

# Teoría de Números 2021

Lista 03

13.agosto.2021

1. a) Dar un ejemplo para mostrar que  $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$  no necesariamente implica que  $a \equiv b \pmod{n}$ .  
b) Si  $a \equiv b \pmod{n}$ , probar que  $(a, n) = (b, n)$ .

2. Compruebe que  $53^{103} + 103^{53}$  es divisible por 39, y que  $111^{333} + 333^{111}$  es divisible por 7.

3. Asumiendo que  $495 \mid 273x49y5$ , encontrar los dígitos  $x$  y  $y$ .

4. Si  $p$  y  $q$  son primos distintos, muestre que  $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$ .

5. Use el Teorema de Wilson para mostrar que para cualquier primo impar  $p$ , vale

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (p-2)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod{p}.$$

Mostrar que

$$\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod{p}.$$

6. Pruebe que para todo  $n > 1$ , se cumple que  $\sum_{(k,n)=1, 1 \leq k \leq n} k = \frac{n\varphi(n)}{2}$ .

7. a) Construya un criterio de divisibilidad entre 59.

b) Utilice el criterio anterior para verificar si los números 45843, 19641 y 32763 son divisibles entre 59.

8. Confirme que  $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$  es un número de Carmichael.

9. Implemente en Python el Test de primalidad de Fermat (utilice  $k = 5$  repeticiones del test).

(Agregar el código de la función que ejecuta el test, sólo de la función, en su tarea, esta función no debería ser mayor a 15 líneas de código.

Luego, evalúe en su test si los siguientes números son primos o no:

1317, 2709, 3257, 3911, 4279, 5497, 6311, 7223, 8431, 9203.

Compare con una tabla de primos para indicar si su test da la respuesta correcta (aquí la respuesta correcta se entiende que en el caso de  $n$  ser primo, el test responde que  $n$  es probablemente primo).

Una tabla de primos puede encontrarse en <https://primes.utm.edu/lists/small/10000.txt>.

---