Ley de Reciprocidad Cuadrática

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de Números

(Aula 15) 30.agosto.2022

Congruencias de grado 2

Sea $p > 2$ un primo impar, y sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con $p \nmid a$.

Congruencias de grado 2

Sea $p > 2$ un primo impar, y sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con $p \nmid a$. Estamos interesados en resolver la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}. \tag{1}$$

Congruencias de grado 2

Sea $p > 2$ un primo impar, y sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con $p \nmid a$. Estamos interesados en resolver la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}. \tag{1}$$

Completando al cuadrado (esto es, multiplicando por $4a$, y luego sumando b^2), la ecuación anterior es equivalente a

$$(2ax + b)^2 \equiv b^2 - 4ac \pmod{p}. \tag{2}$$

(Observe que 2 y a no son divisíbles por p).

Congruencias de grado 2

Sea $p > 2$ un primo impar, y sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con $p \nmid a$. Estamos interesados en resolver la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}. \tag{1}$$

Completando al cuadrado (esto es, multiplicando por $4a$, y luego sumando b^2), la ecuación anterior es equivalente a

$$(2ax + b)^2 \equiv b^2 - 4ac \pmod{p}. \tag{2}$$

(Observe que 2 y a no son divisíbles por p).

Así, estamos interesados en encontrar criterios para la existencia de soluciones de la ecuación

$$x^2 \equiv d \pmod{p}. \tag{3}$$

Congruencias de grado 2

Sea $p > 2$ un primo impar, y sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con $p \nmid a$. Estamos interesados en resolver la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}. \tag{1}$$

Completando al cuadrado (esto es, multiplicando por $4a$, y luego sumando b^2), la ecuación anterior es equivalente a

$$(2ax + b)^2 \equiv b^2 - 4ac \pmod{p}. \tag{2}$$

(Observe que 2 y a no son divisíbles por p).

Así, estamos interesados en encontrar criterios para la existencia de soluciones de la ecuación

$$x^2 \equiv d \pmod{p}. \tag{3}$$

Definición

Si la ecuación (3) tiene solución, esto es, $\bar{d}$ es un cuadrado perfecto en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, diremos que d es un ***residuo cuadrático*** *módulo p.*

Congruencias

Hay exactamente $\frac{p+1}{2}$ residuos cuadráticos módulo p, $p > 2$. A saber:

$$0^2, (\pm 1)^2, (\pm 2)^2, (\pm 3)^2, \ldots, \Big(\pm\frac{p-1}{2}\Big)^2 \pmod{p},$$

Congruencias

Hay exactamente $\frac{p+1}{2}$ residuos cuadráticos módulo p, $p > 2$. A saber:

$$0^2, (\pm 1)^2, (\pm 2)^2, (\pm 3)^2, \ldots, \left(\pm\frac{p-1}{2}\right)^2 \pmod{p},$$

ya que $i^2 \equiv (-i)^2 \pmod{p}$.

Congruencias

Hay exactamente $\frac{p+1}{2}$ residuos cuadráticos módulo p, $p > 2$. A saber:

$$0^2, (\pm 1)^2, (\pm 2)^2, (\pm 3)^2, \ldots, \Big(\pm \frac{p-1}{2}\Big)^2 \pmod{p},$$

ya que $i^2 \equiv (-i)^2 \pmod{p}$. Observe que todos estos números son incongruentes módulo p, de manera que conforman un sistema completo de residuos cuadráticos módulo p, pues

Hay exactamente $\frac{p+1}{2}$ residuos cuadráticos módulo p, $p > 2$. A saber:

$$0^2, (\pm 1)^2, (\pm 2)^2, (\pm 3)^2, \ldots, \left(\pm \frac{p-1}{2}\right)^2 \pmod{p},$$

ya que $i^2 \equiv (-i)^2 \pmod{p}$. Observe que todos estos números son incongruentes módulo p, de manera que conforman un sistema completo de residuos cuadráticos módulo p, pues

$$\begin{aligned} i^2 \equiv j^2 \pmod{p} &\iff p \mid i^2 - j^2 = (i-j)(i+j) \\ &\iff p \mid i - j \text{ ó } p \mid i + j \\ &\iff i \equiv \pm j \pmod{p}. \end{aligned}$$

Hay exactamente $\frac{p+1}{2}$ residuos cuadráticos módulo p, $p > 2$. A saber:

$$0^2, (\pm 1)^2, (\pm 2)^2, (\pm 3)^2, \ldots, \Big(\pm\frac{p-1}{2}\Big)^2 \pmod{p},$$

ya que $i^2 \equiv (-i)^2 \pmod{p}$. Observe que todos estos números son incongruentes módulo p, de manera que conforman un sistema completo de residuos cuadráticos módulo p, pues

$$\begin{aligned} i^2 \equiv j^2 \pmod{p} &\iff p \mid i^2 - j^2 = (i-j)(i+j) \\ &\iff p \mid i-j \text{ ó } p \mid i+j \\ &\iff i \equiv \pm j \pmod{p}. \end{aligned}$$

Así, si x es residuo cuadrático módulo p, debe ser congruente a alguno de estos números.

Congruencias

Hay exactamente $\frac{p+1}{2}$ residuos cuadráticos módulo p, $p > 2$. A saber:

$$0^2, (\pm 1)^2, (\pm 2)^2, (\pm 3)^2, \ldots, \Big(\pm\frac{p-1}{2}\Big)^2 \pmod{p},$$

ya que $i^2 \equiv (-i)^2 \pmod{p}$. Observe que todos estos números son incongruentes módulo p, de manera que conforman un sistema completo de residuos cuadráticos módulo p, pues

$$\begin{aligned} i^2 \equiv j^2 \pmod{p} \quad & \iff \quad p \mid i^2 - j^2 = (i-j)(i+j) \\ & \iff \quad p \mid i-j \text{ ó } p \mid i+j \\ & \iff \quad i \equiv \pm j \pmod{p}. \end{aligned}$$

Así, si x es residuo cuadrático módulo p, debe ser congruente a alguno de estos números.

Ahora, aunque conozcamos la lista completa de residuos cuadráticos módulo p, en la práctica es difícil reconocer si un número d es o no residuo cuadrático módulo p.

Congruencias

Ejemplo: Módulo 23 tenemos

- $0^2 \equiv 0 \pmod{23}$,
- $1^2 \equiv 1 \pmod{23}$,
- $2^2 \equiv 4 \pmod{23}$,
- $3^2 \equiv 9 \pmod{23}$,
- $4^2 \equiv 16 \pmod{23}$,
- $5^2 \equiv 2 \pmod{23}$,
- $6^2 \equiv 13 \pmod{23}$,
- $7^2 \equiv 3 \pmod{23}$,
- $8^2 \equiv 18 \pmod{23}$,
- $9^2 \equiv 12 \pmod{23}$,
- $10^2 \equiv 8 \pmod{23}$,
- $11^2 \equiv 6 \pmod{23}$,

Ejemplo: Módulo 23 tenemos

- $0^2 \equiv 0 \pmod{23}$,
- $1^2 \equiv 1 \pmod{23}$,
- $2^2 \equiv 4 \pmod{23}$,
- $3^2 \equiv 9 \pmod{23}$,
- $4^2 \equiv 16 \pmod{23}$,
- $5^2 \equiv 2 \pmod{23}$,
- $6^2 \equiv 13 \pmod{23}$,
- $7^2 \equiv 3 \pmod{23}$,
- $8^2 \equiv 18 \pmod{23}$,
- $9^2 \equiv 12 \pmod{23}$,
- $10^2 \equiv 8 \pmod{23}$,
- $11^2 \equiv 6 \pmod{23}$,

Así, los resíduos cuadráticos módulo 23 son:

$$0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18.$$

Congruencias

Ejemplo: Módulo 23 tenemos

- $0^2 \equiv 0 \pmod{23}$,
- $1^2 \equiv 1 \pmod{23}$,
- $2^2 \equiv 4 \pmod{23}$,
- $3^2 \equiv 9 \pmod{23}$,
- $4^2 \equiv 16 \pmod{23}$,
- $5^2 \equiv 2 \pmod{23}$,
- $6^2 \equiv 13 \pmod{23}$,
- $7^2 \equiv 3 \pmod{23}$,
- $8^2 \equiv 18 \pmod{23}$,
- $9^2 \equiv 12 \pmod{23}$,
- $10^2 \equiv 8 \pmod{23}$,
- $11^2 \equiv 6 \pmod{23}$,

Así, los resíduos cuadráticos módulo 23 son:

$$0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18.$$

Ejemplo: ¿Es 53 resíduo cuadrático módulo 101?

Congruencias

Ejemplo: Módulo 23 tenemos

- $0^2 \equiv 0 \pmod{23}$,
- $1^2 \equiv 1 \pmod{23}$,
- $2^2 \equiv 4 \pmod{23}$,
- $3^2 \equiv 9 \pmod{23}$,
- $4^2 \equiv 16 \pmod{23}$,
- $5^2 \equiv 2 \pmod{23}$,
- $6^2 \equiv 13 \pmod{23}$,
- $7^2 \equiv 3 \pmod{23}$,
- $8^2 \equiv 18 \pmod{23}$,
- $9^2 \equiv 12 \pmod{23}$,
- $10^2 \equiv 8 \pmod{23}$,
- $11^2 \equiv 6 \pmod{23}$,

Así, los resíduos cuadráticos módulo 23 son:

$$0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18.$$

Ejemplo: ¿Es 53 resíduo cuadrático módulo 101?
No.

Congruencias

Ejemplo: Módulo 23 tenemos

- $0^2 \equiv 0 \pmod{23}$,
- $1^2 \equiv 1 \pmod{23}$,
- $2^2 \equiv 4 \pmod{23}$,
- $3^2 \equiv 9 \pmod{23}$,
- $4^2 \equiv 16 \pmod{23}$,
- $5^2 \equiv 2 \pmod{23}$,
- $6^2 \equiv 13 \pmod{23}$,
- $7^2 \equiv 3 \pmod{23}$,
- $8^2 \equiv 18 \pmod{23}$,
- $9^2 \equiv 12 \pmod{23}$,
- $10^2 \equiv 8 \pmod{23}$,
- $11^2 \equiv 6 \pmod{23}$,

Así, los resíduos cuadráticos módulo 23 son:

$$0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18.$$

Ejemplo: ¿Es 53 resíduo cuadrático módulo 101?
No.

Precisamos de una forma eficiente para determinar si un entero a cualquiera es residuo cuadrático módulo p.

Definición

*Sea $p > 2$ un número primo y $a \in \mathbb{Z}$ un entero cualquiera. Definimos el **símbolo de Legendre** como*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ es residuo cuadrático módulo } p; \\ 0, & \text{si } p \mid a; \\ -1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ no es residuo cuadrático módulo } p. \end{cases}$$

Definición

Sea $p > 2$ un número primo y $a \in \mathbb{Z}$ un entero cualquiera. Definimos el ***símbolo de Legendre*** *como*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ es residuo cuadrático módulo } p; \\ 0, & \text{si } p \mid a; \\ -1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ no es residuo cuadrático módulo } p. \end{cases}$$

Proposición (Criterio de Euler)

Sea $p > 2$ un primo impar, y sea $a \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{(p-1)/2} \pmod{p}.$$

Símbolo de Legendre

Definición

*Sea $p > 2$ un número primo y $a \in \mathbb{Z}$ un entero cualquiera. Definimos el **símbolo de Legendre** como*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ es residuo cuadrático módulo } p; \\ 0, & \text{si } p \mid a; \\ -1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ no es residuo cuadrático módulo } p. \end{cases}$$

Proposición (Criterio de Euler)

Sea $p > 2$ un primo impar, y sea $a \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{(p-1)/2} \pmod{p}.$$

<u>Prueba</u>: Para $a \equiv 0 \pmod{p}$, el resultado es inmediato pues $\left(\frac{a}{p}\right) = 0 \equiv 0^{(p-1)/2} \pmod{p}$.

Definición

*Sea $p > 2$ un número primo y $a \in \mathbb{Z}$ un entero cualquiera. Definimos el **símbolo de Legendre** como*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ es residuo cuadrático módulo } p; \\ 0, & \text{si } p \mid a; \\ -1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ no es residuo cuadrático módulo } p. \end{cases}$$

Proposición (Criterio de Euler)

Sea $p > 2$ un primo impar, y sea $a \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{(p-1)/2} \pmod{p}.$$

Prueba: Para $a \equiv 0 \pmod{p}$, el resultado es inmediato pues $\left(\frac{a}{p}\right) = 0 \equiv 0^{(p-1)/2} \pmod{p}$.
Suponga entonces que $p \nmid a$.

Definición

*Sea $p > 2$ un número primo y $a \in \mathbb{Z}$ un entero cualquiera. Definimos el **símbolo de Legendre** como*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ es residuo cuadrático módulo } p; \\ 0, & \text{si } p \mid a; \\ -1, & \text{si } p \nmid a \text{ y } a \text{ no es residuo cuadrático módulo } p. \end{cases}$$

Proposición (Criterio de Euler)

Sea $p > 2$ un primo impar, y sea $a \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{(p-1)/2} \pmod{p}.$$

Prueba: Para $a \equiv 0 \pmod{p}$, el resultado es inmediato pues $\left(\frac{a}{p}\right) = 0 \equiv 0^{(p-1)/2} \pmod{p}$.
Suponga entonces que $p \nmid a$. Por el Teorema de Fermat, sabemos que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Símbolo de Legendre

Como
$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p \iff (a^{(p-1)/2} - 1)(a^{(p-1)/2} + 1) \equiv 0 \pmod p$$

Símbolo de Legendre

Como

$$\begin{aligned} a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} &\iff (a^{(p-1)/2} - 1)(a^{(p-1)/2} + 1) \equiv 0 \pmod{p} \\ &\iff p \mid a^{(p-1)/2} - 1 \text{ ó } p \mid a^{(p-1)/2} + 1 \end{aligned}$$

Símbolo de Legendre

Como

$$\begin{aligned} a^{p-1}-1\equiv 0 \pmod p &\iff (a^{(p-1)/2}-1)(a^{(p-1)/2}+1)\equiv 0 \pmod p\\ &\iff p\mid a^{(p-1)/2}-1 \text{ ó } p\mid a^{(p-1)/2}+1\\ &\iff a^{(p-1)/2}\equiv \pm 1 \pmod p. \end{aligned}$$

Símbolo de Legendre

Como

$$\begin{aligned} a^{p-1}-1\equiv 0 \pmod p &\iff (a^{(p-1)/2}-1)(a^{(p-1)/2}+1)\equiv 0 \pmod p \\ &\iff p \mid a^{(p-1)/2}-1 \text{ ó } p \mid a^{(p-1)/2}+1 \\ &\iff a^{(p-1)/2}\equiv \pm 1 \pmod p. \end{aligned}$$

Debemos ahora mostrar que $a^{(p-1)/2}\equiv 1 \pmod p$ si, y sólo si, a es un residuo cuadrático módulo p.

Símbolo de Legendre

Como

$$\begin{aligned} a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p &\iff (a^{(p-1)/2} - 1)(a^{(p-1)/2} + 1) \equiv 0 \pmod p \\ &\iff p \mid a^{(p-1)/2} - 1 \text{ ó } p \mid a^{(p-1)/2} + 1 \\ &\iff a^{(p-1)/2} \equiv \pm 1 \pmod p. \end{aligned}$$

Debemos ahora mostrar que $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$ si, y sólo si, a es un residuo cuadrático módulo p. Observe que si a es un residuo cuadrático módulo p, entonces $a \equiv j^2 \pmod p$,

Símbolo de Legendre

Como

$$\begin{aligned} a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} &\iff (a^{(p-1)/2} - 1)(a^{(p-1)/2} + 1) \equiv 0 \pmod{p} \\ &\iff p \mid a^{(p-1)/2} - 1 \text{ ó } p \mid a^{(p-1)/2} + 1 \\ &\iff a^{(p-1)/2} \equiv \pm 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Debemos ahora mostrar que $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ si, y sólo si, a es un residuo cuadrático módulo p. Observe que si a es un residuo cuadrático módulo p, entonces $a \equiv j^2 \pmod{p}$, y por el Teorema de Fermat, se tiene

$$a^{(p-1)/2} \equiv (j^2)^{(p-1)/2} \equiv j^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Símbolo de Legendre

Como

$$\begin{aligned} a^{p-1}-1\equiv 0 \pmod p \quad &\Longleftrightarrow \quad (a^{(p-1)/2}-1)(a^{(p-1)/2}+1)\equiv 0 \pmod p \\ &\Longleftrightarrow \quad p \mid a^{(p-1)/2}-1 \text{ ó } p \mid a^{(p-1)/2}+1 \\ &\Longleftrightarrow \quad a^{(p-1)/2}\equiv \pm 1 \pmod p. \end{aligned}$$

Debemos ahora mostrar que $a^{(p-1)/2}\equiv 1 \pmod p$ si, y sólo si, a es un residuo cuadrático módulo p. Observe que si a es un residuo cuadrático módulo p, entonces $a\equiv j^2 \pmod p$, y por el Teorema de Fermat, se tiene

$$a^{(p-1)/2}\equiv (j^2)^{(p-1)/2}\equiv j^{p-1}\equiv 1 \pmod p.$$

Así, los residuos cuadráticos $1^2, 2^2, \ldots, (\frac{p-1}{2})^2$ son todos raíces del polinomio $f(x)=x^{(p-1)/2}-\bar{1}$ en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$.

Símbolo de Legendre

Como

$$\begin{aligned} a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} &\iff (a^{(p-1)/2} - 1)(a^{(p-1)/2} + 1) \equiv 0 \pmod{p} \\ &\iff p \mid a^{(p-1)/2} - 1 \text{ ó } p \mid a^{(p-1)/2} + 1 \\ &\iff a^{(p-1)/2} \equiv \pm 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Debemos ahora mostrar que $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ si, y sólo si, a es un residuo cuadrático módulo p. Observe que si a es un residuo cuadrático módulo p, entonces $a \equiv j^2 \pmod{p}$, y por el Teorema de Fermat, se tiene

$$a^{(p-1)/2} \equiv (j^2)^{(p-1)/2} \equiv j^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Así, los residuos cuadráticos $1^2, 2^2, \ldots, (\frac{p-1}{2})^2$ son todos raíces del polinomio $f(x) = x^{(p-1)/2} - \bar{1}$ en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$. Pero, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es un cuerpo, luego f puede tener a lo sumo $\deg f = \frac{p-1}{2}$ raíces en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Símbolo de Legendre

Como

$$\begin{aligned} a^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod{p} &\iff (a^{(p-1)/2}-1)(a^{(p-1)/2}+1) \equiv 0 \pmod{p} \\ &\iff p \mid a^{(p-1)/2}-1 \text{ ó } p \mid a^{(p-1)/2}+1 \\ &\iff a^{(p-1)/2} \equiv \pm 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Debemos ahora mostrar que $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ si, y sólo si, a es un residuo cuadrático módulo p. Observe que si a es un residuo cuadrático módulo p, entonces $a \equiv j^2 \pmod{p}$, y por el Teorema de Fermat, se tiene

$$a^{(p-1)/2} \equiv (j^2)^{(p-1)/2} \equiv j^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Así, los residuos cuadráticos $1^2, 2^2, \ldots, (\frac{p-1}{2})^2$ son todos raíces del polinomio $f(x) = x^{(p-1)/2} - \bar{1}$ en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$. Pero, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es un cuerpo, luego f puede tener a lo sumo $\deg f = \frac{p-1}{2}$ raíces en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Esto muestra que las raíces de $f(x)$ son exactamente los residuos cuadráticos no congruentes a cero módulo p.

Símbolo de Legendre

Como

$$\begin{aligned} a^{p-1}-1\equiv 0 \pmod p &\iff (a^{(p-1)/2}-1)(a^{(p-1)/2}+1)\equiv 0 \pmod p\\ &\iff p \mid a^{(p-1)/2}-1 \text{ ó } p \mid a^{(p-1)/2}+1\\ &\iff a^{(p-1)/2}\equiv \pm 1 \pmod p. \end{aligned}$$

Debemos ahora mostrar que $a^{(p-1)/2}\equiv 1 \pmod p$ si, y sólo si, a es un residuo cuadrático módulo p. Observe que si a es un residuo cuadrático módulo p, entonces $a\equiv j^2 \pmod p$, y por el Teorema de Fermat, se tiene

$$a^{(p-1)/2}\equiv (j^2)^{(p-1)/2}\equiv j^{p-1}\equiv 1 \pmod p.$$

Así, los residuos cuadráticos $1^2, 2^2, \ldots, (\frac{p-1}{2})^2$ son todos raíces del polinomio $f(x)=x^{(p-1)/2}-\bar{1}$ en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$. Pero, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es un cuerpo, luego f puede tener a lo sumo $\deg f=\frac{p-1}{2}$ raíces en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Esto muestra que las raíces de $f(x)$ son exactamente los residuos cuadráticos no congruentes a cero módulo p.
Portanto, $a^{(p-1)/2}\equiv 1 \pmod p \;\Leftrightarrow\; a$ es residuo cuadrático módulo p. $\square$

Corolario (Euler)

Sea $p > 2$ *primo. Entonces* $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ *si, y sólo si,* $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Corolario (Euler)

Sea $p > 2$ primo. Entonces $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ si, y sólo si, $p \equiv 1 \pmod{4}$.

<u>Prueba</u>: Como p es impar, sólo puede ser de la forma $p = 4k + 1$ o de la forma $p = 4k + 3$.

Corolario (Euler)

Sea $p > 2$ primo. Entonces $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ si, y sólo si, $p \equiv 1 \pmod{4}$.

<u>Prueba</u>: Como p es impar, sólo puede ser de la forma $p = 4k + 1$ o de la forma $p = 4k + 3$.

- Si $p = 4k + 1 \Rightarrow \frac{p-1}{2} = \frac{4k}{2} = 2k$.

Corolario (Euler)

Sea $p > 2$ primo. Entonces $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ si, y sólo si, $p \equiv 1 \pmod{4}$.

<u>Prueba</u>: Como p es impar, sólo puede ser de la forma $p = 4k + 1$ o de la forma $p = 4k + 3$.

- Si $p = 4k + 1 \Rightarrow \frac{p-1}{2} = \frac{4k}{2} = 2k$. Luego, $(-1)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod{p}$.

Corolario (Euler)

Sea $p > 2$ primo. Entonces $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ si, y sólo si, $p \equiv 1 \pmod{4}$.

<u>Prueba</u>: Como p es impar, sólo puede ser de la forma $p = 4k+1$ o de la forma $p = 4k+3$.

- Si $p = 4k+1 \;\Rightarrow\; \frac{p-1}{2} = \frac{4k}{2} = 2k$. Luego, $(-1)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod{p}$.
- Si $p = 4k+3 \;\Rightarrow\; \frac{p-1}{2} = \frac{4k+2}{2} = 2k+1$.

Corolario (Euler)

Sea $p > 2$ primo. Entonces $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ si, y sólo si, $p \equiv 1 \pmod{4}$.

<u>Prueba</u>: Como p es impar, sólo puede ser de la forma $p = 4k+1$ o de la forma $p = 4k+3$.

- Si $p = 4k+1 \;\Rightarrow\; \frac{p-1}{2} = \frac{4k}{2} = 2k$. Luego, $(-1)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod{p}$.
- Si $p = 4k+3 \;\Rightarrow\; \frac{p-1}{2} = \frac{4k+2}{2} = 2k+1$. Luego, $(-1)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{p}$.

Corolario (Euler)

Sea $p > 2$ primo. Entonces $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ si, y sólo si, $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Prueba: Como p es impar, sólo puede ser de la forma $p = 4k+1$ o de la forma $p = 4k+3$.

- Si $p = 4k+1 \Rightarrow \frac{p-1}{2} = \frac{4k}{2} = 2k$. Luego, $(-1)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod{p}$.
- Si $p = 4k+3 \Rightarrow \frac{p-1}{2} = \frac{4k+2}{2} = 2k+1$. Luego, $(-1)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{p}$.

Corolario

El símbolo de Legendre satisface las siguientes propiedades:

1. *Si $a \equiv b \pmod{p}$, entonces $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.*
2. $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$, *si $p \nmid a$.*
3. $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$. *Esto es, -1 es residuo cuadrático módulo $p \;\Leftrightarrow\; p \equiv 1 \pmod{4}$.*
4. $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.

Símbolo de Legendre

Prueba: (1) y (2) son inmediatos a partir de la definición, o si lo prefieren, también se deducen a partir de Criterio de Euler:

Símbolo de Legendre

Prueba: (1) y (2) son inmediatos a partir de la definición, o si lo prefieren, también se deducen a partir de Criterio de Euler:

$$a \equiv b \pmod p \;\Rightarrow\; \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \equiv b^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{b}{p}\right) \pmod p \;\Rightarrow\; , \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right),$$

$$\left(\frac{1}{p}\right) \equiv (1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{p}\right) = 1.$$

Símbolo de Legendre

Prueba: (1) y (2) son inmediatos a partir de la definición, o si lo prefieren, también se deducen a partir de Criterio de Euler:

$$a \equiv b \pmod{p} \Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \equiv b^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{b}{p}\right) \pmod{p} \quad \Rightarrow \quad , \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right),$$

$$\left(\frac{1}{p}\right) \equiv (1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{p}\right) = 1.$$

(3) Del Criterio de Euler, junto con el corolario anterior, tenemos

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv 1 \pmod{p} \iff (-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$$

Símbolo de Legendre

<u>Prueba</u>: (1) y (2) son inmediatos a partir de la definición, o si lo prefieren, también se deducen a partir de Criterio de Euler:

$$a \equiv b \pmod{p} \;\Rightarrow\; \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \equiv b^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{b}{p}\right) \pmod{p} \;\Rightarrow\; , \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right),$$

$$\left(\frac{1}{p}\right) \equiv (1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p} \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{p}\right) = 1.$$

(3) Del Criterio de Euler, junto con el corolario anterior, tenemos

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv 1 \pmod{p} \iff (-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\iff p = 4k + 1$$

Símbolo de Legendre

Prueba: (1) y (2) son inmediatos a partir de la definición, o si lo prefieren, también se deducen a partir de Criterio de Euler:

$$a \equiv b \pmod p \;\Rightarrow\; \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \equiv b^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{b}{p}\right) \pmod p \;\Rightarrow\; , \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right),$$

$$\left(\frac{1}{p}\right) \equiv (1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{p}\right) = 1.$$

(3) Del Criterio de Euler, junto con el corolario anterior, tenemos

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv 1 \pmod p \iff (-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$$

$$\iff p = 4k+1 \iff p \equiv 1 \pmod 4.$$

Símbolo de Legendre

Prueba: (1) y (2) son inmediatos a partir de la definición, o si lo prefieren, también se deducen a partir de Criterio de Euler:

$$a \equiv b \pmod p \Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \equiv b^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{b}{p}\right) \pmod p \quad \Rightarrow \quad , \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right),$$

$$\left(\frac{1}{p}\right) \equiv (1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{p}\right) = 1.$$

(3) Del Criterio de Euler, junto con el corolario anterior, tenemos

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv 1 \pmod p \iff (-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$$
$$\iff p = 4k+1 \iff p \equiv 1 \pmod 4.$$

(4) Finalmente, del Criterio de Euler tenemos que

$$\left(\frac{ab}{p}\right) \equiv (ab)^{(p-1)/2}$$

Símbolo de Legendre

Prueba: (1) y (2) son inmediatos a partir de la definición, o si lo prefieren, también se deducen a partir de Criterio de Euler:

$$a \equiv b \pmod{p} \;\Rightarrow\; \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \equiv b^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{b}{p}\right) \pmod{p} \;\Rightarrow\; , \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right),$$

$$\left(\frac{1}{p}\right) \equiv (1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p} \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{p}\right) = 1.$$

(3) Del Criterio de Euler, junto con el corolario anterior, tenemos

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv 1 \pmod{p} \iff (-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\iff p = 4k+1 \iff p \equiv 1 \pmod{4}.$$

(4) Finalmente, del Criterio de Euler tenemos que

$$\left(\frac{ab}{p}\right) \equiv (ab)^{(p-1)/2} \equiv a^{(p-1)/2}\, b^{(p-1)/2}$$

Símbolo de Legendre

Prueba: (1) y (2) son inmediatos a partir de la definición, o si lo prefieren, también se deducen a partir de Criterio de Euler:

$$a \equiv b \pmod p \;\Rightarrow\; \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \equiv b^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{b}{p}\right) \pmod p \;\Rightarrow\; , \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right),$$

$$\left(\frac{1}{p}\right) \equiv (1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{p}\right) = 1.$$

(3) Del Criterio de Euler, junto con el corolario anterior, tenemos

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv 1 \pmod p \iff (-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$$

$$\iff p = 4k+1 \iff p \equiv 1 \pmod 4.$$

(4) Finalmente, del Criterio de Euler tenemos que

$$\left(\frac{ab}{p}\right) \equiv (ab)^{(p-1)/2} \equiv a^{(p-1)/2}\, b^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) \pmod p.$$

Prueba: (1) y (2) son inmediatos a partir de la definición, o si lo prefieren, también se deducen a partir de Criterio de Euler:

$$a \equiv b \pmod p \;\Rightarrow\; \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \equiv b^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{b}{p}\right) \pmod p \;\Rightarrow\;, \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right),$$

$$\left(\frac{1}{p}\right) \equiv (1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{p}\right) = 1.$$

(3) Del Criterio de Euler, junto con el corolario anterior, tenemos

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv 1 \pmod p \iff (-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$$

$$\iff p = 4k + 1 \iff p \equiv 1 \pmod 4.$$

(4) Finalmente, del Criterio de Euler tenemos que

$$\left(\frac{ab}{p}\right) \equiv (ab)^{(p-1)/2} \equiv a^{(p-1)/2}\, b^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) \pmod p.$$

lo que muestra que $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$, pues ambos lados son iguales a ± 1. $\square$

Lema (Gauss)

Sea $p > 2$ un primo impar, y $a \in \mathbb{Z}^+$ un entero positivo, primo relativo con p. Sea s el número de elementos del conjunto

$$S = \{a, 2a, 3a, \ldots, \tfrac{p-1}{2}\, a\},$$

tales que su residuo módulo p es mayor que $\frac{p-1}{2}$. Entonces,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s.$$

Lema (Gauss)

Sea $p > 2$ un primo impar, y $a \in \mathbb{Z}^+$ un entero positivo, primo relativo con p. Sea s el número de elementos del conjunto

$$S = \{a, 2a, 3a, \ldots, \tfrac{p-1}{2}\, a\},$$

tales que su residuo módulo p es mayor que $\frac{p-1}{2}$. Entonces,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s.$$

<u>Prueba</u>: Imitamos la prueba del Teorema de Euler-Fermat.

Lema (Gauss)

Sea $p > 2$ un primo impar, y $a \in \mathbb{Z}^+$ un entero positivo, primo relativo con p. Sea s el número de elementos del conjunto

$$S = \{a, 2a, 3a, \ldots, \tfrac{p-1}{2}a\},$$

tales que su residuo módulo p es mayor que $\frac{p-1}{2}$. Entonces,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s.$$

Prueba: Imitamos la prueba del Teorema de Euler-Fermat. Como $\{\pm 1, \pm 2, , \pm \frac{p-1}{2}\}$ es un sistema completo de invertibles módulo p,

Lema (Gauss)

Sea $p > 2$ un primo impar, y $a \in \mathbb{Z}^+$ un entero positivo, primo relativo con p. Sea s el número de elementos del conjunto

$$S = \{a, 2a, 3a, \ldots, \tfrac{p-1}{2}a\},$$

tales que su residuo módulo p es mayor que $\frac{p-1}{2}$. Entonces,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s.$$

<u>Prueba</u>: Imitamos la prueba del Teorema de Euler-Fermat. Como $\{\pm 1, \pm 2, , \pm\frac{p-1}{2}\}$ es un sistema completo de invertibles módulo p, para cada $j = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ podemos escribir $ja \equiv \varepsilon_j m_j \pmod{p}$, con $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, y $m_j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$.

Símbolo de Legendre

Lema (Gauss)

Sea $p > 2$ un primo impar, y $a \in \mathbb{Z}^+$ un entero positivo, primo relativo con p. Sea s el número de elementos del conjunto

$$S = \{a, 2a, 3a, \ldots, \tfrac{p-1}{2}\,a\},$$

tales que su residuo módulo p es mayor que $\frac{p-1}{2}$. Entonces,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s.$$

Prueba: Imitamos la prueba del Teorema de Euler-Fermat. Como $\{\pm 1, \pm 2, , \pm\frac{p-1}{2}\}$ es un sistema completo de invertibles módulo p, para cada $j = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ podemos escribir $ja \equiv \varepsilon_j m_j \pmod{p}$, con $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, y $m_j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$.
Observe que si $i \neq j$, entonces $m_i \neq m_j$, donde $\{m_1, m_2, \ldots, m_{(p-1)/2}\}?\{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$.

Lema (Gauss)

Sea $p > 2$ un primo impar, y $a \in \mathbb{Z}^+$ un entero positivo, primo relativo con p. Sea s el número de elementos del conjunto

$$S = \{a, 2a, 3a, \ldots, \tfrac{p-1}{2}\, a\},$$

tales que su residuo módulo p es mayor que $\frac{p-1}{2}$. Entonces,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s.$$

<u>Prueba</u>: Imitamos la prueba del Teorema de Euler-Fermat. Como $\{\pm 1, \pm 2, , \pm \frac{p-1}{2}\}$ es un sistema completo de invertibles módulo p, para cada $j = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ podemos escribir $ja \equiv \varepsilon_j m_j \pmod{p}$, con $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, y $m_j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$.
Observe que si $i \neq j$, entonces $m_i \neq m_j$, donde $\{m_1, m_2, \ldots, m_{(p-1)/2}\}?\{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$. De hecho, si $m_i \equiv m_j \pmod{p}$,

Lema (Gauss)

Sea $p > 2$ un primo impar, y $a \in \mathbb{Z}^+$ un entero positivo, primo relativo con p. Sea s el número de elementos del conjunto

$$S = \{a, 2a, 3a, \ldots, \tfrac{p-1}{2}\,a\},$$

tales que su residuo módulo p es mayor que $\frac{p-1}{2}$. Entonces,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s.$$

Prueba: Imitamos la prueba del Teorema de Euler-Fermat. Como $\{\pm 1, \pm 2, , \pm \frac{p-1}{2}\}$ es un sistema completo de invertibles módulo p, para cada $j = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ podemos escribir $ja \equiv \varepsilon_j m_j \pmod{p}$, con $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, y $m_j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$.
Observe que si $i \neq j$, entonces $m_i \neq m_j$, donde $\{m_1, m_2, \ldots, m_{(p-1)/2}\}?\{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$. De hecho, si $m_i \equiv m_j \pmod{p}$, tendríamos $ia \equiv ja \pmod{p}$ ó $ia \equiv -ja \pmod{p}$;

Lema (Gauss)

Sea $p > 2$ un primo impar, y $a \in \mathbb{Z}^+$ un entero positivo, primo relativo con p. Sea s el número de elementos del conjunto

$$S = \{a, 2a, 3a, \ldots, \tfrac{p-1}{2}\, a\},$$

tales que su residuo módulo p es mayor que $\frac{p-1}{2}$. Entonces,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s.$$

<u>Prueba</u>: Imitamos la prueba del Teorema de Euler-Fermat. Como $\{\pm 1, \pm 2, , \pm \frac{p-1}{2}\}$ es un sistema completo de invertibles módulo p, para cada $j = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ podemos escribir $ja \equiv \varepsilon_j m_j \pmod{p}$, con $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, y $m_j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$.
Observe que si $i \neq j$, entonces $m_i \neq m_j$, donde $\{m_1, m_2, \ldots, m_{(p-1)/2}\}?\{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$. De hecho, si $m_i \equiv m_j \pmod{p}$, tendríamos $ia \equiv ja \pmod{p}$ ó $ia \equiv -ja \pmod{p}$; y como a es

Símbolo de Legendre

invertible módulo p y $0 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$, entonces el primer caso implica $i = j$, mientras que el segundo caso es imposible.

invertible módulo p y $0 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$, entonces el primer caso implica $i = j$, mientras que el segundo caso es imposible.

Multiplicando las congruencias $ja \equiv \varepsilon_j m_j \pmod{m}$, resulta

$$(a)(2a)(3a)\cdots(\tfrac{p-1}{2}\,a) \quad \equiv \quad \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}\, m_1 m_2 \cdots m_{(p-1)/2} \pmod{p}$$

invertible módulo p y $0 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$, entonces el primer caso implica $i = j$, mientras que el segundo caso es imposible.

Multiplicando las congruencias $ja \equiv \varepsilon_j m_j \pmod{m}$, resulta

$$\begin{aligned} (a)(2a)(3a)\cdots(\tfrac{p-1}{2}\,a) &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}\, m_1 m_2 \cdots m_{(p-1)/2} \pmod{p} \\ \iff \quad a^{(p-1)/2}\left(\frac{p-1}{2}\right)! &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p} \end{aligned}$$

invertible módulo p y $0 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$, entonces el primer caso implica $i = j$, mientras que el segundo caso es imposible.

Multiplicando las congruencias $ja \equiv \varepsilon_j m_j \pmod{m}$, resulta

$$\begin{aligned}
(a)(2a)(3a)\cdots(\tfrac{p-1}{2}\,a) &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}\, m_1 m_2 \cdots m_{(p-1)/2} \pmod{p} \\
\iff \quad a^{(p-1)/2}\left(\frac{p-1}{2}\right)! &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p} \\
\iff \quad a^{(p-1)/2} &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2} \pmod{p}.
\end{aligned}$$

invertible módulo p y $0 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$, entonces el primer caso implica $i = j$, mientras que el segundo caso es imposible.

Multiplicando las congruencias $ja \equiv \varepsilon_j m_j \pmod{m}$, resulta

$$
\begin{aligned}
(a)(2a)(3a)\cdots(\tfrac{p-1}{2}\,a) &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}\, m_1 m_2 \cdots m_{(p-1)/2} \pmod{p} \\
\iff \quad a^{(p-1)/2}\left(\frac{p-1}{2}\right)! &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p} \\
\iff \quad a^{(p-1)/2} &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2} \pmod{p}.
\end{aligned}
$$

Luego, $a^{(p-1)/2} = \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}$, ya que ambos términos son iguales a ± 1.

Símbolo de Legendre

invertible módulo p y $0 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$, entonces el primer caso implica $i = j$, mientras que el segundo caso es imposible.

Multiplicando las congruencias $ja \equiv \varepsilon_j m_j \pmod{m}$, resulta

$$\begin{aligned} (a)(2a)(3a)\cdots(\tfrac{p-1}{2}\,a) &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}\, m_1 m_2\cdots m_{(p-1)/2} \pmod{p} \\ \iff \quad a^{(p-1)/2}\left(\frac{p-1}{2}\right)! &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p} \\ \iff \quad a^{(p-1)/2} &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Luego, $a^{(p-1)/2} = \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}$, ya que ambos términos son iguales a ± 1.

De ahí concluímos que $a^{(p-1)/2} = (-1)^s$, donde s es exactamente el número de términos $j \in \{1, 2, \ldots, p-12\}$ tales que $\varepsilon_j = -1$.

invertible módulo p y $0 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$, entonces el primer caso implica $i = j$, mientras que el segundo caso es imposible.

Multiplicando las congruencias $ja \equiv \varepsilon_j m_j \pmod{m}$, resulta

$$\begin{aligned} (a)(2a)(3a)\cdots(\tfrac{p-1}{2}\,a) &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}\, m_1 m_2 \cdots m_{(p-1)/2} \pmod{p} \\ \iff \quad a^{(p-1)/2}\left(\frac{p-1}{2}\right)! &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p} \\ \iff \quad a^{(p-1)/2} &\equiv \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Luego, $a^{(p-1)/2} = \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{(p-1)/2}$, ya que ambos términos son iguales a ± 1.

De ahí concluímos que $a^{(p-1)/2} = (-1)^s$, donde s es exactamente el número de términos $j \in \{1, 2, \ldots, p-12\}$ tales que $\varepsilon_j = -1$.
Este número es precisamente la cardinalidad $|S|$. $\square$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ley de Reciprocidad Cuadrática

El Criterio de Euler ya produce un mecanismo para identificar residuos cuadráticos.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

El Criterio de Euler ya produce un mecanismo para identificar residuos cuadráticos. Vamos a mostrar ahora un resultado más general.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

El Criterio de Euler ya produce un mecanismo para identificar residuos cuadráticos. Vamos a mostrar ahora un resultado más general.

Teorema (Ley de Reciprocidad Cuadrática)

1. *Sea p un primo impar. Entonces*

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1, & \textit{si } p \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ -1, & \textit{si } p \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ley de Reciprocidad Cuadrática

El Criterio de Euler ya produce un mecanismo para identificar residuos cuadráticos. Vamos a mostrar ahora un resultado más general.

Teorema (Ley de Reciprocidad Cuadrática)

1. *Sea p un primo impar. Entonces*

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1, & \textit{si } p \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ -1, & \textit{si } p \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

2. *Sean p, q primos impares distintos. Entonces*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ley de Reciprocidad Cuadrática

El Criterio de Euler ya produce un mecanismo para identificar residuos cuadráticos. Vamos a mostrar ahora un resultado más general.

Teorema (Ley de Reciprocidad Cuadrática)

1. *Sea p un primo impar. Entonces*
$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1, & si\ p \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ -1, & si\ p \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

2. *Sean p, q primos impares distintos. Entonces*
$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

<u>Prueba</u>: (1) La propiedad es consecuencia del Lema de Gauss.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

El Criterio de Euler ya produce un mecanismo para identificar residuos cuadráticos. Vamos a mostrar ahora un resultado más general.

Teorema (Ley de Reciprocidad Cuadrática)

1. *Sea p un primo impar. Entonces*
$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1, & si\ p \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ -1, & si\ p \equiv \pm 3 \pmod 8). \end{cases}$$

2. *Sean p, q primos impares distintos. Entonces*
$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

<u>Prueba</u>: (1) La propiedad es consecuencia del Lema de Gauss. Si $p \equiv 1 \pmod 4$, entonces $p = 4k+1$ y $\frac{p-1}{2} = 2k$.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

El Criterio de Euler ya produce un mecanismo para identificar residuos cuadráticos. Vamos a mostrar ahora un resultado más general.

Teorema (Ley de Reciprocidad Cuadrática)

1. *Sea p un primo impar. Entonces*

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1, & si\ p \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ -1, & si\ p \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

2. *Sean p, q primos impares distintos. Entonces*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

<u>Prueba</u>: (1) La propiedad es consecuencia del Lema de Gauss. Si $p \equiv 1 \pmod 4$, entonces $p = 4k+1$ y $\frac{p-1}{2} = 2k$. Como $1 \leq 2j \leq \frac{p-1}{2}$ para $j \leq k$ y $\frac{p-1}{2} < 2j \leq p-1$ para $k+1 \leq j \leq 2k$,

hay exactamente k elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k : \; 2j > \frac{p-1}{2}\}$.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

hay exactamente k elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k : \; 2j > \frac{p-1}{2}\}$. Pero $p = 4k + 1 \; \Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q + 1$ ó $p = 8q + 5$.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

hay exactamente k elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k : \; 2j > \frac{p-1}{2}\}$. Pero $p = 4k+1 \; \Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q+1$ ó $p = 8q+5$. En el primer caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q}{4} = 2q$, mientras que en el segundo caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q+4}{4} = 2q+1$.

hay exactamente k elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k : \; 2j > \frac{p-1}{2}\}$. Pero $p = 4k+1 \; \Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q+1$ ó $p = 8q+5$. En el primer caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q}{4} = 2q$, mientras que en el segundo caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q+4}{4} = 2q+1$. Así,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^k = \begin{cases} (-1)^{2q} \\ (-1)^{2q+1} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \pmod 8; \\ -1, & \text{si } p \equiv 5 \pmod 8. \end{cases}$$

Ley de Reciprocidad Cuadrática

hay exactamente k elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k : \ 2j > \frac{p-1}{2}\}$. Pero $p = 4k+1 \ \Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q+1$ ó $p = 8q+5$. En el primer caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q}{4} = 2q$, mientras que en el segundo caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q+4}{4} = 2q+1$. Así,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^k = \begin{cases} (-1)^{2q} \\ (-1)^{2q+1} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \pmod 8; \\ -1, & \text{si } p \equiv 5 \pmod 8. \end{cases}$$

Si $p \equiv 3 \pmod 4$, entonces $p = 4k+3$ y $\frac{p-1}{2} = 2k+1$.

hay exactamente k elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k : \ 2j > \frac{p-1}{2}\}$. Pero $p = 4k+1 \ \Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q+1$ ó $p = 8q+5$. En el primer caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q}{4} = 2q$, mientras que en el segundo caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q+4}{4} = 2q+1$. Así,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^k = \begin{cases} (-1)^{2q} \\ (-1)^{2q+1} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \pmod 8; \\ -1, & \text{si } p \equiv 5 \pmod 8. \end{cases}$$

Si $p \equiv 3 \pmod 4$, entonces $p = 4k+3$ y $\frac{p-1}{2} = 2k+1$. Para $1 \leq j \leq k$, tenemos $j \leq 2j \leq \frac{p-1}{2}$ y para $k+1 \leq j \leq 2k+1$, tenemos $\frac{p-1}{2} \leq 2j \leq p-1$.

hay exactamente k elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k : \; 2j > \frac{p-1}{2}\}$. Pero $p = 4k+1 \; \Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q+1$ ó $p = 8q+5$. En el primer caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q}{4} = 2q$, mientras que en el segundo caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q+4}{4} = 2q+1$.
Así,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^k = \begin{cases} (-1)^{2q} \\ (-1)^{2q+1} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \pmod 8; \\ -1, & \text{si } p \equiv 5 \pmod 8. \end{cases}$$

Si $p \equiv 3 \pmod 4$, entonces $p = 4k+3$ y $\frac{p-1}{2} = 2k+1$. Para $1 \leq j \leq k$, tenemos $j \leq 2j \leq \frac{p-1}{2}$ y para $k+1 \leq j \leq 2k+1$, tenemos $\frac{p-1}{2} \leq 2j \leq p-1$.
Ahora, hay exactamente $k+1$ elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k+1 : \; 2j > \frac{p-1}{2}\}$.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

hay exactamente k elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k : \; 2j > \frac{p-1}{2}\}$. Pero $p = 4k+1 \; \Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q+1$ ó $p = 8q+5$. En el primer caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q}{4} = 2q$, mientras que en el segundo caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q+4}{4} = 2q+1$.
Así,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^k = \begin{cases} (-1)^{2q} \\ (-1)^{2q+1} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \pmod 8; \\ -1, & \text{si } p \equiv 5 \pmod 8. \end{cases}$$

Si $p \equiv 3 \pmod 4$, entonces $p = 4k+3$ y $\frac{p-1}{2} = 2k+1$. Para $1 \leq j \leq k$, tenemos $j \leq 2j \leq \frac{p-1}{2}$ y para $k+1 \leq j \leq 2k+1$, tenemos $\frac{p-1}{2} \leq 2j \leq p-1$.
Ahora, hay exactamente $k+1$ elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k+1 : \; 2j > \frac{p-1}{2}\}$.
Como $p = 4k+3 \; \Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q+3$ ó $p = 8q+7$.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

hay exactamente k elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k : \ 2j > \frac{p-1}{2}\}$. Pero $p = 4k + 1 \ \Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q + 1$ ó $p = 8q + 5$. En el primer caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q}{4} = 2q$, mientras que en el segundo caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q+4}{4} = 2q + 1$.
Así,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^k = \begin{cases} (-1)^{2q} \\ (-1)^{2q+1} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \pmod 8; \\ -1, & \text{si } p \equiv 5 \pmod 8. \end{cases}$$

Si $p \equiv 3 \pmod 4$, entonces $p = 4k + 3$ y $\frac{p-1}{2} = 2k + 1$. Para $1 \leq j \leq k$, tenemos $j \leq 2j \leq \frac{p-1}{2}$ y para $k + 1 \leq j \leq 2k + 1$, tenemos $\frac{p-1}{2} \leq 2j \leq p - 1$.
Ahora, hay exactamente $k + 1$ elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k + 1 : \ 2j > \frac{p-1}{2}\}$.
Como $p = 4k + 3 \ \Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q + 3$ ó $p = 8q + 7$. En el primer caso, $k = \frac{p-3}{4} = \frac{8q}{4} = 2q$, mientras que en el segundo caso, $k = \frac{p-3}{4} = \frac{8q+4}{4} = 2q + 1$.

hay exactamente k elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k : \; 2j > \frac{p-1}{2}\}$. Pero $p = 4k+1 \;\Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q+1$ ó $p = 8q+5$. En el primer caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q}{4} = 2q$, mientras que en el segundo caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q+4}{4} = 2q+1$. Así,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^k = \begin{cases} (-1)^{2q} \\ (-1)^{2q+1} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \pmod 8; \\ -1, & \text{si } p \equiv 5 \pmod 8. \end{cases}$$

Si $p \equiv 3 \pmod 4$, entonces $p = 4k+3$ y $\frac{p-1}{2} = 2k+1$. Para $1 \leq j \leq k$, tenemos $j \leq 2j \leq \frac{p-1}{2}$ y para $k+1 \leq j \leq 2k+1$, tenemos $\frac{p-1}{2} \leq 2j \leq p-1$.
Ahora, hay exactamente $k+1$ elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k+1 : \; 2j > \frac{p-1}{2}\}$.
Como $p = 4k+3 \;\Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q+3$ ó $p = 8q+7$. En el primer caso, $k = \frac{p-3}{4} = \frac{8q}{4} = 2q$, mientras que en el segundo caso, $k = \frac{p-3}{4} = \frac{8q+4}{4} = 2q+1$.
De ahí,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{k+1} = \begin{cases} (-1)^{2q+1} \\ (-1)^{2q+2} \end{cases} = \begin{cases} -1, & \text{si } p \equiv 3 \pmod 8; \\ 1, & \text{si } p \equiv 7 \pmod 8. \end{cases}$$

hay exactamente k elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k : \; 2j > \frac{p-1}{2}\}$. Pero $p = 4k+1 \; \Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q+1$ ó $p = 8q+5$. En el primer caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q}{4} = 2q$, mientras que en el segundo caso, $k = \frac{p-1}{4} = \frac{8q+4}{4} = 2q+1$. Así,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^k = \begin{cases} (-1)^{2q} \\ (-1)^{2q+1} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \pmod 8; \\ -1, & \text{si } p \equiv 5 \pmod 8. \end{cases}$$

Si $p \equiv 3 \pmod 4$, entonces $p = 4k+3$ y $\frac{p-1}{2} = 2k+1$. Para $1 \leq j \leq k$, tenemos $j \leq 2j \leq \frac{p-1}{2}$ y para $k+1 \leq j \leq 2k+1$, tenemos $\frac{p-1}{2} \leq 2j \leq p-1$.
Ahora, hay exactamente $k+1$ elementos en el conjunto $S = \{1 \leq j \leq 2k+1 : \; 2j > \frac{p-1}{2}\}$.
Como $p = 4k+3 \; \Rightarrow p$ es de la forma $p = 8q+3$ ó $p = 8q+7$. En el primer caso, $k = \frac{p-3}{4} = \frac{8q}{4} = 2q$, mientras que en el segundo caso, $k = \frac{p-3}{4} = \frac{8q+4}{4} = 2q+1$.
De ahí,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{k+1} = \begin{cases} (-1)^{2q+1} \\ (-1)^{2q+2} \end{cases} = \begin{cases} -1, & \text{si } p \equiv 3 \pmod 8; \\ 1, & \text{si } p \equiv 7 \pmod 8. \end{cases}$$

(2) Para la segunda parte, vamos a mostrar que

Ley de Reciprocidad Cuadrática

$$\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} = \sum_{1\leq i\leq \frac{q-1}{2}} \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor + \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor. \tag{4}$$

y que

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{1\leq i\leq \frac{q-1}{2}} \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor}, \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor}. \tag{5}$$

Ley de Reciprocidad Cuadrática

$$\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}=\sum_{1\leq i\leq\frac{q-1}{2}}\left\lfloor\frac{ip}{q}\right\rfloor+\sum_{1\leq i\leq\frac{p-1}{2}}\left\lfloor\frac{iq}{p}\right\rfloor. \tag{4}$$

y que

$$\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\sum_{1\leq i\leq\frac{q-1}{2}}\left\lfloor\frac{ip}{q}\right\rfloor},\qquad \text{y} \qquad \left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\sum_{1\leq i\leq\frac{p-1}{2}}\left\lfloor\frac{iq}{p}\right\rfloor}. \tag{5}$$

La fórmula (4) es apenas un conteo: el lado izquierdo es el número de puntos con coorenadas enteras, en el interior del rectángulo con vértices $(0,0)$, $(\frac{p}{2},0)$, $(0,\frac{q}{2})$ y $(\frac{p}{2},\frac{q}{2})$.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

$$\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} = \sum_{1\leq i\leq\frac{q-1}{2}}\left\lfloor\frac{ip}{q}\right\rfloor + \sum_{1\leq i\leq\frac{p-1}{2}}\left\lfloor\frac{iq}{p}\right\rfloor. \tag{4}$$

y que

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{1\leq i\leq\frac{q-1}{2}}\left\lfloor\frac{ip}{q}\right\rfloor}, \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum_{1\leq i\leq\frac{p-1}{2}}\left\lfloor\frac{iq}{p}\right\rfloor}. \tag{5}$$

La fórmula (4) es apenas un conteo: el lado izquierdo es el número de puntos con coorenadas enteras, en el interior del rectángulo con vértices $(0,0)$, $(\frac{p}{2},0)$, $(0,\frac{q}{2})$ y $(\frac{p}{2},\frac{q}{2})$. Por otro lado, la primer suma del lado derecho cuenta el número de tales puntos que están arriba de la diagonal $y=\frac{p}{q}x$ en dicho rectángulo, mientras que la segunda suma cuenta el número de puntos abajo de esta diagonal.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

$$\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} = \sum_{1\leq i\leq \frac{q-1}{2}} \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor + \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor. \tag{4}$$

y que

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{1\leq i\leq \frac{q-1}{2}} \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor}, \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor}. \tag{5}$$

La fórmula (4) es apenas un conteo: el lado izquierdo es el número de puntos con coorenadas enteras, en el interior del rectángulo con vértices $(0,0)$, $(\frac{p}{2},0)$, $(0,\frac{q}{2})$ y $(\frac{p}{2},\frac{q}{2})$. Por otro lado, la primer suma del lado derecho cuenta el número de tales puntos que están arriba de la diagonal $y=\frac{p}{q}x$ en dicho rectángulo, mientras que la segunda suma cuenta el número de puntos abajo de esta diagonal.

(Como p y q son primos distintos, no hay puntos con coordenadas enteras sobre la diagonal).

Ley de Reciprocidad Cuadrática

$$\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} = \sum_{1\leq i\leq \frac{q-1}{2}} \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor + \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor. \tag{4}$$

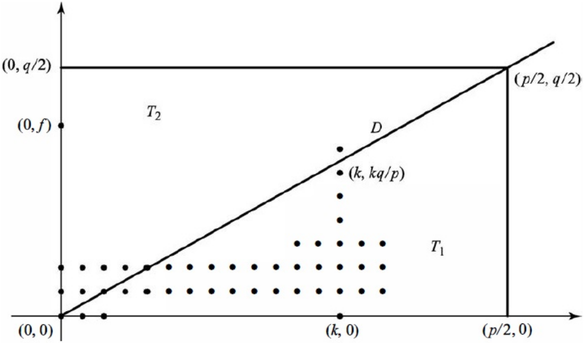
y que

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{1\leq i\leq \frac{q-1}{2}} \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor}, \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor}. \tag{5}$$

La fórmula (4) es apenas un conteo: el lado izquierdo es el número de puntos con coorenadas enteras, en el interior del rectángulo con vértices $(0,0)$, $(\frac{p}{2},0)$, $(0,\frac{q}{2})$ y $(\frac{p}{2},\frac{q}{2})$. Por otro lado, la primer suma del lado derecho cuenta el número de tales puntos que están arriba de la diagonal $y=\frac{p}{q}x$ en dicho rectángulo, mientras que la segunda suma cuenta el número de puntos abajo de esta diagonal.

(Como p y q son primos distintos, no hay puntos con coordenadas enteras sobre la diagonal). Por ejemplo, en la primera suma, la cantidad $\left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor$ representa la cantidad de puntos sobre la recta $y=i$, arriba de la diagonal $y=\frac{p}{q}x$.

Ley de Reciprocidad Cuadrática



Conteo de puntos enteros en la Ley de Reciprocidad Cuadrática.

El número de puntos enteros en el intervalo $0 < x < \frac{iq}{p}$ es $\lfloor \frac{iq}{p} \rfloor$. Así, hay $\lfloor \frac{iq}{p} \rfloor$ puntos sobre $y = i$, arriba de la diagonal (en la región T_2. La otra cuenta es similar.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

Finalmente, para mostrar (5), basta verificar que $\sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor \equiv s \pmod 2$,

Ley de Reciprocidad Cuadrática

Finalmente, para mostrar (5), basta verificar que $\sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor \equiv s \pmod 2$, donde s es como en el lema de Gauss, aplicado para $a = q$.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

Finalmente, para mostrar (5), basta verificar que $\sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor \equiv s \pmod 2$, donde s es como en el lema de Gauss, aplicado para $a = q$.

Sea r_i el residuo de la división de iq entre p, de modo que $iq = \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor p + r_i$.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

Finalmente, para mostrar (5), basta verificar que $\sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor \equiv s \pmod 2$, donde s es como en el lema de Gauss, aplicado para $a = q$.

Sea r_i el residuo de la división de iq entre p, de modo que $iq = \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor p + r_i$. Sumando y usando la notación en el Lema de Gauss, obtenemos

$$q \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} i = p \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor + \sum_{r_i<p/2} m_i + \sum_{r_i>p/2} (p - m_i).$$

Ley de Reciprocidad Cuadrática

Finalmente, para mostrar (5), basta verificar que $\sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor \equiv s \pmod 2$, donde s es como en el lema de Gauss, aplicado para $a = q$.

Sea r_i el residuo de la división de iq entre p, de modo que $iq = \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor p + r_i$. Sumando y usando la notación en el Lema de Gauss, obtenemos

$$q \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} i = p \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor + \sum_{r_i<p/2} m_i + \sum_{r_i>p/2} (p - m_i).$$

Como p y q son impares, módulo 2 tenemos

$$\sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} i \equiv \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor + \sum_{r_i<p/2} m_i + \sum_{r_i>p/2} (1 - m_i) \pmod 2,$$

Finalmente, para mostrar (5), basta verificar que $\sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor \equiv s \pmod 2$, donde s es como en el lema de Gauss, aplicado para $a = q$.

Sea r_i el residuo de la división de iq entre p, de modo que $iq = \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor p + r_i$. Sumando y usando la notación en el Lema de Gauss, obtenemos

$$q \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} i = p \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor + \sum_{r_i<p/2} m_i + \sum_{r_i>p/2} (p - m_i).$$

Como p y q son impares, módulo 2 tenemos

$$\sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} i \equiv \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor + \sum_{r_i<p/2} m_i + \sum_{r_i>p/2} (1 - m_i) \pmod 2,$$

y como $\{m_1, m_2, \ldots, m_{\frac{p-1}{2}}\} = \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$, se concluye que

$$\sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} i \equiv \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor + \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} i + \sum_{r_i>p/2} 1 \pmod 2 \iff \sum_{1\leq i\leq \frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor \equiv s \pmod 2. \square$$

Ley de Reciprocidad Cuadrática

Corolario

Si p y q son primos impares distintos, entonces

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \begin{cases} 1, & si\ p \equiv 1 \pmod 4, ó\ q \equiv 1 \pmod 4; \\ -1, & si\ p \equiv q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Ley de Reciprocidad Cuadrática

Corolario

Si p y q son primos impares distintos, entonces

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \begin{cases} 1, & si\ p \equiv 1 \pmod 4, \acute{o}\ q \equiv 1 \pmod 4; \\ -1, & si\ p \equiv q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Prueba: Basta ver que si $p = 4k + 1$, el exponente $\frac{p-1}{2} = 2k$ es par. Similarmente para el caso $q = 4k + 1$.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

Corolario

Si p y q son primos impares distintos, entonces

$$\Big(\frac{p}{q}\Big)\Big(\frac{q}{p}\Big) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \pmod 4, \text{ ó } q \equiv 1 \pmod 4; \\ -1, & \text{si } p \equiv q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Prueba: Basta ver que si $p = 4k + 1$, el exponente $\frac{p-1}{2} = 2k$ es par. Similarmente para el caso $q = 4k + 1$. Por el contrario, si $p = 4k + 3$ y $q = 4j + 3$, ambos exponentes son impares. □

Corolario

Si p y q son primos impares distintos, entonces

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \begin{cases} 1, & si\ p \equiv 1 \pmod 4, ó\ q \equiv 1 \pmod 4; \\ -1, & si\ p \equiv q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Prueba: Basta ver que si $p = 4k + 1$, el exponente $\frac{p-1}{2} = 2k$ es par. Similarmente para el caso $q = 4k + 1$. Por el contrario, si $p = 4k + 3$ y $q = 4j + 3$, ambos exponentes son impares. $\square$

Corolario

Si p y q son primos impares distintos, entonces

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right), & si\ p \equiv 1 \pmod 4, ó\ q \equiv 1 \pmod 4; \\ -\left(\frac{q}{p}\right), & si\ p \equiv q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ley de Reciprocidad Cuadrática

Ejemplo: Calcular $\left(\frac{29}{53}\right)$.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

Ejemplo: Calcular $\left(\frac{29}{53}\right)$.

De la Ley de Reciprocidad Cuadrática, tenemos -0.1cm

$$\begin{aligned}
\left(\frac{29}{53}\right) &= \left(\frac{53}{29}\right)(-1)^{\frac{29-1}{2}\cdot\frac{53-1}{2}} = \left(\frac{53}{29}\right)(-1)^{14\cdot 26} = \left(\frac{53}{29}\right)\\
&= \left(\frac{24}{29}\right) = \left(\frac{2^3\cdot 3}{29}\right) = \left(\frac{2}{29}\right)^3\left(\frac{3}{29}\right) = \underbrace{\left(\frac{2}{29}\right)^2}_{=1}\left(\frac{2}{29}\right)\left(\frac{3}{29}\right)\\
&= \left(\frac{2}{29}\right)\left(\frac{3}{29}\right) = \left(\frac{2}{29}\right)\left(\frac{29}{3}\right)(-1)^{\frac{3-1}{2}\cdot\frac{29-1}{2}} = \left(\frac{2}{29}\right)\left(\frac{29}{3}\right)(-1)^{1\cdot 14}\\
&= \left(\frac{2}{29}\right)\left(\frac{29}{3}\right) = \left(\frac{2}{29}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = (-1)^{\frac{29^2-1}{8}}(-1)^{\frac{3^2-1}{2}}\\
&= (-1)^{105}(-1)^{1} = (-1)^{106} = 1.
\end{aligned}$$

Esto muestra que 29 es residuo cuadrático módulo 53.

Ley de Reciprocidad Cuadrática

Ejemplo: Determinar si 90 es residuo cuadrático módulo 1019.

Como $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, tenemos que

$$\left(\frac{90}{1019}\right) = \left(\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5}{1019}\right) = \left(\frac{2}{1019}\right)\underbrace{\left(\frac{3^2}{1019}\right)}_{=1}\left(\frac{5}{1019}\right)$$

Ley de Reciprocidad Cuadrática

Ejemplo: Determinar si 90 es residuo cuadrático módulo 1019.

Como $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{90}{1019}\right) &= \left(\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5}{1019}\right) = \left(\frac{2}{1019}\right) \underbrace{\left(\frac{3^2}{1019}\right)}_{=1} \left(\frac{5}{1019}\right) \\
&= \left(\frac{2}{1019}\right)\left(\frac{5}{1019}\right) = \left(\frac{2}{1019}\right)\left(\frac{1019}{5}\right)(-1)^{\frac{5-1}{2}\cdot\frac{1019-1}{2}} \\
&= \left(\frac{2}{1019}\right)\left(\frac{1019}{5}\right)(-1)^{2\cdot 509} = \left(\frac{2}{1019}\right)\left(\frac{1019}{5}\right) = \left(\frac{2}{1019}\right)\left(\frac{4}{5}\right) \\
&= \left(\frac{2}{1019}\right)\underbrace{\left(\frac{2^2}{5}\right)}_{=1} = \left(\frac{2}{1019}\right) = (-1)^{\frac{1019^2-1}{8}} = (-1)^{129{,}795}
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Determinar si 90 es residuo cuadrático módulo 1019.

Como $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{90}{1019}\right) &= \left(\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5}{1019}\right) = \left(\frac{2}{1019}\right)\underbrace{\left(\frac{3^2}{1019}\right)}_{=1}\left(\frac{5}{1019}\right) \\
&= \left(\frac{2}{1019}\right)\left(\frac{5}{1019}\right) = \left(\frac{2}{1019}\right)\left(\frac{1019}{5}\right)(-1)^{\frac{5-1}{2}\cdot\frac{1019-1}{2}} \\
&= \left(\frac{2}{1019}\right)\left(\frac{1019}{5}\right)(-1)^{2\cdot 509} = \left(\frac{2}{1019}\right)\left(\frac{1019}{5}\right) = \left(\frac{2}{1019}\right)\left(\frac{4}{5}\right) \\
&= \left(\frac{2}{1019}\right)\underbrace{\left(\frac{2^2}{5}\right)}_{=1} = \left(\frac{2}{1019}\right) = (-1)^{\frac{1019^2-1}{8}} = (-1)^{129{,}795} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Esto muestra que 90 no es residuo cuadrático módulo 1019.