

Máquinas de Turing (*Turing Machines*)

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Computación

(Aula 21) 23.octubre.2023

Motivación

Definición

Ejemplos

Funciones computables

Motivación

- ◆ Hasta ahora hemos visto clases de lenguajes relativamente simples.
- ◆ Lo que vamos a ver ahora es preguntarnos ¿qué lenguajes pueden definirse por cualquier equipo computacional?
- ◆ Vamos a ver qué pueden hacer las computadoras y los problemas que no pueden resolver, a los que llamaremos indecidibles.

Motivación

- ◆ Trataremos de determinar a las *funciones efectivamente calculables*.

Esto es, aquellas funciones matemáticas para las cuales existe un procedimiento efectivo o mecánico que calcula sus imágenes.

- ◆ Función calculable = existe un algoritmo para calcular f .

Máquinas de Turing

- ◆ Si existe un algoritmo para realizar una tarea argumentamos que se puede construir una máquina hipotética y determinística que realice dicha tarea.

- Estas son llamadas **Máquinas de Turing.**

Publicadas en
"On Computable Numbers, with an
applicaton to the Entscheidungsproblem"
(1936).



Ejemplo

- ◆ Podemos pensar en un programa de computadora que imprima “hola!” cuando encuentre un entero positivo $n > 2$, que cumpla: $x^n + y^n = z^n$, para x, y, z enteros positivos.
- ◆ La solución entera de la ecuación de arriba se conoce como el **último teorema de Fermat**, (llevó 300 años resolver).
- ◆ El poder analizar cualquier programa de computadora y decidir si va a imprimir un letrero como “hola” es en general indecidible.

Historia

- ◆ El propósito de la teoría de indecidibilidad no es sólo establecer cuáles problemas son indecidibles, sino también dar una guía sobre qué es lo que se puede hacer o no con programación.
- ◆ También tiene que ver con problemas, que aunque sean decidibles, son intratables.
- ◆ A finales del siglo XIX y principios del XX, David Hilbert lanzó la pregunta abierta, si era posible encontrar un algoritmo que determinara el valor de verdad de una formula en lógica de primer orden aplicada a los enteros (*Entscheidungsproblem*).

Historia

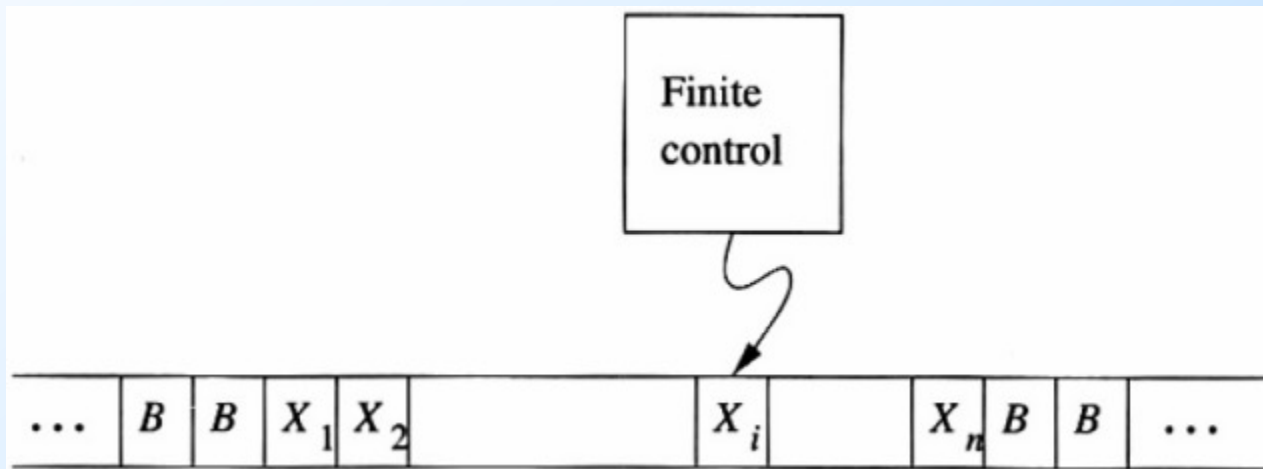
- ◆ En 1931, Kurt Gödel probó su **Teorema de incompletitud** para probar que no se puede construir dicho algoritmo.
- ◆ En 1936, Alan Turing publicó su **máquina de Turing** como un modelo para cualquier tipo de computación (aunque todavía no existían las computadoras).
- ◆ La **Hipótesis de Church** o la tesis de Church-Turing dice que lo que las máquinas de Turing (y en general, las computadoras modernas) pueden calcular las funciones **recursivamente enumerables**.

Máquinas de Turing

- ◆ Una máquina de Turing consiste de un control finito que puede estar en cualquier estado de un conjunto finito de estados.
- ◆ Se tiene una cinta dividida en celdas, cada celda con un símbolo.
- ◆ Inicialmente, la entrada (cadena finita de símbolos del alfabeto) se coloca en la cinta, el resto de las celdas tienen el símbolo especial vacío (*blank*).
- ◆ La cabeza de la cinta esta siempre sobre una celda y al principio está sobre la celda más a la izquierda con el primer símbolo de la cadena de entrada.

Máquinas de Turing

- ◆ Un movimiento o transición puede cambiar de estado (o quedarse en el estado actual), escribir un símbolo (reemplazando el símbolo que existía o dejando el mismo) y mover la cabeza a la izquierda o derecha.



Enteros, cadenas y más ...

- ◆ Los tipos de datos se han vuelto muy importantes como herramienta de programación.
- ◆ A otro nivel, sólo hay un tipo de datos, que puede considerar como números enteros o cadenas.
- ◆ **Punto clave:** las cadenas que son programas son sólo otra forma de pensar sobre el mismo tipo de datos.

Ejemplo: Texto

- ◆ Las cadenas de caracteres ASCII o Unicode pueden considerarse cadenas binarias, con 8 o 16 bits/carácter.
- ◆ Las cadenas binarias se pueden considerar como números enteros.
 - ◆ "abc" → "97 98 99"
→ "01100001 01100010 01100011"
→ N
- ◆ Podemos hablar de "la i-ésima cadena".

Cadenas binarias a enteros

- ◆ Hay un pequeño *glitch*:
 - ▶ Si se piensa simplemente en números enteros binarios, entonces las cadenas como 101, 0101, 00101... todas parecen ser "la quinta cadena".
- ◆ Arreglamos estos añadiendo un prefijo "1" a la cadena antes de convertirla a un entero.
 - ▶ Así, 1101, 10101, y 100101 son las cadenas 13th, 21st, and 37th, respectivamente.

Ejemplo: Imágenes

- ◆ Representar una imagen (digamos) en formato JPG.
- ◆ El archivo JPG es una cadena ASCII.
1 01000110 01101000 01110110 ... 0100001
- ◆ Convertimos a una cadena binaria.
- ◆ Convertimos la cadena binaria a un entero k .
- ◆ Podemos hablar ahora de “la k -ésima imagen.”

Ejemplo: Demostraciones

- ◆ Una prueba formal es una secuencia lógica de expresiones, cada una de las cuales se sigue de las anteriores.
- ◆ Codificamos las expresiones matemáticas y del lenguaje usando caracteres Unicode.
- ◆ Convertimos las expresiones a una cadena binaria, y luego a un entero.

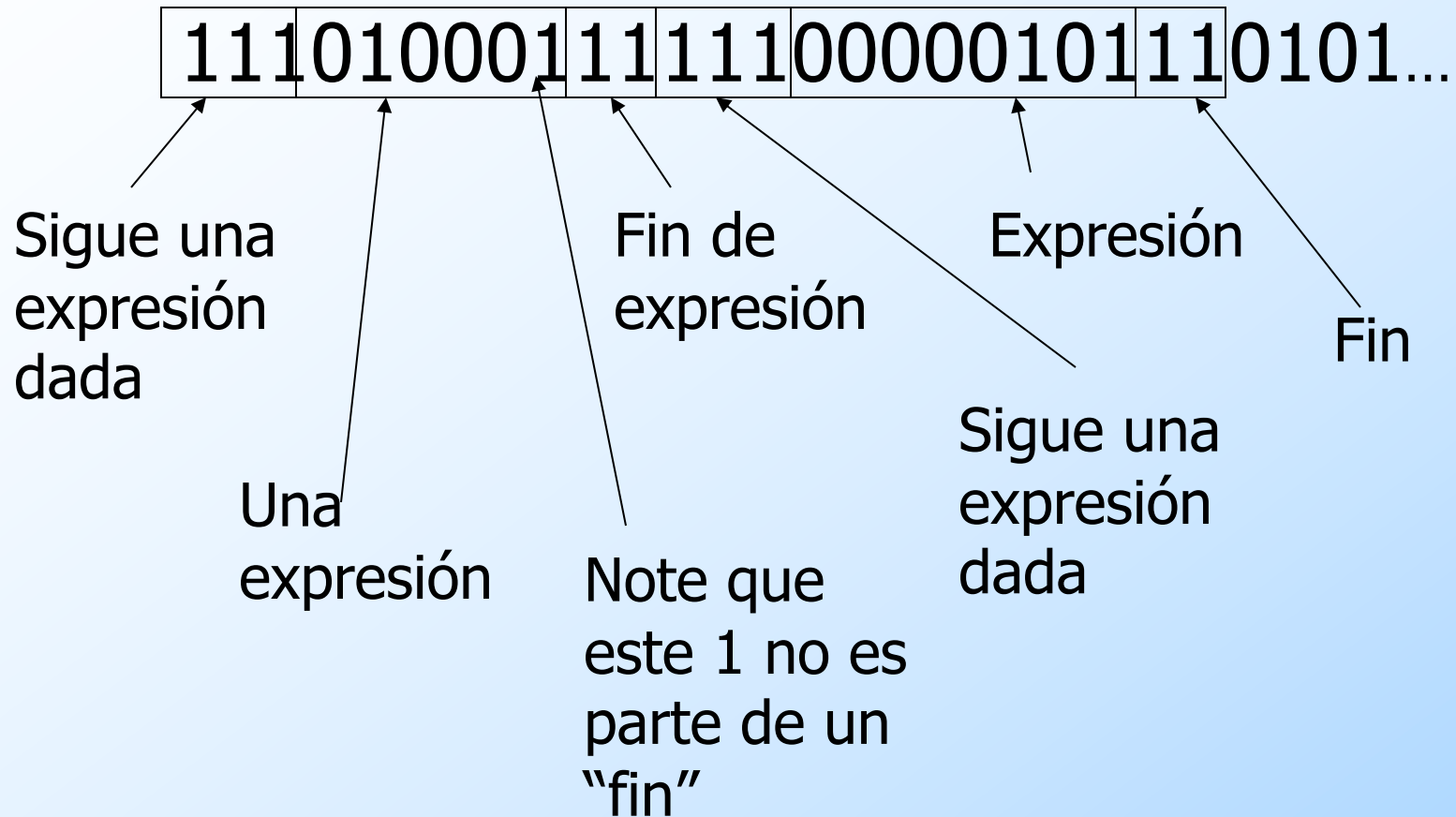
Demostraciones

- ◆ Pero una prueba es una secuencia de expresiones, por lo que necesitamos una forma de separarlas.
 - ◆ Decir dónde termina una, y comienza la siguiente.
- ◆ Además, necesitamos indicar qué expresiones se dan.

Demostraciones

- ◆ Forma rápida de introducir nuevos símbolos en cadenas binarias:
 1. Dada una cadena binaria, anteceder cada bit por 0.
 - ◆ **Ejemplo:** 101 se vuelve 010001.
 2. Usar cadenas de dos o más 1's como símbolos especiales (separadores).
 - ◆ **Ejemplo:** 111 = "inicio: siguiente expresión es";
11 = "fin de la expresión."

Ejemplo: Codificando Pruebas



Ejemplo: Programas

- ◆ Programas son sólo otro tipo de datos:
- ◆ Representar un programa en ASCII.
- ◆ Convertir a cadena binaria, y luego a un entero.
- ◆ Así, hace sentido hablar de “el i -ésimo programa.”
- ◆ No hay muchos programas (cantidad enumerable).

Conjuntos Finitos

- ◆ Intuitivamente, un *conjunto finito* es un conjunto para el cual hay un entero particular que “cuenta a sus elementos”.
- ◆ **Ejemplo:** $\{a, b, c\}$ es un conjunto finito; su *cardinalidad* es 3.
- ◆ Es imposible encontrar un mapeo 1-1 entre un conjunto finito y cualquiera de sus subconjuntos propios.

Conjuntos Infinitos

- ◆ Formalmente, un *conjunto infinito* es un conjunto para el cual existe un mapa 1-1 entre él y un subconjunto propio de él mismo.
- ◆ **Ejemplo:** Enteros positivos $Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ es un conjunto infinito.
 - ◆ Hay una correspondencia 1-1 entre Z^+ y su subconjunto propio de los números pares $2Z^+$:
 - ◆ $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 6, \dots$ $n \rightarrow 2n$

Conjuntos Enumerables

- ◆ Un *conjunto enumerable* es un conjunto con una correspondencia 1-1 con los enteros positivos \mathbb{Z}^+ .
 - ▶ Todos los conjuntos enumerables son infinitos.
- ◆ **Ejemplo:** Los enteros \mathbb{Z} .
 - ▶ $0 \rightarrow 1; -n \rightarrow 2n; +n \rightarrow 2n+1$.
 - ▶ Este orden sería: 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...
- ◆ **Ejemplo:** el conjunto de enteros binarios
- ◆ **Ejemplo :** el conjunto de programas Java.

Ejemplo: Pares de Enteros

- ◆ Ordenar los pares de enteros positivos, primero por suma, luego por 1a componente:
- ◆ $[1,1], [2,1], [1,2], [3,1], [2,2], [1,3], [4,1], [3,2], \dots, [1,4], [5,1], \dots$
- ◆ **Ejercicio!**: Determinar una función $f(i,j)$ tal que el par $[i,j]$ corresponde al entero $f(i,j)$ en este orden.

Enumeraciones

- ◆ Una *enumeración* de un conjunto S es una correspondencia 1-1 entre S y el conjunto de enteros positivos \mathbb{Z}^+ .
- ◆ Entonces...
- ◆ Hemos visto enumeraciones para las cadenas, programas, pruebas, y pares de enteros.

¿Cuántos Lenguajes?

- ◆ Son los lenguajes sobre $\{0,1\}^*$ enumerables?
- ◆ No; aquí hay una **prueba**.
- ◆ Suponga que podemos enumerar todos los lenguajes sobre $\{0,1\}^*$ y hablar de “el i -ésimo lenguaje.”
- ◆ Considere el siguiente lenguaje
 $L = \{w: w \text{ es la } i\text{-ésima cadena binaria y } w \text{ no está en el } i\text{-ésimo lenguaje}\}.$

Prueba –

◆ L es un lenguaje sobre $\{0,1\}^*$.

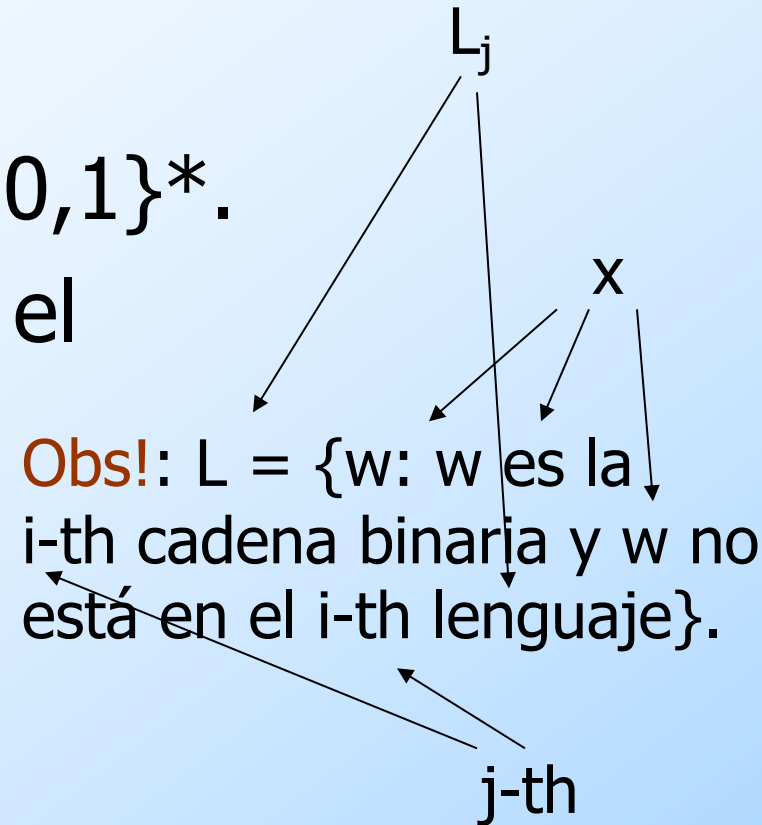
◆ Entonces, L debe de ser el j -ésimo lenguaje, para algún j particular.

◆ Sea x la j -ésima cadena.

◆ ¿Está x en L ?

▶ Caso afirmativo, x no están en L , (def de L).

▶ Caso negativo, x está en L (def de L).



Argumento de Diagonalización

| | | Cadenas | | | | | |
|-----------|-----|---------|---|---|---|---|-----|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| Lenguajes | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | ... |
| | 2 | | 1 | | | | |
| | 3 | | | 0 | | | |
| | 4 | | | | 0 | | |
| | 5 | | | | | 1 | |
| | ... | | | | | | ... |

Argumento de Diagonalización

| | | Cadenas | | | | | |
|-------------------------------------|---|---------|---|---|---|---|-----|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| Voltear cada entrada diagonal | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | ... |
| | 2 | | 0 | | | | |
| | 3 | | | 1 | | | |
| | 4 | | | | 1 | | |
| | 5 | | | | | 0 | |
| Lenguajes | | ... | | | | | ... |

Esta diagonal no puede ser una fila – ya que es diferente en la entrada i con la fila i , Para todo i .

Prueba – Conclusión

- ◆ Tenemos una contradicción: x está en L o no está en L , de modo que el supuesto inicial (de que hay una enumeración de todos los lenguajes sobre $\{0,1\}^*$) es falsa.
- ◆ **Obs!**: Muy malo!!: hay más lenguajes que programas.
- ◆ E.g., hay lenguajes sin un algoritmo de pertenencia.

Argumentos Húngaros

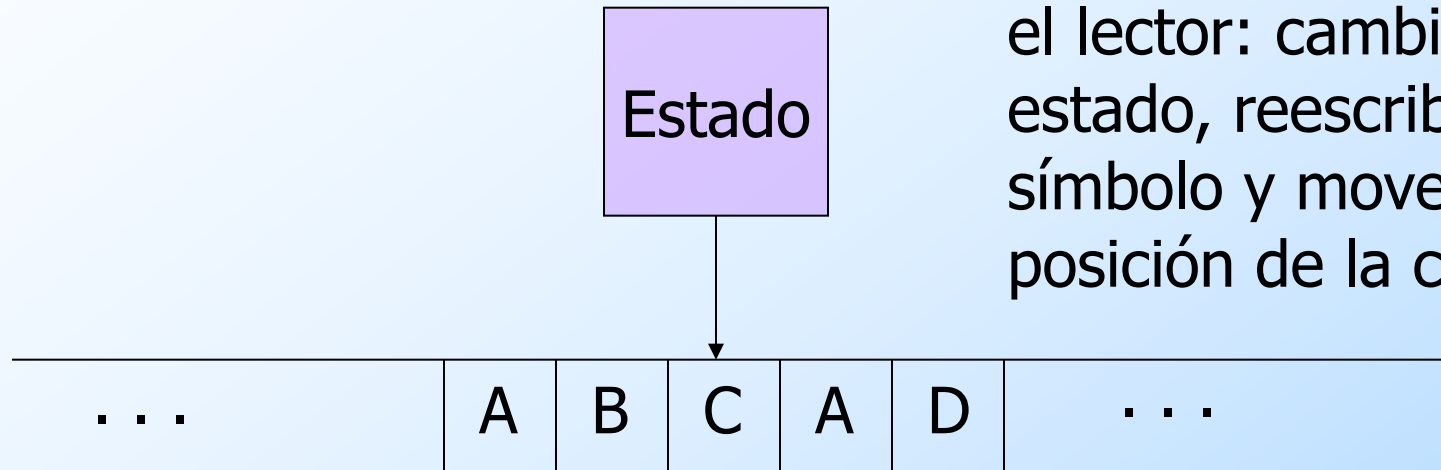
- ◆ Hemos demostrado la existencia de un lenguaje sin algoritmo para probar la membresía, pero no tenemos forma de exhibir un lenguaje particular con esa propiedad.
- ◆ Una prueba que consiste en contar las cosas que fallan y ver que son menos que todas las cosas se llama *argumento húngaro* (argumento de conteo).

Máquinas de Turing

- ◆ El propósito de la teoría de las máquinas de Turing es probar que ciertos lenguajes específicos no tienen algoritmo.
- ◆ Comenzar con un lenguaje sobre las propias máquinas de Turing.
- ◆ Las reducciones se utilizan para demostrar que las preguntas más comunes son indecidibles.

Máquinas de Turing

Acción: basada en el estado y el símbolo de la cinta bajo el lector: cambiar de estado, reescribir el símbolo y moverse una posición de la cinta.



Una cinta infinita con espacios (cuadrados) y símbolos elegidos de un alfabeto finito.

¿Por qué Turing Machines?

- ◆ ¿Por qué no trabajar con programas (de C o de Python) o algo parecido?
- ◆ **Respuesta:** Podríamos, pero es más fácil probar propiedades sobre las Máquinas de Turing, porque son simples.
 - ◆ Y sí, son igual de poderosas que cualquier computador.
 - Además, tienen memoria infinita.

¿Por qué no usar Autómatas?

- ◆ En principio, podríamos usarlos, pero no es constructivo.
- ◆ Los modelos de programación no se pueden construir bajo memoria limitada.
 - ◆ Podríamos “comprar más memoria”.
- ◆ Los autómatas finitos son vitales al nivel base (verificación).
Pero no a nivel generalización.

Máquinas de Turing

- ◆ Una Máquina de Turing se describe por:
 1. Un conjunto finito de *estados* (Q).
 2. Un *alfabeto de entrada* (Σ).
 3. Un *alfabeto de cinta* (Γ ; contiene a Σ).
 4. Una *función de transición* (δ).
 5. Un *estado inicial* ($q_0 \in Q$).
 6. Un *símbolo blanco* ($B \in \Gamma - \Sigma$).
 - ◆ Toda la cinta, excepto el input está en blanco.
 7. Un conjunto de *estados finales* ($F \subseteq Q$).

Convenciones

- ◆ a, b, c, \dots son símbolos input.
- ◆ \dots, X, Y, Z son símbolos cinta.
- ◆ \dots, w, x, y, z son cadenas de símbolos input.
- ◆ α, β, \dots son cadenas de símbolos cinta.

Función de Transición

- ◆ $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times D$ toma dos argumentos:
 1. Un estado, q en Q .
 2. Un símbolo de cinta Z en Γ .
- ◆ $\delta(q, Z)$ está indefinido, o es una tripla de la forma (p, Y, D) , con:
 - ◆ $p \in Q$ un estado,
 - ◆ $Y \in \Gamma$ un símbolo de cinta,
 - ◆ $D \in \{L, R\}$ una *dirección*, (Left ó Right).

Acciones de una MT

- ◆ Si $\delta(q, Z) = (p, Y, D)$ entonces, en el estado q , leyendo el símbolo Z (en el lector de la cinta), la máquina de Turing hace lo siguiente:
 1. Cambia al estado p .
 2. Reemplaza Z por Y en la cinta.
 3. Mueve una posición el lector de la cinta, en la dirección D .
 - ◆ $D = L$: se mueve a la izquierda; $D = R$; a la derecha.

Ejemplo: Máquina de Turing

- ◆ Esta máquina de Turing lee el input hacia la derecha, buscando un 1.
- ◆ Si encuentra uno, lo modifica a 0, va al estado final f , y termina.
- ◆ Si alcanza un símbolo blanco, lo cambia a 1 y se mueve hacia la izquierda.

Ejemplo: Máquina de Turing

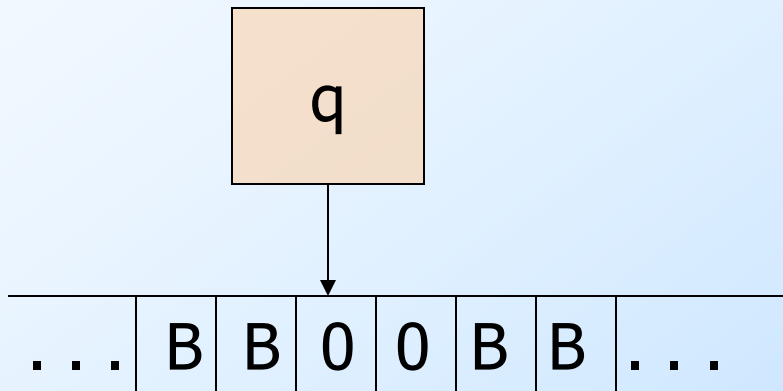
- ◆ Estados: $Q = \{q \text{ (inicial)}, f \text{ (final)}\}$.
- ◆ Símbolos input: $\Sigma = \{0, 1\}$.
- ◆ Símbolos cinta: $\Gamma = \{0, 1, B\}$.
- ◆ Función de Transición:
 - ▶ $\delta(q, 0) = (q, 0, R)$.
 - ▶ $\delta(q, 1) = (f, 0, R)$.
 - ▶ $\delta(q, B) = (q, 1, L)$.

Simulación

$$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$$

$$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$$

$$\delta(q, B) = (q, 1, L)$$

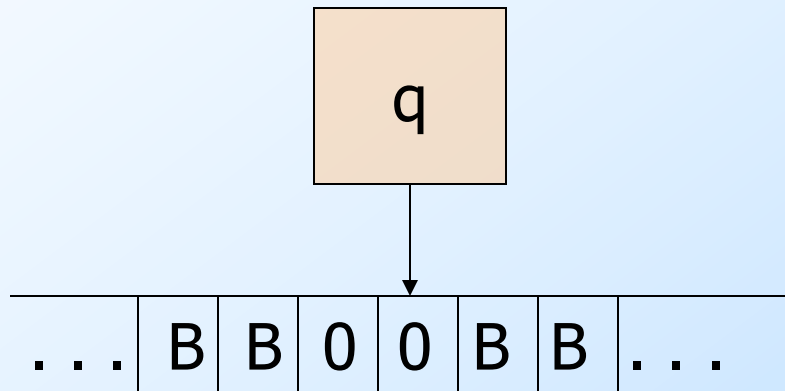


Simulación

$$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$$

$$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$$

$$\delta(q, B) = (q, 1, L)$$

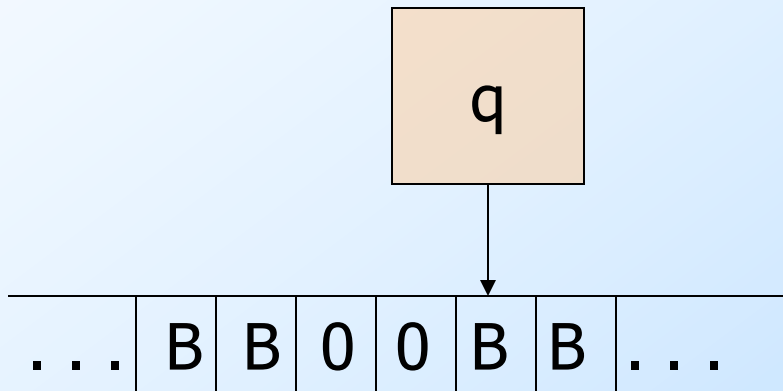


Simulación

$$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$$

$$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$$

$$\delta(q, B) = (q, 1, L)$$

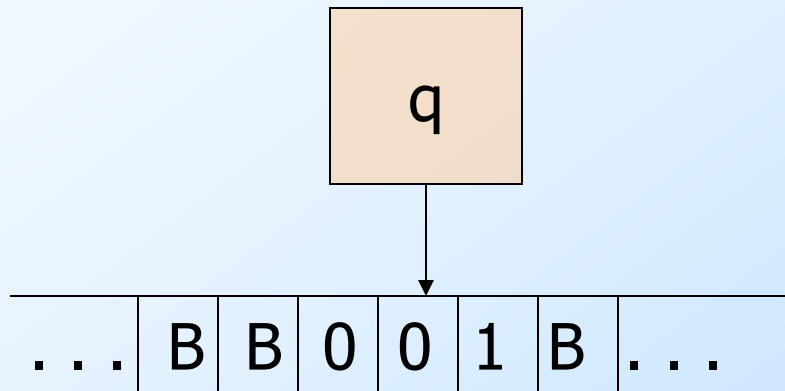


Simulación

$$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$$

$$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$$

$$\delta(q, B) = (q, 1, L)$$

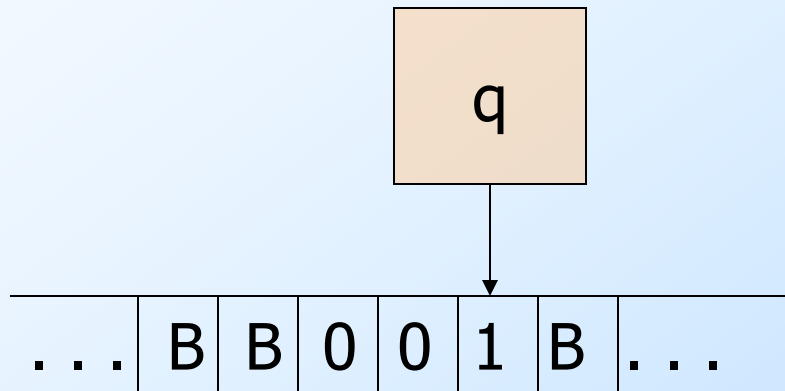


Simulación

$$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$$

$$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$$

$$\delta(q, B) = (q, 1, L)$$

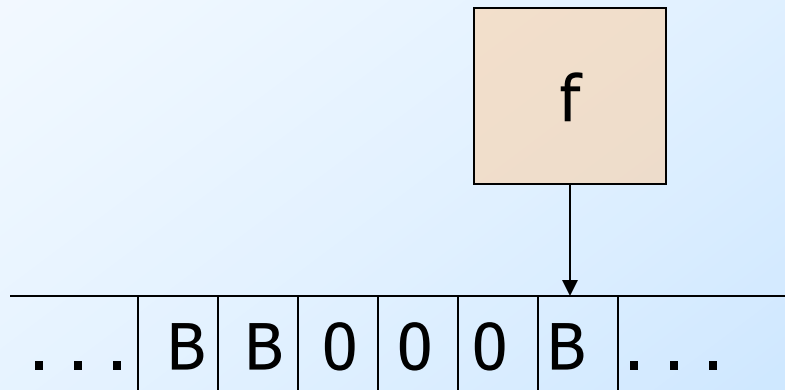


Simulación

$$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$$

$$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$$

$$\delta(q, B) = (q, 1, L)$$



No ha más
movidas posibles.
La máquina para
y acepta.

Descripciones Instantáneas

- ◆ Como la cinta es infinita, se representan solo los símbolos entre los B's (a veces se pueden incluir algunos B's) y
- ◆ se incluye un símbolo especial para indicar la posición del lector cinta.
- ◆ Por ejemplo:

$$\alpha q \beta = X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \dots X_n$$

representa una descripción instantánea donde:

- ◆ q es el estado de la maquina de Turing
- ◆ la cabeza de la cinta está viendo al i -ésimo símbolo a la izquierda
- ◆ $X_1 X_2 \dots X_n$ es el pedazo de cinta entre los símbolos más a la izquierda y más a la derecha que no son vacíos.

Descripciones Instantáneas

- ◆ Usamos la misma notación de descripción instantánea que en los autómatas de pila: \vdash y \vdash^* .
 - ◆ \vdash "se convierte en un movimiento",
 - ◆ \vdash^* "se convierte en cero o más movim."
- ◆ **Ejemplo:** Los movimientos de la MT anterior son
 $q00 \vdash 0q0 \vdash 00q \vdash 0q01 \vdash 00q1 \vdash 000$

Definición Formal de \vdash

1. Si $\delta(q, Z) = (p, Y, R)$, entonces escribimos:

$$\alpha q Z \beta \vdash \alpha Y p \beta$$

Si Z es el símbolo blanco B , entonces

$$\alpha q \vdash \alpha Y p$$

1. Si $\delta(q, Z) = (p, Y, L)$, entonces escribimos:

► Para cualquier X , $\alpha X q Z \beta \vdash \alpha p X Y \beta$

► Además, $q Z \beta \vdash p B Y \beta$

Ejemplo:

- ◆ Usamos el PDA del ejemplo anterior. Tenemos:

| | | |
|--------------------|----------|----------------------|
| $(q, 000111, Z_0)$ | \vdash | $(q, 00111, XZ_0)$ |
| | \vdash | $(q, 0111, XXZ_0)$ |
| | \vdash | $(q, 111, XXXZ_0)$ |
| | \vdash | $(p, 11, XXZ_0)$ |
| | \vdash | $(p, 1, XZ_0)$ |
| | \vdash | (p, ϵ, Z_0) |
| | \vdash | (f, ϵ, Z_0) |

- ◆ Así, $(q, 000111, Z_0) \vdash^* (f, \epsilon, Z_0)$.
- ◆ Ejercicio: ¿Cómo quedaría si el input fuese 0001111?