

Autómatas Finitos No Deterministas

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Computación

(Aula 05) 24.julio.2024

No determinismo
Construcción de subconjuntos
 ϵ -Transiciones

No determinismo

- ◆ Un *autómata finito no determinista* tiene la habilidad de 'estar' en varios estados simultáneamente.
(más bien la habilidad de conducir a varios estados simultáneamente).
- ◆ Las transiciones pueden hacerse desde un estado a un conjunto de estados.

No determinismo

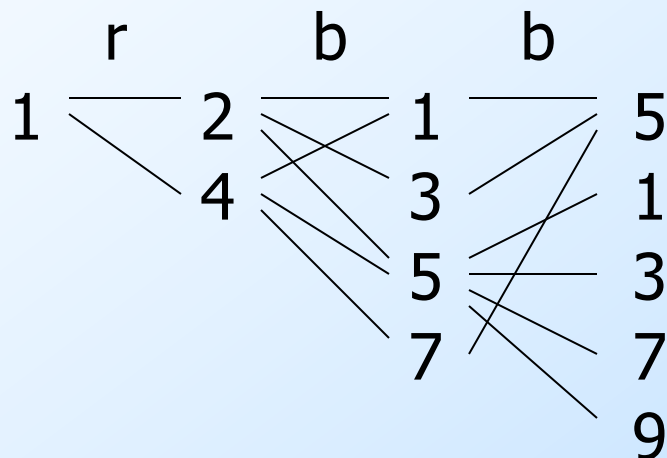
- ◆ Comenzar en el estado inicial.
- ◆ Se acepta una cadena si alguna secuencia de transiciones lleva a algún estado final.
- ◆ **Intuitivamente:** los AFN siempre “adivinan correctamente”

Ejemplo: Movidas en un tablero

- ◆ Estados = casillas.
- ◆ Inputs:
 - r = (mover a un cuadro rojo adyacente)
 - b = (mover a cuadro negro adyacente).
- ◆ Estado inicial y estado final en esquinas opuestas.

Ejemplo: Tablero

1	2	3
4	5	6
7	8	9



→

	r	b
1	2,4	5
2	4,6	1,3,5
3	2,6	5
4	2,8	1,5,7
5	2,4,6,8	1,3,7,9
6	2,8	3,5,9
7	4,8	5
8	4,6	5,7,9
* 9	6,8	5

Definición de AFN

Un autómata finito no determinista (AFN)

$M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ consiste de:

- Un conjunto finito de *estados* (K).
- Un *alfabeto* de entrada (Σ)
- La *relación de transición*
$$\Delta \subseteq K \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times K$$
- Un *estado inicial* (s ó q_0).
- Un conjunto de *estados finales* (F).

La 'función' de transición en un AFN

- ◆ $\Delta(q, a)$ es un conjunto de estados.
- ◆ La "función" Δ se extiende a cadenas de forma inductiva:
- ◆ **Base:** $\Delta(q, \varepsilon) = \{q\}$
- ◆ **Inducción:** Si $x = wa$, con $|w| = |x| - 1$

$$\Delta(q, wa) = \bigcup_{p \in \Delta(q, w)} \Delta(p, a)$$

Lenguaje de un AFN

- ◆ Una cadena w es aceptada por un autómata finito no determinista si $\delta(q_0, w)$ contiene al menos un estado final.
- ◆ El lenguaje $L(M)$ de un autómata no determinista es el conjunto de las cadenas aceptadas.

Ejemplo: Tablero

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- ◆ Para el autómata del tablero, vimos que la cadena *rbb* es aceptada.
- ◆ Si la entrada consiste sólo de *b*'s, el conjunto de estados accesibles se alterna entre $\{5\}$ y $\{1,3,7,9\}$, de modo que sólo cadenas no vacías con un número par de *b*'s se aceptan.
- ◆ Qué ocurre con las cadenas con *r*?

Equivalencia de AFD's y AFN's

- ◆ Un autómata determinista AFD puede transformarse en un autómata no determinista que acepta el mismo lenguaje.
- ◆ Para ello, si $\delta_D(q, a) = p$, definimos el autómata no determinista por
$$\Delta(q, a) = \delta_N(q, a) = \{p\}.$$

Equivalencia

- ◆ Recíprocamente, para cada autómata no determinista AFN, existe un autómata determinista que acepta el mismo lenguaje.
- ◆ La prueba se basa en la *construcción de subconjuntos*.
- ◆ El número de estados del AFD puede crecer exponencialmente.

Construcción de subconjuntos

- ◆ Dado un autómata no determinista $M = (K, \Sigma, \Delta = \delta_N, s, F)$, vamos a construir un autómata determinista equivalente tal que:
 - ▶ estados = 2^K (conjunto potencia de K).
 - ▶ alfabeto = Σ .
 - ▶ estado inicial = $\{q_0\}$.
 - ▶ estados finales = todos los que intersectan F .

Importante !!

- ◆ Los estados del AFD tienen *etiquetas* que son conjuntos de K (estados del AFN).
- ◆ Por ejemplo: Como estado del AFD, una expresión $\{p,q\}$ debe entenderse como un único símbolo.
- ◆ **Analogía**: una clase de objetos cuyos valores son subconjuntos de objetos de otra clase.

Construcción de subconjuntos

- ◆ La función de transición δ_D del AFD se define por:

$$\delta_D(\{q_1, q_2, \dots, q_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^k \Delta(q_i, a)$$

- ◆ **Ejemplo:** Construiremos el autómata determinista equivalente para el ÁFN del tablero.

Ejemplo: Tablero

	r	b
→ 1	2,4	5
2	4,6	1,3,5
3	2,6	5
4	2,8	1,5,7
5	2,4,6,8	1,3,7,9
6	2,8	3,5,9
7	4,8	5
8	4,6	5,7,9
* 9	6,8	5

1	2	3
4	5	6
7	8	9

	r	b
→ {1}	{2,4}	{5}
{2,4}		
{5}		

Obs!: Aquí estamos haciendo una construcción *incompleta* del AFD, donde sólo se construye un estado si es necesario.

Ejemplo: Tablero

	r	b
→ 1	2,4	5
2	4,6	1,3,5
3	2,6	5
4	2,8	1,5,7
5	2,4,6,8	1,3,7,9
6	2,8	3,5,9
7	4,8	5
8	4,6	5,7,9
* 9	6,8	5

	r	b
→ {1}	{2,4}	{5}
{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
{5}		
{2,4,6,8}		
{1,3,5,7}		

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ejemplo: Tablero

	r	b
→ 1	2,4	5
2	4,6	1,3,5
3	2,6	5
4	2,8	1,5,7
5	2,4,6,8	1,3,7,9
6	2,8	3,5,9
7	4,8	5
8	4,6	5,7,9
* 9	6,8	5

	r	b
→ {1}	{2,4}	{5}
{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
{2,4,6,8}		
{1,3,5,7}		
{1,3,7,9}		

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ejemplo: Tablero

	r	b
→ 1	2,4	5
2	4,6	1,3,5
3	2,6	5
4	2,8	1,5,7
5	2,4,6,8	1,3,7,9
6	2,8	3,5,9
7	4,8	5
8	4,6	5,7,9
* 9	6,8	5

	r	b
→ {1}	{2,4}	{5}
{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
{1,3,5,7}		
{1,3,7,9}		
{1,3,5,7,9}		

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ejemplo: Tablero

	r	b
→ 1	2,4	5
2	4,6	1,3,5
3	2,6	5
4	2,8	1,5,7
5	2,4,6,8	1,3,7,9
6	2,8	3,5,9
7	4,8	5
8	4,6	5,7,9
* 9	6,8	5

	r	b
→ {1}	{2,4}	{5}
{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
{1,3,5,7}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
{1,3,7,9}		
{1,3,5,7,9}		

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ejemplo: Tablero

	r	b
→ 1	2,4	5
2	4,6	1,3,5
3	2,6	5
4	2,8	1,5,7
5	2,4,6,8	1,3,7,9
6	2,8	3,5,9
7	4,8	5
8	4,6	5,7,9
* 9	6,8	5

	r	b
→ {1}	{2,4}	{5}
{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
{1,3,5,7}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
{1,3,7,9}	{2,4,6,8}	{5}
{1,3,5,7,9}		

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ejemplo: Tablero

	r	b
→ 1	2,4	5
2	4,6	1,3,5
3	2,6	5
4	2,8	1,5,7
5	2,4,6,8	1,3,7,9
6	2,8	3,5,9
7	4,8	5
8	4,6	5,7,9
* 9	6,8	5

	r	b
→ {1}	{2,4}	{5}
{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
{1,3,5,7}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
* {1,3,7,9}	{2,4,6,8}	{5}
* {1,3,5,7,9}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Prueba de la Equivalencia: Construcción de subconjuntos

- ◆ La prueba es 'casi inmediata'.
- ◆ Se muestra por inducción en $|w|$ que

$$\Delta(q_0, w) = \delta_D(\{q_0\}, w)$$

- ◆ **Base:** $w = \epsilon$:

$$\Delta(q_0, \epsilon) = \delta_D(\{q_0\}, \epsilon) = \{q_0\}.$$

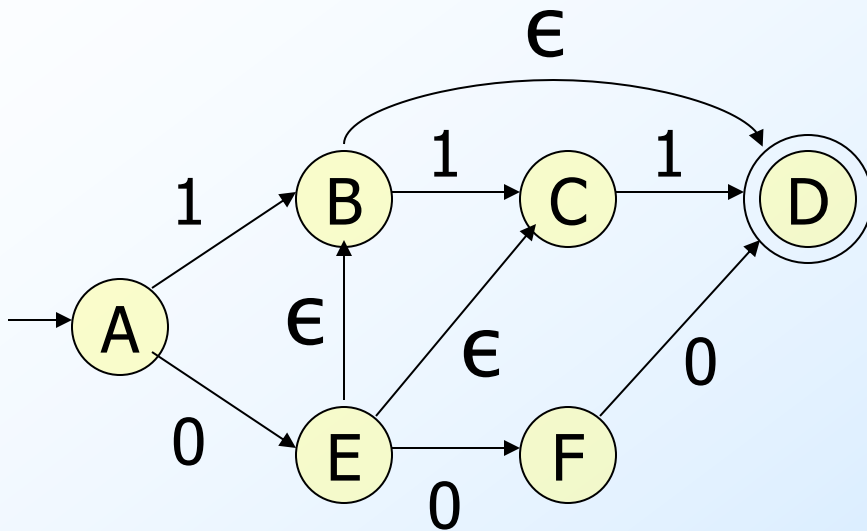
Paso Inductivo

- ◆ Asumir la hipótesis para cadenas de longitud $< |w|$.
- ◆ Si $w = xa$; la hipótesis vale para x .
- ◆ Sea $\Delta(q_0, x) = \delta_D(\{q_0\}, x) = S$.
- ◆ Sea $T = \bigcup_{p \in S} \Delta(p, a)$, la unión sobre S de todos los $\Delta(p, a)$.
- ◆ Luego, $\Delta(q_0, w) = \delta_D(\{q_0\}, w) = T$.

AFN's con transiciones- ϵ

- ◆ En los autómatas no deterministas permitimos transiciones con entrada ϵ .
- ◆ Estas transiciones se hacen espontáneamente, sin ver el caracter de entrada.
- ◆ Se incluyen cuando se considere conveniente. (Aún así, esto no modifica el tipo de lenguajes aceptados.)

Ejemplo: ϵ -AFN

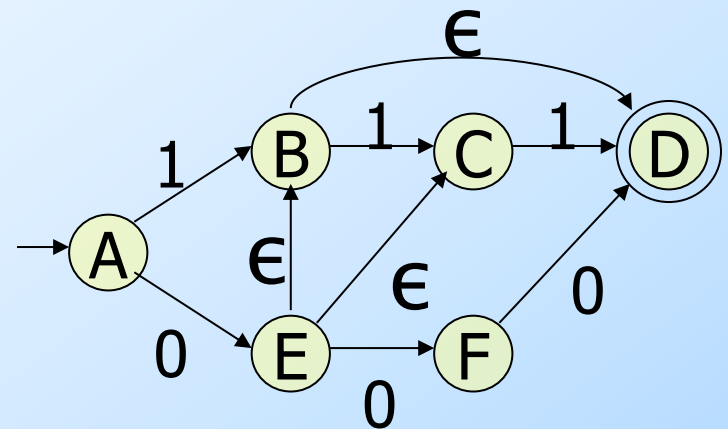


		0	1	ϵ
→	A	{E}	{B}	\emptyset
	B	\emptyset	{C}	{D}
	C	\emptyset	{D}	\emptyset
*	D	\emptyset	\emptyset	\emptyset
	E	{F}	\emptyset	{B, C}
	F	{D}	\emptyset	\emptyset

Cerradura de Estados

- ◆ $CL(q)$ = conjunto de estados que pueden alcanzarse desde el estado q sólo siguientes arcos ϵ .

- ◆ **Ejemplo:** $CL(A) = \{A\}$;
 $CL(E) = \{B, C, D, E\}$.



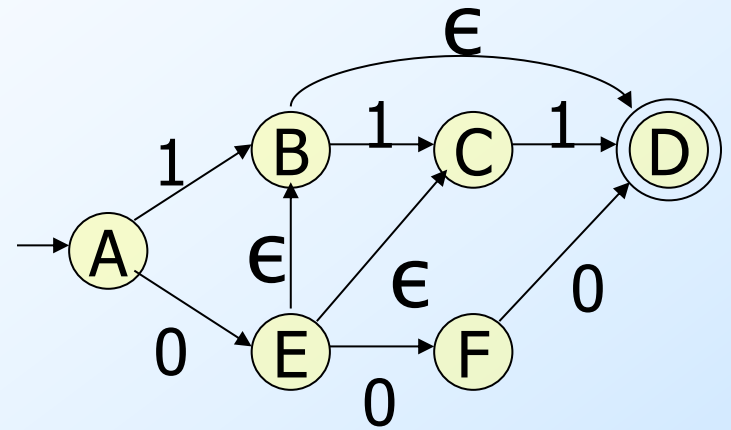
- ◆ Cerradura de un conjunto de estados:

$$CL(S) = \bigcup_{q \in S} CL(q).$$

Delta Extendida

- ◆ **Intuición:** $\hat{\delta}(q, w)$ es el conjunto de estados que pueden alcanzarse desde q siguiendo un camino w .
- ◆ **Base:** $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = CL(q)$.
- ◆ **Inducción:** $\hat{\delta}(q, xa)$ se calcula como:
 1. Comenzar con $\hat{\delta}(q, x) = S$.
 2. Luego, $\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{p \in S} CL(\hat{\delta}(p, a))$.

Ejemplo: Delta extendida



- ◆ $\overset{\wedge}{\delta}(A, \epsilon) = CL(A) = \{A\}.$
- ◆ $\overset{\wedge}{\delta}(A, 0) = CL(\{E\}) = \{B, C, D, E\}.$
- ◆ $\overset{\wedge}{\delta}(A, 01) = CL(\{C, D\}) = \{C, D\}.$
- ◆ El *lenguaje* de un ϵ -AFN es el conjunto de cadenas w tales que $\overset{\wedge}{\delta}(q_0, w)$ contiene algún estado final.