

Conjuntos Lebesgue medibles:

- ① Todo abierto es medible
- ② $|Z|_e = 0 \Rightarrow Z$ es medible
- ③ Uniones enumerables de medibles son medibles.
- ④ Intervalos en \mathbb{R}^n son medibles.
- ⑤ Cerrados son medibles.

Prueba: Sea $F \in \mathbb{R}^n$ un cerrado.

- Si F es compacto. Dado $\varepsilon > 0$ tome G abierto con $F \subseteq G$ y
 $|G| < |F|_e + \varepsilon$. Como $G - F$ es abierto, $G - F = \bigcup_k I_k$ intervalos

no traslapados

$$|G - F|_e = \left| \bigcup_k I_k \right| \leq \sum_k |I_k|$$

Basta mostrar que $\sum_k |I_k| < \varepsilon$. Para ello

como $G = F \cup \bigcup_{k \geq 1} I_k \supseteq F \cup \bigcup_{k=1}^n I_k \Rightarrow |G| \geq \left| F \cup \bigcup_{k=1}^n I_k \right|, \forall n$

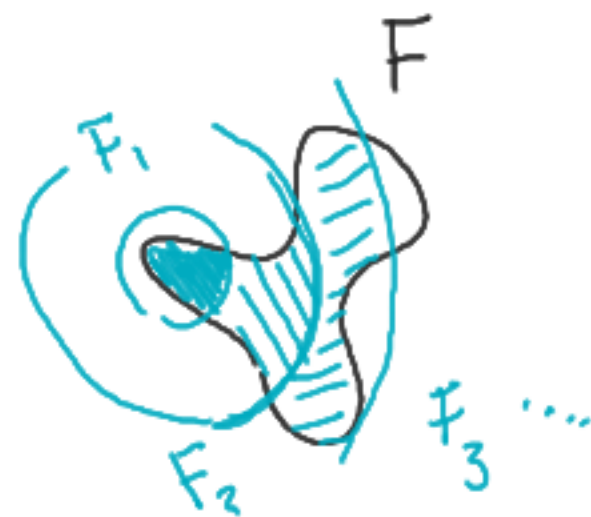
Pero F y los I_k son disjuntos

$$\Rightarrow |G| \geq \left| F \cup \bigcup_{k=1}^n I_k \right|_e = |F|_e + \sum_{k=1}^n |I_k|_e$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n |I_k| = |G| - |F|_e < \varepsilon, \text{ lo que prueba } F \text{ medible.}$$

• Para el caso general, escribimos $F = \bigcup_{k \geq 1} F_k$, donde $F_k = \overline{D_k(0)} \cap F$.

$\Rightarrow F$ es medible (por ser unión enumerable de medibles). \square



⑥ Si E es medible $\Rightarrow E^c = \mathbb{R}^n - E$ es medible.

Prueba: Sea E medible. Para cada $k=1,2,3,\dots$ tomamos G_k abiertos

tal que $E \subseteq G_k$ y $|G_k - E| < 1/k$.

Tomemos $H = \bigcup_{k \geq 1} G_k^c$. H es numerable (es unión enumerable de cerrados)

$$\text{y } E \subseteq G_k, \forall k \Rightarrow G_k^c \subseteq E^c, \forall k \Rightarrow H = \bigcup_{k \geq 1} G_k^c \subseteq E^c.$$

$$\text{Escribimos } E^c = H \cup (E^c - H) = H \cup Z \quad (Z = E^c - H).$$

$$\text{Observe que } Z = E^c - \bigcup_{k \geq 1} G_k^c \subseteq E^c - G_k^c = E^c \cap G_k = G_k \cap E^c = G_k - E, \quad \forall k$$

$$\text{y } |Z|_e \leq |G_k - E| < \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow |Z|_e = 0$$

$$\Rightarrow Z \text{ es } \underline{\text{numerable}}. \quad \therefore E^c \text{ es medible. } \square$$

⑦ Intersección enumerable de medibles es medible.

$$\text{Prueba: } E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \text{ medibles, } \forall k \Rightarrow E_k^c \text{ medible, } \forall k.$$

$$\text{y } \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c \text{ es medible } \Rightarrow \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c \right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = E \text{ es medible. } \square$$

⑧. E_1, E_2 medibles $\Rightarrow E_1 - E_2$ es medible y $|E_1 - E_2| = |E_1| - |E_2|$.

Def. σ -álgebra en U es una colección \mathcal{F} de subconjuntos en U con las propiedades:

i) $E \in \mathcal{F} \Rightarrow E^c \in \mathcal{F}$.

ii) $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F}$.

$\left| \{E_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F} \right.$

De las propiedades ① a ⑦ tenemos

Teorema: La colección de conjuntos Lebesgue-medibles en \mathbb{R}^n es una σ -álgebra.

Prop: $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ no numerables. Entonces $\limsup_k E_k$ y $\liminf_k E_k$ son numerables.

$$\limsup_k E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} E_k, \quad \liminf_k E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} E_k. \quad \square$$

Dada \mathcal{C} una colección de subconjuntos en U , consideramos la familia de todas las σ -álgebras que contienen a \mathcal{C} :

$$\Phi = \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F} \}.$$

Definimos $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \Phi = \bigcap_{\mathcal{F} \in \Phi} \mathcal{F}$. Se puede mostrar que $\sigma(\mathcal{C})$ es una σ -álgebra y $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.

$\sigma(\mathcal{C})$ es la menor σ -álgebra conteniendo a \mathcal{C} .

$$\mathcal{C} = \{ \text{abierto en } \mathbb{R}^n \}$$

Def. La menor σ -álgebra que contiene a todos los abiertos de \mathbb{R}^n se llama la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n ,

Notación: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se llaman borelianos.

Ejemplos: Todo abierto es boreliano. Todo cerrado es boreliano.

$\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ Tipo G_δ son borelianos

$G_{\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\sigma}, \dots$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ Tipo F_σ son borelianos

$F_\sigma, F_{\sigma\delta}, \dots$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \text{medurables.}$



$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ colección suficientemente grande

"vamos a poder medir" cualquier boreliano

Teorema: Todo boreliano es medurable.

Prueba: Sea \mathcal{M} la colección de los conjuntos Lebesgue medurables en \mathbb{R}^n .

\mathcal{M} es una σ -álgebra. Además \mathcal{M} contiene a todos los abiertos.

(\mathcal{M} es una de las σ -alg. en \mathcal{I}). Entonces

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigcap \mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}. \quad \square$$

Caracterizaciones de Mesurabilidad:

- $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists G$ abierto, $G \supseteq E$ y $|G - E|_e < \varepsilon$.

Prop: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists F$ cerrado, $F \subseteq E$ y $|E - F|_e < \varepsilon$.

Prueba: E es mesurable $\Leftrightarrow E^c$ es mesurable

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists G \text{ abierto, } G \supseteq E^c \text{ y } |G - E^c|_e < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \underset{F}{G^c} \text{ cerrado, } G^c \subseteq E \text{ y } |G - E^c|_e < \varepsilon$$

$$|E - F| = |E - G^c| = |E \cap (G^c)^c| = |E \cap G| = |G - E^c|$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists F \text{ cerrado, } F \subseteq E \text{ y } |E - F|_e < \varepsilon.$$

□

Teorema: i) E medible $\Leftrightarrow E = H - Z$, donde H es G_δ y $|Z| = 0$.

ii) E medible $\Leftrightarrow E = H \cup Z$, donde H es F_σ y $|Z| = 0$.

Prueba:

Teorema: (Carathéodory) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible \Leftrightarrow para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ vale

$$|A|_e = |A \cap E|_e + |A - E|_e. \quad \square$$