UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN
VERITAS • LIBERTAS • JVSTITIA

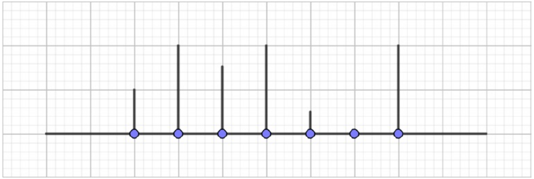
FACULTAD de CIENCIAS ECONÓMICAS

Estadísticos

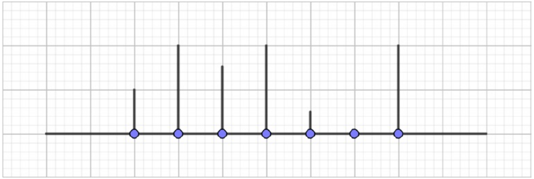
Alan Reyes-Figueroa

Elements of Machine Learning (Aula 05) 24.enero.2023

Estadísticos

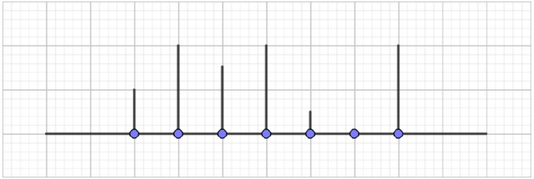


UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN



Resúmenes de distribuciones:

Estadísticos



Resúmenes de distribuciones:

- localización (promedio, rango, soporte o dominio);
- variabilidad (desviación estándar, varianza, entropía);
- forma de la distribución (kurtosis, histogramas, diagramas de probabilidad PP o QQ);
- simetría (sesgo, coeficiente de asimetría);
- En el caso de más variables: nos interesa algo que mida el grado de relación entre ellas (covarianza, correlación, información mutua).

Estadísticos

Valores numéricos (o vectoriales) en términos de la variable aleatoria.
Resumen de una distribución.

Estadísticos

Valores numéricos (o vectoriales) en términos de la variable aleatoria.
Resumen de una distribución.
Existen estadísticos con varios propósitos: localización, variabilidad, ...

Estadísticos

Valores numéricos (o vectoriales) en términos de la variable aleatoria.
Resumen de una distribución.
Existen estadísticos con varios propósitos: localización, variabilidad, ...

Promedio: El **promedio** o **esperanza** (*expectativa*, *valor esperado*) de una variable aleatoria discreta X, $\mathbb{E}(X)$, se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x} x\,\mathbb{P}(X = x).$$

en caso de que la suma exista.

Estadísticos

Valores numéricos (o vectoriales) en términos de la variable aleatoria.
Resumen de una distribución.
Existen estadísticos con varios propósitos: localización, variabilidad, ...

<u>Promedio</u>: El **promedio** o **esperanza** (*expectativa*, *valor esperado*) de una variable aleatoria discreta X, $\mathbb{E}(X)$, se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x).$$

en caso de que la suma exista.

Comentario: En la vida cotidiana usamos como promedio de $\{x_i\}_{i=1}^n$ a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

En general,

Definición

*Dada una función $g(\cdot)$, se define la **esperanza** $\mathbb{E}(g(X))$ como:*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x} g(x)\,\mathbb{P}(X = x),$$

en caso de que la suma exista.

En general,

Definición

*Dada una función $g(\cdot)$, se define la **esperanza** $\mathbb{E}(g(X))$ como:*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x)\, \mathbb{P}(X = x),$$

en caso de que la suma exista.

Proposición

1. *(Linealidad)* $\mathbb{E}(aX_1 + bX_2) = a\mathbb{E}(X_1) + b\mathbb{E}(X_2)$.

En general,

Definición

*Dada una función $g(\cdot)$, se define la **esperanza** $\mathbb{E}(g(X))$ como:*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x)\,\mathbb{P}(X = x),$$

en caso de que la suma exista.

Proposición

1. *(Linealidad)* $\mathbb{E}(aX_1 + bX_2) = a\mathbb{E}(X_1) + b\mathbb{E}(X_2)$.
2. *(Independencia) Si X_1, X_2 son independientes, entonces* $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)$.

Esperanza

Prueba:

UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Esperanza

Prueba:

Esperanza

Prueba:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX_1 + bX_2) &= \sum_{\omega}(aX_1 + bX_2)(\omega)\mathbb{P}(\omega) = a\sum_{\omega} X_1(\omega)\mathbb{P}(\omega) + b\sum_{\omega} X_2(\omega)\mathbb{P}(\omega)\\ &= a\mathbb{E}(X_1) + b\mathbb{E}(X_2).\end{aligned}$$

Esperanza

Prueba:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX_1 + bX_2) &= \sum_\omega (aX_1 + bX_2)(\omega)\mathbb{P}(\omega) = a\sum_\omega X_1(\omega)\mathbb{P}(\omega) + b\sum_\omega X_2(\omega)\mathbb{P}(\omega)\\ &= a\mathbb{E}(X_1) + b\mathbb{E}(X_2).\end{aligned}$$

Esperanza

Prueba:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX_1 + bX_2) &= \sum_\omega (aX_1 + bX_2)(\omega)\mathbb{P}(\omega) = a\sum_\omega X_1(\omega)\mathbb{P}(\omega) + b\sum_\omega X_2(\omega)\mathbb{P}(\omega) \\ &= a\mathbb{E}(X_1) + b\mathbb{E}(X_2).\end{aligned}$$

Como $X_1 \perp X_2$, entonces $\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\,\mathbb{P}(X_2 = x_2)$. Luego

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1X_2) &= \sum_{(x_1,x_2)} (X_1X_2)(\omega)\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &= \sum_{(x_1,x_2)} X_1(x_1)X_2(x_2)\mathbb{P}(X_1 = x_2)\,\mathbb{P}(X_2 = x_2) \\ &= \Big(\sum_{x_1} X_1(x_1)\,\mathbb{P}(x_1)\Big)\Big(\sum_{x_2} X_2(x_2)\,\mathbb{P}(x_2)\Big) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2).\end{aligned}$$

Ejemplo

a) ¿Cuál es la esperanza de una v.a. constante?

Ejemplo

a) ¿Cuál es la esperanza de una v.a. constante?

b) Calcular $\mathbb{E}(3X + 2\mathbb{E}X)$.

Ejemplo

a) ¿Cuál es la esperanza de una v.a. constante?

b) Calcular $\mathbb{E}(3X + 2\mathbb{E}X)$.

<u>Solución</u>:

a) $\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x) = c\,\mathbb{P}(X = c) = c(1) = c$.

Ejemplo

a) ¿Cuál es la esperanza de una v.a. constante?

b) Calcular $\mathbb{E}(3X + 2\mathbb{E}X)$.

<u>Solución</u>:

a) $\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x) = c\,\mathbb{P}(X = c) = c(1) = c$.

b) $\mathbb{E}(3X + 2\mathbb{E}X)$

Ejemplo

a) ¿Cuál es la esperanza de una v.a. constante?

b) Calcular $\mathbb{E}(3X + 2\mathbb{E}X)$.

<u>Solución</u>:

a) $\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x) = c\,\mathbb{P}(X = c) = c(1) = c$.

b) $\mathbb{E}(3X + 2\mathbb{E}X) = 3\mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(\mathbb{E}X)$

Ejemplo

a) ¿Cuál es la esperanza de una v.a. constante?

b) Calcular $\mathbb{E}(3X + 2\mathbb{E}X)$.

Solución:

a) $\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x) = c\,\mathbb{P}(X = c) = c(1) = c$.

b) $\mathbb{E}(3X + 2\mathbb{E}X) = 3\mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(\mathbb{E}X) = 3\mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(X) = 5\mathbb{E}(X)$.

Media, mediana y moda

<u>Media</u>: Sea una variable aleatoria discreta X con probabilidad $\mathbb{P}$. La **esperanza** (*expectativa*, *valor esperado*) de X se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x} x\,\mathbb{P}(X = x).$$

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Media, mediana y moda

Media: Sea una variable aleatoria discreta X con probabilidad $\mathbb{P}$. La **esperanza** (*expectativa*, *valor esperado*) de X se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x).$$

Mediana: Una **mediana** de X es cualquier valor $t \in \mathbb{R}$ que satisface $F_X(t) = \frac{1}{2}$. Dicho de otra manera, son las preimágenes $F_X^{-1}(1/2)$.

Media, mediana y moda

<u>Media</u>: Sea una variable aleatoria discreta X con probabilidad $\mathbb{P}$. La **esperanza** (*expectativa*, *valor esperado*) de X se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x} x\, \mathbb{P}(X = x).$$

<u>Mediana</u>: Una **mediana** de X es cualquier valor $t \in \mathbb{R}$ que satisface $F_X(t) = \frac{1}{2}$. Dicho de otra manera, son las preimágenes $F_X^{-1}(1/2)$.

Obs! F_X en general no es invertible!!

Media, mediana y moda

Media: Sea una variable aleatoria discreta X con probabilidad $\mathbb{P}$. La **esperanza** (*expectativa*, *valor esperado*) de X se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x).$$

Mediana: Una **mediana** de X es cualquier valor $t \in \mathbb{R}$ que satisface $F_X(t) = \frac{1}{2}$. Dicho de otra manera, son las preimágenes $F_X^{-1}(1/2)$.

Obs! F_X en general no es invertible!! Denotamos $Q_X : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ a la *función de cuantiles*, la inversa generalizada de F_X:

$$Q_X(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq F_X(x)\}, \quad \text{para } 0 < \alpha < 1.$$

Media, mediana y moda

<u>Media</u>: Sea una variable aleatoria discreta X con probabilidad $\mathbb{P}$. La **esperanza** (*expectativa*, *valor esperado*) de X se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x).$$

<u>Mediana</u>: Una **mediana** de X es cualquier valor $t \in \mathbb{R}$ que satisface $F_X(t) = \frac{1}{2}$. Dicho de otra manera, son las preimágenes $F_X^{-1}(1/2)$.

Obs! F_X en general no es invertible!! Denotamos $Q_X : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ a la *función de cuantiles*, la inversa generalizada de F_X:

$$Q_X(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq F_X(x)\}, \quad \text{para } 0 < \alpha < 1.$$

<u>Moda</u>: Una **moda** de la distribución de X es cualquier máximo local de f_X. (unimodal, bimodal, ...)

Esperanza

El valor esperado $\mathbb{E}(X)$ tiene otra propiedad importante:

Esperanza

El valor esperado $\mathbb{E}(X)$ tiene otra propiedad importante:
es el valor constante que minimiza la suma de errores cuadrados. Dado $\{x_i\}_{i=1}^n$ la imagen de la v.a. X, sea $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Queremos

$$minimizar\ J(c) = \ minimizar\ \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - c)^2.$$

Esperanza

El valor esperado $\mathbb{E}(X)$ tiene otra propiedad importante:
es el valor constante que minimiza la suma de errores cuadrados. Dado $\{x_i\}_{i=1}^n$ la imagen de la v.a. X, sea $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Queremos

$$minimizar\, J(c) = \; minimizar\, \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - c)^2.$$

<u>Solución</u>: Derivando con respecto de c,

El valor esperado $\mathbb{E}(X)$ tiene otra propiedad importante:
es el valor constante que minimiza la suma de errores cuadrados. Dado $\{x_i\}_{i=1}^n$ la imagen de la v.a. X, sea $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Queremos

$$minimizar\ J(c) = \ minimizar\ \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - c)^2.$$

Solución: Derivando con respecto de c, obtenemos
$J'(c) = 2\sum_{i=1}^n p_i(x_i - c) = 0$.

Esperanza

El valor esperado $\mathbb{E}(X)$ tiene otra propiedad importante:
es el valor constante que minimiza la suma de errores cuadrados. Dado $\{x_i\}_{i=1}^n$ la imagen de la v.a. X, sea $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Queremos

$$\textit{minimizar } J(c) = \textit{ minimizar } \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - c)^2.$$

<u>Solución</u>: Derivando con respecto de c, obtenemos
$J'(c) = 2\sum_{i=1}^n p_i(x_i - c) = 0.$
Luego $\sum_{i=1}^n p_i x_i = c\sum_{i=1}^n p_i = c \;\Rightarrow\; c = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}(X).$

Esperanza

El valor esperado $\mathbb{E}(X)$ tiene otra propiedad importante:
es el valor constante que minimiza la suma de errores cuadrados. Dado $\{x_i\}_{i=1}^n$ la imagen de la v.a. X, sea $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Queremos

$$minimizar\ J(c) = \ minimizar\ \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - c)^2.$$

<u>Solución</u>: Derivando con respecto de c, obtenemos
$J'(c) = 2\sum_{i=1}^n p_i(x_i - c) = 0.$
Luego $\sum_{i=1}^n p_i x_i = c\sum_{i=1}^n p_i = c \ \Rightarrow \ c = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}(X).$

- El valor que minimiza $\sum_{i=1}^n p_i|x_i - c|_1$ es: la *mediana* de X.

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Esperanza

El valor esperado $\mathbb{E}(X)$ tiene otra propiedad importante:
es el valor constante que minimiza la suma de errores cuadrados. Dado $\{x_i\}_{i=1}^n$ la imagen de la v.a. X, sea $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Queremos

$$\textit{minimizar}\ J(c) = \ \textit{minimizar} \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - c)^2.$$

<u>Solución</u>: Derivando con respecto de c, obtenemos
$J'(c) = 2\sum_{i=1}^n p_i(x_i - c) = 0$.
Luego $\sum_{i=1}^n p_i x_i = c\sum_{i=1}^n p_i = c \ \Rightarrow\ c = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}(X)$.

- El valor que minimiza $\sum_{i=1}^n p_i|x_i - c|_1$ es: la *mediana* de X.
- El valor que minimiza $\sum_{i=1}^n p_i|x_i - c|_0$ es: la *moda* de X.

Esperanza condicional

Definición

Para la v.a. X y para un evento $A \in \mathcal{F}$, se define el ***promedio condicional*** *(o* ***esperanza condicional****) de X dado A como*

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_x x \, \mathbb{P}(X = x \mid A).$$

Esperanza condicional

Definición

*Para la v.a. X y para un evento $A \in \mathcal{F}$, se define el **promedio condicional** (o **esperanza condicional**) de X dado A como*

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_{x} x \, \mathbb{P}(X = x \mid A).$$

Definición

*Para las v.a. X y Y, se define la **esperanza condicional** de X dado que Y es igual a un valor y, como*

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \sum_{x} x \, \mathbb{P}(X = x \mid Y = y).$$

Esperanza condicional

Definición

*Para la v.a. X y para un evento $A \in \mathcal{F}$, se define el **promedio condicional** (o **esperanza condicional**) de X dado A como*

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x \mid A).$$

Definición

*Para las v.a. X y Y, se define la **esperanza condicional** de X dado que Y es igual a un valor y, como*

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x \mid Y = y).$$

Esperanza condicional

En general, definimos $\mathbb{E}(g(X) \mid Y = y) = \sum_{x} g(x)\, \mathbb{P}(X = x \mid Y = y)$.

Esperanza condicional

En general, definimos $\mathbb{E}(g(X) \mid Y = y) = \sum_x g(x)\, \mathbb{P}(X = x \mid Y = y)$.

Proposición

Sean X, Y, Z v.a., $a, b \in \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. $\mathbb{E}(a \mid Y) = a$.
2. $\mathbb{E}(aX + bZ \mid Y) = a\mathbb{E}(X \mid Y) + b\mathbb{E}(Z \mid Y)$.
3. $\mathbb{E}(X \mid Y) \geq 0$ *si* $X \geq 0$.
4. $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X)$ *si* X, Y *son independientes.*
5. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y)) = \mathbb{E}(X)$.
6. $\mathbb{E}(Xg(Y) \mid Y) = g(Y)\mathbb{E}(X \mid Y)$. *En particular,* $\mathbb{E}(g(Y) \mid Y) = g(Y)$.
7. $\mathbb{E}(X \mid Y, g(Y)) = \mathbb{E}(X \mid Y)$.
8. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y, Z) \mid Y) = \mathbb{E}(X \mid Y)$.

Proposición (Ley de la probabilidad total para esperanzas)

Sean X, Y v.a. discretas, entonces

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{y} \mathbb{E}(X \mid Y = y)\, \mathbb{P}(Y = y).$$

Proposición (Ley de la probabilidad total para esperanzas)

Sean X, Y v.a. discretas, entonces

$$\mathbb{E}(X) = \sum_y \mathbb{E}(X \mid Y = y)\,\mathbb{P}(Y = y).$$

Ejemplo: Alguien anda perdido en la subterranea de Guanajuato. Está en un cruce con 3 opciones. Un camino le lleva a la salida en 10 minutos en promedio, un segundo camino le regresa a su lugar en promedio 15 minutos y un tercer camino le regresa a su lugar en promedio 5 minutos. Siempre elige alguna opción, independiente del pasado. ¿Cuánto va a tardar en promedio para salir?

Esperanza condicional

Solución:

- Opción 1: salida del subterráneo en 10m promedio.
- Opción 2: regresa al mismo lugar en 15m promedio.
- Opción 3: regresa al mismo lugar en 5m promedio.

Esperanza condicional

Solución:

- Opción 1: salida del subterráneo en 10m promedio.
- Opción 2: regresa al mismo lugar en 15m promedio.
- Opción 3: regresa al mismo lugar en 5m promedio.

Definimos $E_i =$ elegir opción i, $i = 1, 2, 3$. T la v.a. $=$ tiempo de salida.

Esperanza condicional

Solución:

- Opción 1: salida del subterráneo en 10m promedio.
- Opción 2: regresa al mismo lugar en 15m promedio.
- Opción 3: regresa al mismo lugar en 5m promedio.

Definimos $E_i =$ elegir opción i, $i = 1, 2, 3$. T la v.a. $=$ tiempo de salida.

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}(T \mid E_i)\,\mathbb{P}(E_i)$$

Esperanza condicional

Solución:

- Opción 1: salida del subterráneo en 10m promedio.
- Opción 2: regresa al mismo lugar en 15m promedio.
- Opción 3: regresa al mismo lugar en 5m promedio.

Definimos $E_i =$ elegir opción i, $i = 1, 2, 3$. T la v.a. $=$ tiempo de salida.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}(T \mid E_i)\,\mathbb{P}(E_i) \\
&= \mathbb{E}(T \mid E_1) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(T \mid E_2) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(T \mid E_3) \cdot \tfrac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Esperanza condicional

Solución:

- Opción 1: salida del subterráneo en 10m promedio.
- Opción 2: regresa al mismo lugar en 15m promedio.
- Opción 3: regresa al mismo lugar en 5m promedio.

Definimos E_i = elegir opción i, $i = 1, 2, 3$. T la v.a. = tiempo de salida.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}(T \mid E_i)\, \mathbb{P}(E_i) \\
&= \mathbb{E}(T \mid E_1) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(T \mid E_2) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(T \mid E_3) \cdot \tfrac{1}{3} \\
&= (10m) \cdot \tfrac{1}{3} + (15m + \mathbb{E}(T)) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(5m + \mathbb{E}(T)) \cdot \tfrac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Solución:

- Opción 1: salida del subterráneo en 10m promedio.
- Opción 2: regresa al mismo lugar en 15m promedio.
- Opción 3: regresa al mismo lugar en 5m promedio.

Definimos $E_i =$ elegir opción i, $i = 1, 2, 3$. T la v.a. $=$ tiempo de salida.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}(T \mid E_i)\,\mathbb{P}(E_i) \\
&= \mathbb{E}(T \mid E_1) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(T \mid E_2) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(T \mid E_3) \cdot \tfrac{1}{3} \\
&= (10m) \cdot \tfrac{1}{3} + (15m + \mathbb{E}(T)) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(5m + \mathbb{E}(T)) \cdot \tfrac{1}{3} \\
&= \tfrac{10}{3}m + \tfrac{15}{3}m + \tfrac{5}{3}m + \tfrac{2}{3}\mathbb{E}(T).
\end{aligned}$$

Esperanza condicional

Solución:

- Opción 1: salida del subterráneo en 10m promedio.
- Opción 2: regresa al mismo lugar en 15m promedio.
- Opción 3: regresa al mismo lugar en 5m promedio.

Definimos $E_i =$ elegir opción i, $i = 1, 2, 3$. T la v.a. $=$ tiempo de salida.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}(T \mid E_i)\,\mathbb{P}(E_i) \\
&= \mathbb{E}(T \mid E_1) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(T \mid E_2) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(T \mid E_3) \cdot \tfrac{1}{3} \\
&= (10m) \cdot \tfrac{1}{3} + (15m + \mathbb{E}(T)) \cdot \tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(5m + \mathbb{E}(T)) \cdot \tfrac{1}{3} \\
&= \tfrac{10}{3}m + \tfrac{15}{3}m + \tfrac{5}{3}m + \tfrac{2}{3}\mathbb{E}(T).
\end{aligned}$$

Luego, $\frac{1}{3}\mathbb{E}(T) = 10m \;\Rightarrow \mathbb{E}(T) = 30m$.

Varianza

Definición

Sea X una v.a. en $\mathbb{R}$. Definimos su ***varianza*** *como:*

$$Var(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}X)^2\big] = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2,$$

en caso de que este valor esperado exista.

Varianza

Definición

*Sea X una v.a. en $\mathbb{R}$. Definimos su **varianza** como:*

$$Var(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}X)^2\big] = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2,$$

en caso de que este valor esperado exista.

Propiedades:

- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(aX) = a^2 Var(X)$.
- Si X_1, X_2 son independientes, entonces

$$Var(aX_2 + bX_2) = a^2 Var(X_1) + b^2 Var(X_2).$$

Varianza

Prueba:

Varianza

Prueba:

-
$$Var(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)^2\big)$$

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Varianza

Prueba:

- $$Var(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)^2\big) = \sum_x (\cdot)^2 \mathbb{P}(\cdot)$$

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Varianza

<u>Prueba</u>:

- $$Var(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)^2\big) = \sum_x (\cdot)^2 \mathbb{P}(\cdot) \geq 0,$$

  por ser suma de términos no-negativos.

Varianza

Prueba:

- $$Var(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)^2\big) = \sum_x (\cdot)^2 \mathbb{P}(\cdot) \geq 0,$$

  por ser suma de términos no-negativos.
- $$Var(aX) \;=\; \mathbb{E}\big((aX - \mathbb{E}(aX)^2\big) = \mathbb{E}\big((aX - a\mathbb{E}X)^2\big)$$

Prueba:

- $$Var(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)^2\big) = \sum_x (\cdot)^2 \mathbb{P}(\cdot) \geq 0,$$

  por ser suma de términos no-negativos.

- $$\begin{aligned} Var(aX) &= \mathbb{E}\big((aX - \mathbb{E}(aX)^2\big) = \mathbb{E}\big((aX - a\mathbb{E}X)^2\big) \\ &= \mathbb{E}\big(a^2(X - \mathbb{E}X)^2\big) = a^2\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)^2\big) \\ &= a^2 Var(X). \end{aligned}$$

Varianza

Prueba:

Varianza

<u>Prueba</u>: Suponga que X_1, X_2 son independientes. Entonces, $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)$. Luego

$$\begin{aligned}
Var(aX_1 + bX_2) &= \mathbb{E}\big([(aX_1 + bX_2) - \mathbb{E}(aX_1 + bX_2)]^2\big) \\
&= \mathbb{E}\big([a(X_1 - \mathbb{E}X_1) + b(X_2 - \mathbb{E}X_2)]^2\big) \\
&= \mathbb{E}\big(a^2(X_1 - \mathbb{E}X_1)^2 + b^2(X_2 - \mathbb{E}X_2)^2 + 2ab(X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2)\big) \\
&= a^2\mathbb{E}\big((X_1 - \mathbb{E}X_1)^2\big) + b^2\mathbb{E}\big((X_2 - \mathbb{E}X_2)^2\big) + 2ab\mathbb{E}\big((X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2)\big) \\
&= a^2Var(X_1) + b^2Var(X_2) + 2ab\mathbb{E}\big(X_1X_2 - X_1\mathbb{E}X_2 - (X_2\mathbb{E}X_1 + (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2)\big) \\
&= a^2Var(X_1) + b^2Var(X_2) + 2ab\big(\mathbb{E}(X_1X_2) - (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2) - (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2) + (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2)\big) \\
&= a^2Var(X_1) + b^2Var(X_2) + 2ab\big(\mathbb{E}(X_1X_2) - (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2)\big) = a^2Var(X_1) + b^2Var(X_2).
\end{aligned}$$

Definición

Dada dos variables aleatorias X_1, X_2 (definidas sobre el mismo espacio). Definimos su ***covarianza*** *como:*

$$Cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}\Big[(X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2)\Big],$$

en caso de que este valor esperado exista.

Covarianza

Definición

*Dada dos variables aleatorias X_1, X_2 (definidas sobre el mismo espacio). Definimos su **covarianza** como:*

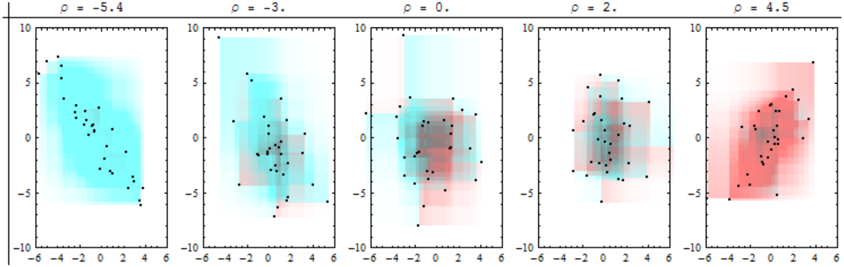
$$Cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}\big[(X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2)\big],$$

en caso de que este valor esperado exista.

Propiedades:

- $Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_1)$.
- $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$.
- $Cov(aX, X) = aVar(X)$.
- Si X_1, X_2 son independientes, entonces $Cov(X_1, X_2) = 0$.

Covarianza



Definición

Dada dos variables aleatorias X, Y, definimos su ***correlación*** *(o* ***coeficiente de correlación****) como:*

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X)\, Var(Y)}}.$$

Definición

*Dada dos variables aleatorias X, Y, definimos su **correlación** (o **coeficiente de correlación**) como:*

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}}.$$

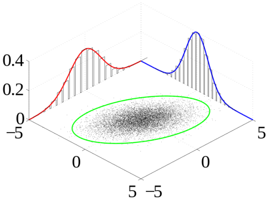
Propiedades:

- $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$.
- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
- $\rho(aX, bY) = \rho(X, Y)$.
- $\rho(aX, X) = sign(a)$.
- Si X, Y son independientes, entonces $\rho(X, Y) = 0$.

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Correlación

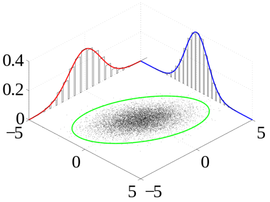
Por ejemplo, para el caso de dos v.a. normales X y Y:



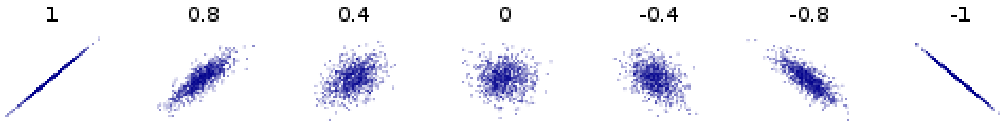
tenemos

Correlación

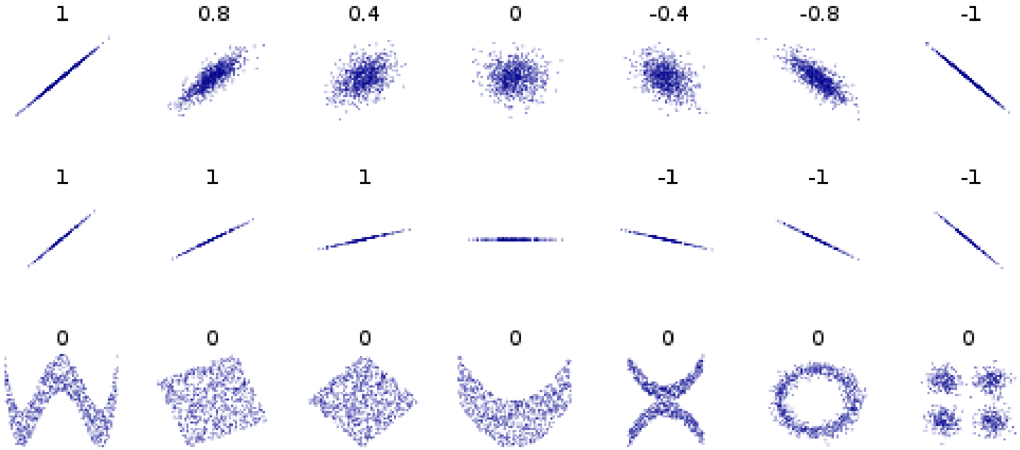
Por ejemplo, para el caso de dos v.a. normales X y Y:



tenemos



Correlación



Entropía

Ya vimos que la varianza presenta limitaciones (igual que la covarianza).

Entropía

Ya vimos que la varianza presenta limitaciones (igual que la covarianza).

Punto de partida: medir la sorpresa asociada el evento $X = x$, $I(x)$.

Entropía

Ya vimos que la varianza presenta limitaciones (igual que la covarianza).

Punto de partida: medir la sorpresa asociada el evento $X = x$, $I(x)$. La entropía es el valor esperado de esta sorpresa $\mathbb{E}(I(x))$.

Entropía

Ya vimos que la varianza presenta limitaciones (igual que la covarianza).

Punto de partida: medir la sorpresa asociada el evento $X = x$, $I(x)$. La entropía es el valor esperado de esta sorpresa $\mathbb{E}(I(x))$.
¿Cómo medimos esta sorpresa o incerteza?

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Entropía

Ya vimos que la varianza presenta limitaciones (igual que la covarianza).

Punto de partida: medir la sorpresa asociada el evento $X = x$, $I(x)$. La entropía es el valor esperado de esta sorpresa $\mathbb{E}(I(x))$.
¿Cómo medimos esta sorpresa o incerteza?

- Un evento que ocurre con alta probabilidad no genera sorpresa.
- Un evento que ocurre con baja probabilidad genera mayor sorpresa (más entre menor es $\mathbb{P}$).

Entropía

Ya vimos que la varianza presenta limitaciones (igual que la covarianza).

Punto de partida: medir la sorpresa asociada el evento $X = x$, $I(x)$. La entropía es el valor esperado de esta sorpresa $\mathbb{E}(I(x))$.
¿Cómo medimos esta sorpresa o incerteza?

- Un evento que ocurre con alta probabilidad no genera sorpresa.
- Un evento que ocurre con baja probabilidad genera mayor sorpresa (más entre menor es $\mathbb{P}$).

¿Cómo definir $I(x)$? Tenemos varias alternativas simples

$$I(x) = \frac{1}{\mathbb{P}(X = x)}, \qquad I(x) = 1 - \mathbb{P}(X = x), \qquad I(x) = -\log \mathbb{P}(X = x).$$

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Definición

Sea X una v.a. discreta. Definimos su ***entropía de Shannon*** *como:*

$$H(X) = -\sum_{x} \mathbb{P}(X = x) \log \mathbb{P}(X = x).$$

Entropía

Definición

Sea X una v.a. discreta. Definimos su ***entropía de Shannon*** *como:*

$$H(X) = -\sum_{x} \mathbb{P}(X = x) \log \mathbb{P}(X = x).$$

Comentario: Shannon definió la entropía en un contexto de teoría de la información (bits), usa $\log_2$.

Definición

*Sea X una v.a. discreta. Definimos su **entropía de Shannon** como:*

$$H(X) = -\sum_{x} \mathbb{P}(X = x)\, \log \mathbb{P}(X = x).$$

Comentario: Shannon definió la entropía en un contexto de teoría de la información (bits), usa $\log_2$. Si $p = 0$, usualmente se define $p \log p = 0$.

Definición

Sea X una v.a. discreta. Definimos su ***entropía de Shannon*** *como:*

$$H(X) = -\sum_{x} \mathbb{P}(X = x) \log \mathbb{P}(X = x).$$

Comentario: Shannon definió la entropía en un contexto de teoría de la información (bits), usa $\log_2$. Si $p = 0$, usualmente se define $p \log p = 0$.

Definición

Sea X una v.a. discreta. Definimos su ***entropía de Gini*** *o* ***coeficiente de Gini*** *por:*

$$G(X) = \sum_{x} \mathbb{P}(X = x) \left(1 - \mathbb{P}(X = x)\right) = 1 - \sum_{x} \mathbb{P}(X = x)^2.$$

Ejercicios

1. Dibuja dos distribuciones o variables aleatorias (discretas) distintas, con mismo promedio y entropía, pero varianza diferentes.

2. Toma una v.a. $X \in \{0, 1\}$. Calcular la varianza y la entropía de Shannnon y de Gini en función de $p = \mathbb{P}(X = 1)$.

   Compara la gráficas de $H(X)$ y $2G(X)$.

3. ¿Cuáles son los valores mínimo y máximo para $H(X)$ y $G(X)$?

Entropía condicional

Definición

*Sean X, Y dos variables aleatorias, la **entropía condicional** de X dado Y es*

$$H_Y(X) = \mathbb{E}H(X \mid Y) = -\sum_y \Big(\sum_x \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) \log \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) \Big) \mathbb{P}(Y = y).$$

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN

Entropía condicional

Definición

*Sean X, Y dos variables aleatorias, la **entropía condicional** de X dado Y es*

$$H_Y(X) = \mathbb{E}H(X \mid Y) = -\sum_y \Big(\sum_x \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) \log \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) \Big) \mathbb{P}(Y = y).$$

Obs. No es simétrica: $H_Y(X) \neq H_X(Y)$.

Entropía condicional

Definición

Sean X, Y dos variables aleatorias, la ***entropía condicional*** *de X dado Y es*

$$H_Y(X) = \mathbb{E}H(X \mid Y) = -\sum_y \Big(\sum_x \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) \log \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) \Big) \mathbb{P}(Y = y).$$

Obs. No es simétrica: $H_Y(X) \neq H_X(Y)$.

Definición

Sean X, Y dos variables aleatorias, la ***información mutua*** *de X y Y está dada por*

$$I(X, Y) = H(X) - H_Y(X).$$

Entropía condicional

Definición

*Sean X, Y dos variables aleatorias, la **entropía condicional** de X dado Y es*

$$H_Y(X) = \mathbb{E}H(X \mid Y) = -\sum_y \Big(\sum_x \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) \log \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) \Big) \mathbb{P}(Y = y).$$

Obs. No es simétrica: $H_Y(X) \neq H_X(Y)$.

Definición

*Sean X, Y dos variables aleatorias, la **información mutua** de X y Y está dada por*

$$I(X, Y) = H(X) - H_Y(X).$$

Proposición

$I(X, Y) = I(Y, X)$.

Definición

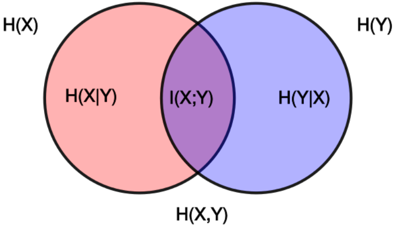
*La **entropía conjunta** de X y Y es*

$$H(X, Y) = -\sum_x \sum_y \mathbb{P}(x, y) \log \mathbb{P}(x, y).$$

Definición

*La **entropía conjunta** de X y Y es*

$$H(X,Y) = -\sum_x \sum_y \mathbb{P}(x,y) \log \mathbb{P}(x,y).$$



Un diagrama de Venn que muestra relaciones aditivas y sustractivas entre varias medidas de información asociadas con las variables X y Y. El área contenida por ambos círculos es la entropía conjunta $H(X,Y)$. El círculo de la izquierda (rojo y violeta) es la entropía individual $H(X)$, siendo el rojo la entropía condicional $H_Y(X)$. El círculo de la derecha (azul y violeta) es $H(Y)$, y el azul es $H_X(Y)$. El violeta es la información mutua $I(X,Y)$.

Definición

*Sean P una distribución discreta de probabilidad, la **entropía** de P es*

$$H(P) = -\sum_{x} P(x)\log P(x).$$

Entropía

Definición

*Sean P una distribución discreta de probabilidad, la **entropía** de P es*

$$H(P) = -\sum_x P(x) \log P(x).$$

Definición

*Sean P, Q dos distribuciones discretas de probabilidad, la **entropía cruzada** (cross-entropy) de P y Q es*

$$H(P,Q) = -\sum_x P(x) \log Q(x).$$

*Además, la **divergencia de Kullback-Leibler** de P y Q se define como*

$$\begin{aligned} D_{KL}(P \parallel Q) &= -\sum_x P(x) \log \frac{Q(x)}{P(x)} \\ &= -\sum P(x) \log Q(x) + \sum P(x) \log P(x) = H(P,Q) - H(P). \end{aligned}$$

UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN