\mathbb{Q}]=2$.

Obs!

- Sabemos que $\mathbb{Q}(\xi)=\{a+b\xi:\ a,b\in\mathbb{Q}\}$.
- Si $\deg(\xi)=2$, recordemos que ξ debe ser de la forma

$$\xi=\frac{a+b\sqrt{m}}{c},\qquad \text{con } a,b,c,m\in\mathbb{Z},\ c\neq 0,\ m\neq 0,1,\ m \text{ libre de cuadrados.}$$

Cuerpos cuadráticos:

Definición

Un cuerpo cuadrático (o extensión cuadrática), es una extensión de la forma $\mathbb{Q}(\xi)$*, donde* ξ *satisface un polinomio de grado 2 sobre* $\mathbb{Q}$*. Esto es* $[\mathbb{Q}(\xi):\mathbb{Q}] = 2$*.*

Obs!

- Sabemos que $\mathbb{Q}(\xi) = \{a + b\xi : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$.
- Si $\deg(\xi) = 2$, recordemos que ξ debe ser de la forma
$$\xi = \frac{a + b\sqrt{m}}{c}, \qquad \text{con } a, b, c, m \in \mathbb{Z},\ c \neq 0,\ m \neq 0, 1,\ m \text{ libre de cuadrados.}$$
  En particular,
$$\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}\Big(\frac{a + b\sqrt{m}}{c}\Big)$$

Cuerpos cuadráticos:

Definición

Un cuerpo cuadrático (o extensión cuadrática), es una extensión de la forma $\mathbb{Q}(\xi)$, donde ξ satisface un polinomio de grado 2 sobre $\mathbb{Q}$. Esto es $[\mathbb{Q}(\xi):\mathbb{Q}] = 2$.

Obs!

- Sabemos que $\mathbb{Q}(\xi) = \{a + b\xi : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$.
- Si $\deg(\xi) = 2$, recordemos que ξ debe ser de la forma

$$\xi = \frac{a + b\sqrt{m}}{c}, \qquad \text{con } a, b, c, m \in \mathbb{Z},\ c \neq 0,\ m \neq 0, 1,\ m \text{ libre de cuadrados.}$$

En particular,

$$\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}\Big(\frac{a + b\sqrt{m}}{c}\Big) = \mathbb{Q}(a + b\sqrt{m})$$

Cuerpos cuadráticos:

Definición

Un cuerpo cuadrático (o extensión cuadrática), es una extensión de la forma $\mathbb{Q}(\xi)$, donde ξ satisface un polinomio de grado 2 sobre $\mathbb{Q}$. Esto es $[\mathbb{Q}(\xi):\mathbb{Q}] = 2$.

Obs!

- Sabemos que $\mathbb{Q}(\xi) = \{a + b\xi : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$.
- Si $\deg(\xi) = 2$, recordemos que ξ debe ser de la forma

  $$\xi = \frac{a + b\sqrt{m}}{c}, \qquad \text{con } a, b, c, m \in \mathbb{Z}, \ c \neq 0, \ m \neq 0, 1, \ m \text{ libre de cuadrados.}$$

  En particular,

  $$\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}\Big(\frac{a + b\sqrt{m}}{c}\Big) = \mathbb{Q}(a + b\sqrt{m}) = \mathbb{Q}(b\sqrt{m}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m}).$$

Cuerpos cuadráticos:

Definición

Un cuerpo cuadrático (o extensión cuadrática), es una extensión de la forma $\mathbb{Q}(\xi)$, donde ξ satisface un polinomio de grado 2 sobre $\mathbb{Q}$. Esto es $[\mathbb{Q}(\xi):\mathbb{Q}] = 2$.

Obs!

- Sabemos que $\mathbb{Q}(\xi) = \{a + b\xi : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$.
- Si $\deg(\xi) = 2$, recordemos que ξ debe ser de la forma
$$\xi = \frac{a + b\sqrt{m}}{c}, \qquad \text{con } a, b, c, m \in \mathbb{Z},\ c \neq 0,\ m \neq 0, 1,\ m \text{ libre de cuadrados.}$$
En particular,
$$\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}\Big(\frac{a + b\sqrt{m}}{c}\Big) = \mathbb{Q}(a + b\sqrt{m}) = \mathbb{Q}(b\sqrt{m}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m}).$$
- Si $m \neq n$, entonces $\mathbb{Q}(m) \neq \mathbb{Q}(n)$.

Tenemos una definición de norma en campos cuadráticos, muy importante para el desarrollo aritmético.

Definición

*La **norma** $N(\alpha)$ de un número $\alpha = a + b\sqrt{m} \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ se define como*

$$N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = (a + b\sqrt{m})(a - b\sqrt{m}) = a^2 - b^2 m \in \mathbb{Q}.$$

Tenemos una definición de norma en campos cuadráticos, muy importante para el desarrollo aritmético.

Definición

*La **norma** $N(\alpha)$ de un número $\alpha = a + b\sqrt{m} \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ se define como*

$$N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = (a + b\sqrt{m})(a - b\sqrt{m}) = a^2 - b^2 m \in \mathbb{Q}.$$

Propiedades

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces

- $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.
- $N(\alpha) = 0 \implies \alpha = 0$.
- *Si $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$ es un entero, entonces $N(\gamma) \in \mathbb{Z}$ es un entero racional.*
- $N(\gamma) = \pm 1 \iff \gamma$ *es una unidad en* $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$.

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta})$

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta})$

Cuerpos Cuadráticos

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$.

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$. En cualquier caso, esto es equivalente a $\alpha = 0$.

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$. En cualquier caso, esto es equivalente a $\alpha = 0$.

(3.) A continuación, si $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es un número entero algebraico, éste tiene grado 1 ó 2. Si tiene grado 1, entonces γ es un número entero racional en $\mathbb{Z}$,

Cuerpos Cuadráticos

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$. En cualquier caso, esto es equivalente a $\alpha = 0$.

(3.) A continuación, si $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es un número entero algebraico, éste tiene grado 1 ó 2.
Si tiene grado 1, entonces γ es un número entero racional en $\mathbb{Z}$,
portanto $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} = \gamma^2 \in \mathbb{Z}$ de modo que $N(\gamma)$ es un número entero racional.

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$. En cualquier caso, esto es equivalente a $\alpha = 0$.

(3.) A continuación, si $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es un número entero algebraico, éste tiene grado 1 ó 2. Si tiene grado 1, entonces γ es un número entero racional en $\mathbb{Z}$,
portanto $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} = \gamma^2 \in \mathbb{Z}$ de modo que $N(\gamma)$ es un número entero racional. Si γ es de grado 2, entonces el polinomio mínimo de γ es

$$x^2 - (\gamma + \bar{\gamma})x + \gamma\bar{\gamma} = 0,$$

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$. En cualquier caso, esto es equivalente a $\alpha = 0$.

(3.) A continuación, si $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es un número entero algebraico, éste tiene grado 1 ó 2. Si tiene grado 1, entonces γ es un número entero racional en $\mathbb{Z}$, portanto $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} = \gamma^2 \in \mathbb{Z}$ de modo que $N(\gamma)$ es un número entero racional. Si γ es de grado 2, entonces el polinomio mínimo de γ es

$$x^2 - (\gamma + \bar{\gamma})x + \gamma\bar{\gamma} = 0,$$

y este posee coeficientes en $\mathbb{Z}$.

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$. En cualquier caso, esto es equivalente a $\alpha = 0$.

(3.) A continuación, si $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es un número entero algebraico, éste tiene grado 1 ó 2. Si tiene grado 1, entonces γ es un número entero racional en $\mathbb{Z}$,
portanto $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} = \gamma^2 \in \mathbb{Z}$ de modo que $N(\gamma)$ es un número entero racional. Si γ es de grado 2, entonces el polinomio mínimo de γ es

$$x^2 - (\gamma + \bar{\gamma})x + \gamma\bar{\gamma} = 0,$$

y este posee coeficientes en $\mathbb{Z}$. De ahí que nuevamente $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}$.

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$. En cualquier caso, esto es equivalente a $\alpha = 0$.

(3.) A continuación, si $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es un número entero algebraico, éste tiene grado 1 ó 2. Si tiene grado 1, entonces γ es un número entero racional en $\mathbb{Z}$, portanto $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} = \gamma^2 \in \mathbb{Z}$ de modo que $N(\gamma)$ es un número entero racional. Si γ es de grado 2, entonces el polinomio mínimo de γ es

$$x^2 - (\gamma + \bar{\gamma})x + \gamma\bar{\gamma} = 0,$$

y este posee coeficientes en $\mathbb{Z}$. De ahí que nuevamente $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}$.

(4.) Finalmente, si $N(\gamma) = \pm 1$ y γ es un número entero,

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$. En cualquier caso, esto es equivalente a $\alpha = 0$.

(3.) A continuación, si $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es un número entero algebraico, éste tiene grado 1 ó 2. Si tiene grado 1, entonces γ es un número entero racional en $\mathbb{Z}$, portanto $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} = \gamma^2 \in \mathbb{Z}$ de modo que $N(\gamma)$ es un número entero racional. Si γ es de grado 2, entonces el polinomio mínimo de γ es

$$x^2 - (\gamma + \bar{\gamma})x + \gamma\bar{\gamma} = 0,$$

y este posee coeficientes en $\mathbb{Z}$. De ahí que nuevamente $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}$.

(4.) Finalmente, si $N(\gamma) = \pm 1$ y γ es un número entero, entonces $\gamma\bar{\gamma} = \pm 1$, $\gamma \mid 1$, de modo que γ es una unidad.

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$. En cualquier caso, esto es equivalente a $\alpha = 0$.

(3.) A continuación, si $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es un número entero algebraico, éste tiene grado 1 ó 2. Si tiene grado 1, entonces γ es un número entero racional en $\mathbb{Z}$, portanto $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} = \gamma^2 \in \mathbb{Z}$ de modo que $N(\gamma)$ es un número entero racional. Si γ es de grado 2, entonces el polinomio mínimo de γ es

$$x^2 - (\gamma + \bar{\gamma})x + \gamma\bar{\gamma} = 0,$$

y este posee coeficientes en $\mathbb{Z}$. De ahí que nuevamente $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}$.

(4.) Finalmente, si $N(\gamma) = \pm 1$ y γ es un número entero, entonces $\gamma\bar{\gamma} = \pm 1$, $\gamma \mid 1$, de modo que γ es una unidad. Para demostrar la recíproca, suponga que γ es una unidad.

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$. En cualquier caso, esto es equivalente a $\alpha = 0$.

(3.) A continuación, si $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es un número entero algebraico, éste tiene grado 1 ó 2. Si tiene grado 1, entonces γ es un número entero racional en $\mathbb{Z}$, portanto $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} = \gamma^2 \in \mathbb{Z}$ de modo que $N(\gamma)$ es un número entero racional. Si γ es de grado 2, entonces el polinomio mínimo de γ es

$$x^2 - (\gamma + \bar{\gamma})x + \gamma\bar{\gamma} = 0,$$

y este posee coeficientes en $\mathbb{Z}$. De ahí que nuevamente $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}$.

(4.) Finalmente, si $N(\gamma) = \pm 1$ y γ es un número entero, entonces $\gamma\bar{\gamma} = \pm 1$, $\gamma \mid 1$, de modo que γ es una unidad. Para demostrar la recíproca, suponga que γ es una unidad. Entonces existe ε entero, tal que $\gamma = 1$.

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$. En cualquier caso, esto es equivalente a $\alpha = 0$.

(3.) A continuación, si $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es un número entero algebraico, éste tiene grado 1 ó 2. Si tiene grado 1, entonces γ es un número entero racional en $\mathbb{Z}$, portanto $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} = \gamma^2 \in \mathbb{Z}$ de modo que $N(\gamma)$ es un número entero racional. Si γ es de grado 2, entonces el polinomio mínimo de γ es

$$x^2 - (\gamma + \bar{\gamma})x + \gamma\bar{\gamma} = 0,$$

y este posee coeficientes en $\mathbb{Z}$. De ahí que nuevamente $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}$.

(4.) Finalmente, si $N(\gamma) = \pm 1$ y γ es un número entero, entonces $\gamma\bar{\gamma} = \pm 1$, $\gamma \mid 1$, de modo que γ es una unidad. Para demostrar la recíproca, suponga que γ es una unidad. Entonces existe ε entero, tal que $\gamma = 1$. Esto implica $N(\gamma)N(\varepsilon) = N(1) = 1$,

Prueba: (1.) $N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = N(\alpha)N(\beta)$.

(2.) Sea $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Entonces $N(\alpha) = 0 \iff \alpha\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha = 0$ ó $\bar{\alpha} = 0$. En cualquier caso, esto es equivalente a $\alpha = 0$.

(3.) A continuación, si $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es un número entero algebraico, éste tiene grado 1 ó 2. Si tiene grado 1, entonces γ es un número entero racional en $\mathbb{Z}$, portanto $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} = \gamma^2 \in \mathbb{Z}$ de modo que $N(\gamma)$ es un número entero racional. Si γ es de grado 2, entonces el polinomio mínimo de γ es

$$x^2 - (\gamma + \bar{\gamma})x + \gamma\bar{\gamma} = 0,$$

y este posee coeficientes en $\mathbb{Z}$. De ahí que nuevamente $N(\gamma) = \gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}$.

(4.) Finalmente, si $N(\gamma) = \pm 1$ y γ es un número entero, entonces $\gamma\bar{\gamma} = \pm 1$, $\gamma \mid 1$, de modo que γ es una unidad. Para demostrar la recíproca, suponga que γ es una unidad. Entonces existe ε entero, tal que $\gamma = 1$. Esto implica $N(\gamma)N(\varepsilon) = N(1) = 1$, de modo que $N(\gamma) = \pm 1$, ya que $N(\gamma)$ y $N(\varepsilon)$ son números enteros racionales en $\mathbb{Z}$.

Primos en cuerpos cuadráticos:

Primos en cuerpos cuadráticos:

Definición

Un entero algebraico α, no unidad, en un cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es llamado un ***primo*** *si sólo es divisible por sus asociados, o por unidades del cuerpo.*

Primos en cuerpos cuadráticos:

Definición

*Un entero algebraico α, no unidad, en un cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es llamado un **primo** si sólo es divisible por sus asociados, o por unidades del cuerpo.*

Teorema

Si la norma de un entero $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es $\pm p$, con p primo, entonces α es un primo en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Primos en cuerpos cuadráticos:

Definición

*Un entero algebraico α, no unidad, en un cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es llamado un **primo** si sólo es divisible por sus asociados, o por unidades del cuerpo.*

Teorema

Si la norma de un entero $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es $\pm p$, con p primo, entonces α es un primo en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Prueba: Suponga $\alpha = \beta\gamma$, con β, γ enteros en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Primos en cuerpos cuadráticos:

Definición

*Un entero algebraico α, no unidad, en un cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es llamado un **primo** si sólo es divisible por sus asociados, o por unidades del cuerpo.*

Teorema

Si la norma de un entero $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es $\pm p$, con p primo, entonces α es un primo en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Prueba: Suponga $\alpha = \beta\gamma$, con β, γ enteros en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Como la norma es multiplicativa, entonces $N(\alpha) = N(\beta\gamma) = N(\beta)N(\gamma) = \pm p$.

Primos en cuerpos cuadráticos:

Definición

*Un entero algebraico α, no unidad, en un cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es llamado un **primo** si sólo es divisible por sus asociados, o por unidades del cuerpo.*

Teorema

Si la norma de un entero $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es $\pm p$, con p primo, entonces α es un primo en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Prueba: Suponga $\alpha = \beta\gamma$, con β, γ enteros en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Como la norma es multiplicativa, entonces $N(\alpha) = N(\beta\gamma) = N(\beta)N(\gamma) = \pm p$. ahora, como $N(\beta), N(\gamma) \in \mathbb{Z}$, entonces alguno de ellos debe ser ± 1,

Primos en cuerpos cuadráticos:

Definición

*Un entero algebraico α, no unidad, en un cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es llamado un **primo** si sólo es divisible por sus asociados, o por unidades del cuerpo.*

Teorema

Si la norma de un entero $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es $\pm p$, con p primo, entonces α es un primo en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Prueba: Suponga $\alpha = \beta\gamma$, con β, γ enteros en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Como la norma es multiplicativa, entonces $N(\alpha) = N(\beta\gamma) = N(\beta)N(\gamma) = \pm p$. ahora, como $N(\beta), N(\gamma) \in \mathbb{Z}$, entonces alguno de ellos debe ser ± 1, de modo que β ó γ es una unidad en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Primos en cuerpos cuadráticos:

Definición

*Un entero algebraico α, no unidad, en un cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es llamado un **primo** si sólo es divisible por sus asociados, o por unidades del cuerpo.*

Teorema

Si la norma de un entero $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es $\pm p$, con p primo, entonces α es un primo en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

<u>Prueba</u>: Suponga $\alpha = \beta\gamma$, con β, γ enteros en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Como la norma es multiplicativa, entonces $N(\alpha) = N(\beta\gamma) = N(\beta)N(\gamma) = \pm p$. ahora, como $N(\beta), N(\gamma) \in \mathbb{Z}$, entonces alguno de ellos debe ser ± 1, de modo que β ó γ es una unidad en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Esto muestra que α es primo. $\square$

Primos en cuerpos cuadráticos:

Definición

*Un entero algebraico α, no unidad, en un cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es llamado un **primo** si sólo es divisible por sus asociados, o por unidades del cuerpo.*

Teorema

Si la norma de un entero $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es $\pm p$, con p primo, entonces α es un primo en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Prueba: Suponga $\alpha = \beta\gamma$, con β, γ enteros en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Como la norma es multiplicativa, entonces $N(\alpha) = N(\beta\gamma) = N(\beta)N(\gamma) = \pm p$. ahora, como $N(\beta), N(\gamma) \in \mathbb{Z}$, entonces alguno de ellos debe ser ± 1, de modo que β ó γ es una unidad en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Esto muestra que α es primo. $\square$

Teorema

Todo entero en $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ no o ó unidad, se factora como producto de primos. $\square$

Obs!

- Aunque el teorema anterior garantiza la factoración en primos, ésta no necesariamente es única.

Obs!

- Aunque el teorema anterior garantiza la factoración en primos, ésta no necesariamente es única.

  Por ejemplo, tenemos que en $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ vale $6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$.

Obs!

- Aunque el teorema anterior garantiza la factoración en primos, ésta no necesariamente es única.

  Por ejemplo, tenemos que en $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ vale $6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$.

- Recordemos que cuando vale la propiedad de factoración única, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$ se llama un dominio de factoración única (UFD).

Obs!

- Aunque el teorema anterior garantiza la factoración en primos, ésta no necesariamente es única.

  Por ejemplo, tenemos que en $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ vale $6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$.

- Recordemos que cuando vale la propiedad de factoración única, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$ se llama un dominio de factoración única (UFD).
  - todo cuerpo es UFD.
  - todo dominio Euclideano es UFD.
  - todo PID es UFD.

Cuerpos Cuadráticos

Obs!

- Aunque el teorema anterior garantiza la factoración en primos, ésta no necesariamente es única.

  Por ejemplo, tenemos que en $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ vale $6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$.

- Recordemos que cuando vale la propiedad de factoración única, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$ se llama un dominio de factoración única (UFD).
  - todo cuerpo es UFD.
  - todo dominio Euclideano es UFD.
  - todo PID es UFD.

- **Teorema**: Los cuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, con $m = -1, -2, -3, -7, 2, 3$ son Euclideanos, portanto $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$ es UFD.

Obs!

- Aunque el teorema anterior garantiza la factoración en primos, ésta no necesariamente es única.

  Por ejemplo, tenemos que en $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ vale $6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$.

- Recordemos que cuando vale la propiedad de factoración única, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$ se llama un dominio de factoración única (UFD).
  - todo cuerpo es UFD.
  - todo dominio Euclideano es UFD.
  - todo PID es UFD.

- **Teorema**: Los cuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, con $m = -1, -2, -3, -7, 2, 3$ son Euclideanos, portanto $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$ es UFD.

- El Teorema de Stark-Heegner establece que si $m < 0$, entonces
$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})} \text{ es UFD } \; m \in \{-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163\}.$$

Cuerpos Cuadráticos

Una propiedad importante que caracteriza la forma de los anillos de enteros asociados a cuerpos cuadráticos es la siguiente:

Una propiedad importante que caracteriza la forma de los anillos de enteros asociados a cuerpos cuadráticos es la siguiente:

Teorema (Anillos de Enteros Cuadráticos)

Sea $m \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados, $m \neq 0, 1$. Entonces el anillo de enteros, asociado a cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})} = \mathbb{Z}[\omega], \text{ con } \omega = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{m}}{2}, & \text{si } m \equiv 1 \pmod{4}; \\ \sqrt{m}, & \text{caso contrario.} \end{cases} \qquad \square$$

Una propiedad importante que caracteriza la forma de los anillos de enteros asociados a cuerpos cuadráticos es la siguiente:

Teorema (Anillos de Enteros Cuadráticos)

Sea $m \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados, $m \neq 0, 1$. Entonces el anillo de enteros, asociado a cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})} = \mathbb{Z}[\omega], \text{ con } \omega = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{m}}{2}, & \text{si } m \equiv 1 \pmod 4; \\ \sqrt{m}, & \text{caso contrario.} \end{cases} \qquad \square$$

Ejemplos:

- Para $m = -1$, el anillo $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)}$ es igual a $\mathbb{Z}[i]$,

Una propiedad importante que caracteriza la forma de los anillos de enteros asociados a cuerpos cuadráticos es la siguiente:

Teorema (Anillos de Enteros Cuadráticos)

Sea $m \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados, $m \neq 0, 1$. Entonces el anillo de enteros, asociado a cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})} = \mathbb{Z}[\omega], \text{ con } \omega = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{m}}{2}, & \text{si } m \equiv 1 \pmod 4; \\ \sqrt{m}, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad \square$$

Ejemplos:

- Para $m = -1$, el anillo $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)}$ es igual a $\mathbb{Z}[i]$, **enteros Gaussianos.**

Una propiedad importante que caracteriza la forma de los anillos de enteros asociados a cuerpos cuadráticos es la siguiente:

Teorema (Anillos de Enteros Cuadráticos)

Sea $m \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados, $m \neq 0, 1$. Entonces el anillo de enteros, asociado a cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})} = \mathbb{Z}[\omega], \text{ con } \omega = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{m}}{2}, & \text{si } m \equiv 1 \pmod 4; \\ \sqrt{m}, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad \square$$

Ejemplos:

- Para $m = -1$, el anillo $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)}$ es igual a $\mathbb{Z}[i]$, **enteros Gaussianos.**
- Para $m = -3$, el anillo $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$ es igual a $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$,

Una propiedad importante que caracteriza la forma de los anillos de enteros asociados a cuerpos cuadráticos es la siguiente:

Teorema (Anillos de Enteros Cuadráticos)

Sea $m \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados, $m \neq 0, 1$. Entonces el anillo de enteros, asociado a cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ es

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})} = \mathbb{Z}[\omega], \text{ con } \omega = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{m}}{2}, & \text{si } m \equiv 1 \pmod 4; \\ \sqrt{m}, & \text{caso contrario.} \end{cases} \qquad \square$$

Ejemplos:

- Para $m = -1$, el anillo $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i)}$ es igual a $\mathbb{Z}[i]$, **enteros Gaussianos.**
- Para $m = -3$, el anillo $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$ es igual a $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$, **enteros de Eisenstein.**

Enteros Gaussianos

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : \; a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Propiedad

- $\mathbb{Z}[i]$ *es anillo euclideano, portanto anillo de factoración única.*

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : \; a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Propiedad

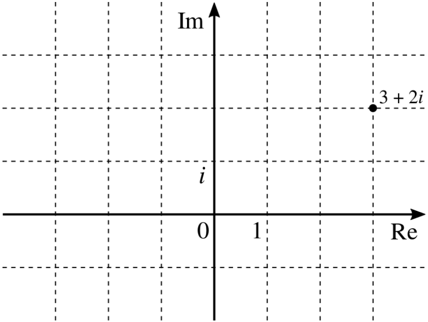
- $\mathbb{Z}[i]$ *es anillo euclideano, portanto anillo de factoración única.*
- *Vale la identidad de Bézout.*

Enteros Gaussianos

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : \; a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Propiedad

- *$\mathbb{Z}[i]$ es anillo euclideano, portanto anillo de factoración única.*
- *Vale la identidad de Bézout.*

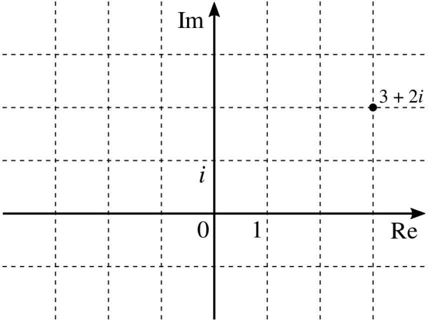


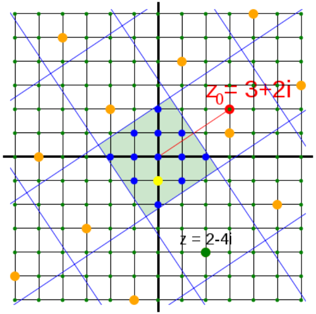
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

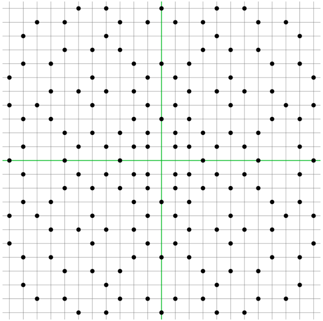
Propiedad

- *$\mathbb{Z}[i]$ es anillo euclideano, portanto anillo de factoración única.*
- *Vale la identidad de Bézout.*

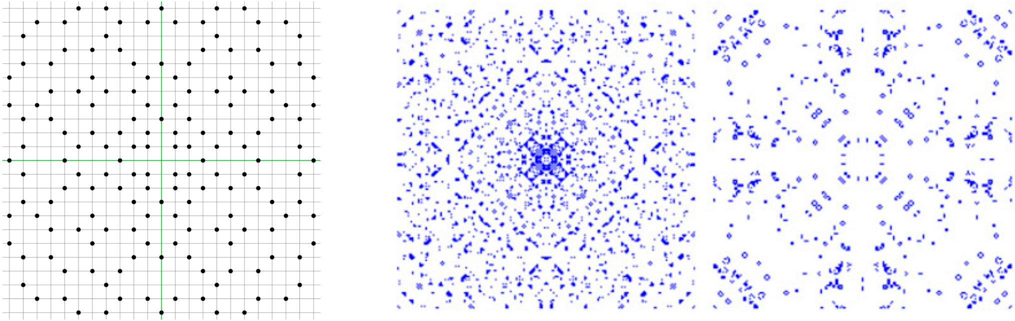




Enteros Gaussianos



Enteros Gaussianos



Primos en el retículo de enteros Gaussianos.

Enteros Gaussianos

Mostramos un bosquejo de prueba para el Último Teorema de Fermat, en el caso $n = 4$, usando los enteros gaussianos.

Enteros Gaussianos

Mostramos un bosquejo de prueba para el Último Teorema de Fermat, en el caso $n = 4$, usando los enteros gaussianos. La prueba que se presenta está tomada del libro de PAULO RIBENBOIM *Fermat's Last Theorem for Amateurs*.

Enteros Gaussianos

Mostramos un bosquejo de prueba para el Último Teorema de Fermat, en el caso $n = 4$, usando los enteros gaussianos. La prueba que se presenta está tomada del libro de Paulo Ribenboim *Fermat's Last Theorem for Amateurs*.

Usamos letras griegas para representar los enteros gaussianos $\mathbb{Z}[i]$ y letras latinas para representar enteros racionales $\mathbb{Z}$.

Mostramos un bosquejo de prueba para el Último Teorema de Fermat, en el caso $n = 4$, usando los enteros gaussianos. La prueba que se presenta está tomada del libro de PAULO RIBENBOIM *Fermat's Last Theorem for Amateurs*.

Usamos letras griegas para representar los enteros gaussianos $\mathbb{Z}[i]$ y letras latinas para representar enteros racionales $\mathbb{Z}$.

Teorema

La ecuación $x^4 + y^4 = z^2$ no posee soluciones en enteros gaussianos, con $xyz \neq 0$.

Enteros Gaussianos

Mostramos un bosquejo de prueba para el Último Teorema de Fermat, en el caso $n = 4$, usando los enteros gaussianos. La prueba que se presenta está tomada del libro de PAULO RIBENBOIM *Fermat's Last Theorem for Amateurs*.

Usamos letras griegas para representar los enteros gaussianos $\mathbb{Z}[i]$ y letras latinas para representar enteros racionales $\mathbb{Z}$.

Teorema

La ecuación $x^4 + y^4 = z^2$ no posee soluciones en enteros gaussianos, con $xyz \neq 0$.

Corolario

La ecuación $x^4 + y^4 = z^4$ no posee soluciones enteras positivas no triviales.

Prueba:

Enteros Gaussianos

Prueba:

1. Primero, se debe mostrar que si hay una solución en enteros racionales, entonces lo siguiente es cierto:

Prueba:

1. Primero, se debe mostrar que si hay una solución en enteros racionales, entonces lo siguiente es cierto:
   Existen $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \lambda \in \mathbb{Z}[i]$ tales que:
   $$\epsilon \cdot \lambda^{4n} \cdot \alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2, \text{ con } n \geq 2.$$

Prueba:

1. Primero, se debe mostrar que si hay una solución en enteros racionales, entonces lo siguiente es cierto:
   Existen $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \lambda \in \mathbb{Z}[i]$ tales que:
   $$\epsilon \cdot \lambda^{4n} \cdot \alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2, \text{ con } n \geq 2.$$

2. En segundo lugar, se muestra que si (1) es verdadero, entonces hay otro conjunto de valores: $\epsilon_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{Z}[i]$ tales que:
   $$\epsilon_1 \cdot \lambda^{4(n-1)} \cdot \alpha_1^4 + \beta_1^4 = \gamma_1^2.$$

Prueba:

1. Primero, se debe mostrar que si hay una solución en enteros racionales, entonces lo siguiente es cierto:
   Existen $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \lambda \in \mathbb{Z}[i]$ tales que:
   $$\epsilon \cdot \lambda^{4n} \cdot \alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2, \text{ con } n \geq 2.$$

2. En segundo lugar, se muestra que si (1) es verdadero, entonces hay otro conjunto de valores: $\epsilon_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{Z}[i]$ tales que:
   $$\epsilon_1 \cdot \lambda^{4(n-1)} \cdot \alpha_1^4 + \beta_1^4 = \gamma_1^2.$$

3. Luego, repitiendo el paso (2) de forma consecutiva, finalmente llegamos a valores: $\alpha_i, \beta_i, \epsilon_i, \gamma_i$ tales que
   $$\epsilon_i \cdot \lambda^4 \cdot \alpha_i^4 + \beta_i^4 = \gamma_i^2.$$

Enteros Gaussianos

Prueba:

1. Primero, se debe mostrar que si hay una solución en enteros racionales, entonces lo siguiente es cierto:
   Existen $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \lambda \in \mathbb{Z}[i]$ tales que:
   $$\epsilon \cdot \lambda^{4n} \cdot \alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2, \text{ con } n \geq 2.$$

2. En segundo lugar, se muestra que si (1) es verdadero, entonces hay otro conjunto de valores: $\epsilon_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{Z}[i]$ tales que:
   $$\epsilon_1 \cdot \lambda^{4(n-1)} \cdot \alpha_1^4 + \beta_1^4 = \gamma_1^2.$$

3. Luego, repitiendo el paso (2) de forma consecutiva, finalmente llegamos a valores: $\alpha_i, \beta_i, \epsilon_i, \gamma_i$ tales que
   $$\epsilon_i \cdot \lambda^4 \cdot \alpha_i^4 + \beta_i^4 = \gamma_i^2.$$

4. Esto contradice el paso (1), donde $n \geq 2$. Por lo tanto, no hay soluciones para FLT en el caso $n = 4$. ∎

Enteros de Eisenstein

$\mathbb{Z}[\zeta] = \{a + b\zeta : \; a, b \in \mathbb{Z}\}$, donde $\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

Enteros de Eisenstein

$\mathbb{Z}[\zeta] = \{a + b\zeta : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$, donde $\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

Propiedad

- $\mathbb{Z}[\zeta]$ *es anillo euclideano, portanto anillo de factoración única.*

$\mathbb{Z}[\zeta] = \{a + b\zeta : \; a, b \in \mathbb{Z}\}$, donde $\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

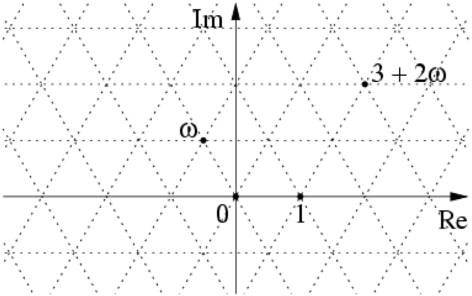
Propiedad

- $\mathbb{Z}[\zeta]$ *es anillo euclideano, portanto anillo de factoración única.*
- *Vale el algoritmo de la división y la identidad de Bézout.*

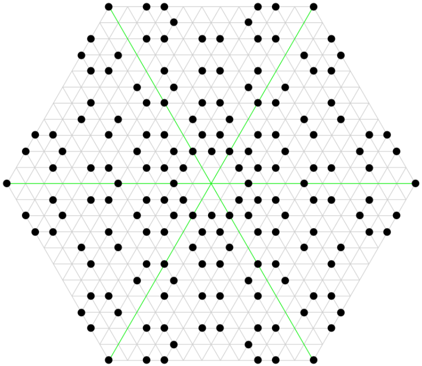
$\mathbb{Z}[\zeta] = \{a + b\zeta : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$, donde $\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

Propiedad

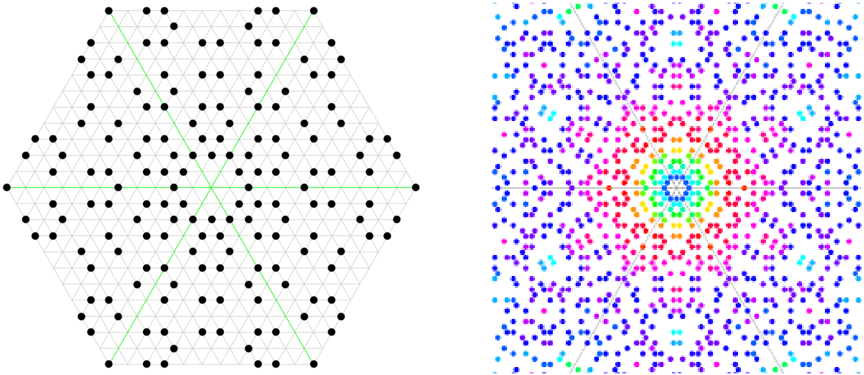
- *$\mathbb{Z}[\zeta]$ es anillo euclideano, portanto anillo de factoración única.*
- *Vale el algoritmo de la división y la identidad de Bézout.*



Enteros de Eisenstein



Enteros de Eisenstein



Primos en el retículo de enteros de Eisenstein.

Enteros de Eisenstein

Mostramos un bosquejo de prueba para el Último Teorema de Fermat, en el caso $n = 3$, usando los enteros de Eisenstein.

Enteros de Eisenstein

Mostramos un bosquejo de prueba para el Último Teorema de Fermat, en el caso $n = 3$, usando los enteros de Eisenstein. La prueba que se presenta está tomada del libro de Paulo Ribenboim *Fermat's Last Theorem for Amateurs*.

Enteros de Eisenstein

Mostramos un bosquejo de prueba para el Último Teorema de Fermat, en el caso $n = 3$, usando los enteros de Eisenstein. La prueba que se presenta está tomada del libro de PAULO RIBENBOIM *Fermat's Last Theorem for Amateurs*.

Usamos letras griegas para representar los enteros de Eisenstein $\mathbb{Z}[\zeta]$ y letras latinas para representar enteros racionales $\mathbb{Z}$.

Enteros de Eisenstein

Mostramos un bosquejo de prueba para el Último Teorema de Fermat, en el caso $n = 3$, usando los enteros de Eisenstein. La prueba que se presenta está tomada del libro de PAULO RIBENBOIM *Fermat's Last Theorem for Amateurs*.

Usamos letras griegas para representar los enteros de Eisenstein $\mathbb{Z}[\zeta]$ y letras latinas para representar enteros racionales $\mathbb{Z}$.

Teorema

La ecuación $x^3 + y^3 = z^3$ no posee soluciones en enteros de Eisenstein, con $xyz \neq 0$.

Prueba:

Enteros de Eisenstein

Prueba:

1. Como $\mathbb{Z}[\zeta]$ es un anillo Euclideano, entonces vale el Algoritmo de la División, la identidad de Bézout, y la propiedad de factoración única.

Enteros de Eisenstein

Prueba:

1. Como $\mathbb{Z}[\zeta]$ es un anillo Euclideano, entonces vale el Algoritmo de la División, la identidad de Bézout, y la propiedad de factoración única.
2. Suponga que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\zeta]$ tales que $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$, con $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

Enteros de Eisenstein

Prueba:

1. Como $\mathbb{Z}[\zeta]$ es un anillo Euclideano, entonces vale el Algoritmo de la División, la identidad de Bézout, y la propiedad de factoración única.
2. Suponga que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\zeta]$ tales que $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$, con $\alpha\beta\gamma \neq 0$.
3. Podemos asumir que α, β, γ son primos relativos, dos a dos.

<u>Prueba</u>:

1. Como $\mathbb{Z}[\zeta]$ es un anillo Euclideano, entonces vale el Algoritmo de la División, la identidad de Bézout, y la propiedad de factoración única.
2. Suponga que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\zeta]$ tales que $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$, con $\alpha\beta\gamma \neq 0$.
3. Podemos asumir que α, β, γ son primos relativos, dos a dos. Haciendo $\delta = -\gamma$, tenemos $\alpha^3 + \beta^3 + \delta^3 = 0$,

Enteros de Eisenstein

Prueba:

1. Como $\mathbb{Z}[\zeta]$ es un anillo Euclideano, entonces vale el Algoritmo de la División, la identidad de Bézout, y la propiedad de factoración única.
2. Suponga que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\zeta]$ tales que $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$, con $\alpha\beta\gamma \neq 0$.
3. Podemos asumir que α, β, γ son primos relativos, dos a dos. Haciendo $\delta = -\gamma$, tenemos $\alpha^3 + \beta^3 + \delta^3 = 0$,
4. Consideramos los números

$$\zeta = \tfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \qquad \bar{\zeta} = \tfrac{1-\sqrt{3}i}{2},$$

Prueba:

1. Como $\mathbb{Z}[\zeta]$ es un anillo Euclideano, entonces vale el Algoritmo de la División, la identidad de Bézout, y la propiedad de factoración única.
2. Suponga que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\zeta]$ tales que $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$, con $\alpha\beta\gamma \neq 0$.
3. Podemos asumir que α, β, γ son primos relativos, dos a dos. Haciendo $\delta = -\gamma$, tenemos $\alpha^3 + \beta^3 + \delta^3 = 0$,
4. Consideramos los números
$$\zeta = \tfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \qquad \bar{\zeta} = \tfrac{1-\sqrt{3}i}{2},$$

   Entonces, $\zeta - \bar{\zeta} = \sqrt{3}i$ es un primo de Eisenstein (pues $N(\zeta - \bar{\zeta}) = 3$),

Prueba:

1. Como $\mathbb{Z}[\zeta]$ es un anillo Euclideano, entonces vale el Algoritmo de la División, la identidad de Bézout, y la propiedad de factoración única.
2. Suponga que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\zeta]$ tales que $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$, con $\alpha\beta\gamma \neq 0$.
3. Podemos asumir que α, β, γ son primos relativos, dos a dos. Haciendo $\delta = -\gamma$, tenemos $\alpha^3 + \beta^3 + \delta^3 = 0$,
4. Consideramos los números

$$\zeta = \tfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \qquad \bar{\zeta} = \tfrac{1-\sqrt{3}i}{2},$$

Entonces, $\zeta - \bar{\zeta} = \sqrt{3}i$ es un primo de Eisenstein (pues $N(\zeta - \bar{\zeta}) = 3$), que divide a $\alpha\beta\gamma$.

Enteros de Eisenstein

<u>Prueba</u>:

1. Como $\mathbb{Z}[\zeta]$ es un anillo Euclideano, entonces vale el Algoritmo de la División, la identidad de Bézout, y la propiedad de factoración única.
2. Suponga que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\zeta]$ tales que $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$, con $\alpha\beta\gamma \neq 0$.
3. Podemos asumir que α, β, γ son primos relativos, dos a dos. Haciendo $\delta = -\gamma$, tenemos $\alpha^3 + \beta^3 + \delta^3 = 0$,
4. Consideramos los números
$$\zeta = \tfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \qquad \bar{\zeta} = \tfrac{1-\sqrt{3}i}{2},$$
Entonces, $\zeta - \bar{\zeta} = \sqrt{3}i$ es un primo de Eisenstein (pues $N(\zeta - \bar{\zeta}) = 3$), que divide a $\alpha\beta\gamma$.
5. Como $\alpha\beta\gamma \neq 0$, esto contradice el paso (3), y tenemos un método de descenso infinito.

Prueba:

1. Como $\mathbb{Z}[\zeta]$ es un anillo Euclideano, entonces vale el Algoritmo de la División, la identidad de Bézout, y la propiedad de factoración única.
2. Suponga que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\zeta]$ tales que $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$, con $\alpha\beta\gamma \neq 0$.
3. Podemos asumir que α, β, γ son primos relativos, dos a dos. Haciendo $\delta = -\gamma$, tenemos $\alpha^3 + \beta^3 + \delta^3 = 0$,
4. Consideramos los números
$$\zeta = \tfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \qquad \bar{\zeta} = \tfrac{1-\sqrt{3}i}{2},$$
Entonces, $\zeta - \bar{\zeta} = \sqrt{3}i$ es un primo de Eisenstein (pues $N(\zeta - \bar{\zeta}) = 3$), que divide a $\alpha\beta\gamma$.
5. Como $\alpha\beta\gamma \neq 0$, esto contradice el paso (3), y tenemos un método de descenso infinito. Por lo tanto, no hay soluciones para FLT en el caso $n = 3$. $\square$