Teorema: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{K})$.

Prueba: En $\mathbb{R}^n$, todo compacto es cerrado (Heine-Borel) $\Rightarrow \mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$.

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{K}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. Por otro lado, si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cerrado

entonces C puede representarse como unión enumerable de compactos:

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k, \quad \text{con } C_k = \overline{D_k(0)} \cap C \text{ compacto.}$$

Luego, $C = \bigcup_{k\geq 1} C_k \in \sigma(\mathcal{K}) \Rightarrow \mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{K})$.

$$\Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{K}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{C})$$

Sabemos que $\mathcal{C} = \mathcal{O}^c = \{A^c : A \in \mathcal{O}\} \Rightarrow \mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{O})$. Además, $\mathcal{O} = \mathcal{C}^c \Rightarrow \mathcal{O} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. Luego, $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{O})$ y $\sigma(\mathcal{O}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$

$$\Rightarrow \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{C}). \quad \square$$

Obs! Tenemos otras maneras de generar $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. (existen otros sistemas de conjuntos que producen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$).

- La familia de intervalos abiertos

$$\mathcal{J}^o = \mathcal{J}^{o,n} = \mathcal{J}^o(\mathbb{R}^n) = \left\{ \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i \right\}.$$

- La familia de intervalos semi-abiertos

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}^{,n} = \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i \right\}.$$

- La familia de intervalos abiertos con extremos racionales

$$\mathcal{J}^o_{\mathbb{Q}} = \mathcal{J}^{o,n}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{J}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{Q},\ a_i < b_i \right\}$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{J}^o) = \sigma(\mathcal{J}) = \sigma(\mathcal{J}^o_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}).$$

Clases monótonas

Def: Una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X se llama una clase monótona

si
i) $X \in \mathcal{M}$
ii) $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ con $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}$
iii) $\{B_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ con $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots \Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{M}$.

Prop. Si $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una colección de subconjuntos de X, existe una clase monótona $m(S)$ con $S \subseteq m(S)$ y si $\mathcal{M}$ es otra clase monótona conteniendo a S, entonces $m(S) \subseteq \mathcal{M}$.

Prueba: Afirmamos que intersección arbitraria de clases monótonas sigue siendo una clase monótona.

Tome $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ familia de clases monótonas en X y se $\mathcal{M} = \bigcap_i \mathcal{M}_i$

i) Como $X \in \mathcal{M}_i \; \forall i \Rightarrow X \in \bigcap_i \mathcal{M}_i = \mathcal{M}$.

ii) $\{A_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{M}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \Rightarrow \{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}_i, \forall i \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}_i, \forall i$

$\Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \bigcap_i \mathcal{M}_i = \mathcal{M}$.

iii) $\{B_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{M}$, $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \Rightarrow \{B_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}_i, \forall i \Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{M}_i, \forall i$

$\Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{M}$.

Sea $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Definamos $\mathcal{G} = \{\mathcal{M} : \mathcal{M}$ es clase monótona, y $S \subseteq \mathcal{M}\}$

$\mathcal{G} \neq \emptyset$, pues $\mathcal{P}(X)$ es una clase monótona $\Rightarrow \mathcal{P}(X) \in \mathcal{G}$.

Tome $m(S) = \bigcap_{\mathcal{M} \in \mathcal{G}} \mathcal{M}$. Por lo anterior, $m(S)$ es clase monótona (es intersección de clases monótonas) Pero $S \subseteq \mathcal{M}, \forall \mathcal{M} \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow S \subseteq \bigcap \mathcal{M} = m(S)$.

Si $\mathcal{F}$ es otra clase con $S \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \in \mathcal{G} \Rightarrow m(S) = \bigcap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$. $\square$

$m(S)$ se llama la <u>clase monótona generada</u> por S.

<u>Prop:</u> • $S \subseteq T \Rightarrow m(S) \subseteq m(T)$

• $m(m(S)) = m(S)$

• $S \subseteq m(T) \Rightarrow m(S) \subseteq m(T)$

<u>Propiedad</u> 1: Si S es cerrado bajo complementos $(A \in S \Rightarrow A^c \in S)$ también lo es $m(S)$. $\square$

<u>Propiedad</u> 2: Si S es cerrado bajo intersecciones ~~finitas~~ $\left(\{A_n\} \in S \Rightarrow \bigcap A_n \in S \right)$, entonces también lo es $m(S)$.

<u>Prueba:</u> Tome $\mathcal{L} = \{ M \in m(S) : M \cap A \in m(S), \forall A \in S \}$

<u>$\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$</u> $\quad \mathcal{L}' = \{ M \in m(S) : M \cap A \in m(S), \forall A \in m(S) \}$

Se puede mostrar que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son clases monótonas (ejercicio!)

Si $U, V \in m(S) \Rightarrow \underline{\overset{?}{\quad}} \Rightarrow U \cap V \in m(S)$.

Teorema: (Lema de Clases Monótonas). | $S \overset{ext}{\rightsquigarrow} \sigma(S)$.

Sea S una familia de subconjuntos de X, que es cerrada bajo complementos e intersecciones. Sea $\mathcal{M}$ una clase monótona tal que $\underline{S \subseteq \mathcal{M}}$. Entonces $\underline{\sigma(S) \subseteq \mathcal{M}}$. $S \overset{ext}{\rightsquigarrow} \mathcal{M}$

Prueba: Basta mostrar que $\mathcal{M}$ es σ-álgebra. i) $X \in \mathcal{M}$.

ii) $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \{A_n^c\}_{n\geq 1} \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} A_n^c \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n = \left(\bigcap_{n\geq 1} A_n^c\right)^c \in \mathcal{M}$

iii) De la propiedad 1, $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$.

$\therefore$ $\mathcal{M}$ es σ-álg. y $S \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(S) \subseteq \mathcal{M}$. $\blacksquare$

Def: Una familia de subconjuntos de X, $\mathcal{D}$ se llama un <u>sistema de Dynkin</u> (ó <u>λ-sistema</u> ó <u>d-sistema</u>) si

i) $X \in \mathcal{D}$

ii) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$

unión disjunta

iii) $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{D}$ disjuntos a pares $\Rightarrow \dot{\bigcup_{n\geq 1}} A_n \in \mathcal{D}$.

Obs! $\mathcal{F}$ es σ-álgebra $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ es λ-sistema.

$\not\Leftarrow$

Prop-Def: $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, existe un λ-sistema $\delta(S)$ tal que $S \subseteq \delta(S)$ y si $\mathcal{D}$ es otro λ-sistema que contiene a S $\Rightarrow$ $\delta(S) \subseteq \mathcal{D}$.

$\delta(S)$ es el λ-sistema generado por S.

Def: Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X se llama un **π-sistema** si

i) $\mathcal{F} \neq \phi$

ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

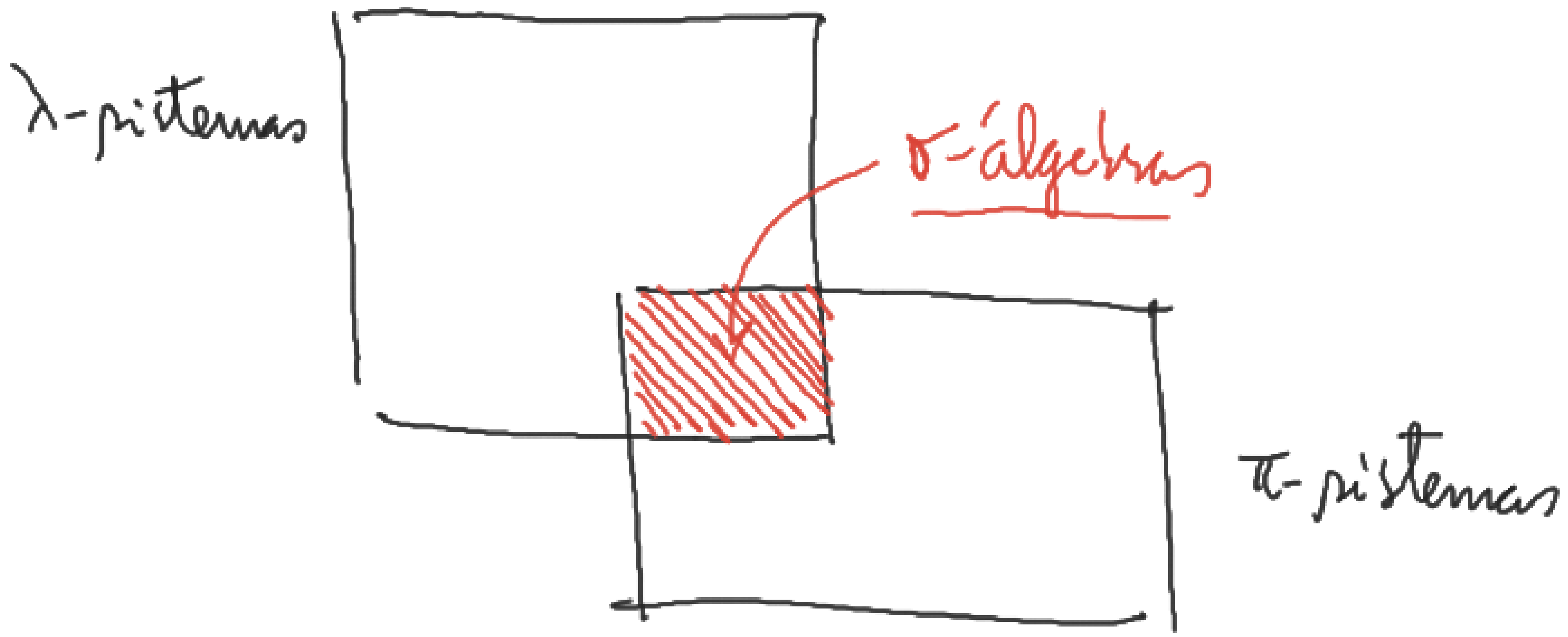
Prop-Def: Sea $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Existe un π-sistema $\pi(S)$ tal que $S \subseteq \pi(S)$ y si $\mathcal{F}$ es otro π-sistema conteniendo a $S \Rightarrow \pi(S) \subseteq \mathcal{F}$.

$\pi(S)$ es el **π-sistema generado** por S.

Obs! 1) Un λ-sistema $\mathcal{F}$ es σ-álgebra $\Leftrightarrow$ es cerrado bajo intersecciones finitas.

2) σ-alg $\Rightarrow \begin{cases} \lambda\text{-sistema} \\ \pi\text{-sistema} \end{cases}$

λ-sistema + π-sistema $\Rightarrow$ σ-álg.



<u>Teorema</u>: (π-λ Theorem)

Si $\mathcal{P}$ es un π-sistema en X y $\mathcal{D}$ es un λ-sistema con $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{D}$.

$\square$