

# Autómatas de Pila (*pushdown automata*)

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Computación

(Aula 17) 02.octubre.2024

## Definición

Movimientos de un PDA

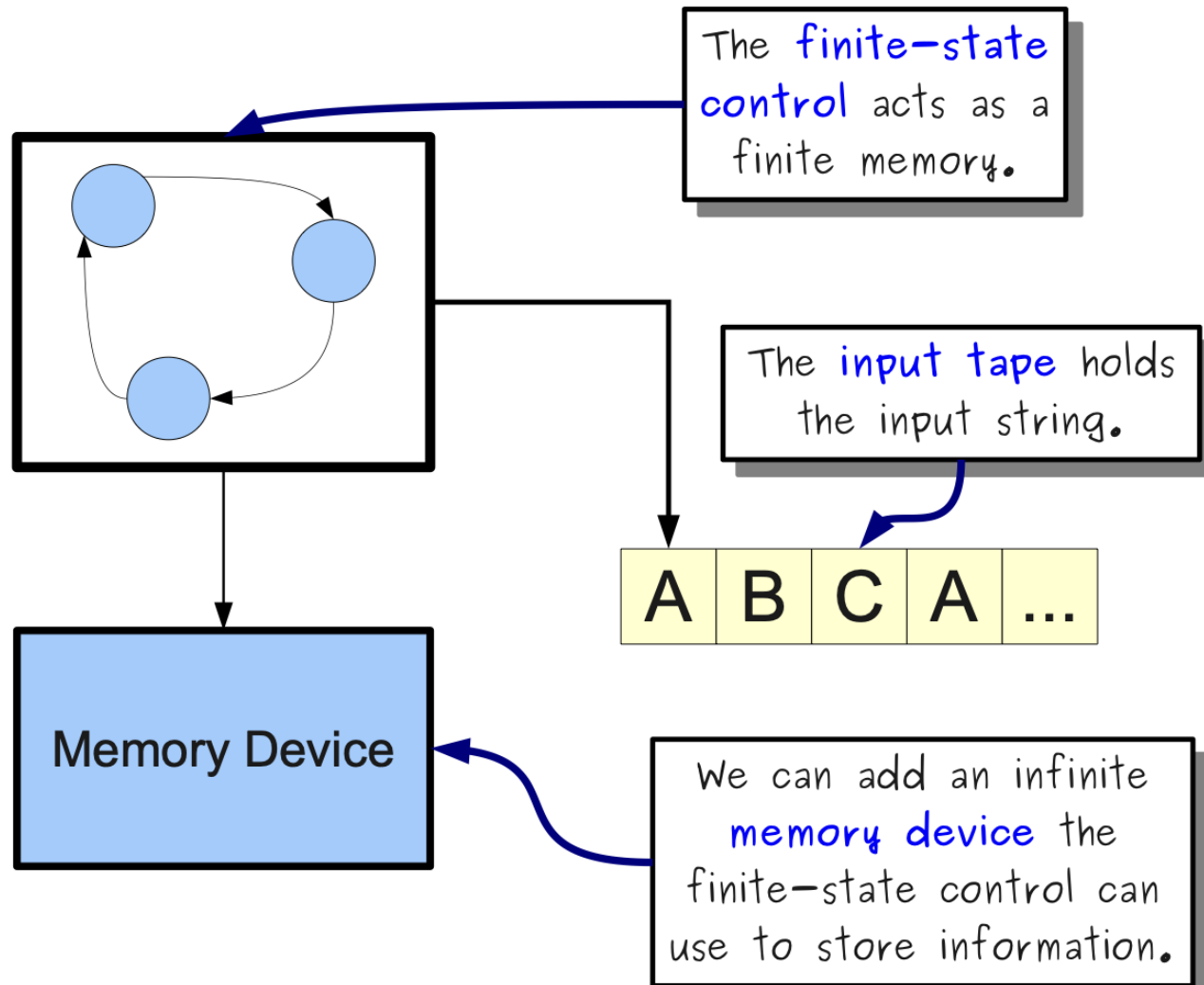
Lenguaje de un PDA

PDA's Determinísticos

# Gramáticas Libres

- Hemos visto que los lenguajes libres de context (CFL) son aquellos generados por gramáticas CFG.
- ¿Existe alguna forma de construir autómatas que reconozcan un lenguaje libre de contexto?
- **Respuesta:** Sí, pero debemos añadir un dispositivo de memoria (ilimitada).

# Gramáticas Libres



# Añadiendo Memoria

- Podemos “aumentar” un autómata al añadir un dispositivo de memoria:
  - almacenar información extra
  - realizar las transiciones (estados + memoria)
  - ejecutar comandos a memoria

## Stack-based Memory:

- Sólo el top del stack es visible (en todo momento).
- Símbolos nuevos pueden agregarse al stack (“push”), reemplazando el símbolo en el top del stack.
- El símbolo en el top del stack puede eliminarse (“pop”), revelando el símbolo debajo de él.

# Autómatas de Pila

- Un autómata de pila (*pushdown automata* o PDA) es el equivalente a una gramática libre de contexto CFG.
- Sólo los autómatas de pila no deterministas definen todos los lenguajes libres del contexto.
- La versión determinística modela *parsers*.
  - La mayoría de lenguajes de programación son definidos por un PDA determinista.

# Intuición: Autómatas

- Un PDA se puede pensar como un  $\epsilon$ -NFA con la propiedad adicional de que puede manipular una pila (*stack*).
- Los movimientos de un PDA se determinan por:
  1. El estado actual (de su “NFA”),
  2. El símbolo de entrada actual (ó  $\epsilon$ ), y
  3. El símbolo actual en el top de la pila.

# Intuición: Autómatas

- Siendo no deterministas, los autómatas de pila pueden “elegir” la siguiente movida.
- En cada elección, el PDA puede:
  1. Cambiar de estado, y, además
  2. Reemplazar el símbolo top de la pila por una secuencia de cero o más símbolos.
    - Cero símbolos = “pop”.
    - Más símbolos = secuencia de varios “push”.

# Formalismo de un PDA

- Un PDA se describe mediante una estructura  $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , donde:
1. Un conjunto finito de *estados* ( $Q$ ).
  2. Un *alfabeto de entrada* ( $\Sigma$ ).
  3. Un *alfabeto de pila* ( $\Gamma$ ).
  4. Una *función de transición* ( $\delta$ ).
  5. Un *estado inicial* ( $q_0 \in Q$ ).
  6. Un *símbolo inicial* ( $Z_0 \in \Gamma$ ).
  7. Un conjunto de *estados finales* ( $F \subseteq Q$ ).



# Convenciones

- $a, b, \dots$  son símbolos de entrada.
  - Tomar en cuenta que también admitimos como válido el símbolo de entrada  $\epsilon$ .
- $\dots, X, Y, Z$  son símbolos de pila.
- $\dots, w, x, y, z$  denotan cadenas de símbolos de entradas.
- $\alpha, \beta, \dots$  denotan cadenas de símbolos de pila.

# La Función de Transición

- Ahora  $\delta: Q \times \Sigma \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$ .  
La función toma tres argumentos:
  1. Un estado  $q \in Q$ .
  2. Un símbolo de entrada  $a$ , el cual puede ser un símbolo de  $\Sigma$ , o ser  $\epsilon$ .
  3. Un símbolo de pila  $Z \in \Gamma$ .
- $\delta(q, a, Z)$  denota el conjunto de cero o más acciones de la forma  $(p, \alpha)$ .
  - $p \in Q$ ;  $\alpha \in \Gamma^*$  cadena de símbolos pila.

# Acciones de un PDA

- Si  $\delta(q, a, Z)$  contiene  $(p, \alpha)$  entre sus acciones, entonces una de las cosas que el PDA puede hacer en el estado  $q$ , con símbolo de entrada  $a$ , y  $Z$  en el top de la pila es:
  1. Cambiar del estado  $q$  al estado  $p$ .
  2. Remover  $a$  del input ( $a$  podría ser  $\varepsilon$ ).
  3. Reemplazar  $Z$  en el top de la pila por la cadena  $\alpha$ .

# Ejemplo: PDA

- Vamos a diseñar un PDA para aceptar las cadenas  $\{0^n 1^n: n \geq 1\}$ .
- Estados:
  - $q$  = estado inicial. Estaremos en el estado  $q$  si sólo hemos visto 0s hasta ahora.
  - $p$  = alcanzamos este estado si hemos visto al menos un 1, y procedemos si los inputs sólo son 1s.
  - $f$  = estado final, de aceptación.

# Ejemplo: PDA

- Símbolos de entrada (inputs):
  - $\{0, 1\}$ .
- Símbolos de pila (stack):
  - $Z_0$  = símbolo inicial. También marca el fondo de la pila, de forma que podemos contar el mismo número de 1s que de 0s.
  - $X$  = marcador. Se usa para contar el número de 0s en la cadena de entrada.

# Ejemplo: PDA

## □ Las transiciones:

$$\square \delta(q, 0, Z_0) = \{(q, XZ_0)\}.$$

$$\square \delta(q, 0, X) = \{(q, XX)\}.$$

Estas reglas hacen que se agregue una X a la pila, cada vez que se lee un 0 en la entrada.

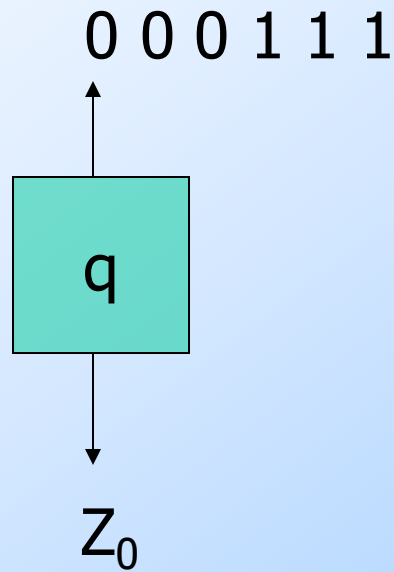
$$\square \delta(q, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}.$$

Al leer un 1, vamos al estado p, y se hace pop de una X.

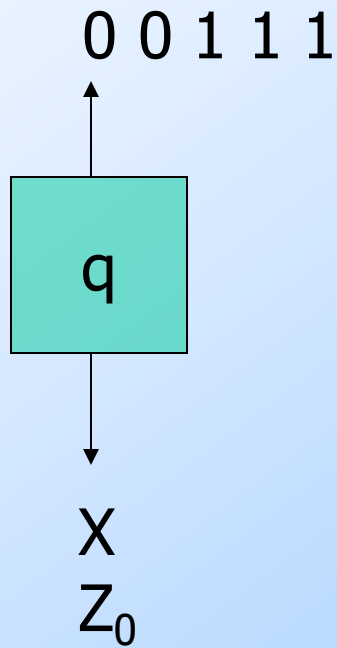
$$\square \delta(p, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}. \quad \text{Pop de una X por cada 1.}$$

$$\square \delta(p, \epsilon, Z_0) = \{(f, Z_0)\}. \quad \text{Aceptar al final.}$$

# Accciones en el PDA Ejemplo

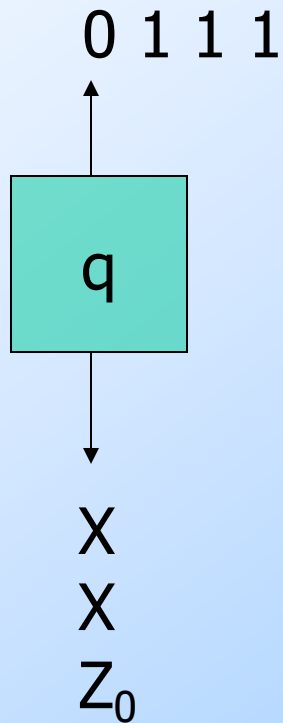


# Accciones en el PDA Ejemplo

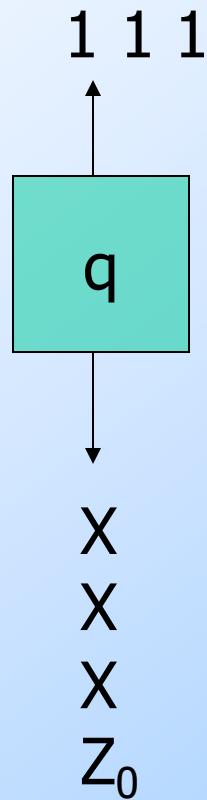




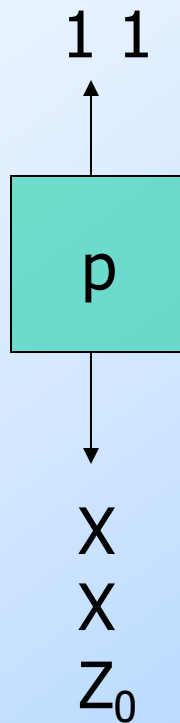
# Accciones en el PDA Ejemplo



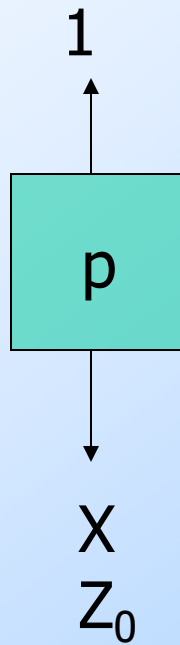
# Accciones en el PDA Ejemplo



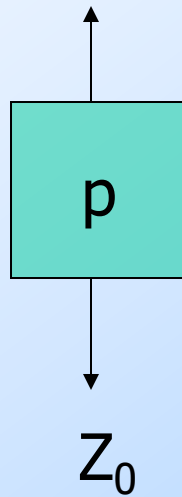
# Accciones en el PDA Ejemplo



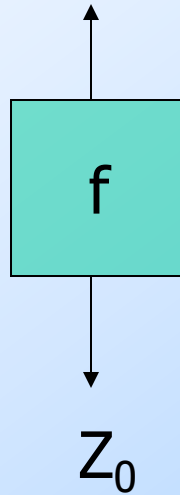
# Accciones en el PDA Ejemplo



# Accciones en el PDA Ejemplo



# Accciones en el PDA Ejemplo



# Descripciones Instantáneas

- Formalizamos las figuras anteriores bajo el concepto de *descripción instantánea* (ID).
- Una ID es una tripla  $(q, w, \alpha)$ , donde:
  1.  $q$  es el estado actual.
  2.  $w$  es el input remanente.
  3.  $\alpha$  es el contenido de la pila (top to bottom).

# Relación “Goes-To”

- Denotamos por

$$I \vdash J$$

cuando la descripción  $I$  puede convertirse en la descripción  $J$  en un movimiento.

- Formalmente,

$$(q, aw, X\alpha) \vdash (p, w, \beta\alpha)$$

para  $w, \alpha$ , si  $\delta(q, a, X)$  contiene la acción  $(p, \beta)$ .

- Extendemos  $\vdash$  a  $\vdash^*$ , “cero o más movidas” por:

- **Base:**  $I \vdash^* I$ .

- **Inducción:** Si  $I \vdash^* J$  y  $J \vdash K$ , entonces  $I \vdash^* K$ .



# Ejemplo: “Goes-To”

- Usamos el PDA del ejemplo anterior. Tenemos:

|                    |          |                      |
|--------------------|----------|----------------------|
| $(q, 000111, Z_0)$ | $\vdash$ | $(q, 00111, XZ_0)$   |
|                    | $\vdash$ | $(q, 0111, XXZ_0)$   |
|                    | $\vdash$ | $(q, 111, XXXZ_0)$   |
|                    | $\vdash$ | $(p, 11, XXZ_0)$     |
|                    | $\vdash$ | $(p, 1, XZ_0)$       |
|                    | $\vdash$ | $(p, \epsilon, Z_0)$ |
|                    | $\vdash$ | $(f, \epsilon, Z_0)$ |

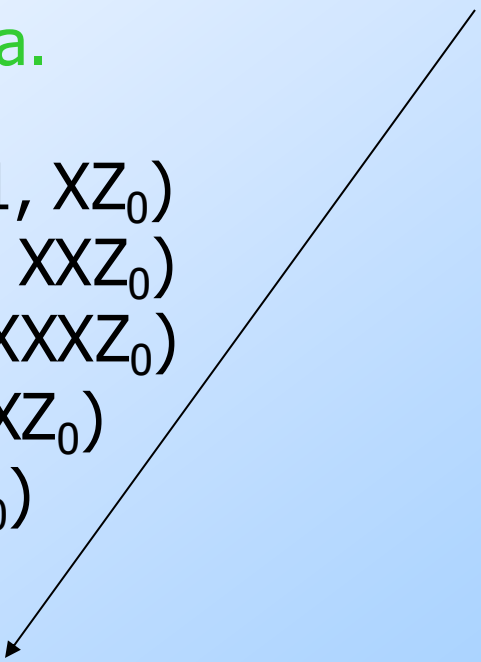
- Así,  $(q, 000111, Z_0) \vdash^* (f, \epsilon, Z_0)$ .

- Ejercicio: ¿Cómo quedaría si el input fuese 0001111?

# Respuesta

Legal ya que un PDA puede usar  $\epsilon$  input, aun si el input no cambia.

|   |                     |   |                     |
|---|---------------------|---|---------------------|
| □ | $(q, 0001111, Z_0)$ | ⊢ | $(q, 001111, XZ_0)$ |
|   |                     | ⊢ | $(q, 01111, XXZ_0)$ |
|   |                     | ⊢ | $(q, 1111, XXXZ_0)$ |
|   |                     | ⊢ | $(p, 111, XXZ_0)$   |
|   |                     | ⊢ | $(p, 11, XZ_0)$     |
|   |                     | ⊢ | $(p, 1, Z_0)$       |
|   | no                  |   | $(f, 1, Z_0)$       |



- Observe que la última descripción no se mueve.
- 0001111 **no** es aceptada, ya que el input no es completamente consumido.

## Respuesta

- $(q, 000011, Z_0) \vdash (q, 00011, XZ_0)$
- $\vdash (q, 0011, XXZ_0)$
- $\vdash (q, 011, XXXZ_0)$
- $\vdash (q, 11, XXXXZ_0)$
- $\vdash (p, 1, XXXZ_0)$
- $\vdash (p, \epsilon, XXZ_0)$

ya no se puede continuar.

- Observe que la última descripción no se mueve.
- 000011 **no** es aceptada, ya que la memoria tiene información (aparte de  $Z_0$ ).

# Autómatas finitos y PDAs

- Hemos representado los movimientos de un autómata finito mediante una función de transición extendida  $\delta$ , que no menciona al input remanente.
- Podemos representar con una notación similar a los PDAs, en donde el estado del autómata se reemplaza por una combinación estado-stack, como en los diagramas anteriores.

# Autómatas finitos y PDAs

- Similarmente, podemos representar un autómata finito con la notación de las descripciones ID.
  - Sólo hay que quitar el componente stack.
- ¿Por qué la diferencia? (Mi teoría):
- Los FA tienden a modelar protocolos, con inputs indefinidamente largos.
- Los PDA modelan *parsers* (analizadores sintácticos) que procesan un programa.

# Lenguaje de un PDA

- La manera usual de definir el lenguaje de un autómatata de pila es mediante *estados finales*.
- Si  $P$  es un autómatata de pila, entonces  $L(P)$  es el conjunto de cadenas  $w \in \Sigma$ , tales que
$$(q_0, w, Z_0) \vdash^* (f, \varepsilon, \alpha),$$
para algún estado final  $f \in F$ , y cualquier  $\alpha$ .

# Lenguaje de un PDA

- Otra manera de definir el lenguaje generado por un PDA es mediante el concepto de *stack vacío*.
- Si  $P$  es un autómata de pila, entonces  $N(P)$  es el conjunto de cadenas  $w \in \Sigma^*$ , tales que
$$(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$
para cualquier estado  $q$ .

# Equivalencia $L(P) = N(P)$

1. Si  $L = L(P)$ , entonces existe otro autómata de pila  $P'$  tal que  $L = N(P')$ .
2. Si  $L = N(P)$ , entonces existe otro autómata de pila  $P''$  tal que  $L = L(P'')$ .



# Prueba: $L(P) \rightarrow N(P')$ (Idea)

- $P'$  simulará a  $P$ .
- Si  $P$  acepta,  $P'$  tendrá su stack vacío.
- $P'$  debe evitar vaciar su stack accidentalmente, así que se usa un símbolo especial (bottom-marker) para detectar el caso en el que  $P$  vacía su pila sin aceptar.

# Prueba: $L(P) \rightarrow N(P')$

- $P'$  posee todos los estados, símbolos y movidas de  $P$ , más:
  1. Un símbolo stack  $X_0$ , usado para guardar el final del stack de vacíos accidentales.
  2. Un nuevo estado inicial  $s$ , y un nuevo estado "erase"  $e$ .
  3.  $\delta(s, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$ . (Inicia  $P$ )
  4.  $\delta(f, \varepsilon, X) = \delta(e, \varepsilon, X) = \{(e, \varepsilon)\}$  para cualquier estado final  $f$  de  $P$ , y para todo símbolo stack  $X$ .

# Prueba: $N(P) \rightarrow L(P'')$ (Idea)

- $P''$  simulará a  $P$ .
- $P''$  posee un símbolo especial (bottom-marker) para detectar aquellos casos donde  $P$  vacía su stack.
- En ese caso,  $P''$  acepta.

# Prueba: $N(P) \rightarrow L(P'')$

- $P''$  posee todos los estados, símbolos y movidas de  $P$ , más:
  1. Un símbolo stack  $X_0$ , usado para guardar el final del stack.
  2. Un nuevo estado inicial  $s$ , y un nuevo estado final  $f$ .
  3.  $\delta(s, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$ . (Inicia  $P$ )
  4.  $\delta(q, \varepsilon, X_0) = \{(f, \varepsilon)\}$  para todo  $q \in P$ .

# PDA's Deterministas

- Para un PDA ser determinista, debe existir a lo sumo una elección de movida en cada combinación  $(q, a, X)$ , (estado  $q$ , input  $a$ , símbolo stack  $X$ ).
- Además, no debe haber una elección entre un input de  $\Sigma$ , y la cadena  $\epsilon$ .
  - Formalmente,  $\delta(q, a, X)$  y  $\delta(q, \epsilon, X)$  no pueden ser ambos no-vacíos.