

PROPIEDADES DE LA MEDIDA EXTERIOR

ALAN REYES-FIGUEROA

TEORÍA DE LA MEDIDA E INTEGRACIÓN

(AULA 07) 01.FEBRERO.2023

Propiedades de la Medida Exterior

Las siguientes propiedades relacionan la medida exterior de Lebesgue con la existencia de ciertos conjuntos especiales.

Recordemos que una **topología** para un espacio X es una colección de conjuntos

$\tau = \{A \subseteq X\}$, que satisface

- 1) $\emptyset, X \in \tau$,
- 2) $\{A_\ell\}_\ell \in \tau \implies \bigcup_\ell A_\ell \in \tau$,
- 3) $\{A_i\}_{i=1}^n \in \tau \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

Por otro lado, una **σ -álgebra** en X , es una colección de conjuntos $\mathcal{A} = \{A \subseteq X\}$ que satisface

- 1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
- 2) $\{A_\ell\}_{\ell=1}^\infty \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\ell=1}^\infty A_\ell \in \mathcal{A}$,
- 3) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$ (2 y 3 $\implies \bigcap_{\ell=1}^\infty A_\ell \in \mathcal{A}$).

La Jerarquía de Borel

Definición

Sea X un espacio topológico. Un conjunto $G \subseteq X$ es G_δ (o **de tipo** G_δ) si es de la forma

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \text{ donde los } A_i \text{ son abiertos.}$$

Nota: G_δ viene de *Gebiet* (abierto en alemán) y *Durchschnitt* (intersección).

Definición

Sea X un espacio topológico. Un conjunto $F \subseteq X$ es F_σ (o **de tipo** F_σ) si es de la forma

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, \text{ donde los } C_i \text{ son cerrados.}$$

Nota: F_σ viene de *Fermé* (cerrado en francés) y *Somme* (suma o unión).

La Jerarquía de Borel

Podemos definir también generalizaciones de estos tipos de conjuntos. Por ejemplo,

- un conjunto $G_{\delta\sigma}$ es de la forma $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} G_{ij}$.
- un conjunto $F_{\sigma\delta}$ es de la forma $\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{ij}$.
- un conjunto $G_{\delta\sigma\delta}$ es de la forma $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} G_{ijk}$.
- un conjunto $F_{\sigma\delta\sigma}$ es de la forma $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{ijk}$.
- ...

Esto se puede formalizar de una forma más sistemática.

La Jerarquía de Borel

Definición

Sea X un espacio topológico. La **jerarquía de Borel** de X consiste de clases de conjuntos Σ_n^0 , Π_n^0 y Δ_n^0 , dadas por:

- Un conjunto $A \subseteq X$ está en Σ_1^0 si, y sólo si, es abierto.
- Un conjunto $A \subseteq X$ está en Π_n^0 si, y sólo si, su complemento está en Σ_n^0 .
- Un conjunto $A \subseteq X$ está en Σ_n^0 , $n > 1$, si y sólo si, es de la forma $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, con cada $A_i \in \Pi_{n_i}^0$, $n_i < n$.
- Un conjunto $A \subseteq X$ está en Δ_n^0 , si, y sólo si, está en Σ_n^0 y en Π_n^0 .

Definición

La colección de subconjuntos de X dada por $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{n \geq 1} \Sigma_n^0 \cup \bigcup_{n \geq 1} \Pi_n^0 \cup \bigcup_{n \geq 1} \Delta_n^0$, se llama el **álgebra de Borel** de X .

Propiedades de la Medida Exterior

Proposición

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto abierto G de \mathbb{R}^n tal que $E \subseteq G$ y

$$|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon.$$

Prueba: Tomemos $\{I_k\}_{k \geq 1}$ una cobertura enumerable de E por intervalos cerrados en \mathbb{R}^n , de modo que

$$E \subseteq \bigcup_k I_k \quad \text{y} \quad \sum_k v(I_k) < |E|_e + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideramos ahora intervalos cerrados $\{I_k^*\}_{k \geq 1}$, tales que

$$I_k \subseteq \text{int}(I_k^*) \quad \text{y} \quad v(I_k^*) < v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \quad \forall k \geq 1.$$

Definamos $G = \bigcup_{k \geq 1} \text{int}(I_k^*)$. Observe que G es un abierto de \mathbb{R}^n y que

$$E \subseteq \bigcup_{k \geq 1} I_k \subseteq \bigcup_{k \geq 1} \text{int}(I_k^*) = G.$$

Propiedades de la Medida Exterior

Además, como $G \subseteq \bigcup I_k^*$, vale

$$\begin{aligned} |G|_e &\leq \sum_{k \geq 1} v(I_k^*) < \sum_{k \geq 1} \left(v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) < \sum_{k \geq 1} v(I_k) + \varepsilon \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k \geq 1} v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< |E|_e + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = |E|_e + \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Obs!

De la propiedad anterior, dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ podemos hallar un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $E \subseteq G$ y

$$|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon.$$

En consecuencia, la medida exterior de E puede recuperarse como

$$|E|_e = \inf |G|_e, \quad \text{donde el ínfimo se toma sobre todos los abiertos } G \supseteq E.$$

Propiedades de la Medida Exterior

Proposición

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Existe un conjunto $H \subseteq \mathbb{R}^n$ de tipo G_δ tal que $E \subseteq H$ y

$$|H|_e = |E|_e.$$

Prueba: De la proposición anterior, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, existe un abierto $G_k \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

$$E \subseteq G_k \quad \text{y} \quad |G_k|_e < |E|_e + \frac{1}{k}, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

Consideramos la intersección $H = \bigcap_{k \geq 1} G_k$, un conjunto de tipo G_δ , que satisface $E \subseteq H$.

Luego,

$$|E|_e \leq |H|_e \leq |G_k|_e < |E|_e + \frac{1}{k}, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

Haciendo $k \rightarrow \infty$, obtenemos $|E|_e \leq |H|_e \leq |E|_e$, de modo que $|E|_e = |H|_e$. \square

Propiedades de la Medida Exterior

Al definir la noción de medida exterior, hemos usado intervalos I con bordes paralelos a los ejes coordenados de \mathbb{R}^n . Surge la pregunta de si la medida exterior de un conjunto depende de la posición de los ejes de coordenadas (ortogonales).

Respuesta: No. Para probar esto, consideraremos simultáneamente el sistema de coordenadas habitual en \mathbb{R}^n y una rotación fija de este sistema. Las nociones pertenecientes al sistema rotado se denotarán con una prima $'$. Así, por ejemplo, I' denotará a un intervalo con bordes paralelos a los ejes de coordenadas rotados, y $|E|'_e$ denotará la medida exterior de un subconjunto E relativa a estos intervalos rotados:

$$|E|'_e = \inf_S \sum v(I'_k).$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las coberturas S' de E por intervalos rotados I'_k .

El volumen $v(I)$ de un intervalo claramente no cambia por la rotación. (Ver pág. 8 en Sección 1.3 de Wheeden y Zygmund).

Propiedades de la Medida Exterior

Teorema

$|E|_e = |E|'_e$, para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Prueba: Primero afirmamos que dado I intervalo cerrado y $\varepsilon > 0$, existe una cobertura $\{I'_\ell\}_\ell$ de I por intervalos cerrados rotados, tal que

$$I \subseteq \bigcup_{\ell} I'_\ell \quad \text{y} \quad \sum_{\ell} v(I'_\ell) < v(I) + \varepsilon.$$

(De forma similar, dado I' intervalo cerrado (no rotado) y $\varepsilon > 0$, existe una cobertura $\{I_\ell\}_\ell$ de I' por intervalos cerrados, tal que

$$I' \subseteq \bigcup_{\ell} I_\ell \quad \text{y} \quad \sum_{\ell} v(I_\ell) < v(I') + \varepsilon.)$$

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto arbitrario. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos una cobertura $\{I_k\}_{k \geq 1}$ de E tal que

$$E \subseteq \bigcup_k I_k \quad \text{y} \quad \sum_k v(I_k) < |E|_e + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Propiedades de la Medida Exterior

Para cada $k \geq 1$, elijamos $\{I'_{k\ell}\}_\ell$ una cobertura de I_k por intervalos rotados, tal que

$$I_k \subseteq \bigcup_{\ell} I'_{k\ell} \quad \text{y} \quad \sum_{\ell} v(I'_{k\ell}) < v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |E|'_e &\leq \sum_{k \geq 1} \sum_{\ell \geq 1} v(I'_{k\ell}) < \sum_{k \geq 1} \left(v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) < \sum_{k \geq 1} v(I_k) + \varepsilon \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k \geq 1} v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< |E|_e + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = |E|_e + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como esto vale para todo $\varepsilon > 0$, portanto $|E|'_e \leq |E|_e$.

Un argumento similar, invirtiendo los papeles de los I e I' , produce $|E|'_e \geq |E|_e$. \square

Conjuntos Mesurables

Definición

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que E es un conjunto **Lebesgue-mesurable** (**mesurable**, o **medible**) si dado $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $E \subseteq G$ y

$$|G - E|_e < \varepsilon.$$

Cuando E es mesurable, definimos su **medida de Lebesgue** como

$$|E| = |E|_e.$$

Obs: La condición de que E sea mesurable no debe confundirse con la conclusión del teorema anterior, el cual establece que existe un abierto G que contiene a E , tal que

$$|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon.$$

En general, dado que tenemos la unión disjunta $G = E \cup (G - E)$ cuando $E \subseteq G$, sólo tenemos que $|G|_e \leq |E|_e + |G - E|_e$, y no podemos concluir de $|G|_e < |E|_e + \varepsilon$, que $|G - E|_e < \varepsilon$.

Conjuntos Mesurables

Ejemplo 1: Todo abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es Lebesgue-mesurable.

Tomemos $G = U$, un abierto de \mathbb{R}^n tal que $U \subseteq G$. Entonces

$$|G - U|_e = |U - U|_e = |\emptyset|_e = 0 < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0. \quad (\text{¿por qué vacío mide 0?})$$

Esto muestra que U es medible. \square

Ejemplo 2: Todo conjunto de \mathbb{R}^n con medida exterior nula, es Lebesgue-mesurable.

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $|E|_e = 0$. De la Proposición 1, para todo $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $E \subseteq G$ y

$$|G|_e < |E|_e + \varepsilon = \varepsilon.$$

Luego, como $G - E \subseteq G$, entonces $|G - E|_e \leq |G|_e < \varepsilon$, lo que muestra que E es Lebesgue-mesurable. \square

Conjuntos Mesurables

Ejemplo 3: Toda unión enumerable $E = \bigcup_{k \geq 1} E_k$ de conjuntos Lebesgue-mesurables $E_k \subseteq \mathbb{R}^n$, es Lebesgue-mesurable. Además

$$|E| = \left| \bigcup_k E_k \right| \leq \sum_k |E_k|.$$

Tomemos $E = \bigcup_{k \geq 1} E_k$, donde los $E_k \subseteq \mathbb{R}^n$ son todos mesurables. Para cada $k \geq 1$, de la Propiedad 1, existe un abierto G_k , tal que $E_k \subseteq G_k$ y $|G_k - E_k|_e < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Sea $G = \bigcup_k G_k$. G es un abierto de \mathbb{R}^n , y $E = \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup_k G_k = G$. Además, como $G - E \subseteq \bigcup_k (G_k - E_k)$, tenemos

$$|G - E|_e \leq \left| \bigcup_{k \geq 1} (G_k - E_k) \right|_e \leq \sum_{k \geq 1} |G_k - E_k|_e \leq \sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Esto muestra que E es Lebesgue-mesurable.

Luego,

$$|E| = |E|_e \leq \left| \bigcup_{k \geq 1} E_k \right|_e \leq \sum_{k \geq 1} |E_k|_e = \sum_{k \geq 1} |E_k|. \quad \square$$

Conjuntos Mesurables

Ejemplo 4: Todo intervalo n -dimensional I es Lebesgue-mesurable, y vale $|I| = v(I)$.

Prueba:

I es la unión de su interior y su frontera, esto es, $I = I^\circ \cup \partial I$.

De los ejemplos anteriores:

- Ya vimos que I° es mesurable, ya que es un abierto de \mathbb{R}^n (Ejemplo 1).
- Por otro lado, I° es un conjunto de medida nula (ya que al ser el borde de un objeto n -dimensional, ∂I es $(n - 1)$ -dimensional, y no tiene volumen en \mathbb{R}^n . (Ejemplo 2).
Portanto, ∂I es mesurable.

De ahí que $I = I^\circ \cup \partial I$ es unión de dos mesurables, portanto es Lebesgue-mesurable (Ejemplo 3). \square

Conjuntos Mesurables

Corolario

Si $\{I_k\}_{k=1}^N$ es una colección finita de intervalos n -dimensionales que no se traslapan, entonces $\bigcup_{k=1}^N I_k$ es Lebesgue-mesurable y $\left| \bigcup_{k=1}^N I_k \right| = \sum_{k=1}^N |I_k|$.

Recordemos que la distancia entre dos conjuntos $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ está dada por

$$d(E_1, E_2) = \inf \{ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| : \mathbf{x}_1 \in E_1, \mathbf{x}_2 \in E_2 \}.$$

Lema

Si $d(E_1, E_2) > 0$, entonces $|E_1 \cup E_2|_e = |E_1|_e + |E_2|_e$.

Ejemplo 5: Todo cerrado $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es Lebesgue-mesurable.

Conjuntos Medurables

Ejemplo 6: El complemento E^c de cualquier conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-medurable, es Lebesgue-medurable.

Ejemplo 7: Toda intersección enumerable $E = \bigcap_{k \geq 1} E_k$ de conjuntos Lebesgue-medurables $E_k \subseteq \mathbb{R}^n$, es Lebesgue-medurable.

Ejemplo 8: Si $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ son Lebesgue-medurables, entonces $E_1 - E_2$ es Lebesgue-medurable.

Proposición

La colección de conjuntos Lebesgue-medurables de \mathbb{R}^n es una σ -álgebra.

(Ver las pruebas de todas estas propiedades en el capítulo 3 de Wheeden y Zygmund.)