Árboles de Derivación (parse trees)

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Computación **(Aula 13) 31.agosto.2022**

Definiciones

Relación entre derivaciones

leftmost y *rightmost*

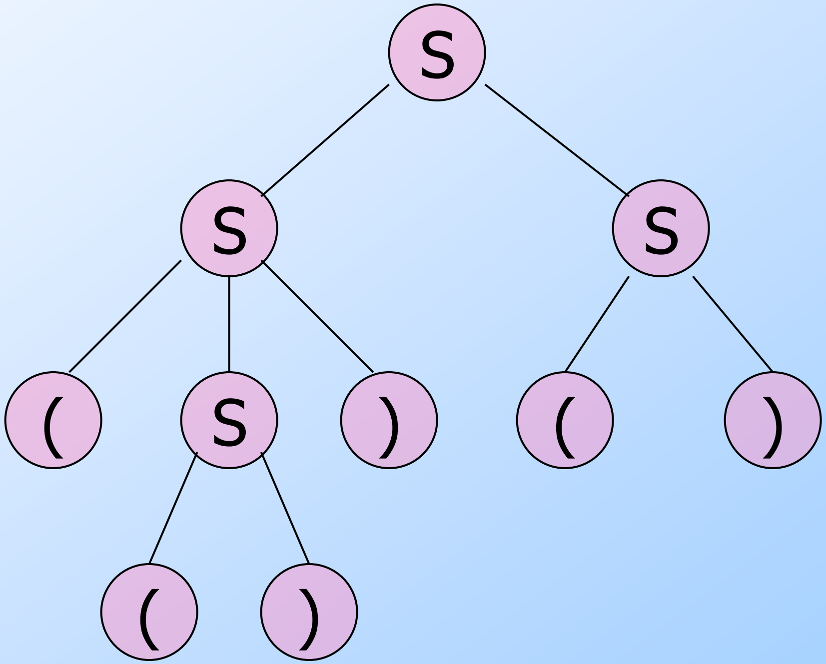
Ambigüedad en Gramáticas

Árboles de Derivación

- *Parse trees* : son árboles etiquetados por los símbolos de una CFG.
- Hojas: (nodos terminales), son etiquetados por un terminal o por ε.
- Nodos interiores: son etiquetados por una variables.
  - Los nodos hijos son etiquetados por por el lado derecho de una regla de producción.
- Nodo raíz: etiquetado por el símbolo inicial.

Ejemplo: Parse Tree

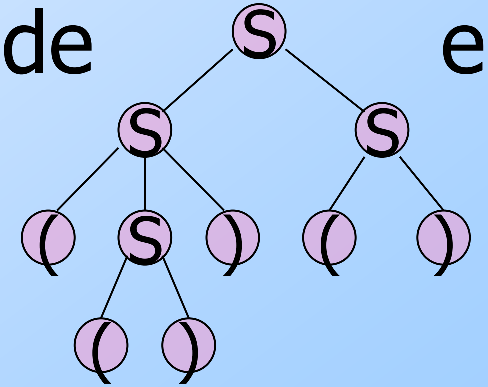
$S \rightarrow SS \mid (S) \mid ()$



Producción de un Parse Tree

- Concatenación de las etiquetas de las hojas, en orden de izquierda a derecha
  - Esto es, en el orden de un pre-orden transversal.

se llama la *producción* de un parse tree.

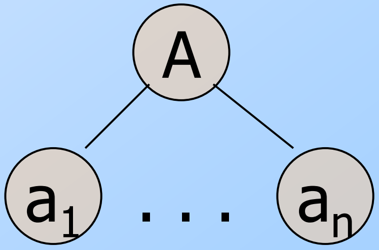
- Ejemplo: la prod. de  es (())()

Árboles y derivaciones *leftmost*

- **Propiedad**: Para cada parse tree, existe una there una única derivación a la izquierda, y una única deirvación a la derecha, que lo produce.
- Mostraremos:
  1. Si hay un parse tree con raíz etiquetada por A y producción w, entonces $A =>^*_{lm} w$.
  2. Si $A =>^*_{lm} w$, entonces hay un parse tree con raíz A y producción w.

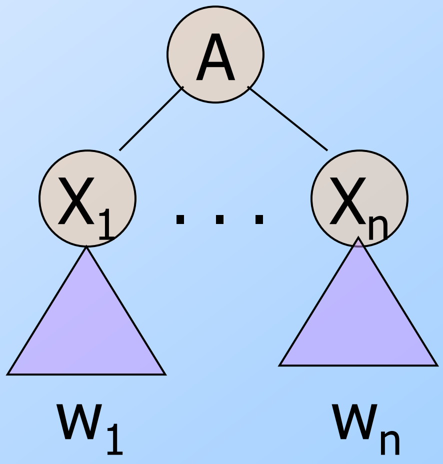
Prueba – Parte 1

- Por inducción sobre la *altura* del árbol (longitud del mayor trayecto a partir de la raíz).
- Base: Altura1. El árbol se ve
- $A \to a_1 \ldots a_n$ es su producción.
- Luego, $A =>^*_{lm} a_1 \ldots a_n$.



Prueba – Inducción

- Asuma (1) para árboles del altura < h, y suponga que T es de altura h:
- Por HI, $X_i \Rightarrow^*_{lm} w_i$.
  - Nota: si X_i es terminal, entonces $X_i = w_i$.



- Así, A $\Rightarrow_{lm} X_1 \dots X_n$
  $\Rightarrow^*_{lm} w_1X_2 \dots X_n$
  $\Rightarrow^*_{lm} w_1w_2X_3 \dots X_n$
  $\Rightarrow^*_{lm} \dots \Rightarrow^*_{lm} w_1 \dots w_n$.

Prueba: Parte 2

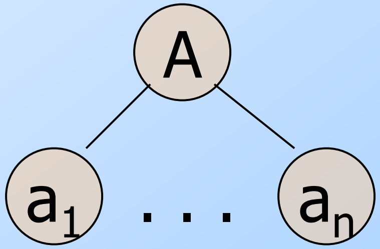
- Dada la derivación *leftmost* de una cadena terminal, ahora debemos mostrar le existencia de un árbol sintáctico que produce dicha cadena.
- La prueba, de nuevo, es por inducción, ahora sobre la longitud de la derivación.

Parte 2 – Base

- Si $A =>^*_{lm} a_1 \ldots a_n$ es una derivación en un solo paso, esto es

  $$A =>_{lm} a_1 \ldots a_n$$

  entonces debemos tener un árbol de derivación

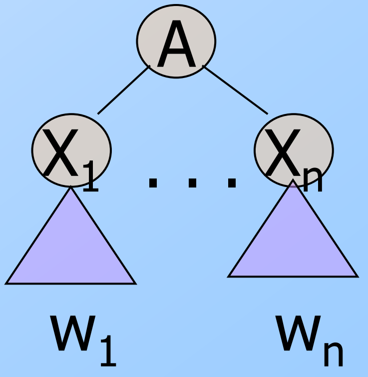


Parte 2 – Inducción

- Asuma (2) para derivaciones que consisten de menos de k > 1 pasos, y sea $A \Rightarrow^*_{lm} w$ una derivación en k-pasos.
- El primer paso es $A \Rightarrow_{lm} X_1 \ldots X_n$.
- Punto clave: w puede dividirse de forma que la primera parte es derivada de X_1; la siguiente, derivada de X_2, etc.
  - Si X_i es terminal, entonces $w_i = X_i$.

Inducción – (2)

- Esto es, $X_i =>^*_{lm} w_i$ para cada i tal que X_i es una variable.
  - Además, cada derivación $X_i =>^*_{lm} w_i$ toma a lo sumo k pasos.
- Por la HI, si X_i es una variable, existe un árbol con raíz X_i y producción w_i.
- Portanto, tenemos un árbol



Árboles y derivaciones *rightmost*

- Para la prueba de la existencia de derivaciones *rightmost*, las ideas son esencialmente las imagen especular de la prueba para derivaciones *leftmost*.

- Se deja como ejercicio!

Árboles y derivaciones

- Nota:
  La prueba de que se puede obtener un arbol sintáctico a partir de una derivación *leftmost*, realmente no depende de que sea "*leftmost*".
- Primer paso: debe ser A => $X_1 \ldots X_n$.
- w todavía puede dividirse en porciones, con la primera derivada de X_1, la siguiente de X_2, y demás.

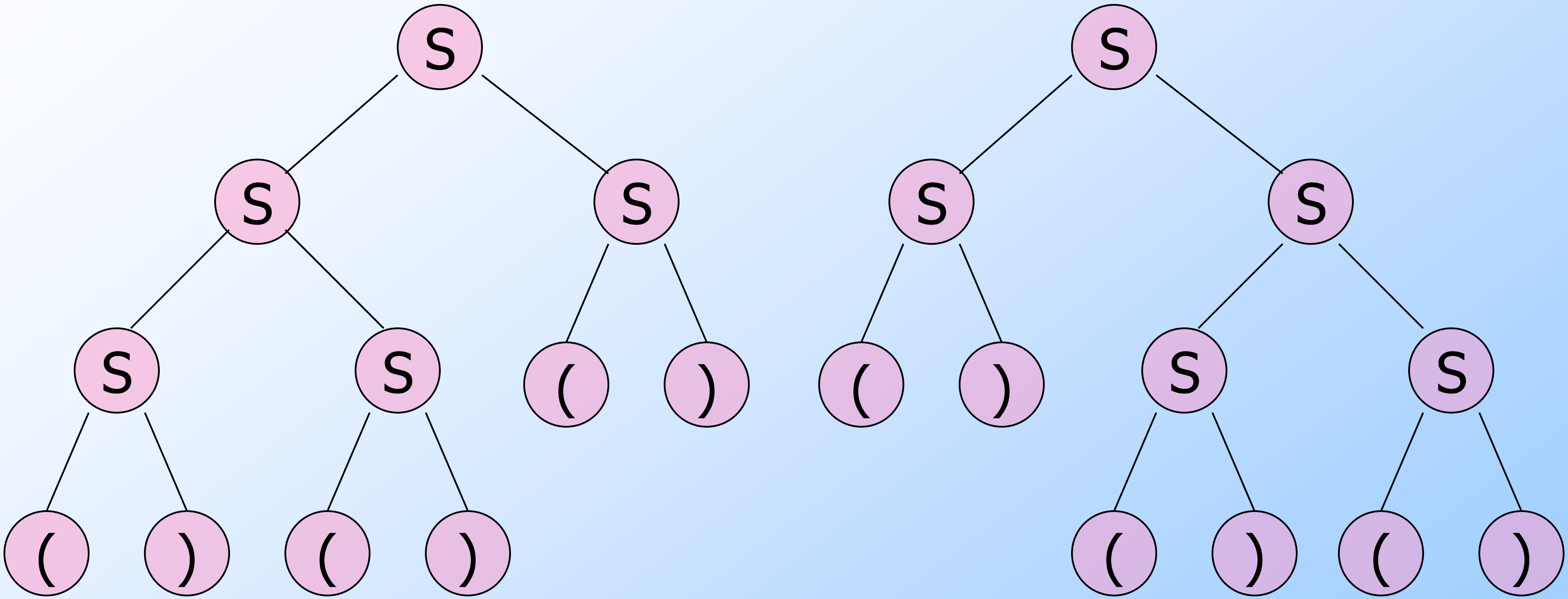
Gramáticas Ambiguas

- Una CFG G es *ambigua* si existe una cadena w en el lenguaje L(G) que es producida por dos o más árboles.
- Ejemplo:

$$S \rightarrow SS \mid (S) \mid ()$$

- Damos dos ejemplos de árboles que producen la cadena ()()().

Ejemplo – ()()()



Ambigüedad y Derivaciones *leftmost* y *rightmost*

- Si hay dos árboles sintácticos distintos, deben producir dos derivaciones *leftmost* diferentes, debido a la construcción dada en la prueba.
- Similarmente, dos derivaciones *leftmost* diferentes producen árboles distintos en la parte (2) de la prueba.
- Lo mismo ocurre con las derivaciones *rightmost*.

Ambigüedad, etc. – (2)

- Tenemos definiciones equivalentes para una gramática ambigua:
  Una CFG G es ambigua si
  1. Existe una cadena w en L(G) que posee dos derivaciones *leftmost* distintas.
  2. Existe una cadena w en L(G) que posee dos derivaciones *rightmost* distintas.

Ambigüedad es una propiedad de las gramáticas

- Para el lenguaje de las cadenas con paréntesis-balanceados, podemos dar otra CFG, que es no ambigua:

$B \rightarrow (RB \mid \epsilon$

$R \rightarrow) \mid (RR$

B, el símbolo inicial, deriva cadenas balanceadas.

R genera cadenas que tienen uno o más paréntesis derechos que izquierdos.

Ejemplo: Gramática no ambigua

$$B \rightarrow (RB \mid \epsilon \qquad R \rightarrow) \mid (RR$$

- Ejercicio!
  Construir una derivación *leftmost* paralas siguientes cadenas de paréntesis balanceados:

  (())()   ()()()

  - Si deseamos expandir B, usar B → (RB si el siguiente símbolo es "(" y ϵ al final.
  - Si deseamos expandir R, uar R →) si el siguiente símbolo es ")" and (RR si es "(".

Proceso de *Parsing*

Remaining Input:

(())()

Next symbol

Steps of leftmost derivation:

B

B -> (RB | ϵ   R ->) | (RR

Proceso de *Parsing*

Remaining Input:

())()

Next symbol

Steps of leftmost derivation:

B

(RB

B -> (RB | ϵ   R ->) | (RR

Proceso de *Parsing*

Remaining Input:

))()

Next symbol

Steps of leftmost derivation:

B

(RB

((RRB

B -> (RB | ϵ   R ->) | (RR

Proceso de *Parsing*

Remaining Input:

)()

Next symbol

Steps of leftmost derivation:

B

(RB

((RRB

(()RB

B -> (RB | ϵ   R ->) | (RR

Proceso de *Parsing*

Remaining Input:

()

Next symbol

Steps of leftmost derivation:

B

(RB

((RRB

(()RB

(())B

B -> (RB | ϵ   R ->) | (RR

Proceso de *Parsing*

Remaining Input:

)

Next symbol

Steps of leftmost derivation:

B

(RB

((RRB

(()RB

(())B

(())(RB

B -> (RB | ϵ   R ->) | (RR

Proceso de *Parsing*

Remaining Input:

Next symbol

Steps of leftmost derivation:

B

(RB

((RRB

(()RB

(())B

(())(RB

(())()B

B -> (RB | ϵ R ->) | (RR

Proceso de *Parsing*

Remaining Input:

↑

Next symbol

Steps of leftmost derivation:

B

(RB

((RRB

(()RB

(())B

(())(RB

(())()B

(())()

B -> (RB | ϵ   R ->) | (RR

Gramáticas LL(1)

- Nota importante: Las gramáticas como
  $B \rightarrow (RB \mid \epsilon \qquad R \rightarrow \,) \mid (RR$,
  donde siempre se puede calcular la producción a usar en una derivación *leftmost* al escanear la cadena dada de izquierda a derecha y mirar solo el siguiente símbolo, se llaman LL(1).
  - LL(1) = "Leftmost derivation, left-to-right scan, one symbol of lookahead."

Gramáticas LL(1)

- Muchos lenguajes de programación poseen gramáticas LL(1).
- Las gramáticas LL(1) nunca son ambiguas.

Ambigüedad Inherente

- Sería muy útil si, para toda gramática ambigua, existiera un método para fijar o remover la ambigüedad, así como se hizo para el caso de la gramática de paréntesis-balancedos.
- Desafortunadamente, ciertas CFLs son *inherentemente ambiguas* : todas las gramáticas del lenguaje es ambigua.

Ejemplo: Ambigüedad inherente

- $L = \{0^i1^j2^k : i = j \text{ ó } j = k\}$ es inherentemente ambiguo.
- ¿Por qué?
  Intuitivamente al menos una de las cadenas de la forma $0^n1^n2^n$ es generada por dos árboles sintácticos distintos, uno basado en verificar los 0s y 1s, y otros basado en verificar los 1s y 2s.

Ejemplo: Ambigüedad inherente

$S \rightarrow AB \mid CD$

$A \rightarrow 0A1 \mid 01$

$B \rightarrow 2B \mid 2$

$C \rightarrow 0C \mid 0$

$D \rightarrow 1D2 \mid 12$

A genera igual número de 0's y 1's

B genera cualquier número de 2's

C genera cualquier número de 0's

D genera igual número de 1's y 2's

Hay dos derivaciones diferentes para cada cadena de la forma $0^n1^n2^n$ (igual número de 0's, 1's, 2's.) *e.g.*

S => AB => 01B =>012

S => CD => 0D => 012