



SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES POR MÉTODOS ESPECTRALES

ALAN REYES-FIGUEROA

SEMINARIO DE ESTUDIANTES, CIMAT,

14.SEPTEMBRE.2020

Segmentación de imágenes

Segmentación: Separar el contenido de una imagen en categorías.



Imagen de entrada



Segmentación

Segmentación de imágenes

Segmentación: Separar el contenido de una imagen en categorías.



Imagen de entrada



Segmentación

Segmentación de imágenes

Segmentación: Separar el contenido de una imagen en categorías.
= Clasificación.

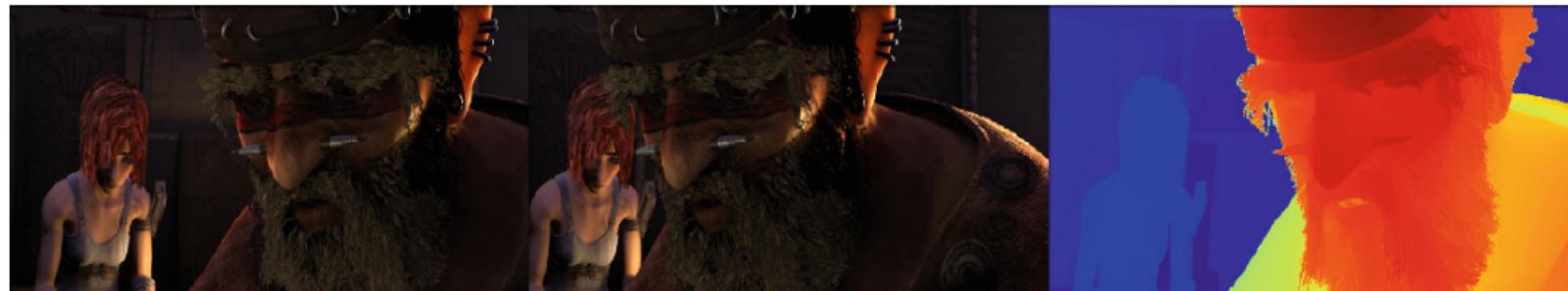
Es una tarea de bajo nivel (*low-level vision*).

Diversas aplicaciones:

- Visión computacional (*tracking* o seguimiento de objetos, visión estéreo, flujo óptico).
- Robótica / conducción autónoma
- Imágenes satelitales y sensado remoto
- Imágenes médicas
- ...

Segmentación de imágenes

Aplicación a visión estéreo.



(a) Imagen izquierda

(b) Imagen derecha

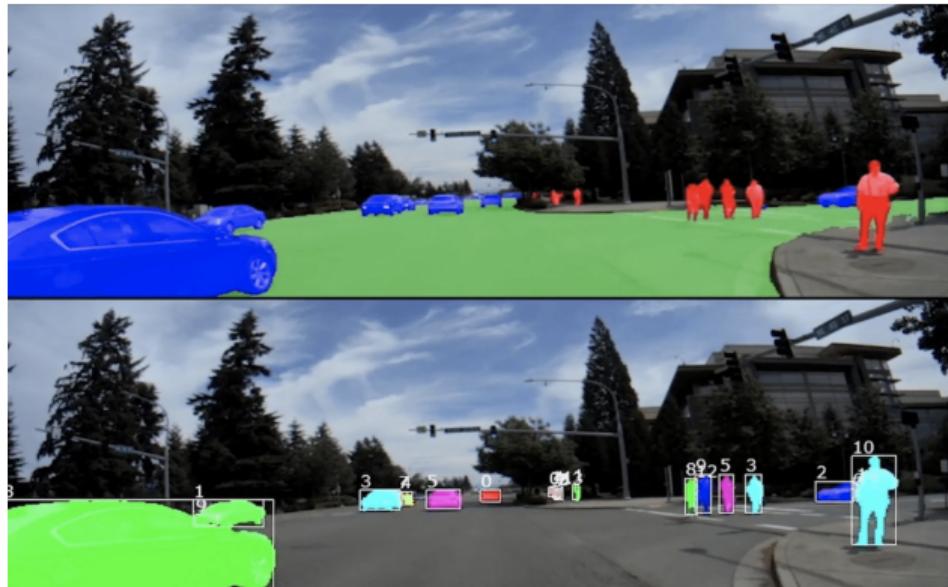
(c) mapa de profundidad.

Referencia: O. I. Rentería, J. C. Cuevas-Tello, A. Reyes-Figueroa, M. Rivera (2020).

ModuleNet: A convolutional neural network for stereo vision. In *Pattern Recognition*, 12th Mexican Conference, MCPR 2020. pp. 219–228.

Segmentación de imágenes

Aplicación a conducción autónoma.



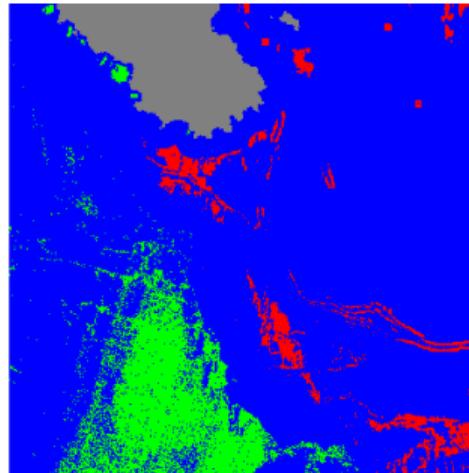
(a) Segmentación semántica (b) Segmentación instanciada

Segmentación de imágenes

Aplicación a sensado remoto.



(a) Imagen de entrada



(b) Segmentación

Referencia: A. Reyes-Figueroa, J. Tuxpan, E. Trujillo, F. Hernández, A. Salazar, G. Díaz, M. Rivera (2019). **Factibility study for oil-spill detection via multi-spectral satellite imagery.** Technical Report, CIMAT.

Segmentación de imágenes

Aplicación a sensado remoto.

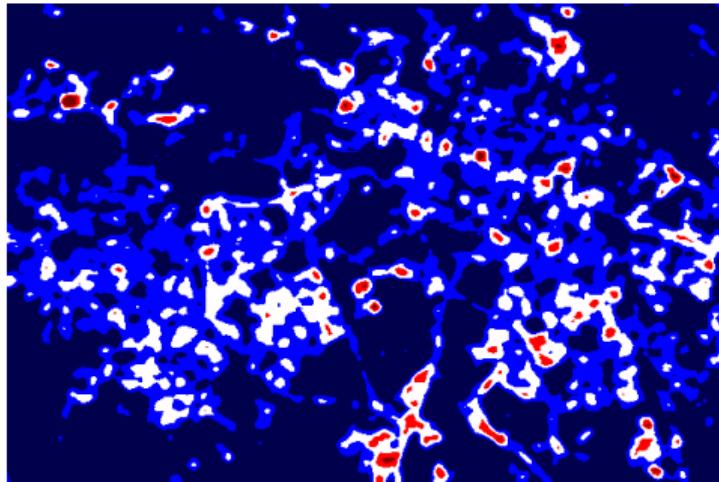


Priori Interactiva



Segmentación

Segmentación de imágenes



Mapa de densidad

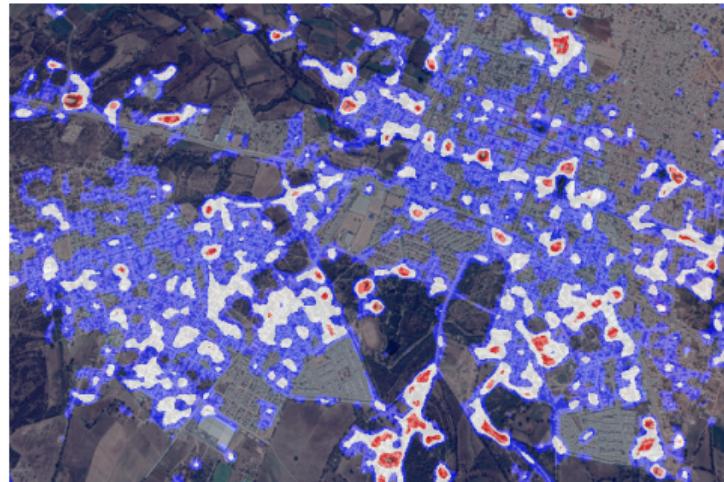
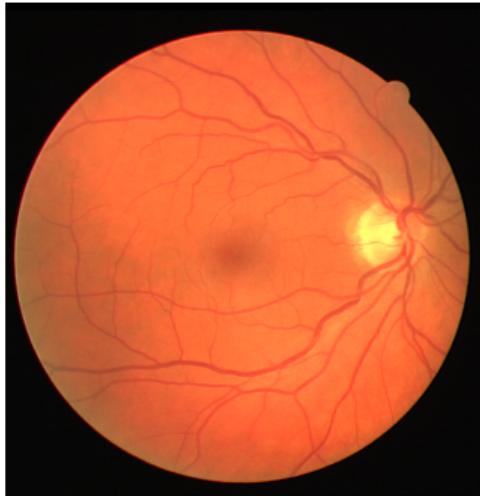


Imagen + Densidad

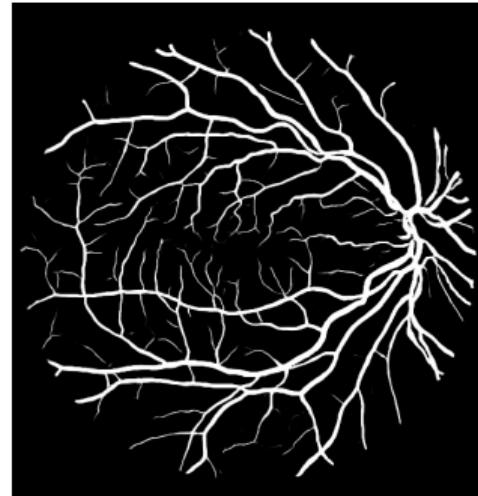
Referencia: A. Reyes-Figueroa, S. de la Fuente, N. González, D. Acosta, O. Rentería, F. Valente, D. Vila, E. Isusquiza, V. Flores, J. Estrada, M. Rivera (2020). **Analysis, detection and classification of major public infrastructure needs through satellite and aerial images**. Technical Report, CIMAT.

Segmentación de imágenes

Aplicación a imágenes médicas.



(a) Imagen de retina



(b) Segmentación

Referencia: A. Reyes-Figueroa, M. Rivera (2018). **W-Net: A convolutional neural network for retinal vessel segmentation.** Preprint.

Segmentación de imágenes

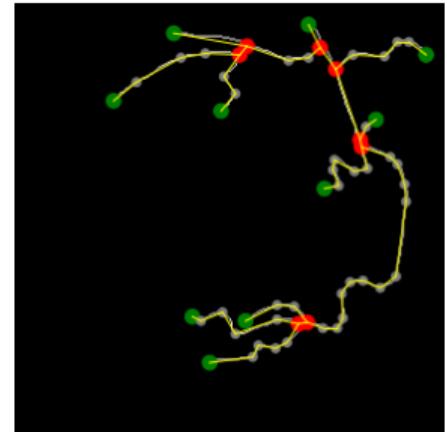
Aplicación a imágenes médicas.



(a) Imagen de entrada



(b) Segmentación

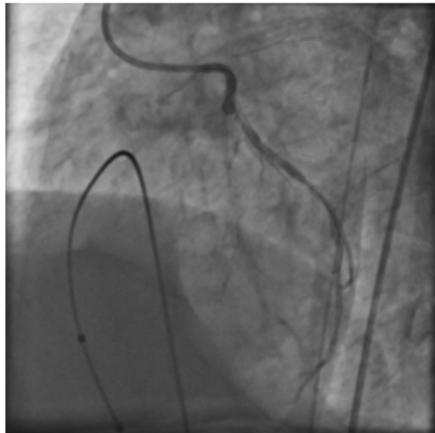


(c) Discretización

Referencia: A. Reyes-Figueroa, S. Colores, F. Cervantes, A. Camacho, I. Cruz-Aceves (2018). **An automatic framework for graph-based representation of coronary arteries.** In *4th Int. Conference on Applied Electronics, ICAPPLE 2017*. pp. 1–5.

Segmentación de imágenes

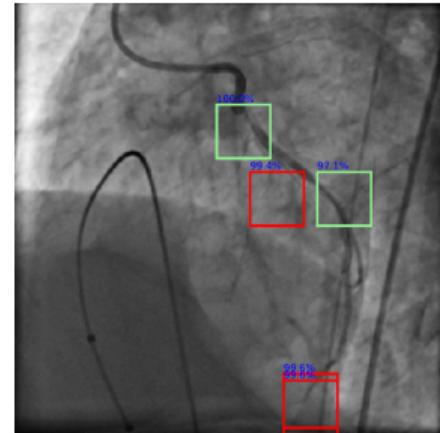
Aplicación a imágenes médicas.



(a) Imagen de entrada



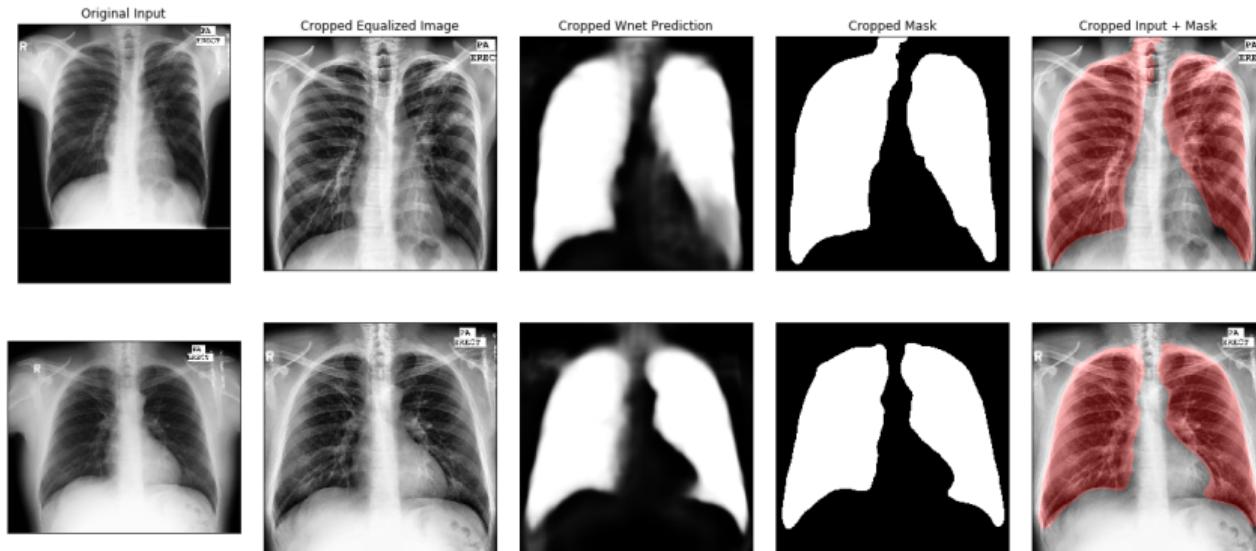
(b) Segmentación



(c) Detección estenosis

Referencia: A. Reyes-Figueroa, F. Cervantes-Sánchez, M. Rivera, I. Cruz-Aceves (2020).
Automated stenosis detection in X-ray coronary angiography. In *XXII Simposio de Métodos Matemáticos Aplicados a las Ciencias, SIMMAC 2020*.

Segmentación de imágenes



Referencia: A. Reyes-Figueroa, R. Oves, C. López, J. Serrano, J. Vega, O. Rentería, H. Ehrlich, E. Ocampo, M. Rivera, E. Morales, E. Succar (2020). **Diagnóstico rápido de Covid-19 basado en imágenes y técnicas de inteligencia artificial**. Proyecto INAOE-CIMAT-CONACYT.

Existen muchos métodos de segmentación (o clasificación).
Hay dos grandes grupos: clasificación supervisada y no-supervisada.

Supervisada:

- Asume que se puede entrenar un modelo a partir de ejemplos.
- Datos \mathbf{x}_i , etiquetas y_i .
- Conjunto de entrenamiento: $\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^n \rightsquigarrow$ estimar parámetros del modelo.

No supervisada:

Asume que puedes metrizar los datos.

Similaridad o discrepancia.

Segmentación de imágenes

Clasificación supervisada

- Naïve Bayes
- Análisis discriminante
- Regresión logística
- Vectores de soporte
- Árboles de decisión
- Redes neuronales
- ...

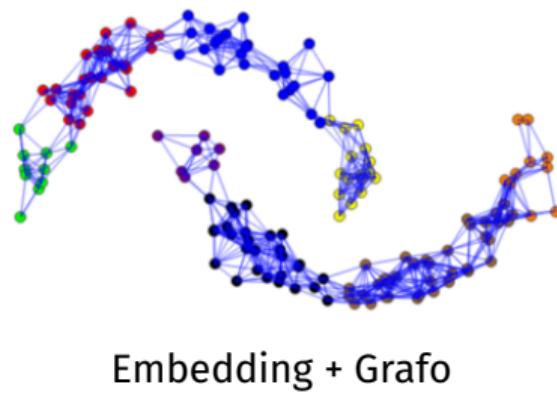
Clasificación no supervisada

- K-means
- *k nearest neighbours*
- Agrupamiento jerárquico
- **Agrupamiento espectral**
- *Mean-shift*
- DBSCAN
- Mezclas gaussianas
- ...

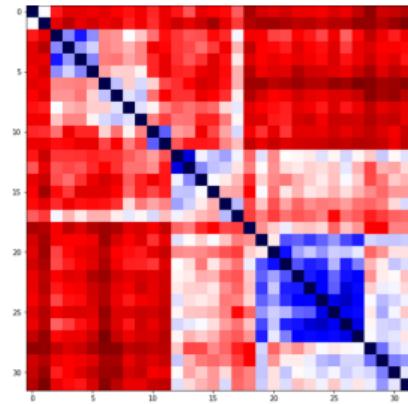
Segmentación espectral

Segmentación espectral

Datos
 (\mathbf{x}_i, y_i)



Embedding + Grafo

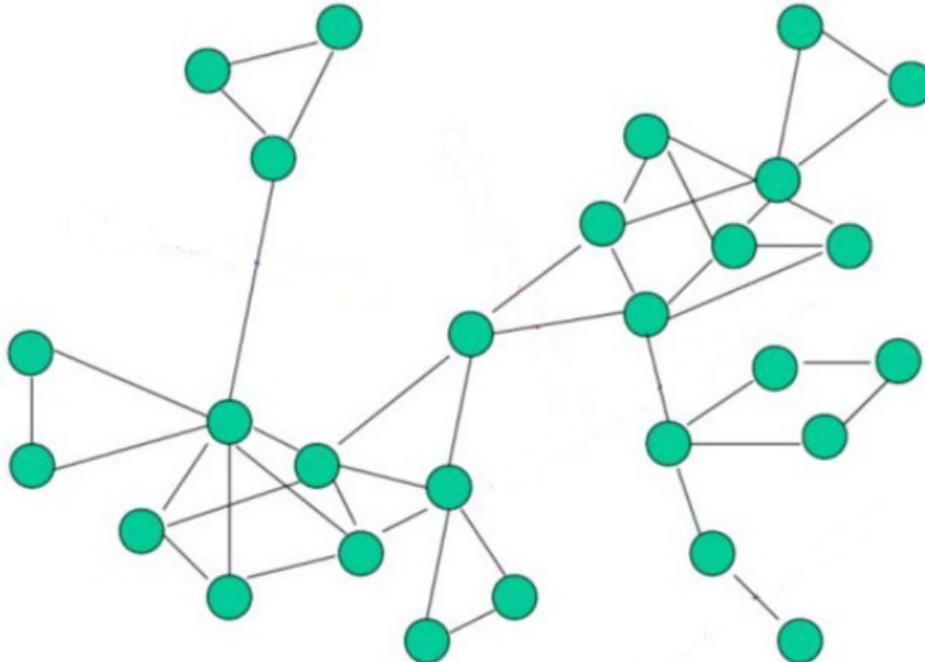


Matriz de afinidad o
similaridad W

- $W = (w_{ij})$, donde w_{ij} = similaridad entre el vértice \mathbf{x}_i y \mathbf{x}_j .
- W es simétrica, no-negativa ($w_{ij} \geq 0$).

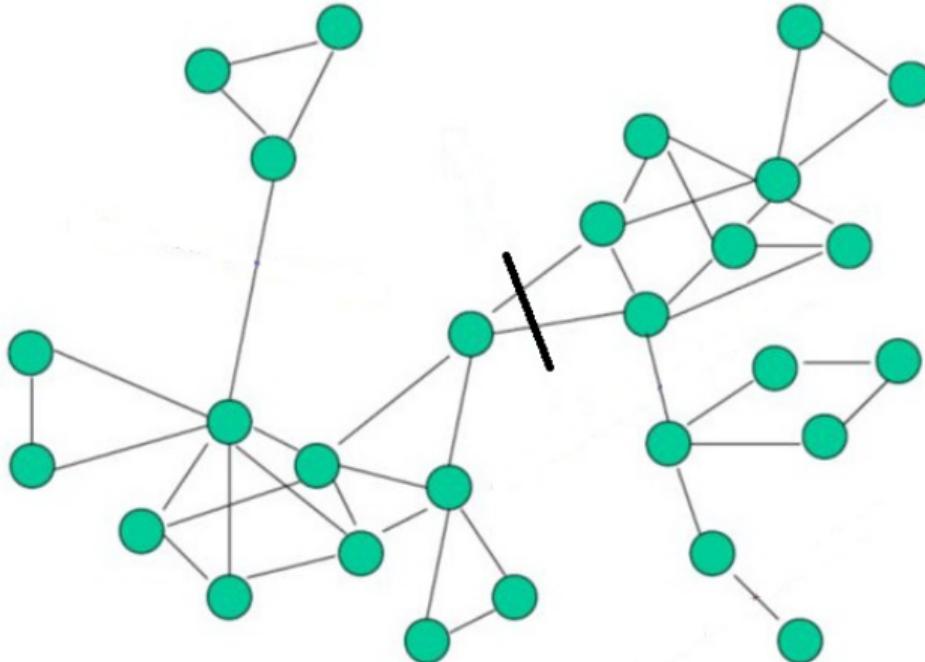
Segmentación espectral

Idea: Hallar dónde hacer el corte óptimo.



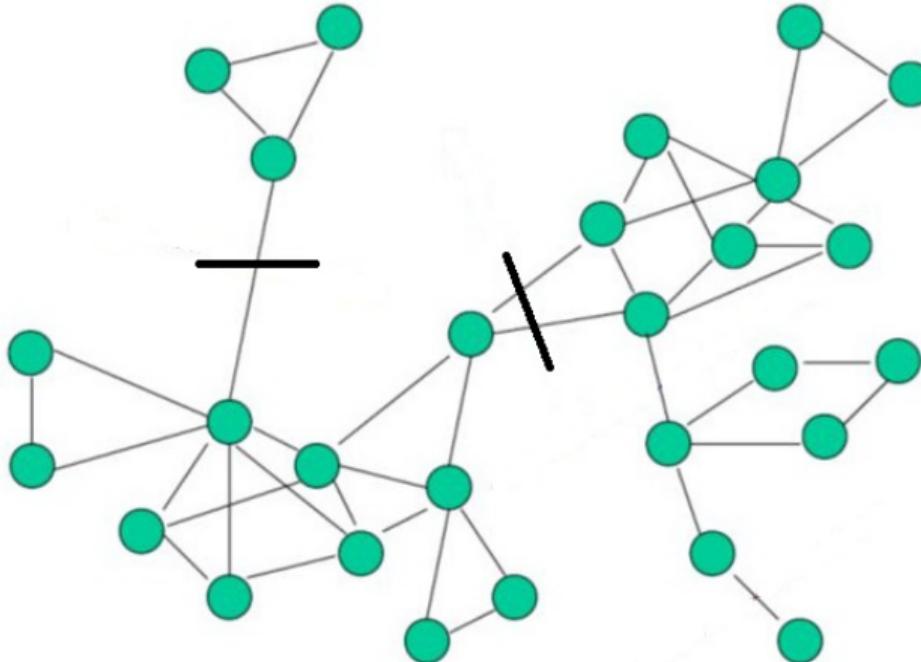
Segmentación espectral

Idea: Hallar dónde hacer el corte óptimo.



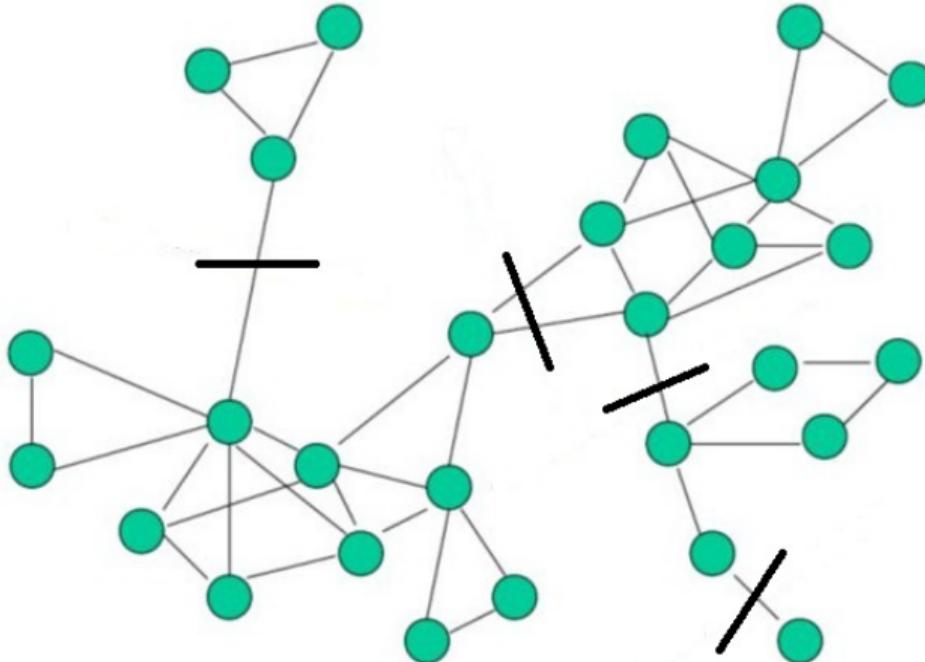
Segmentación espectral

Idea: Hallar dónde hacer el corte óptimo.



Segmentación espectral

Idea: Hallar dónde hacer el corte óptimo.

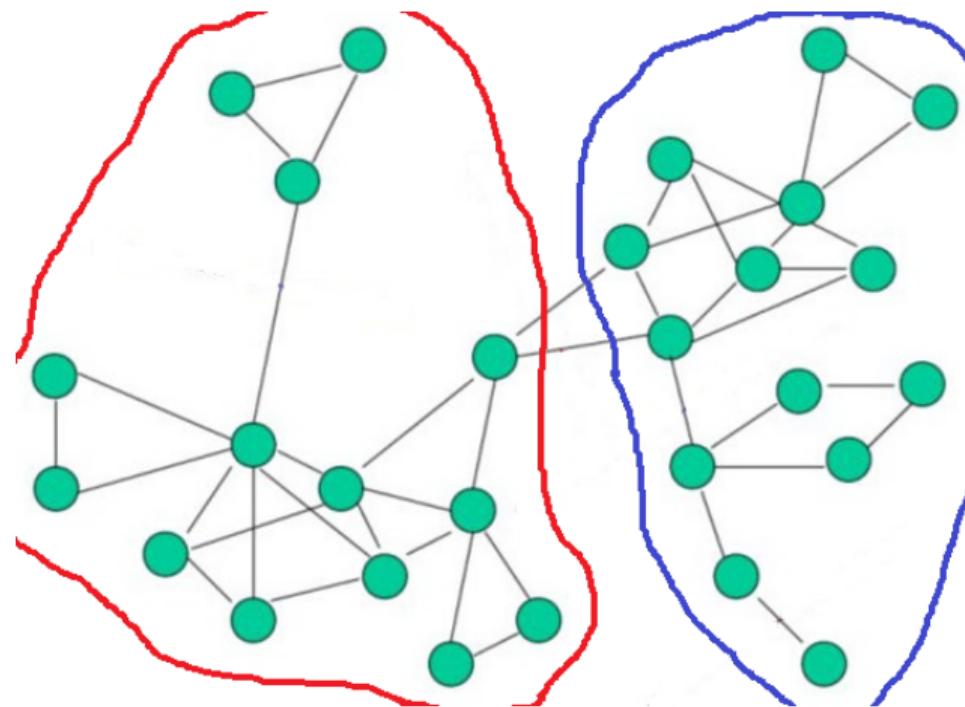


Graph-Cuts

- (Ford-Fulkerson, 1956). Algoritmo para calcular flujo máximo.
- (Edmonds-Karp, 1972). Implementación eficiente de Ford-Fulkerson.
- (Fiedler, 1973). Conectividad algebraica en grafos.
Método del vector de Fiedler.
- (Shi-Malik, 2000). Algoritmo *Normalized-Cuts*.
Exportan la idea de clustering espectral a visión computacional.
- (Boykov-Kolmogorov, 2001). Versión extendida de *Normalized-Cuts*.

Graph-Cuts

Caso más simple: segmentación binaria (dos componentes).



Graph-Cuts

Sea G un grafo conexo, W su matriz de afinidad.

Queremos encontrar una partición óptima del grafo (B, B') en dos componentes conexas $B \neq \emptyset$ y $B' \neq \emptyset$.

Este corte óptimo (B, B') puede encontrarse como la solución del problema de optimización

$$\min_{B, B'} \text{Cut}(B, B') = \min_{B, B'} \sum_{i \in B, j \in B'} w_{ij} - \sum_{i, j \in B} w_{ij} - \sum_{i, j \in B'} w_{ij}. \quad (1)$$

Graph-Cuts

$$\begin{aligned}\min_{B,B'} \text{Cut}(B, B') &= \min_{B,B'} \sum_{i \in B, j \in B'} w_{ij} - \sum_{i,j \in B} w_{ij} - \sum_{i,j \in B'} w_{ij} \\ &= \min_{B,B'} - \sum_{i \in B, j \in B'} (1)(-1)w_{ij} - \sum_{i,j \in B} (1)^2 w_{ij} - \sum_{i,j \in B'} (-1)^2 w_{ij} \\ &= \min_{\mathbf{u} \in \{-1,1\}^n} -\mathbf{u}^T W \mathbf{u}\end{aligned}$$

con $\mathbf{u} \in \{-1,1\}^n$ un vector indicador ($u_i = 1$ si $\mathbf{x}_i \in B$, y $u_i = -1$ si $\mathbf{x}_i \in B'$).
El problema (1) puede resolverse hallando el corte óptimo

$$\min_{\mathbf{u} \in \{-1,1\}^n} -\mathbf{u}^T W \mathbf{u} \tag{2}$$

Graph-Cuts

Sea $d_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}$ el grado del vértice \mathbf{x}_i . El vector de grados $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)^T \in \mathbb{R}^n$ está dado por $\mathbf{d} = W\mathbf{1}$, donde $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ es un vector con entradas 1.

Definimos la matriz $D = diag(\mathbf{d})$, cuya diagonal contiene los grados de cada vértice.

Definición

El Laplaciano del grafo G se define como

$$L = D - W = diag(\mathbf{d}) - W. \quad (3)$$

Graph-Cuts

Teorema (Segmentación Binaria)

La solución de

$$\min_{\mathbf{u} \in \{-1,1\}^n} \mathbf{u}^T L \mathbf{u} \quad (4)$$

es un vector indicador de la segmentación binaria de G.

Malas noticias:

El problema (4) es un problema NP-completo.

Graph-Cuts

Propiedades de L :

- L es simétrico y positivo-semidefinito.
- el menor auto-valor de L es 0, con auto-vector asociado **1**.
- la multiplicidad de 0 como auto-valor de L corresponde al número de componentes conexas de G .

Vamos a considerar una relajación del problema anterior. En lugar de tomar $\mathbf{u} \in \{-1, 1\}^n$, tomamos $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$:

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{u}^T L \mathbf{u}.$$

Graph-Cuts

Teorema (Fiedler, 1973)

Sea \mathbf{u}^* la solución de

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{u}^T L \mathbf{u}. \quad (5)$$

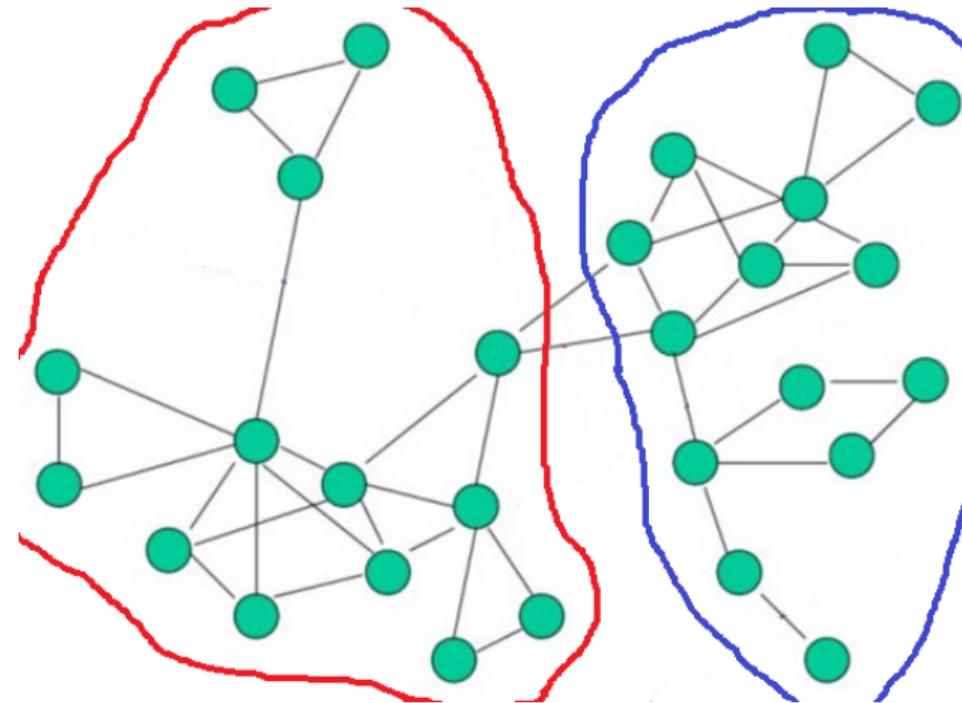
Entonces, el signo $\text{sign}(\mathbf{u}^*)$ es un indicador de la segmentación binaria de G .

Más aún, esta solución está dada por el vector de Fiedler $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}_{n-1}$, el auto-vector asociado al segundo menor auto-valor λ_{n-1} de L .

(Obs: consecuencia del Teorema de Eckhart-Young.)

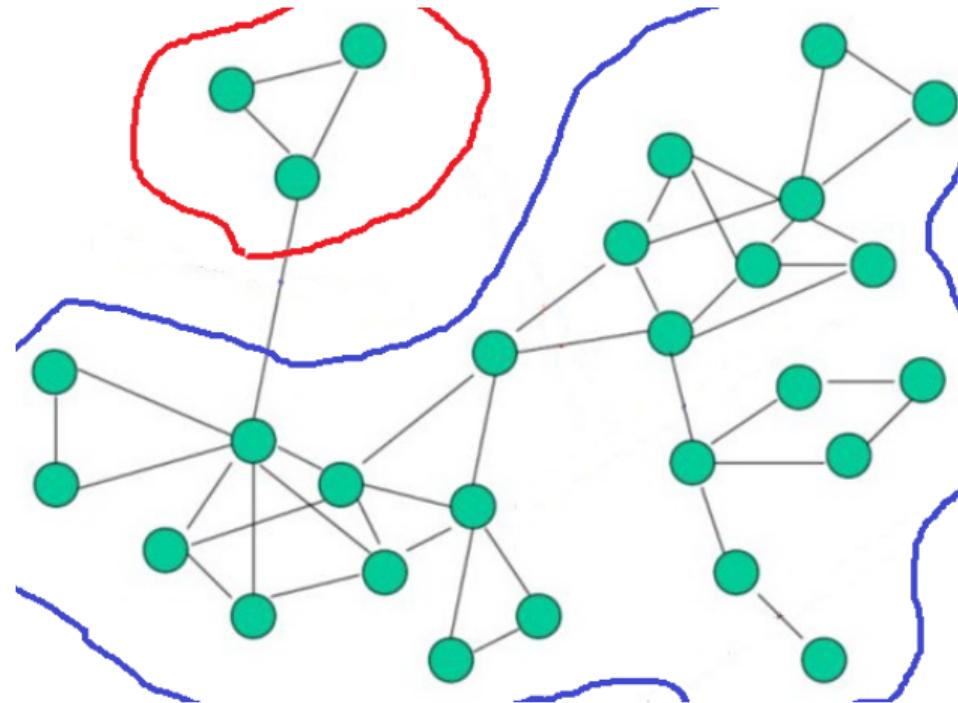
Graph-Cuts

El método de Fiedler funciona bien cuando la partición es balanceada.



Graph-Cuts

Presenta problemas cuando la partición no es balanceada.



Normalized Graph-Cuts

J Shi y J. Malik (2000) introducen el método de *normalized graph-cuts* o NCuts.

La idea es considerar un factor que normalize el tamaño de los clúster, para que sean ambos comparables.

En lugar de (1), se propone la función de costo *NCut*

$$\min_{B,B'} nCut(B, B') = \min_{B,B'} \left(\frac{\sum_{i \in B, j \in B'} w_{ij}}{\sum_{i \in B, j \in V} w_{ij}} + \frac{\sum_{i \in B', j \in B} w_{ij}}{\sum_{i \in B', j \in V} w_{ij}} \right) \quad (6)$$

Normalized Graph-Cuts

Teorema (Shi-Malik, 2000)

Dada la función de costo NCut (6) Entonces

- i) La solución $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ del problema de auto-valores generalizado

$$(D - W)\mathbf{u} = \lambda D\mathbf{u}, \quad (7)$$

es una solución relajada del problema de segmentación binaria (6).

- ii) La solución de (7) se reduce al problema de auto-valores

$$D^{-1/2}(D - W)D^{-1/2}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad (8)$$

Normalized Graph-Cuts

Definición

El Laplaciano normalizado del grafo G está dado por

$$\mathcal{L} = D^{-1/2}LD^{-1/2} = D^{-1/2}(D - W)D^{-1/2}. \quad (9)$$

Propiedades de \mathcal{L} :

- \mathcal{L} es simétrico y positivo-semidefinido.
- el menor auto-valor de \mathcal{L} es 0, con auto-vector asociado $D^{1/2}\mathbf{1}$.
- la multiplicidad de 0 como auto-valor de \mathcal{L} corresponde al número de componentes conexas de G .

Normalized Graph-Cuts

Teorema (Shi-Malik + Fiedler, 2000)

Sea \mathbf{u}^* la solución del problema de auto-valores $nCut$

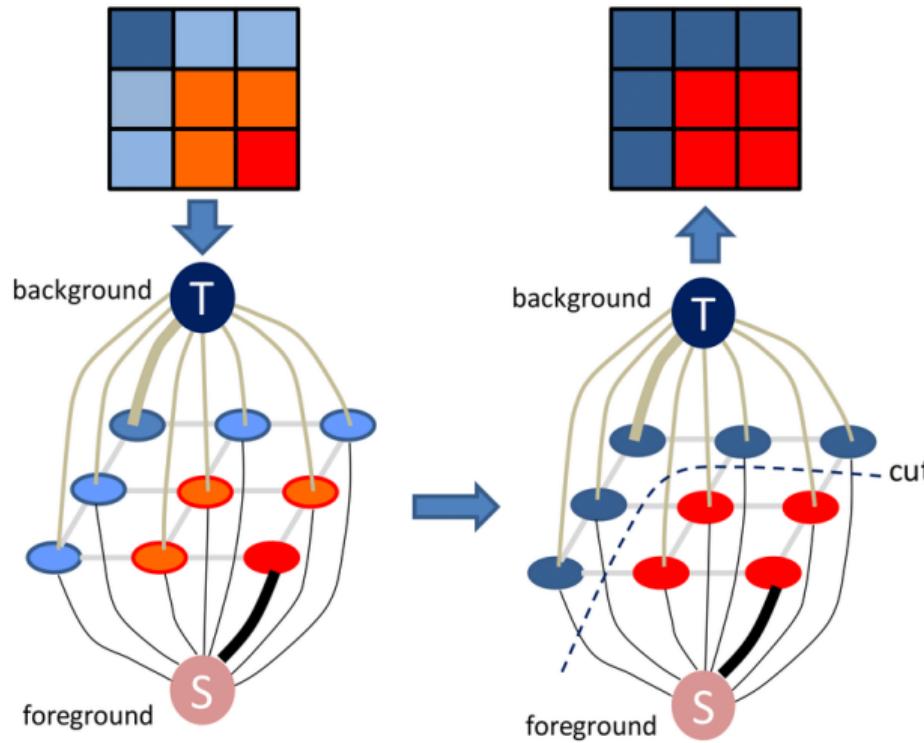
$$\mathcal{L}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u},$$

que minimiza el funcional $NCuts$. Entonces, el signo $sign(\mathbf{u}^*)$ es un indicador de la segmentación binaria de G .

Más aún, esta solución está dada por el vector de Fiedler $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}_{n-1}$, el auto-vector asociado al segundo menor auto-valor λ_{n-1} de \mathcal{L} .

NCuts

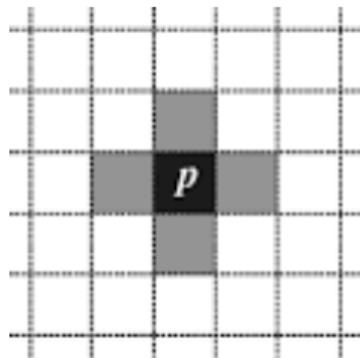
NCuts en imágenes



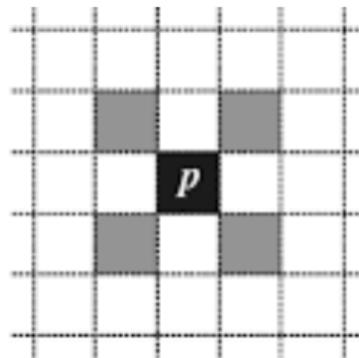
Píxeles vecinos

Vamos a aprovechar esta estructura "natural" de píxeles en una imagen I . El grafo G asociado será el de píxeles vecinos

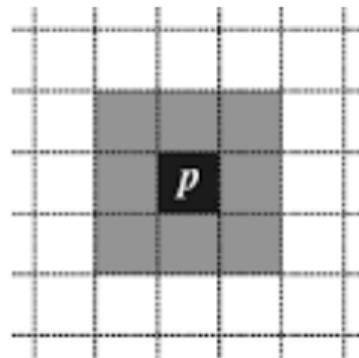
$$\mathcal{N}_c^p(\mathbf{x}) = \{\text{pixeles } \mathbf{z} \in I : \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_p \leq c\}$$



(a) $\mathcal{N}_1^1(\mathbf{p})$



(b)

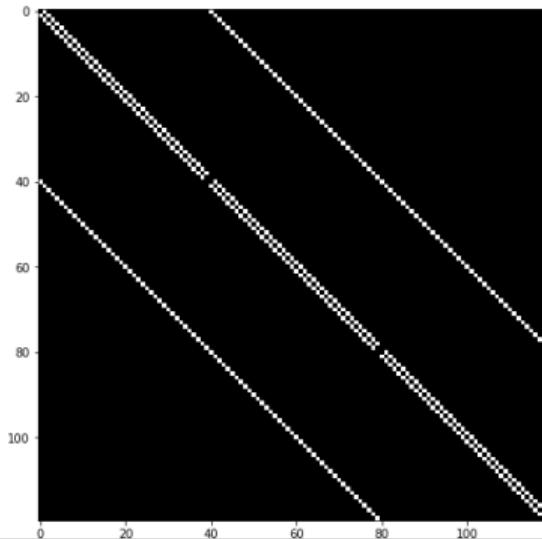


(c) $\mathcal{N}_1^\infty(\mathbf{p})$

Matriz de adyacencia

Definimos la matriz de adyacencia $A = (a_{ij})$ de G como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}_j \in \mathcal{N}_c(\mathbf{x}_i); \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$



Matrices ralas

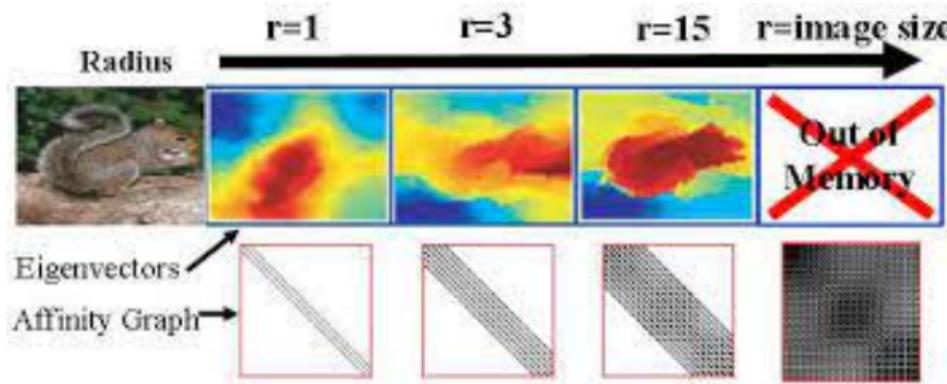


Imagen pequeña: $360 \times 480 = 153,600$ píxeles.

Las matrices A , W y \mathcal{L} son de tamaño $153,600 \times 153,600$.

Aproximadamente 87.9 GB de memoria.

Imagen de $5,000 \times 5,000 = 25,000,000$ píxeles.

Aproximadamente 2.3 millones GB de memoria.

Similaridad

Existen muchas formas de definir la similaridad. Una de las más comunes es usar un *kernel gaussiano*.

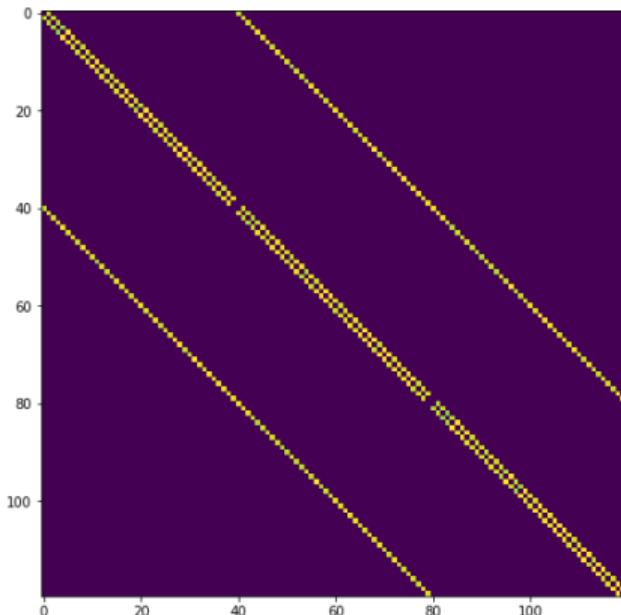
$$w_{ij} = \exp \left[-(\alpha \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_{color}^2 + \beta \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_{espacial}^2 + \gamma \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_{textura}^2) / 2\sigma^2 \right],$$

donde

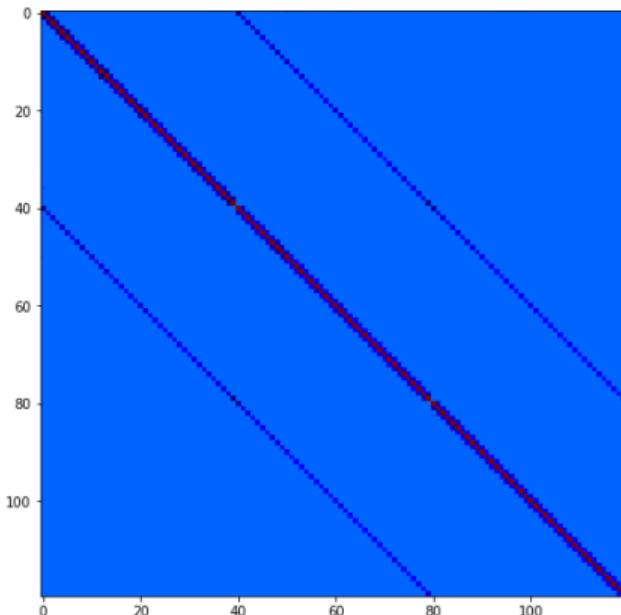
$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_{color} &= \|RGB(\mathbf{x}_i) - RGB(\mathbf{x}_j)\|_1, \\ \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_{espacial} &= \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\|_1, \\ \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_{textura} &= \|Tex(\mathbf{x}_i) - Tex(\mathbf{x}_j)\|,\end{aligned}$$

y $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ son los pesos de cada componente; σ^2 parámetro de escala. W se calcula sólo en aquellas entradas indicadas por A : $W = W_{aff} \odot A$.

W y \mathcal{L}



Matriz de adyacencia W



Laplaciano normalizado \mathcal{L}

Algoritmo Ncuts

Result: Multiclass segmentation of I

Given an image I , and its associated graph G ;

while Stop criterion doesn't hold **do**

 Construct A , W and \mathcal{L} ;

 Compute second-smallest eigenvalue λ_{n-1} of \mathcal{L} ;

 Compute Fiedler vector \mathbf{v}_{n-1} ;

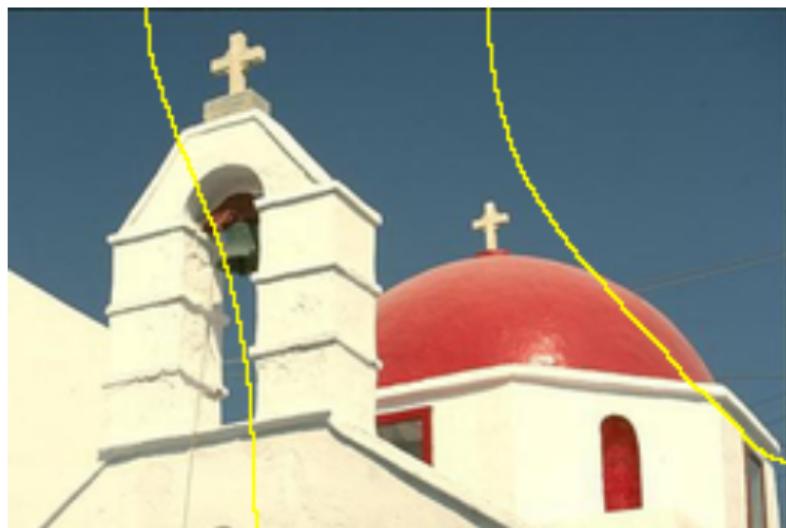
 Split G in two subgraphs G_1 and G_2 as indicated by $sign(\mathbf{v}_{n-1})$;

 Repeat algorithm for each subgraph G_i .

end

Algorithm 1: Multiclass segmentation NCuts

Resultados

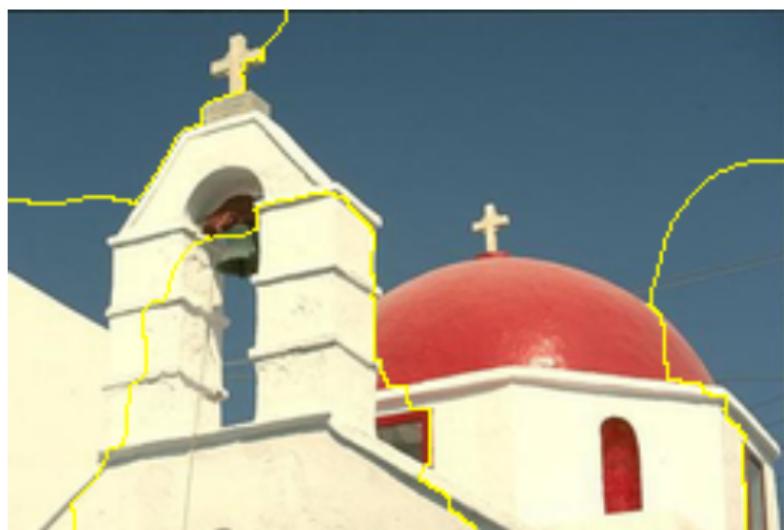


Bordes



Segmentación

Resultados

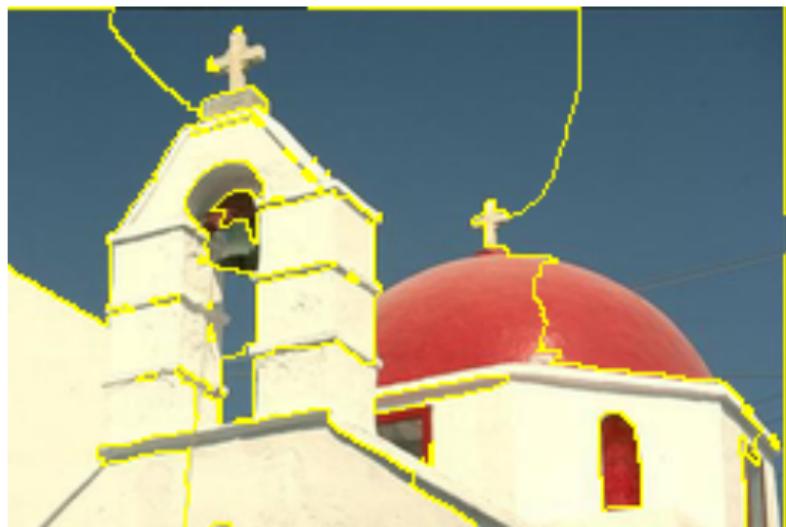


Bordes



Segmentación

Resultados



Bordes



Segmentación

Resultados NCuts



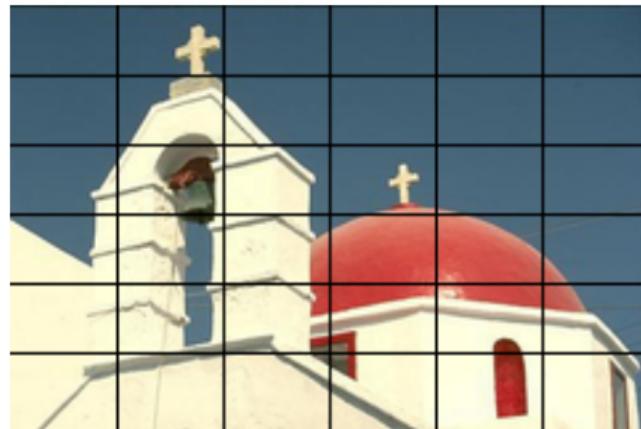
Bordes



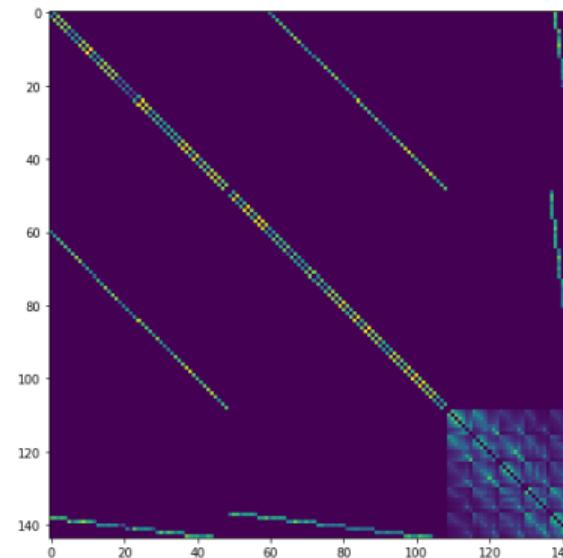
Segmentación

NCuts Multi-escala

Una de las variantes consiste en crear nuevos vértices por bloques.



Partición en bloques



Matriz de afinidad W

Resultados Multi-escala



Bordes



Segmentación

Resultados Multi-escala



Bordes



Segmentación

Trabajo actual

Propuesta

Actualmente se está trabajando en una variante de NCuts.

Referencia: A. Reyes-Figueroa, D. Alvarado-Carrillo y M. Rivera (2020).

Graph with small-world properties for image segmentation. Submitted.

Los siguientes resultados usan la base de datos *Berkeley Segmentation Dataset* BSD500. Ref: D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal y J. Malik (2001). **A Database of Human Segmented Natural Images and its Application to Evaluating Segmentation Algorithms and Measuring Ecological Statistics.** In Proc. 8th Intl. Conf. Computer Vision, ICCV 2001, pp. 416-423. [1, 2, 3, 4]

Resultados Preliminares



NCuts



NCuts + Propuesta

Resultados Preliminares

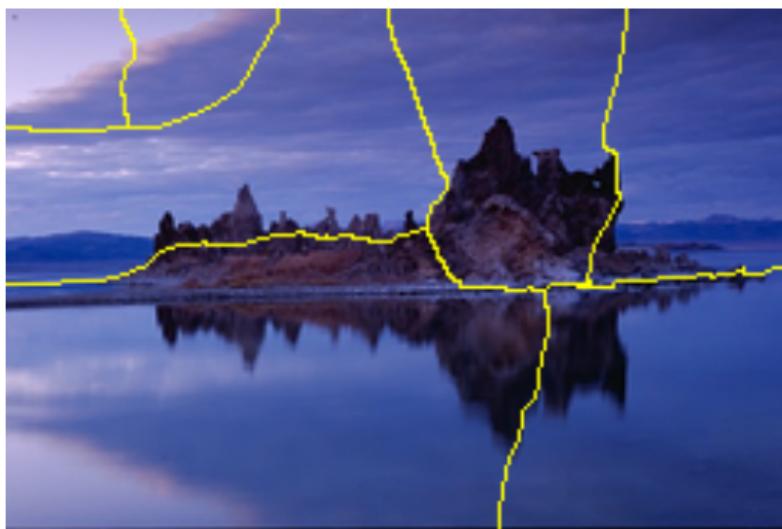


NCuts



NCuts + Propuesta

Resultados Preliminares



NCuts



NCuts + Propuesta

Resultados Preliminares



NCuts



NCuts + Propuesta

Resultados Preliminares



NCuts



NCuts + Propuesta

Resultados Preliminares



NCuts



NCuts + Propuesta

Resultados Preliminares

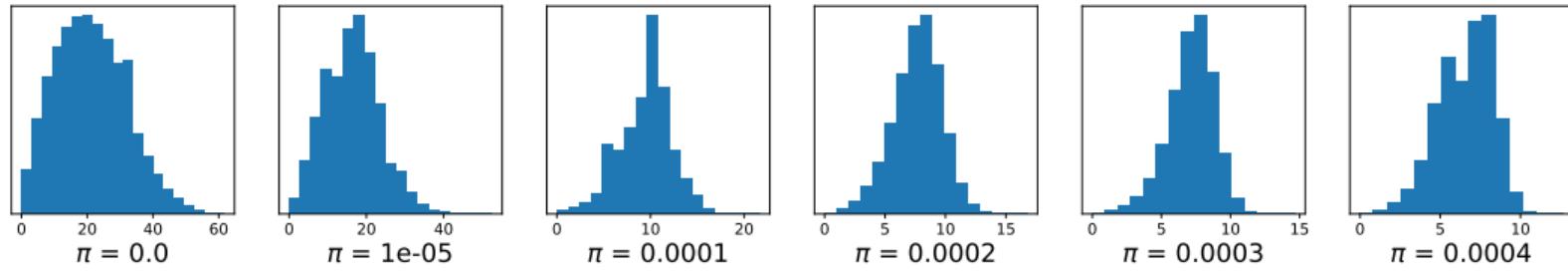
Averaged segmentation metrics of the evaluated experiments.

Method	NCuts			NCuts+Propuesta			
	Metric	LCI	GCI	RI	LCI	GCI	RI
2 classes		0.698	0.675	0.529	0.824	0.810	0.576
4 classes		0.602	0.542	0.643	0.681	0.630	0.683
8 classes		0.583	0.515	0.688	0.648	0.588	0.716

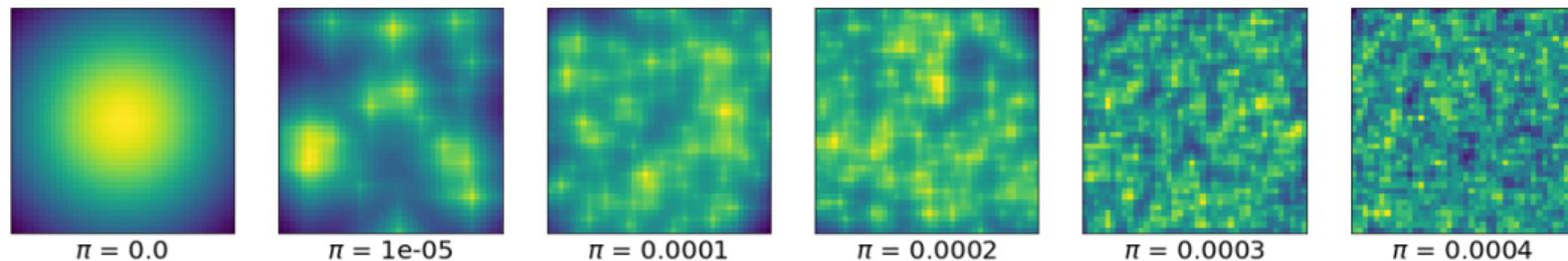
Method	MS			MS+Propuesta			
	Metric	LCI	GCI	RI	LCI	GCI	RI
2 classes		0.901	0.888	0.511	0.824	0.810	0.578
4 classes		0.783	0.725	0.611	0.687	0.637	0.683
8 classes		0.477	0.431	0.662	0.649	0.584	0.712

Gracias

Resultados Preliminares

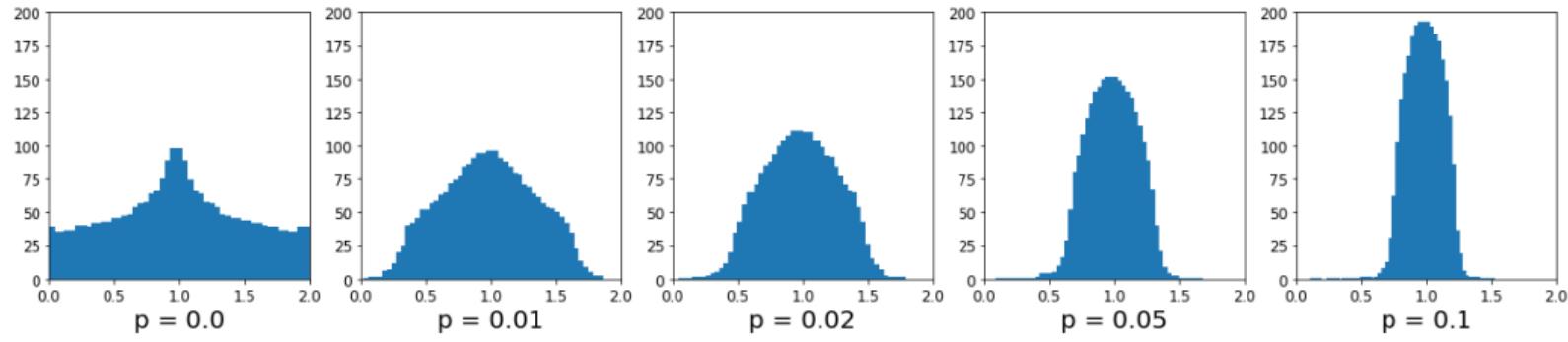


Distancias geodésicas en G



Centralidad (closeness centrality) en G

Resultados Preliminares

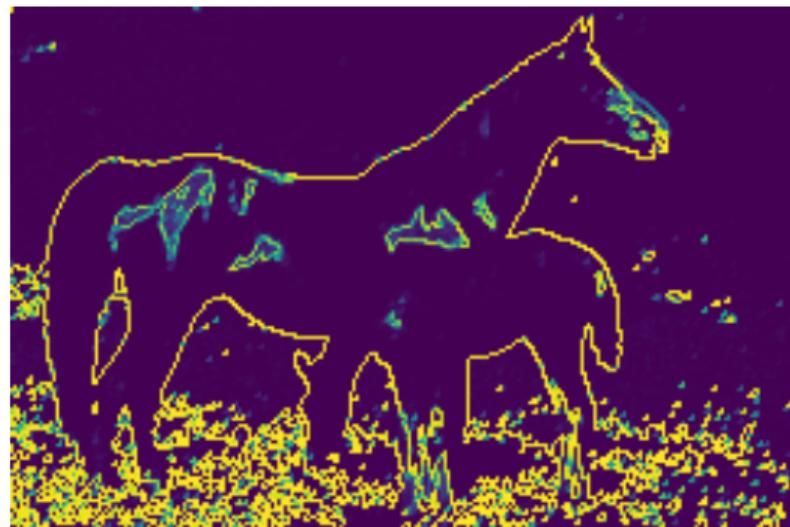


Distribución de los auto-valores de \mathcal{L}

Resultados Preliminares

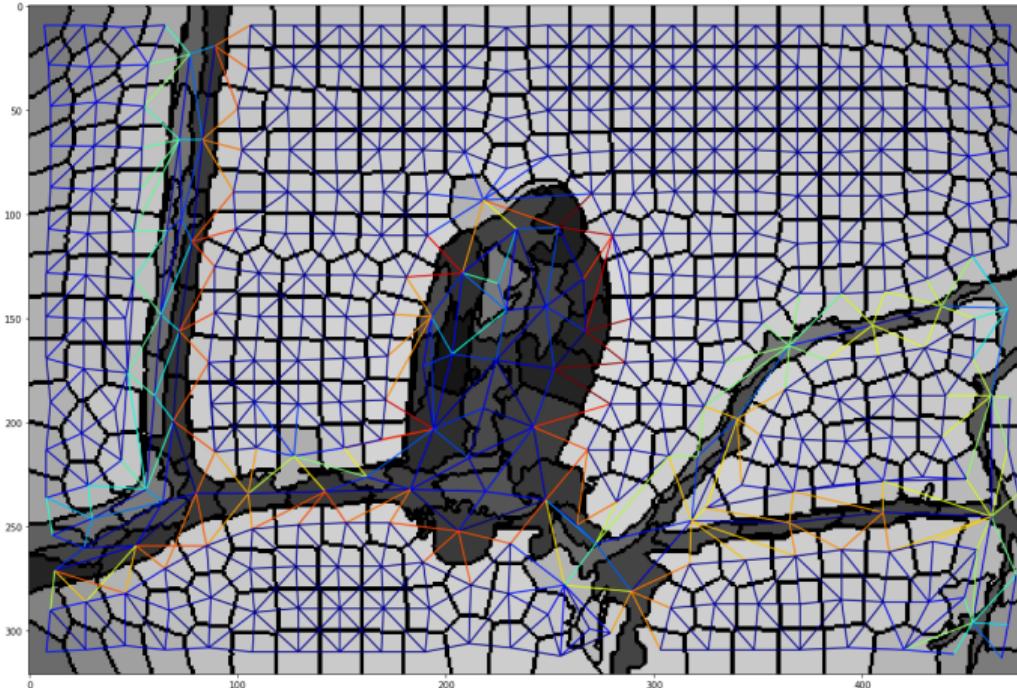


Imagen de entrada



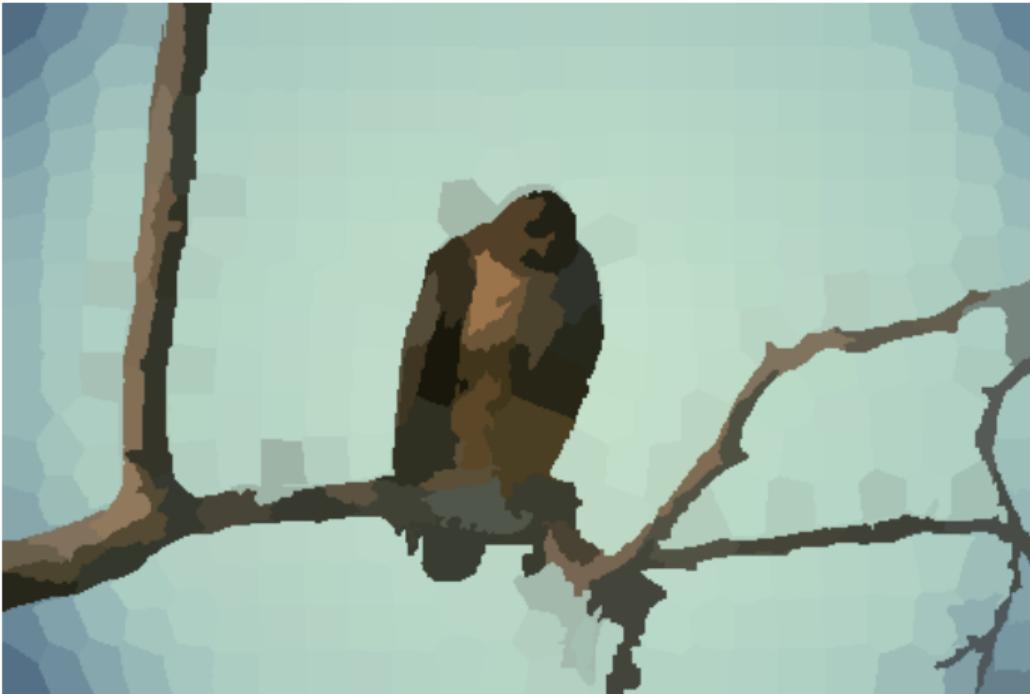
Bordes

Resultados Preliminares



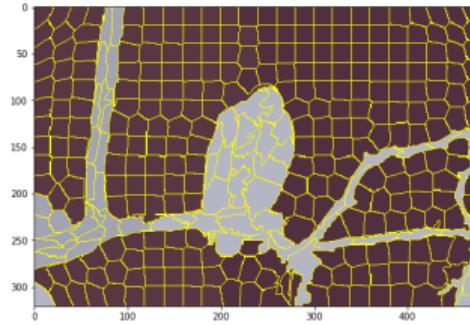
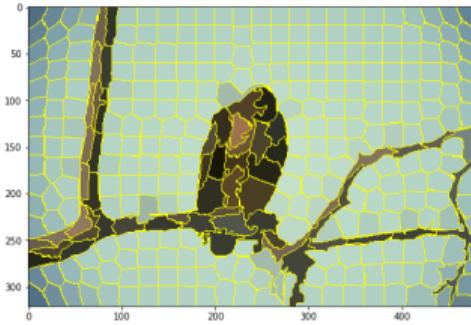
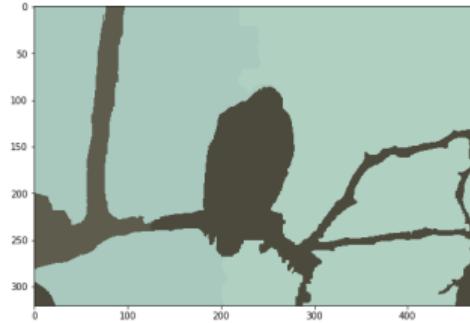
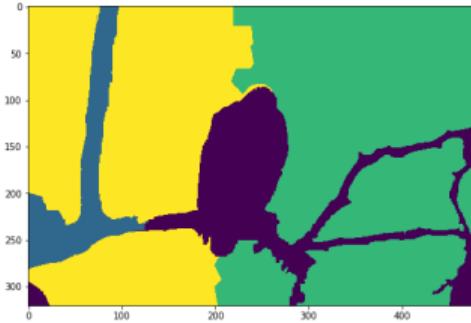
Generación de un grafo G para super-píxeles

Resultados Preliminares



Segmentación a nivel de super-píxeles

Resultados Preliminares



Segmentación a nivel de super-píxeles

Referencias

- [1] Jianbo Shi and J. Malik. "Normalized cuts and image segmentation". In: *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 22.8 (2000), pp. 888–905. ISSN: 0162-8828.
- [2] Y. Boykov and V. Kolmogorov. "An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision". In: *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 26.9 (2004), pp. 1124–1137.
- [3] M. Fiedler. "Algebraic connectivity of graphs". In: *Czechoslovak Mathematical Journal* 23.98 (1973), pp. 298–305.
- [4] M. Fiedler. "Laplacian of graphs and algebraic connectivity". In: *Combinatorics and Graph Theory* 25.1 (1987), pp. 57–70.