

Propiedades de Decisión de los Lenguajes Regulares

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Computación

(Aula 09) 22.agosto.2022

Discusión general de “Propiedades”
Algoritmos para
Pertenencia, Vacuidad, Finitud, Etc.

Propiedad: Equivalencia

- Dados lenguajes regulares L y M , cómo verificar si $L = M$?
- Hay un algoritmo que envuelve la construcción del *producto de dos DFA* a partir de los DFA para L y M .
- Estos DFA's tienen conjuntos de estados Q y R , respectivamente.
- El DFA producto posee estados $Q \times R$.
 - res $[q, r]$ con $q \in Q, r \in R$.

DFA Producto

$$A_L = (Q, \Sigma, q_0, F_L, \delta_L), A_M = (R, \Sigma, r_0, F_M, \delta_M)$$

Construimos el producto:

- Estado inicial = $[q_0, r_0]$

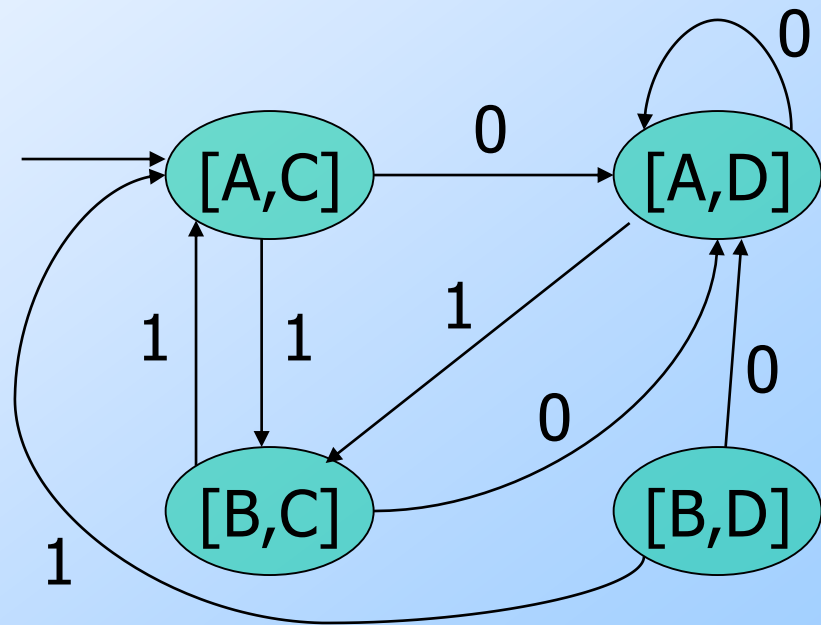
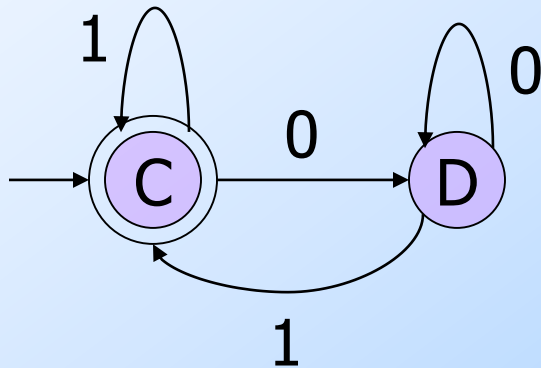
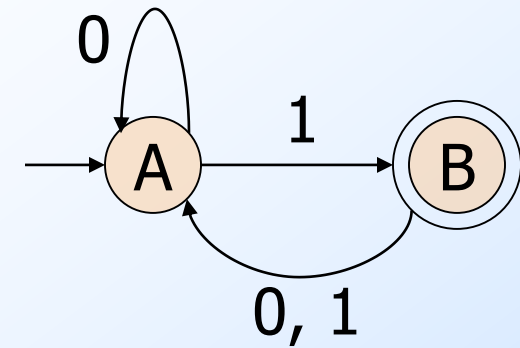
- **Transiciones:**

$$\delta([q, r], a) = [\delta_L(q, a), \delta_M(r, a)]$$

- δ_L, δ_M son las funciones de transición de los autómatas de L y M, resp.

- Básicamente, simulamos el producto en moviéndonos en dos componentes.

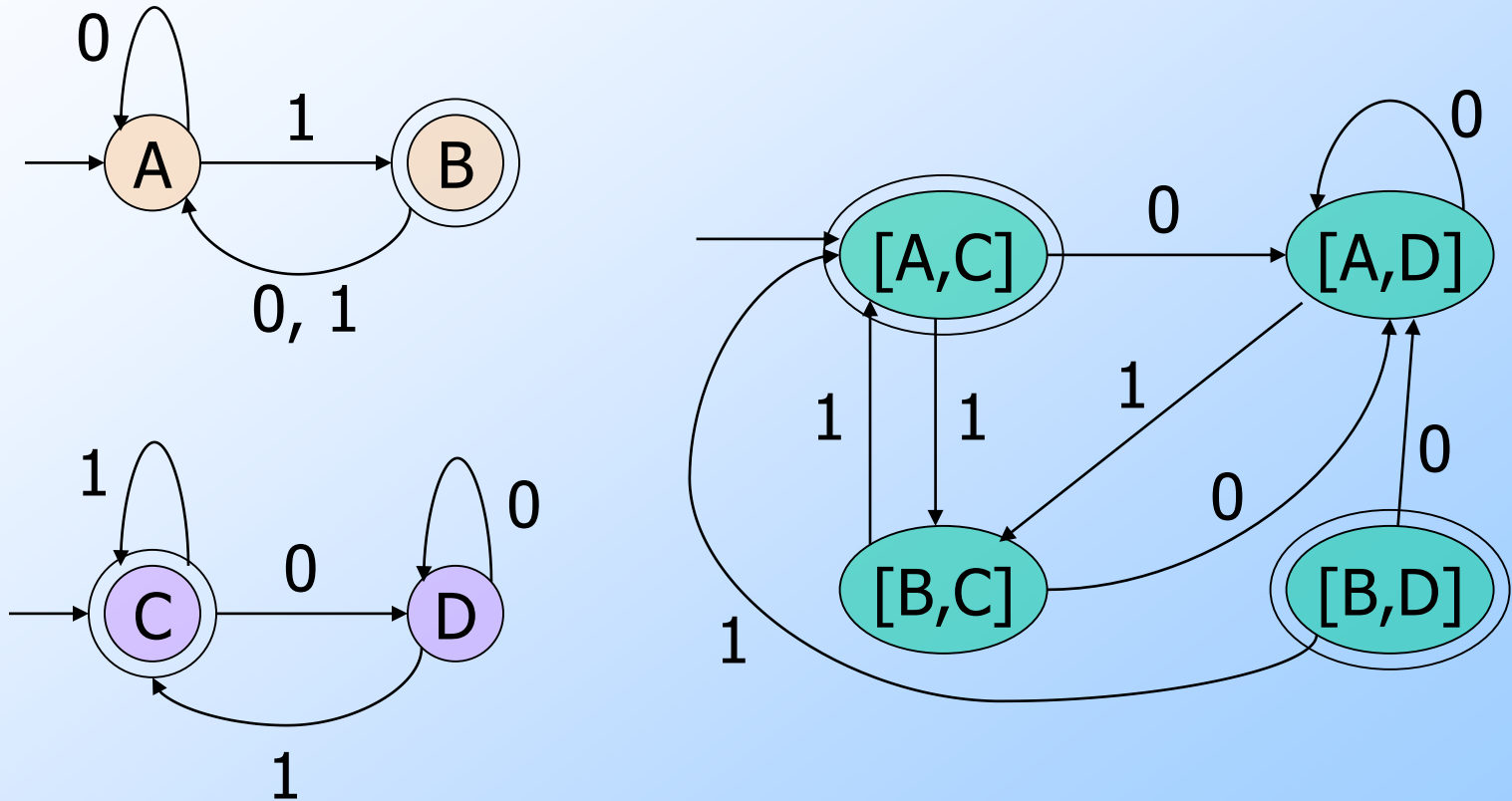
Ejemplo: DFA Producto



Algoritmo de Equivalencia

- Los estados finales del DFA producto corresponden a aquellos pares $[q, r]$ tales que exactamente uno de q ó r son estados finales de su respectivo DFA (pero no ambos).
- Así, el autómata producto acepta w si, y sólo si, w está en exactamente uno de los lenguajes L ó M (pero no ambos).

Ejemplo: Equivalencia



Algoritmo de Equivalencia

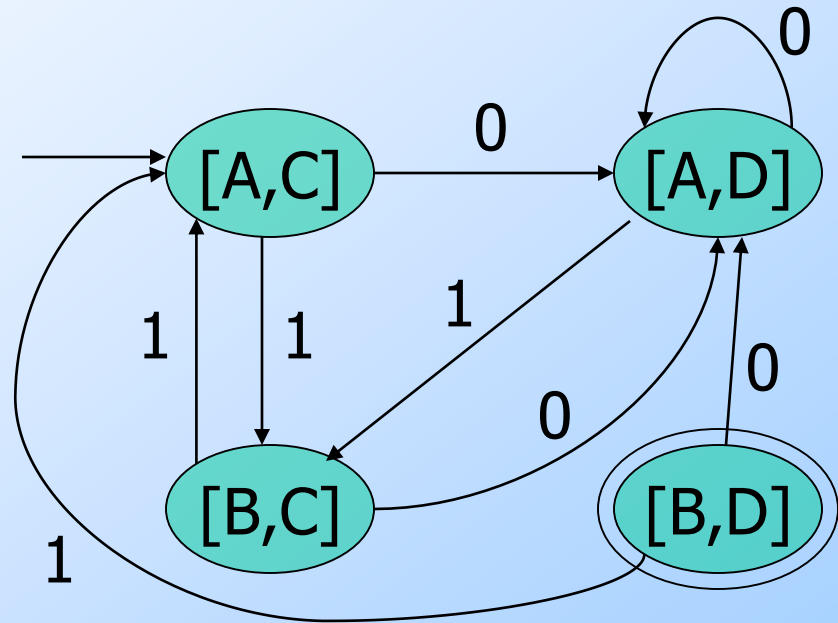
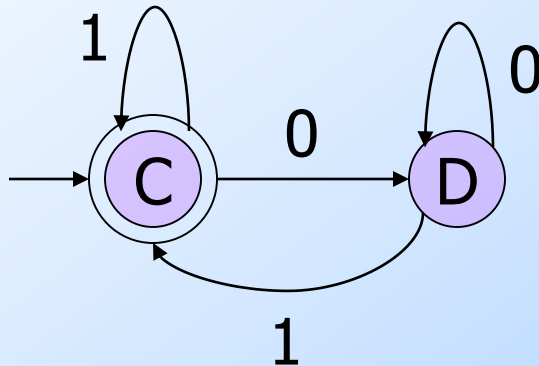
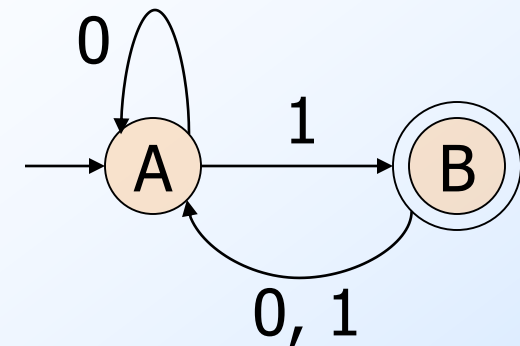
- El lenguaje asociado al DFA producto es vacío si, y sólo si, $L = M$.
- Si recordamos, ya tenemos un algoritmo para evaluar si el lenguaje generado por un DFA es vacío.

Propiedad: Inclusión

- Dados lenguajes regulares L y M , está $L \subseteq M$?
- Tenemos un algoritmo para esto, el cual también usa el DFA producto.
- ¿Cómo definiría los estados finales $[q, r]$ del producto para que el lenguaje aceptado sea vacío, si y sólo si, $L \subseteq M$?

Respuesta: q es final; r no lo es.

Ejemplo: Inclusión



Nota: el único estado final es inaccesible, de modo que el lenguaje es vacío, y $L \subseteq M$.

DFA minimal

- En principio, ya que podemos verificar la equivalencia de DFAs, dado un autómata A podemos hallar el DFA con la menor cantidad de estados, que acepta el lenguaje $L(A)$.
- 1a Solución: Testar todos los DFAs menores a ver si son equivalentes con A .
- Es un muy mal algoritmo.

Minimización Eficiente de estados

- Construir una tabla con todos los pares de estados.
- Si hallamos una cadena *distinguida*, esto es dos estados (que torna exactamente uno de ellos en un estado de aceptación), marcamos ese par.
- El algoritmo es una recursión sobre la longitud de la menor cadena distinguida.

Minimización de estados

- Eliminamos inaccesibles desde q_0 .
- Base: Marcamos $[q, r]$ si exactamente uno de ellos es un estado final.
- Inducción: Marcamos $[q, r]$ si existe algún símbolo a tal que $[\delta(q,a), \delta(r,a)]$ está marcado.
- Cuando ya no hay más marcas posibles, los pares no marcados son equivalentes y pueden fusionarse en un solo estado.

Transitividad de “Indistinguibles”

- Si el estado p es indistinguible de q , y q es indistinguible de r , entonces p es indistinguible de r .
- **Prueba:** La salida (aceptar o no aceptar) de p y q en la entrada w es la misma, y la salida de q y r en la entrada w es la misma, así que es la misma salida para p y r .

Construcción del DFA Minimal

- Suponga q_1, \dots, q_k son estados indistinguibles.
- Los reemplazamos por un estado q .
- Luego, $\delta(q_1, a), \dots, \delta(q_k, a)$ son todos estados indistinguibles.
 - **Punto clave:** caso contrario, deberíamos haber marcado al menos un par más.
- Sea $\delta(q, a) =$ es estado representativo de ese grupo.

Ejemplo: Minimización

	r	b
→ {1}	{2,4}	{5}
{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
{1,3,5,7}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
* {1,3,7,9}	{2,4,6,8}	{5}
* {1,3,5,7,9}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}

	r	b
→ A	B	C
B	D	E
C	D	F
D	D	G
E	D	G
* F	D	C
* G	D	G

La misma
tabla pero
con labels
más
simples.

Recuerdan esta autómatas? Fue el que construimos como ejemplo del tablero en la construcción de un AFN a un AFD.

Ejemplo: Minimización

	r	b
→	A B	C
	B D	E
	C D	F
	D D	G
	E D	G
*	F D	C
*	G D	G

	G	F	E	D	C	B
A	X	X				
B	X	X				
C	X	X				
D	X	X				
E	X	X				
F						

Comenzar con marcas para los pares con uno de los estados finales F ó G.

Ejemplo: Minimización

	r	b
→	A B	C
	B D	E
	C D	F
	D D	G
	E D	G
*	F D	C
*	G D	G

	G	F	E	D	C	B
A	X	X				
B	X	X				
C	X	X				
D	X	X				
E	X	X				
F						

El input r no ayuda, ya que el par $[B, D]$ no está marcado.

Ejemplo: Minimización

	r	b
→ A	B	C
B	D	E
C	D	F
D	D	G
E	D	G
* F	D	C
* G	D	G

	G	F	E	D	C	B
A	X	X	X	X	X	
B	X	X	X	X	X	
C	X	X				
D	X	X				
E	X	X				
F	X					

Pero el input b distingue a $\{A, B, F\}$ de $\{C, D, E, G\}$. Por ejemplo, $[A, C]$ es marcado ya que $[C, F]$ lo es.

Ejemplo: Minimización

	r	b
→ A	B	C
B	D	E
C	D	F
D	D	G
E	D	G
* F	D	C
* G	D	G

	G	F	E	D	C	B
A	X	X	X	X	X	
B	X	X	X	X	X	
C	X	X	X	X		
D	X	X				
E	X	X				
F	X					

[C, D] y [C, E] son marcados ya que las transiciones en b al par marcado [F, G].

Ejemplo: Minimización

	r	b
→ A	B	C
B	D	E
C	D	F
D	D	G
E	D	G
* F	D	C
* G	D	G

[A, B] es marcado
ya que hay transiciones r
al par marcado [B, D].

	G	F	E	D	C	B
A	X	X	X	X	X	X
B	X	X	X	X	X	
C	X	X	X	X		
D	X	X				
E	X	X				
F	X					

[D, E] nunca es marcado,
ya que ambos inputs D, E
van al mismo estado.

Ejemplo: Minimización

	r	b		r	b		
→	A	B	C	→	A	B	C
	B	D	E		B	H	H
	C	D	F		C	H	F
	D	D	G		H	H	G
	E	D	G				
*	F	D	C	*	F	H	C
*	G	D	G	*	G	H	G

	G	F	E	D	C	B
A	X	X	X	X	X	X
B	X	X	X	X	X	
C	X	X	X	X		
D	X	X				
E	X	X				
F	X					

Reemplazamos D y E por H.
El resultado es el DFA mínimo.

Eliminando estados no alcanzables

- Desafortunadamente, al combinar estados indistinguibles podríamos resultar con estados no alcanzables en el DFA “mínimo”.
- Entonces, tarde o temprano, debemos remover aquellos estados que no son alcanzables desde el estado inicial.

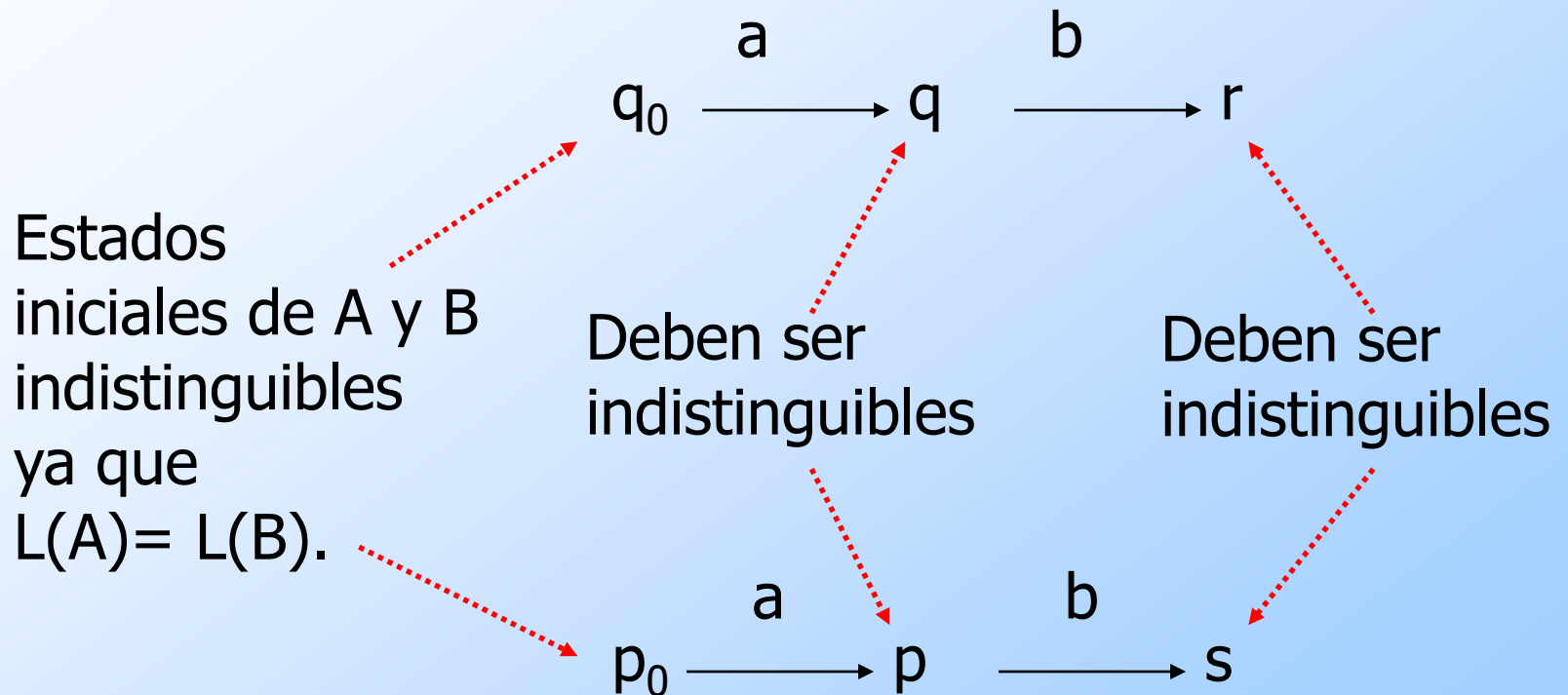
Punto clave

- Hemos combinado estados del autómata DFA siempre que es posible.
- Pregunta: ¿Puede existir otro DFA, completamente distinto, con menor número de estados?
- Respuesta: **No.**
La prueba envuelve minimizar el DFA derivado del hipotético mejor DFA.

Prueba: Smaller DFA

- Sea A nuestro DFA minimizado, y sea B un menor DFA equivalente.
- Consideramos un autómata con los estados de A y B combinados.
- Usamos “distinguishable” en su forma contrapositiva:
 - Si los estados p y q son indistinguibles, entonces también lo son $\delta(q,a)$ y $\delta(p,a)$.

Indistinguibilidad



Hipótesis Inductiva

- Todo estado q de A es indistinguible de cualquier estado de B .
- La inducción se hace sobre la longitud n de la menor cadena que lleva desde el estado inicial de A hacia q .

Prueba – (2)

- **Base:** Los estados iniciales de A y B son indistinguibles, ya que $L(A) = L(B)$.
- **Inducción:** Suponer que $w = xa$ es una menor cadena desde A al estado q.
- Por hipótesis, x lleva A a un estado r que es indistinguible de algún estado p de B.
- Entonces $\delta(r, a) = q$ es indistinguible de $\delta(p, a)$.

Prueba – (3)

- Sin embargo, dos estados de A no pueden ser distinguidos desde el mismo estado de B, o en caso contrario, ellos serían distinguibles uno desde el otro.
 - Esto contradice la transitividad de los “indistinguibles.”
- Así, B posee al menos el mismo número de estados que A.