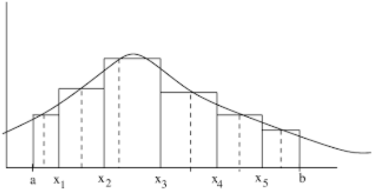
La Integral de Riemann-Stieltjes

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Medida e Integración (Aula 02) 16.enero.2023

Integral de Riemann-Stieltjes

Recordemos que la integral de Riemann en $\mathbb{R}$ mide el área bajo la curva $y = f(x)$, comprendida en el intervalo $[a, b]$.



Dicha área corresponde a la suma de la áreas rectangulares $A_i = f(\xi_i)\,\Delta t_i$ (base por altura), indicadas por la partición P.

Pregunta: ¿Qué ocurre si medimos el área de otra forma?

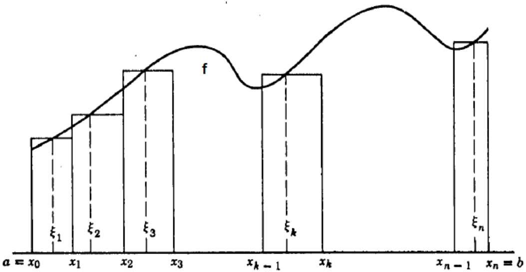
- podríamos medir las alturas de otra forma: aplicando alguna función $T \circ f = T(f(x))$.
- podríamos medir el dominio diferente: aplicando alguna transformación g a x.

Un primer intento para hacer esto es la integral de Riemann-Stieltjes.

Definición

*Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones limitadas, y $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos la **suma de Riemann-Stieltjes** de f con respecto de g, correspondiente a P, como*

$$s(P; f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big), \quad \text{con } t_{i-1} \leq \xi_i t_i.$$



¿Para qué sirve g?
g se llama usualmente la **carga** o **masa**. Funciona como una especie de densidad. Podemos usar g para pesar o ponderar los intervalos (le damos más importancia a unas regiones y menos a otras).

Definición

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas. Decimos que f es ***Riemann-Stieltjes integrable*** *con respecto de g, si existe $I \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de $[a, b]$ tal que cualquier refinamiento P de P_ε satisface*

$$|s(P; f, g) - I| < \varepsilon.$$

Esto es $\lim_{||P||\to 0} s(P; f, g)$ existe. En ese caso, escribimos $\displaystyle\int_a^b f\, dg = \int_a^b f(t)\, dg(t) = I$.

También decimos que f es g-**integrable**.

Definición

*Sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$, y sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones limitadas. Definimos la **suma de Riemann-Stieltjes** de f con respecto de g, correspondiente a P, por*

$$s(P, f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right).$$

Definición

*Sean $f, g : [a, b] \to$. Decimos que f es **Riemann-Stieltjes integrable** respecto de g si existe $I \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de $[a, b]$, con la propiedad que todo refinamiento PsubseteqP$_\varepsilon$, satisface*

$$\left|s(P, f, g) - I\right| < \varepsilon.$$

Esto es, el límite $\lim_{||P|| \to 0} s(P, f, g)$ existe y es igual a I.

Integral de Riemann-Stieltjes

En el que f es Riemann-Stieltjes integrable (RS-integrable) respecto de g, también podemos decir que f es g-**integrable**.

En ese caso, escribimos $\displaystyle\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(t)\,dg(t) = I.$

Nota:
De forma análoga que en el caso de la integral de Riemann,, podemos desarrollar una teoría de integral de Darboux-Stieltjes, y definir sumas inferior y superior

$$\underline{\int_a^b} f\,dg = \sup_P s(P,f,g) \qquad \text{y} \qquad \overline{\int_a^b} f\,dg = \inf_P S(P,f,g).$$

y definimos que f es **Riemann-Stieltjes integrable** con respecto de g si

$$\underline{\int_a^b} f\,dg = \overline{\int_a^b} f\,dg.$$

Ejemplos

Ejemplo 1:
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada, y considere $g(x) = x$, la función identidad.

En este caso, tenemos que g es también limitada en el compacto $[a, b]$, de modo que f es Riemann-Stieltjes integrable respecto de g. Como

$$s(P, f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(g(t_i) - g(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(t_i - t_{i-1}),$$

las sumas de Riemann-Stieltjes se reducen a sumas de Riemann.
La integral es

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(t)\,dg(t) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

por lo que la integral de Riemann-Stieltjes se reduce a la integral de Riemann.

De ahí que la teoría de la integral de Riemann-Stieltjes generaliza a la de Riemann.

Ejemplos

Ejemplo 2: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada, y tome $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función constante, digamos $g(t) = c$, para todo $t \in [a, b]$.

En este caso, $\Delta g_i = g(t_i) - g(t_{i-1}) = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.
Portanto,

$$s(P, f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) = 0,$$

para cualquier partición P de $[a, b]$.

En particular, f es g-integrable y $\int_a^b f\, dg = 0$.

Ejemplo 3a: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada y continua. Consideremos la función de salto

$$g(x) = \begin{cases} u_0, & t < \widetilde{t}; \\ u_1, & t \geq \widetilde{t}. \end{cases} \qquad \widetilde{t} \in (a,b).$$

¿Cómo son las sumas de Riemann-Stieltjes?
Tome una partición P que incluya a $\widetilde{t}$, esto es $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_j = \widetilde{t}, \ldots, t_n\}$. Observe que

$$\begin{aligned} s(P,f,g) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(g(t_i) - g(t_{i-1})) \;=\; f(x_j)\,(g(t_j) - g(t_{j-1})) \\ &= f(\xi_j)\,(u_1 - u_0) \;=\; f(\xi_j)\,\delta g. \end{aligned}$$

Como $t_{j-1} < \xi_j < t_j = \widetilde{t}$, entonces en el límite $||P|| \to 0$, tenemos que $t_{j-1} \to t_j^-$, de modo que $\xi_j \to \widetilde{t}^-$. Así, por la continuidad de f, tendríamos que

$$\int_a^b f\,dg = \lim_{||P|| \to 0} s(P,f,g) = \lim_{\xi \to \widetilde{t}^-} f(\xi_j)\,(u_1 - u_0) = f(\widetilde{t})\,(u_1 - u_0).$$

Ejemplos

Ejemplo 3b: De forma similar, sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada y continua. Consideremos ahora la función de salto:

$$g(x) = \begin{cases} u_0, & t \leq \widetilde{t}; \\ u_1, & t > \widetilde{t}. \end{cases} \qquad \widetilde{t} \in (a,b).$$

¿Cómo son las sumas de Riemann-Stieltjes?
Tome una partición P que incluya a $\widetilde{t}$, esto es $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_j = \widetilde{t}, \ldots, t_n\}$. Observe que

$$\begin{aligned} s(P,f,g) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(g(t_i) - g(t_{i-1})) \;=\; f(x_{j+1})\,\big(g(t_{j+1}) - g(t_j)\big) \\ &= f(\xi_{j+1})\,(u_1 - u_0) \;=\; f(\xi_{j+1})\,\delta g. \end{aligned}$$

Como $\widetilde{t} = t_j < \xi_{j+1} < t_{j+1}$, entonces en el límite $||P|| \to 0$, tenemos que $t_{j+1} \to t_j^+$, de modo que $\xi_{j+1} \to \widetilde{t}^+$. Así, por la continuidad de f, tendríamos que

$$\int_a^b f\,dg = \lim_{||P|| \to 0} s(P,f,g) = \lim_{\xi \to \widetilde{t}^+} f(\xi_j)\,(u_1 - u_0) = f(\widetilde{t})\,(u_1 - u_0).$$

Ejemplo 3c: Qué ocurre con la integral de Riemann-Stieltjes, en el ejemplo, anterior, cuando:

a) f es continua por la izquierda en $\tilde{t}$, esto es, sólo sabemos que $\lim\limits_{t \to \tilde{t}^-} f = f(\tilde{t}^-) = f(\tilde{t})$.

b) f es continua por la derecha en $\tilde{t}$, esto es, sólo sabemos que $\lim\limits_{t \to \tilde{t}^+} f = f(\tilde{t}^+) = f(\tilde{t})$.

c) la función g es de la forma

$$g(x) = \begin{cases} u_0, & t < \tilde{t}; \\ u_1, & t = \tilde{t}; \\ u_2, & t > \tilde{t}. \end{cases} \qquad \tilde{t} \in (a,b).$$

Prueba: Ejercicio!

Ejemplos

Ejemplo 4: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada, y para $a < c_1 < c_2 < b$, considere la función

$$g(x) = \begin{cases} u_1, & a \leq t < c_1; \\ u_2, & c_1 \leq t < c_2; \\ u_3, & c_2 \leq t \leq b. \end{cases}$$

Tenemos que

$$s(P, f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta g_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(u_{i+1} - u_i) = f(\xi_1)\,(u_2 - u_1) + f(\xi_2)\,(u_3 - u_2).$$

Luego, $\int_a^b f\, dg = f(c_1^{\pm})(u_2 - u_1) + f(c_2^{\pm})(u_3 - u_2)$, donde los signos $\pm$ dependen de la continuidad de f en los puntos c_1, c_2.

Ejemplos

Sea $x > 0$. Sea $f : [0, x] \to \mathbb{R}$ limitada y continua. Consideremos la función $g(t) = \lfloor t \rfloor$, la función mayor entero.

En este caso, g también es limitada en $[0, x]$, de modo que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto de g en $[0, x]$.

Observe que los saltos de g ocurren precisamente en los enteros $n = 1, 2, \dots, \lfloor x \rfloor$, y son todos saltos de tamaño $\delta g_n = g(n^+) - g(n^-) = 1$.

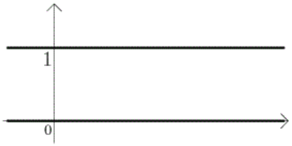
Del ejemplo anterior, tenemos

$$\int_0^x f\,dg = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} f(n)\,\delta g_n = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} f(n).$$

Así que la teoría de sumas (finitas) de funciones, corresponde a un caso particular de la integral de RIemann-Stieltjes.

Integral de Riemann-Stieltjes

Ejercicio: Mostrar que la función de Dirichlet:



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

La función de Dirichlet.

no es Riemann-Stieltjes integrable sobre $[0, 1]$, respecto de cualquier función continua, limitada, y no-decreciente $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ (obviamente, asumiento que g no es constante).