Divisibilidad

Alan Reyes-Figueroa
Teoría de Números

(Aula 02) 07.julio.2022

Divisibilidad

Definición

*Dados dos enteros $d, m \in \mathbb{Z}$ diremos que d **divide** a m o que m es **divisible** entre d, si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $m = qd$, esto es $\frac{m}{d} \in \mathbb{Z}$ es un entero.*
*En ese caso, escribimos $d \mid m$, y diremos que m es un **múltiplo** de d, y que d es un **divisor** o **factor** de m.*
Cuando d no divide a m escribimos $d \nmid m$.

Ejemplos: $5 \mid 10$, pero $10 \nmid 5$.

Como $0 = 0 \cdot n$ se sigue que $n \mid 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, si $0 \mid n$, entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $n = q \cdot 0 = 0$, de modo que $0 \nmid n$ para $n \neq 0$. Para un entero fijo n, los múltiplos de n son $0, \pm n, \pm 2n, \ldots$. Luego, no es difícil ver que entre n enteros consecutivos, siempre hay uno divisible entre n.

Propiedades

Para todo $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$, valen

a) $x \mid 0$, $1 \mid x$, $0 \nmid x$ *para* $x \neq 0$; $x \mid x$ *(reflexividad).*

b) $x \mid 1$, *si y sólo si,* $x = \pm 1$.

c) $x \mid y$, $y \mid z \;\Rightarrow\; x \mid z$ *(transitividad).*

d) $x \mid y$, $x \mid z \;\Rightarrow\; x \mid ay + bz$, *para todo* $a, b \in \mathbb{Z}$ *(linealidad).*

e) *Si* $x \mid y$, *entonces* $y = 0$ *ó* $|x| \leq |y|$ *(limitación).*

f) $x \mid y$, $x \mid y \pm z \;\Rightarrow\; x \mid z$.

g) $x \mid y$, $y \mid x \;\Rightarrow\; |x| = |y|$ *(antisimetría, a menos de signo).*

h) *Si* $x \mid y$ *y* $y \neq 0$, *entonces* $\frac{y}{x} \mid y$ *(divisores vienen en pares).*

i) $x \mid y$, $z \mid w \;\Rightarrow\; xz \mid yw$.

j) *Si* $z \neq 0$, *entonces* $x \mid y \;\Leftrightarrow\; xz \mid yz$.

Prueba: (a) Observe que $x = 1 \cdot x$, $0 = x \cdot 0$, $0 \mid x \;\Rightarrow x = q \cdot 0 = 0$; $x = x1$.
Para (b) $x \mid 1 \;\Leftrightarrow\; 1 = qx, \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; q = \pm 1$, y portanto $x = \pm 1$.

En los ítems (c) a (h), la condición $x \mid y$ se da, de modo que $y = kx$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.
En (c) $y \mid z \;\Rightarrow\; z = \ell y \;\Rightarrow\; z = \ell y = \ell(kx) = (k\ell)x$, con $k\ell \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow x \mid z$.

En (d) $x \mid z \;\Rightarrow\; z = \ell x \;\Rightarrow\; ay + bz = a(kx) + b(\ell x) = (ak + b\ell)x \;\Rightarrow\; x \mid ay + bz$.

En (e), suponga $y \neq 0$. Entonces $k \neq 0 \;\Rightarrow\; |k| \geq 1 \;\Rightarrow |y| = |kx| = |k| \cdot |x| \geq |x|$.

En (f), por (c) tenemos que $x \mid y$, $x \mid y \pm z \;\Rightarrow\; x \mid y - (y \pm z) = \pm z$.

En (g), de (e) se tiene que $x \mid y$, $y \mid x \;\Rightarrow\; |y| \geq |x| \geq |y| \;\Rightarrow\; |y| = |x|$.

En (h), si $y \neq 0$, entonces $x \mid y \;\Rightarrow y = kx = (\frac{y}{x})x$. Como $\frac{y}{x} \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} \mid y$.

En (i), $y = kx$, $w = \ell z \;\Rightarrow yw = (kx)(\ell z) = (k\ell)xz \;\Rightarrow\; xz \mid yw$.

Finalmente (j), $(\Rightarrow)$ de (i) con $w = z$, se tiene que $x \mid y$, $z \mid z \;\Rightarrow\; xz \mid yz$. Para la recíproca $(\Leftarrow)$ $xz \mid yz$, $z \neq 0 \;\Rightarrow\; xz = k(yz) = kxz,\; k \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; x = ky \;\Rightarrow\; x \mid y$. $\square$

Comentarios:

- Las propiedades (a), (c) y (g), corresponden a la reflexividad, transitividad y antisimetría (a menos de signo) de la relación $|$. Restricta a los naturales $\mathbb{N}$, la relación $|$ es un **orden parcial**.
- La propiedad (d) de linealidad sólo funciona para coeficientes en $\mathbb{Z}$.
- La propiedad (j) indica que en una relación de divisibilidad, podemos "cancelar" factores comunes (excepto 0).
- La (e), limitación, nos dice que el conjunto de divisores de un número entero n es finito. El número de divisores positivos de n es $\leq n$.
- La propiedad (h) nos indica que los divisores de n vienen en pares $(d, \frac{n}{d})$. **Obs!** No dice que los divisores d y $\frac{n}{d}$ son distintos.

Ejemplo

Ejemplo: Hallar todos los enteros positivos n tales que
$2n^2 + 1 \mid n^3 + 9n - 17$.

Solución: Usamos varias de las propiedades de divisibilidad anteriores.
Primero, observe que $(2n^2 + 1)n$ es un múltiplo de $2n^2 + 1$, de modo que
$2n^2 + 1 \mid (2n^2 + 1)n = 2n^3 + n$.
Por otro lado, la hipótesis implica que $2n^2 + 1 \mid n^3 + 9n - 17$.

Combinando ambas relaciones de divisibilidad, obtenemos

$$2n^2 + 1 \mid (2n^3 + n) - 2(n^3 + 9n - 17) = 34 - 17n = 17(2 - n). \tag{1}$$

Usando ahora la propiedad de que todo entero divide a 0: $n \mid 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, podemos obligar a que el lado derecho de esta divisibilidad sea 0, haciendo $n = 2$.
En particular, si sustituimos $n = 2$ en la relación del enunciado, obtenemos $9 \mid 8 + 18 - 17 = 9$, la cual es verdadera. De ahí que $n = 2$ es una solución.

Ejemplo

Para hallar más soluciones, usamos ahora la ley de limitación en la relación de divisibilidad (1). Así

$$2n^2 + 1 \leq |34 - 17n|.$$

Tenemos dos casos, atendiendo al signo de la cantidad $34 - 17n$.

- Caso 1: $34 - 17n \geq 0$. En este caso, tendríamos $2 \geq n$, de modo que sólo debemos verificar los casos $n = 1$ y $n = 2$. Ya vimos que $n = 2$ es solución. Basta verificar la divisibilidad en el enunciado para $n = 1$. En este caso, $3 \nmid 1 + 9 - 17 = -7$, de modo que $n = 1$ no cumple.
- Caso 2: $34 - 17n \leq 0$. Este caso corresponde a $n \geq 2$. En este segundo caso, la ley de limitación arriba se reduce a

  $$2n^2 + 1 \leq |34 - 17n| = 17n - 34.$$

  Escribiendo todo de un lado de la desigualdad, obtenemos

  $$2n^2 - 17n + 35 \leq 0.$$

Ejemplo

La ecuación asociada a la desigualdad anterior tiene raíces

$$2n^2 - 17n + 35 = 0 \qquad n = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4(2)(35)}}{2(2)} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 280}}{4} = \frac{17 \pm 3}{4} = \tfrac{7}{2}, 5.$$

Para resolver la desigualdad, consideramos los intervalos entre estas raíces:

Intervalo	Representante n	Signo de $2n^2 - 17n + 35$	¿Es $2n^2 - 17n + 35 \leq 0$?
$(2, \frac{7}{4})$	3	$+$	no
$(\frac{7}{4}, 5)$	4	$-$	sí
$[5, 5]$	5	0	sí
$(5, \infty)$	6	$+$	no

De allí, sólo los enteros positivos $n = 4$ y $n = 5$ cumplen la ley de limitación, y son los únicos que podrían cumplir con la divisibilidad del enunciado. Verificando para cada uno, 4 no cumple, mientras que $n = 5$ satisface $51 \mid 153$. De allí que $n = 5$ también es solución.

Así, las únicas soluciones enteras positivas son $n = 2$ y $n = 5$. $\square$

Otros ejercicios.

Ejemplo: Pruebe que para todo entero positivo n, la fracción $\frac{21n+4}{14n+3}$ es irreducible.

Ejemplo: Mostrar que para todo entero n:

a) $n^5 - 5n^3 + 4n$ es divisible entre 120.

b) $n^2 + 3n + 5$ no es divisible por 121.

Ejemplo: Encontrar todos los enteros positivos n para los cuales el número obtenido de n al borrar el último dígito, es un divisor de n.

Ejemplo: ¿Cuál es el mayor entero positivo x tal que $23^x \mid 2021!$?