

FRACCIONES CONTINUAS

ALAN REYES-FIGUEROA
TEORÍA DE NÚMEROS

(AULA 18) 21.SEPTIEMBRE.2021

Fracciones Continuas

En las inclusiones $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, probablemente el paso de \mathbb{Q} a \mathbb{R} es el más complicado conceptualmente.

- el concepto de número natural es casi un concepto primitivo,
- un número entero no es más que una clase de naturales, con signo,
- un racional, es una clase que viene del cociente entre dos enteros a y $b \neq 0$,
- un número real es una clase de secuencias de Cauchy de racionales.

(Ver *Introducción a la Matemática Moderna*, Suger-Morales-Pinot).

Una propiedad de \mathbb{R} es que todo número real puede ser aproximado por racionales. De hecho, si $x \in \mathbb{R}$, basta hacer $q = \lfloor x \rfloor$ y tenemos $0 \leq x - q < 1$.

Si escribimos la representación decimal de $x - q$ como $x - q = 0.a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$ entonces si $r_n = a_n + 10a_{n-1} + 100a_{n-2} + \dots + 10^{n-1}a_1$, vale

$$\frac{r_n}{10^n} \leq x - q < \frac{r_n + 1}{10^n},$$

y portanto $q + \frac{r_n}{10^n}$ es una buena aproximación racional para x , en el sentido que el error $|x - (q + \frac{r_n}{10^n})|$ es menor que $\frac{1}{10^n}$.

Fracciones Continuas

Así, la representación decimal de x produce una secuencia $\{q_k\}_k \subset \mathbb{Q}$ de racionales que aproximan a x y cuyos denominadores son potencias de 10.

Ahora, dado cualquier $x \in \mathbb{R}$ y cualquier natural $q \neq 0$, existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$.

Prueba: Basta tomar $p = \lfloor qx \rfloor$. Luego

$$0 \leq qx - p < 1 \quad \implies \quad 0 \leq x - \frac{p}{q} < \frac{1}{q} \quad \implies \quad \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}. \quad \square$$

En consecuencia

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q} \quad \text{y} \quad \left| x - \frac{p+1}{q} \right| \leq \frac{1}{q}.$$

Ejemplo: $x = \pi$, $q = 10$.

Entonces $p = \lfloor 10\pi \rfloor = \lfloor 31.415926535 \dots \rfloor = 31$. De ahí que $\frac{p}{q} = \frac{31}{10}$

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = 0.0415926535 \dots < \frac{1}{10} \quad \text{y} \quad \left| x - \frac{p+1}{q} \right| = 0.0584073346 \dots \leq \frac{1}{10}.$$

Fracciones Continuas

Hay aproximaciones racionales de x con denominador q , cuyo error es menor que $\frac{1}{q}$. En particular, las que provienen de la representación decimal, corresponden a denominadores potencias de 10.

Las aproximaciones base 10 son útiles y populares para efectuar cálculos (métodos numéricos, teoría de aproximación), pero esconden aproximaciones racionales de x mucho más eficientes. Por ejemplo

$$\left| \pi - \frac{22}{7} \right| < \frac{1}{700} < \left| \pi - \frac{314}{100} \right| \quad \text{y} \quad \left| \pi - \frac{355}{113} \right| < \frac{1}{3000000} < \left| \pi - \frac{3141592}{1000000} \right|.$$

Estas revelan que $\frac{22}{7}$ y $\frac{355}{113}$ son aproximaciones mucho más eficiente se $x = \pi$, que otras con denominadores muycho mayores.

El objetivo de las próximas aulas es presentar una otra forma de representar números reales, proveniente de **fracciones continuas**. Esta representación produce aproximaciones racionales muy eficientes.

Fracciones Continuas

Sea $x \in \mathbb{R}$. Denotamos de forma recursiva

$$\alpha_0 = x, \quad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor, \quad \text{y si } \alpha_n \notin \mathbb{Z}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si para algún $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\alpha_n = a_n$ (esto es $\alpha_n \in \mathbb{Z}$), entonces escribimos

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}. \quad (1)$$

Denotamos la representación en (1) por $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$. Si no, denotamos

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \quad (2)$$

y escribimos $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$.

Fracciones Continuas

Ejemplo: Tomemos $x = \pi \approx 3.1415926535 \dots$

Entonces $a_0 = \lfloor x \rfloor = 3$, y

$$\begin{aligned}\pi &= 3.1415926535 \dots = 3 + 0.1415926535 \dots = 3 + \frac{1}{6.85276327 \dots} \\&= 3 + \frac{1}{6 + 0.85276327 \dots} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1.17265837 \dots}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + 0.17265837 \dots}} \\&= 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5.7917838 \dots}}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + 0.7917838 \dots}}}\end{aligned}$$

Luego, $\pi = [3; 6, 1, 5, 1, \dots]$

Fracciones Continuas

En este caso, podemos construir aproximaciones de π como: $[3;] = 3;$

$$[3; 6] = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6} = 3.166666\dots; [3; 6, 1] = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1}} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.142857\dots$$

Ejemplo: Tomemos $x = \frac{16}{9} = 1.77777777\dots$

Entonces $a_0 = \lfloor x \rfloor = 1$, y

$$\begin{aligned}x &= \frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9} = 1 + \frac{1}{9/7} \\&= 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7/2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

De ahí que $\frac{16}{9} = [1; 1, 3, 2]$

Fracciones Continuas

Obs:

- En el caso que $x \notin \mathbb{Q}$, la fracción continua de x es infinita.
- Cuando $x \in \mathbb{Q}$, su representación en fracción continua es finita, y los coeficientes vienen del algoritmo de Euclides.

En el ejemplo anterior,

$$16 = 1(9) + 7,$$

$$9 = 1(7) + 2,$$

$$7 = 3(2) + 1,$$

$$2 = 2(1) + 0.$$

Fracciones Continuas

En general, si

$$p = a_0q + r_1,$$

$$q = a_1r_1 + r_2,$$

$$r_1 = a_2r_2 + r_3,$$

...

$$r_{n-1} = a_nr_n + 0.$$

entonces

$$\begin{aligned}x &= \frac{p}{q} \dots = a_0 + \frac{r_1}{q} \dots = a_0 + \frac{1}{q/r_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{r_1/r_2}} \\&= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_3}{r_2}}} = \dots = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].\end{aligned}$$

Fracciones Continuas

Si $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$, la fracción $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ se llama la **n -ésima reducida** o **n -ésima convergente** de la fracción continua de x .

Proposición

Dada una secuencia (finita o infinita) $t_0, t_1, t_2, \dots \in \mathbb{R}$, tal que $t_k > 0$ para todo $k \geq 1$, definimos secuencias $\{x_m\}$ y $\{y_m\}$ por

$$\begin{aligned}x_0 &= t_0, y_0 = 1, x_1 = t_0 t_1 + 1, y_1 = t_1, \\x_{m+2} &= t_{m+2} x_{m+1} + x_m, y_{m+2} = t_{m+2} y_{m+1} + y_m, \quad \forall m \geq 0.\end{aligned}$$

Entonces

$$[t_0; t_1, t_2, \dots, t_n] = t_0 + \frac{1}{t_1 + \frac{1}{t_2 + \dots + 1/t_n}} = \frac{x_n}{y_n}, \quad \forall n \geq 0.$$

Además, $x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n, \forall n \geq 0$.

Fracciones Continuas

Prueba: Por inducción sobre n . Para $n = 0$, tenemos $[t_0] = t_0 = \frac{t_0}{1} = \frac{x_0}{y_0}$. Para $n = 1$, tenemos $[t_0; t_1] = t_0 + \frac{1}{t_1} = \frac{t_0 t_1 + 1}{t_1} = \frac{x_1}{y_1}$, y para $n = 2$ resulta

$$\begin{aligned}[t_0; t_1, t_2] &= t_0 + \frac{1}{t_1 + 1/t_2} = t_0 + \frac{t_2}{t_1 t_2 + 1} = \frac{t_0 t_1 t_2 + t_0 + t_2}{t_1 t_2 + 1} \\ &= \frac{t_2(t_0 t_1 + 1) + t_0}{t_2 t_1 + 1} = \frac{t_2 x_1 + x_0}{t_2 y_1 + y_0} = \frac{x_2}{y_2}.\end{aligned}$$

Suponga que la afirmación es válida para n . Entonces

$$\begin{aligned}[t_0; t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}] &= \left[t_0; t_1, t_2, \dots, t_n + \frac{1}{t_{n+1}} \right] = \frac{(t_n + \frac{1}{t_{n+1}})x_{n-1} + x_{n-2}}{(t_n + \frac{1}{t_{n+1}})y_{n-1} + y_{n-2}} \\ &= \frac{t_{n+1}(t_n x_{n-1} + x_{n-2}) + x_{n-1}}{t_{n+1}(t_n y_{n-1} + y_{n-2}) + y_{n-1}} \\ &= \frac{t_{n+1}x_n + x_{n-1}}{t_{n+1}y_n + y_{n-1}} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}.\end{aligned}$$

Fracciones Continuas

Mostramos ahora la segunda afirmación, también por inducción.

Para $n = 0$, tenemos que $x_1 y_0 - x_0 y_1 = (t_0 t_1 + 1)(1) - t_0 t_1 = 1 = (-1)^0$. Si $x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n$, entonces

$$\begin{aligned}x_{n+2} y_{n+1} - x_{n+1} y_{n+2} &= (t_{n+2} x_{n+1} + x_n) y_{n+1} - x_{n+1} (t_{n+2} y_{n+1} + y_n) \\&= t_{n+2} x_{n+1} y_{n+1} + x_n y_{n+1} - t_{n+2} x_{n+1} y_{n+1} - x_{n+1} y_n \\&= -(x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \quad \square\end{aligned}$$

En los siguientes resultados $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ será un número real y $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ la secuencia de convergentes de su fracción continua.

Corolario

Las secuencias $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ satisfacen las recurrencias

$$p_{n+2} = a_{n+2} p_{n+1} + p_n, \quad q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n, \quad \forall n \geq 0,$$

con $p_0 = a_0$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_0 = 1$ y $q_1 = a_1$. Además, $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$, $\forall n \geq 0$.

Fracciones Continuas

Corolario

Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad y \quad \alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}.$$

Prueba: La primera igualdad sigue de la proposición anterior, pues

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \alpha_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

La segunda igualdad es consecuencia de la primera:

$$\begin{aligned} x(\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}) &= \alpha_n p_{n-1} + p_{n-2} \implies \alpha_n (xq_{n-1} - p_{n-1}) = p_{n-2} - xq_{n-2} \\ &\implies \alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}. \quad \square \end{aligned}$$

Fracciones Continuas

Proposición

Vale

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) q_n^2},$$

donde $\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1]$. En particular

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2) q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) q_n^2} < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}.$$

Prueba: Por el corolario anterior, tenemos

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n} = \frac{-(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)}{(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n} \\ &= \frac{-(-1)^{n-1}}{(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + q_{n-1}/q_n) q_n^2} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) q_n^2}. \end{aligned}$$

Fracciones Continuas

En particular,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) q_n^2}.$$

Como $\lfloor \alpha_{n+1} \rfloor = a_{n+1}$ y $0 < \beta_{n+1} < 1$, se sigue que $a_{n+1} \leq \alpha_{n+1} < a_{n+1} + 1$ y

$$a_{n+1} \leq \alpha_{n+1} < \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} < a_{n+1} + 2,$$

lo que muestra

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2) q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) q_n^2} < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}.$$

Finalmente, la expresión de β_{n+1} como fracción continua se sigue de

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \implies \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{1}{a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}},$$

y se tiene la representación en sentido reverso. \square