UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

VERITAS • LIBERTAS • JVSTITIA

FACULTAD de CIENCIAS ECONÓMICAS

Repaso de probabilidad y estadística I

Alan Reyes-Figueroa

Elements of Machine Learning (Aula 03) 12.enero.2023

Ejemplo

1. Calcula la probabilidad que en un grupo de n personas hay al menos una que cumple años el 12 de enero.

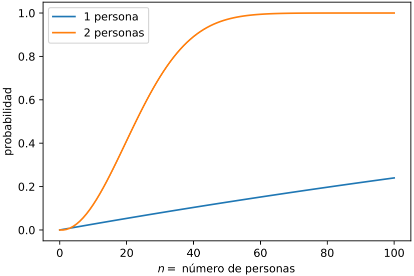
2. Calcula la probabilidad que en un grupo de n personas hay al menos dos personas que cumplen en el mismo día.

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Ejemplo

n	probabilidad 1 persona 12.enero	probabilidad 2 personas mismo día
0	0	0
1	0.002739	0
5	0.013623	0.027135
10	0.027061	0.116948
20	0.053391	0.411438
30	0.079008	0.706316
40	0.103932	0.891231
50	0.128181	0.970373
60	0.151774	0.994122
70	0.174729	0.999159

Ejemplo



Solución:

$$\mathbb{P}(\text{alguien cumple años 12.enero}) = 1 - \Big(\frac{364}{365}\Big)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

$$\mathbb{P}(\text{dos personas cumplen años mismo día}) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-(n-1)}{365}, \quad n \geq 2.$$

Caso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Distribución uniforme:
Experimento: Elegir un número al azar de $[0, 2]$.

Caso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Distribución uniforme:
Experimento: Elegir un número al azar de $[0, 2]$.
Tenemos $\Omega = [0, 2]$.
$A = [0, 1] \qquad \mathbb{P}(A) = 1/2.$

Caso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Distribución uniforme:
Experimento: Elegir un número al azar de $[0, 2]$.
Tenemos $\Omega = [0, 2]$.
$A = [0, 1] \qquad \mathbb{P}(A) = 1/2.$
$B = [0.4, 1] \qquad \mathbb{P}(B) = 0.6/2 = 0.3.$

Distribución uniforme:
Experimento: Elegir un número al azar de $[0, 2]$.
Tenemos $\Omega = [0, 2]$.
$A = [0, 1] \qquad \mathbb{P}(A) = 1/2.$
$B = [0.4, 1] \qquad \mathbb{P}(B) = 0.6/2 = 0.3.$

En general, para $A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\int_A dx}{\int_\Omega dx}.$$

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Caso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Distribución uniforme:
Experimento: Elegir un número al azar de $[0,2]$.
Tenemos $\Omega = [0,2]$.
$A = [0,1] \qquad \mathbb{P}(A) = 1/2.$
$B = [0.4,1] \qquad \mathbb{P}(B) = 0.6/2 = 0.3.$

En general, para $A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\int_A dx}{\int_\Omega dx}.$$

¿Se puede calcular $\mathbb{P}$ siempre? No.

- Se requiere que $\int_\Omega dx < \infty$.
- Tenemos que limitarnos a conjuntos donde $\int_A dx$ existe.

Ejemplos

1. Se elige al azar un punto en un cuadrado con lado 4 cm. Calcula la probabilidad de que esté a una distancia menor de uno cm. de alguna de las esquinas.

Ejemplos

1. Se elige al azar un punto en un cuadrado con lado 4 cm. Calcula la probabilidad de que esté a una distancia menor de uno cm. de alguna de las esquinas.

2. Dos estudiantes quieren ir a comer juntos. Se citan entre las 7 y las 8 de la noche y están dispuestos a esperar a lo más 10 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que puedan ir a comer si sus horas de llegada son uniformes entre las 7 y las 8?

Interpretación de $\mathbb{P}$

- A partir del experimento elegir algo al azar.

Interpretación de $\mathbb{P}$

- A partir del experimento elegir algo al azar.
- Probabilidades como límite de frecuencias relativas de ocurrencia (**enfoque frequentista**)

Interpretación de $\mathbb{P}$

- A partir del experimento elegir algo al azar.
- Probabilidades como límite de frecuencias relativas de ocurrencia (**enfoque frequentista**)
- Por medio de apuestas: probabilidades como creencias (base del **enfoque bayesiano**)

Interpretación de $\mathbb{P}$

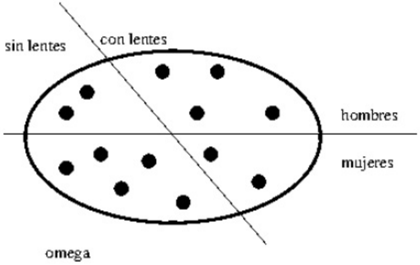
- A partir del experimento elegir algo al azar.
- Probabilidades como límite de frecuencias relativas de ocurrencia (**enfoque frequentista**)
- Por medio de apuestas: probabilidades como creencias (base del **enfoque bayesiano**)
- Sistema axiomático (Kolmogorov, 1933).

Interpretación de $\mathbb{P}$

- A partir del experimento elegir algo al azar.
- Probabilidades como límite de frecuencias relativas de ocurrencia (**enfoque frequentista**)
- Por medio de apuestas: probabilidades como creencias (base del **enfoque bayesiano**)
- Sistema axiomático (Kolmogorov, 1933).

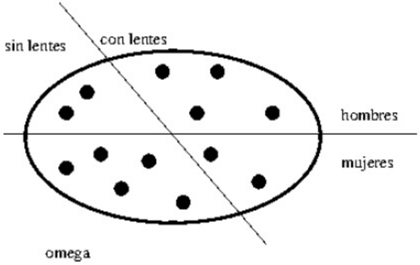
En áreas como computación e inteligencia artificial, se han elaborado otros sistemas axiomáticos (fuzzy sets, Dempster-Shaffer, . . .)

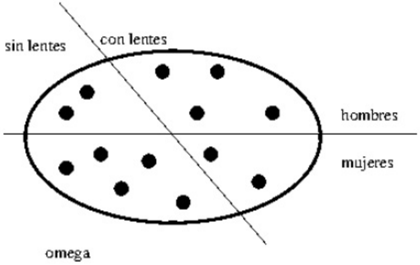
Conceptos derivados: Probabilidad condicional



Conceptos derivados: Probabilidad condicional

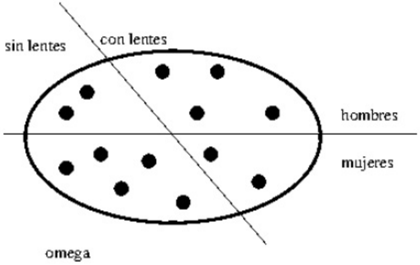
Se elige una persona al azar.
¿Cuál es la probabilidad que sea una persona con lentes? $\frac{6}{13}$.





Se elige una persona al azar.
¿Cuál es la probabilidad que sea una persona con lentes? $\frac{6}{13}$.

Alguien dice que es un hombre: ¿cuál es ahora la probabilidad que sea una persona con lentes? $\frac{2}{3}$.



Se elige una persona al azar.
¿Cuál es la probabilidad que sea una persona con lentes? $\frac{6}{13}$.

Alguien dice que es un hombre: ¿cuál es ahora la probabilidad que sea una persona con lentes? $\frac{2}{3}$.

Definición

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces la probabilidad condicional de A dado B se define como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Probabilidad condicional

Observaciones:

- $\mathbb{P}(\cdot|B)$ define una nueva función de probabilidad sobre el espacio $\Omega' = B$.

Probabilidad condicional

Observaciones:

- $\mathbb{P}(\cdot|B)$ define una nueva función de probabilidad sobre el espacio $\Omega' = B$.
- En consecuencia, $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Probabilidad condicional

Observaciones:

- $\mathbb{P}(\cdot|B)$ define una nueva función de probabilidad sobre el espacio $\Omega' = B$.

- En consecuencia, $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.

- Observar que no hay ninguna relación directa entre $\mathbb{P}(A|B)$ y $\mathbb{P}(A|B^c)$.

Observaciones:

- $\mathbb{P}(\cdot|B)$ define una nueva función de probabilidad sobre el espacio $\Omega' = B$.

- En consecuencia, $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.

- Observar que no hay ninguna relación directa entre $\mathbb{P}(A|B)$ y $\mathbb{P}(A|B^c)$.

- Siempre podemos escribir $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)$.

Observaciones:

- $\mathbb{P}(\cdot|B)$ define una nueva función de probabilidad sobre el espacio $\Omega' = B$.
- En consecuencia, $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.
- Observar que no hay ninguna relación directa entre $\mathbb{P}(A|B)$ y $\mathbb{P}(A|B^c)$.
- Siempre podemos escribir $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)$.
  (Esto no requiere el supuesto que $\mathbb{P}(B) > 0$) ¿Por qué?

Ejemplo

Experimento: Elegir al azar dos letras consecutivas de alguna palabra con alfabeto $T = \{a, b, c, d, e\}$.

Suponemos la siguiente distribución:

	a	b	c	d	e
a	0.10	0.05	0.10	0.04	0
b	0.01	0.01	0.10	0.01	0.04
c	0.02	0.05	0.05	0.10	0.01
d	0.04	0.10	0.01	0.01	0.02
e	0	0.10	0	0.01	0.02

¿Cuál es la probabilidad que la segunda letra seleccionada sea la "b" dado que sabemos que la anterior fue una vocal?

Ejemplo

Solución: Queremos calcular $\mathbb{P}(B|A)$, donde $B = \{\textit{primera letra es vocal}\}$ y $A = \{\textit{ letra es b}\}$.

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Ejemplo

Solución: Queremos calcular $\mathbb{P}(B|A)$, donde $B = \{\textit{primera letra es vocal}\}$ y $A = \{\textit{ letra es b}\}$.

Entonces, de la definición de probabilidad condicional, tenemos

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Ejemplo

Solución: Queremos calcular $\mathbb{P}(B|A)$, donde $B = \{primera\ letra\ es\ vocal\}$ y $A = \{\ letra\ es\ b\}$.

Entonces, de la definición de probabilidad condicional, tenemos

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Pero, $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(\{ab, eb\}) = \mathbb{P}(ab) + \mathbb{P}(eb) = 0.05 + 0.10 = 0.15$,

Ejemplo

Solución: Queremos calcular $\mathbb{P}(B|A)$, donde $B = \{primera\ letra\ es\ vocal\}$ y $A = \{\ letra\ es\ b\}$.

Entonces, de la definición de probabilidad condicional, tenemos

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Pero, $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(\{ab, eb\}) = \mathbb{P}(ab) + \mathbb{P}(eb) = 0.05 + 0.10 = 0.15$, y $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{ab, bb, cb, db, eb\}) = 0.05 + 0.01 + 0.05 + 0.10 + 0.10 = 0.31$.

Ejemplo

Solución: Queremos calcular $\mathbb{P}(B|A)$, donde $B = \{\textit{primera letra es vocal}\}$ y $A = \{\ \textit{letra es b}\}$.

Entonces, de la definición de probabilidad condicional, tenemos

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Pero, $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(\{ab, eb\}) = \mathbb{P}(ab) + \mathbb{P}(eb) = 0.05 + 0.10 = 0.15$, y $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{ab, bb, cb, db, eb\}) = 0.05 + 0.01 + 0.05 + 0.10 + 0.10 = 0.31$.

De allí que

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.15}{0.31} = 0.48387$$

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN