Transformaciones Rígidas

Alan Reyes-Figueroa

Geometría Diferencial

(Aula 06) 24.enero.2023

Transformaciones rígidas

Definición

*Sea $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de distancia en $\mathbb{R}^n$ (e.g. la distancia euclideana). Una **transformación rígida** (**movimiento rígido** o **euclideano**) en $\mathbb{R}^n$ es una transformación $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisface*

$$d(M\mathbf{x}, M\mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Definición

*Sea $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de distancia en $\mathbb{R}^n$ (e.g. la distancia euclideana). Una **transformación rígida** (**movimiento rígido** o **euclideano**) en $\mathbb{R}^n$ es una transformación $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisface*

$$d(M\mathbf{x}, M\mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

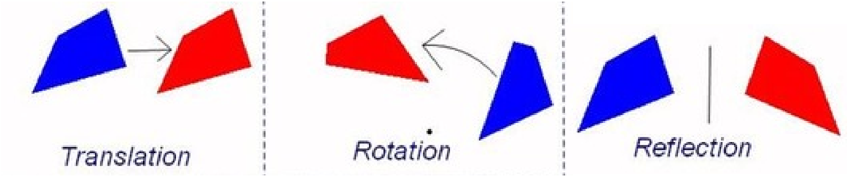
¿Qué tipos de transformaciones rígidas hay?

Definición

*Sea $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de distancia en $\mathbb{R}^n$ (e.g. la distancia euclideana). Una **transformación rígida** (**movimiento rígido** o **euclideano**) en $\mathbb{R}^n$ es una transformación $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisface*

$$d(M\mathbf{x}, M\mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

¿Qué tipos de transformaciones rígidas hay?



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Transformaciones rígidas

- Traslaciones:
  Todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ define una única traslación $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}$.
  Representamos el grupo de translaciones por $\mathbb{R}^n$.

Transformaciones rígidas

- Traslaciones:
  Todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ define una única traslación $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}$.
  Representamos el grupo de translaciones por $\mathbb{R}^n$.

- Rotaciones y Reflexiones: Se representan por una trasformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisface la propiedad de *isometría*

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

  En consecuencia, A es una *matriz ortogonal* real (sus columnas son una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$). El grupo de matrices ortogonales se llama el **grupo ortogonal** $O(n)$.

Transformaciones rígidas

- Traslaciones:
  Todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ define una única traslación $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}$.
  Representamos el grupo de translaciones por $\mathbb{R}^n$.

- Rotaciones y Reflexiones: Se representan por una trasformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisface la propiedad de *isometría*

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

  En consecuencia, A es una *matriz ortogonal* real (sus columnas son una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$). El grupo de matrices ortogonales se llama el **grupo ortogonal** $O(n)$.

$$\begin{aligned} A \in O(n) \quad &\Rightarrow \quad A^T A = I \;\Rightarrow\; A^{-1} = A^T, \\ &\Rightarrow \quad \det(A)^2 = \det(A^T)\det(A) = \det(A^T A) = \det(I) = 1 \\ &\Rightarrow \quad \det(A) = \pm 1. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Transformaciones rígidas

- Rotaciones: se caracterizan por tener determinante 1, Ellas forman la mitad del grupo ortogonal. El grupo de rotaciones se llama el **grupo especial ortogonal** $SO(n)$.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Transformaciones rígidas

- Rotaciones: se caracterizan por tener determinante 1, Ellas forman la mitad del grupo ortogonal. El grupo de rotaciones se llama el **grupo especial ortogonal** $SO(n)$.
- Reflexiones: se caracterizan por tener determinante -1. Forman la otra mitad del grupo ortogonal.

- Rotaciones: se caracterizan por tener determinante 1, Ellas forman la mitad del grupo ortogonal. El grupo de rotaciones se llama el **grupo especial ortogonal** $SO(n)$.
- Reflexiones: se caracterizan por tener determinante -1. Forman la otra mitad del grupo ortogonal.

Propiedad

Una transformación rígida en $\mathbb{R}^n$ es de la forma

$$M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}, \quad donde\ A \in O(n),\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

- Rotaciones: se caracterizan por tener determinante 1, Ellas forman la mitad del grupo ortogonal. El grupo de rotaciones se llama el **grupo especial ortogonal** $SO(n)$.

- Reflexiones: se caracterizan por tener determinante -1. Forman la otra mitad del grupo ortogonal.

Propiedad

Una transformación rígida en $\mathbb{R}^n$ es de la forma

$$M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}, \quad \textit{donde } A \in O(n), \ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Prueba: Traslaciones, rotaciones y reflexiones, son de la forma $A\mathbf{x} + \mathbf{t}$.

Transformaciones rígidas

- Rotaciones: se caracterizan por tener determinante 1, Ellas forman la mitad del grupo ortogonal. El grupo de rotaciones se llama el **grupo especial ortogonal** $SO(n)$.

- Reflexiones: se caracterizan por tener determinante -1. Forman la otra mitad del grupo ortogonal.

Propiedad

Una transformación rígida en $\mathbb{R}^n$ es de la forma

$$M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}, \;\; \textit{donde } A \in O(n), \; \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Prueba: Traslaciones, rotaciones y reflexiones, son de la forma $A\mathbf{x} + \mathbf{t}$. La composición es de esa forma:

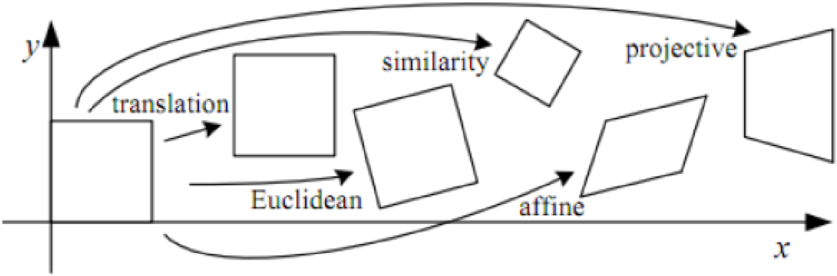
$$A_2(A_1\mathbf{x} + \mathbf{t}_1) + \mathbf{t}_2 = A_2A_1\mathbf{x} + (A_2\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}.$$

Definición

*El grupo de transformaciones rígidas en $\mathbb{R}$ se llama el **grupo euclideano** $E(n)$.*

Definición

El grupo de transformaciones rígidas en $\mathbb{R}$ *se llama el* ***grupo euclideano*** $E(n)$.



Transformaciones rígidas

Propiedad

La longitud de arco es invariante bajo transformaciones rígidas.

Propiedad

La longitud de arco es invariante bajo transformaciones rígidas.

<u>Prueba</u>:
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ curva regular, $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ un movimiento rígido.
Entonces

Propiedad

La longitud de arco es invariante bajo transformaciones rígidas.

<u>Prueba</u>:

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ curva regular, $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ un movimiento rígido.
Entonces $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s)\beta'(s) = (M \circ \alpha)'(s) = (A\alpha(s) + \mathbf{v})' = A\alpha'(s)$.

Propiedad

La longitud de arco es invariante bajo transformaciones rígidas.

Prueba:
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ curva regular, $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ un movimiento rígido.
Entonces $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s) \beta'(s) = (M \circ \alpha)'(s) = (A\alpha(s) + \mathbf{v})' = A\alpha'(s)$. De ahí

$$\begin{aligned} \ell_\beta(s) &= \int_{s_0}^{s} |\beta'(u)|\, du = \int_{s_0}^{s} |A\alpha'(u)|\, du = \int_{s_0}^{s} \langle A\alpha'(u), A\alpha'(u)\rangle^{1/2}\, du \\ &= \int_{s_0}^{s} \langle \alpha'(u), \alpha'(u)\rangle^{1/2}\, du = \int_{s_0}^{s} |\alpha'(u)|\, du = \ell_\alpha(s), \ \forall s. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Propiedad

La longitud de arco es invariante bajo transformaciones rígidas.

Prueba:

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ curva regular, $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ un movimiento rígido.
Entonces $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s)\beta'(s) = (M \circ \alpha)'(s) = (A\alpha(s) + \mathbf{v})' = A\alpha'(s)$. De ahí

$$
\begin{aligned}
\ell_\beta(s) &= \int_{s_0}^{s} |\beta'(u)|\, du = \int_{s_0}^{s} |A\alpha'(u)|\, du = \int_{s_0}^{s} \langle A\alpha'(u), A\alpha'(u)\rangle^{1/2}\, du \\
&= \int_{s_0}^{s} \langle \alpha'(u), \alpha'(u)\rangle^{1/2}\, du = \int_{s_0}^{s} |\alpha'(u)|\, du = \ell_\alpha(s), \ \forall s.
\end{aligned}
$$

Esto muestra que ℓ es invariante bajo movimientos rígidos. $\square$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Transformaciones rígidas

Propiedad

La curvatura κ y la torsión τ son invariantes bajo transformaciones rígidas.

Propiedad

La curvatura κ y la torsión τ son invariantes bajo transformaciones rígidas.

Prueba:

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular, $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ un movimiento rígido. Sea $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s)$.

Propiedad

La curvatura κ y la torsión τ son invariantes bajo transformaciones rígidas.

Prueba:
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular, $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ un movimiento rígido. Sea $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s)$.
Ya vimos que $\beta'(s) = A\alpha'(s)$. Luego, $\beta''(s) = A\alpha''(s)$ y $\beta'''(s) = A\alpha'''(s)$.

Propiedad

La curvatura κ y la torsión τ son invariantes bajo transformaciones rígidas.

Prueba:
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular, $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ un movimiento rígido. Sea $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s)$.
Ya vimos que $\beta'(s) = A\alpha'(s)$. Luego, $\beta''(s) = A\alpha''(s)$ y $\beta'''(s) = A\alpha'''(s)$. En particular,

$$\mathbf{t}_\beta(s) \;=\; \beta'(s) = A\alpha'(s) = A\mathbf{t}_\alpha(s),$$

Propiedad

La curvatura κ y la torsión τ son invariantes bajo transformaciones rígidas.

Prueba:
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular, $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ un movimiento rígido. Sea $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s)$.
Ya vimos que $\beta'(s) = A\alpha'(s)$. Luego, $\beta''(s) = A\alpha''(s)$ y $\beta'''(s) = A\alpha'''(s)$. En particular,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\beta(s) &= \beta'(s) = A\alpha'(s) = A\mathbf{t}_\alpha(s), \\ \mathbf{n}_\beta(s) &= A\mathbf{n}_\alpha(s) \qquad \text{(ya que } \beta''(s) = A\alpha''(s)\text{)}, \end{aligned}$$

Propiedad

La curvatura κ y la torsión τ son invariantes bajo transformaciones rígidas.

Prueba:
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva regular, $M(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ un movimiento rígido. Sea $\beta(s) = (M \circ \alpha)(s)$.
Ya vimos que $\beta'(s) = A\alpha'(s)$. Luego, $\beta''(s) = A\alpha''(s)$ y $\beta'''(s) = A\alpha'''(s)$. En particular,

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_\beta(s) &= \beta'(s) = A\alpha'(s) = A\mathbf{t}_\alpha(s), \\
\mathbf{n}_\beta(s) &= A\mathbf{n}_\alpha(s) \qquad (\text{ya que } \beta''(s) = A\alpha''(s)), \\
\mathbf{b}_\beta(s) &= \mathbf{t}_\beta(s) \times \mathbf{n}_\beta(s) = A\mathbf{t}_\alpha(s) \times A\mathbf{n}_\alpha(s) = A(\mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{n}_\alpha(s)) = A\mathbf{b}_\alpha(s).
\end{aligned}$$

Transformaciones rígidas

Luego *A* lleva el triedro de Frenet de α, en el triedro de Frenet de β.

Transformaciones rígidas

Luego A lleva el triedro de Frenet de α, en el triedro de Frenet de β.

Además,

$$\kappa_\beta(s) \;=\; \langle \beta''(s), \mathbf{n}_\beta(s)\rangle = \langle A\alpha''(s), A\mathbf{n}_\alpha(s)\rangle = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_\alpha(s)\rangle$$

Transformaciones rígidas

Luego A lleva el triedro de Frenet de α, en el triedro de Frenet de β.

Además,

$$\begin{aligned} \kappa_\beta(s) &= \langle \beta''(s), \mathbf{n}_\beta(s) \rangle = \langle A\alpha''(s), A\mathbf{n}_\alpha(s) \rangle = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_\alpha(s) \rangle \\ &= \kappa_\alpha(s), \quad \forall s; \end{aligned}$$

Luego A lleva el triedro de Frenet de α, en el triedro de Frenet de β.

Además,

$$\begin{aligned}
\kappa_\beta(s) &= \langle \beta''(s), \mathbf{n}_\beta(s)\rangle = \langle A\alpha''(s), A\mathbf{n}_\alpha(s)\rangle = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_\alpha(s)\rangle \\
&= \kappa_\alpha(s), \quad \forall s; \\
y & \\
\tau_\beta(s) &= \langle \mathbf{b}'_\beta(s), \mathbf{n}_\beta(s)\rangle = \langle A\mathbf{b}'_\alpha(s), A\mathbf{n}_\alpha(s)\rangle = \langle \mathbf{b}'_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s)\rangle
\end{aligned}$$

Luego A lleva el triedro de Frenet de α, en el triedro de Frenet de β.

Además,

$$\begin{aligned} \kappa_\beta(s) &= \langle \beta''(s), \mathbf{n}_\beta(s)\rangle = \langle A\alpha''(s), A\mathbf{n}_\alpha(s)\rangle = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_\alpha(s)\rangle \\ &= \kappa_\alpha(s), \quad \forall s; \\ y & \\ \tau_\beta(s) &= \langle \mathbf{b}'_\beta(s), \mathbf{n}_\beta(s)\rangle = \langle A\mathbf{b}'_\alpha(s), A\mathbf{n}_\alpha(s)\rangle = \langle \mathbf{b}'_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s)\rangle \\ &= \tau_\alpha(s), \quad \forall s. \end{aligned}$$

De ahí que κ y τ son invariantes bajo movimientos rígidos. $\square$