

ECUACIONES DIOFANTINAS

ALAN REYES-FIGUEROA
TEORÍA DE NÚMEROS

(AULA 25A) 12.OCTUBRE.2023

Ecuaciones Diofantinas

Estudiamos algunas ecuaciones diofantinas.

Ternas Pitagóricas:

Las triplas de números no negativos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, se llaman **tripas** o **ternas pitagóricas**.

De entrada, observe que la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ admite soluciones **triviales** de la forma $(\pm x, 0, \pm x)$ y $(0, \pm y, \pm y)$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$.

Suponga que $x^2 + y^2 = z^2$, con $x, y, z > 0$. Podemos asumir que x, y, z son primos relativos entre sí, pues si $d = (x, y, z)$ entonces $x = dx', y = dy', z = dz'$, entonces

$$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow (dx')^2 + (dy')^2 = (dz')^2 \Rightarrow d^2((x')^2 + (y')^2) = d^2(z')^2 \Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = (z')^2.$$

Una terna pitagórica cuyos términos son primos relativos entre sí se llama una **terna pitagórica primitiva**. Nos limitamos a buscar ternas primitivas.

Observe que x, y no pueden ser ambos pares, pues si $2 \mid x, 2 \mid y \Rightarrow 2 \mid z$.

Ternas Pitagóricas

Por otro lado, recordemos que módulo 4, todo par $a \in \mathbb{Z}$ satisface $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$, mientras que todo impar satisface $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$. Así, los cuadrados son congruentes a 0 ó 1 (mod 4).

Si x, y fuesen ambos impares, tendríamos $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, lo cual es imposible. Entonces uno es par, el otro impar. Sin pérdida vamos a suponer x impar, y par $\Rightarrow z$ es impar.

Como $x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$, y los términos $z + y, z - y$ son ambos pares, podemos escribir

$$x = 2a, \quad z + y = 2b, \quad z - y = 2c, \quad \text{para ciertos } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Observe en particular que $z = b + c, y = b - c$.

De ahí que $4a^2 = (2a)^2 = x^2 = (z + y)(z - y) = (2b)(2c) = 4bc \Rightarrow a^2 = bc$. Afirmamos que $(b, c) = 1$. Caso contrario, si p es un primo tal que $p \mid b$ y $p \mid c$, entonces $p \mid b + c = z$ y $p \mid b - c = y$, lo que implica que $p \mid z^2 - y^2 = x^2 \Rightarrow p \mid x$, y así $(x, y, z) \geq p$, contrario al supuesto inicial.

Ternas Pitagóricas

Sea $a = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ la factoración en primos de a . Entonces $a^2 = p_1^{2k_1} \cdots p_r^{2k_r}$ y todos estos primos dividen al producto bc . Siendo $(b, c) = 1$, entonces necesariamente estos primos se particionan en dos grupos: (los que dividen a b y los que dividen a c), y obtenemos $b = p_1^{2k_1} \cdots p_m^{2k_m}$ y $c = p_{m+1}^{2k_{m+1}} \cdots p_r^{2k_r}$. Portanto, b y c son cuadrados perfectos.

Entonces $b = v^2$, $c = u^2$. Ambos u, v son impares y $(u, v) = 1$, con $u < v$. Luego $z + y = v^2$, $z - y = u^2$, y $x^2 = u^2 v^2$. Así, obtenemos la parametrización

$$x = uv, \quad y = \frac{v^2 - u^2}{2}, \quad z = \frac{v^2 + u^2}{2}.$$

En particular, $x^2 + y^2 = u^2 v^2 + \left(\frac{v^2 - u^2}{2}\right)^2 = u^2 v^2 + \frac{v^4 - 2u^2 v^2 + u^4}{4} = \frac{v^4 + 2u^2 v^2 + u^4}{4} = \left(\frac{v^2 + u^2}{2}\right)^2 = z^2$.

Esto muestra la

Proposición

Las ternas pitagóricas primitivas (x, y, z) son de la forma

$$x = uv, \quad y = \frac{v^2 - u^2}{2}, \quad z = \frac{v^2 + u^2}{2},$$

Ternas Pitagóricas

Ejemplos:

u	v	x	y	z
1	3	3	4	5
1	5	5	12	13
1	7	7	24	25
1	9	9	40	41
1	11	11	60	61
3	5	15	8	17
3	7	21	20	29
3	11	33	56	65
5	7	35	12	37
5	9	45	28	53
5	11	55	48	73
7	9	63	16	65
7	11	77	36	85

Ternas pitagóricas primitivas.

Ternas Pitagóricas

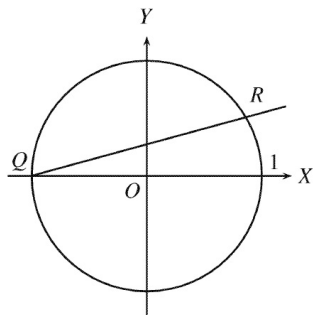
Puntos Racionales sobre el **Círculo**: *Método de las cuerdas* de DIOFANTO.

Una solución entera (a, b, c) de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ implica que

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Entonces $X = \frac{a}{c}$, $Y = \frac{b}{c}$ es una solución racional de la ecuación $X^2 + Y^2 = 1$. En otras palabras, $(X, Y) \in \mathbb{Q}^2$ es un punto racional sobre el círculo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Cualquier múltiplo de la tripla (ma, mb, mc) corresponde al mismo punto racional (X, Y) , de modo que podemos restringirnos a buscar soluciones primitivas. DIOFANTO encontró las soluciones racionales de $X^2 + Y^2 = 1$ mediante un método algebraico, cuya geometría se ilustra en la Figura. Sean $Q = (-1, 0)$, R un punto racional sobre S^1 , y ℓ la recta de Q a R .



Ternas Pitagóricas

ℓ es una recta con pendiente racional, porque las coordenadas de R y Q son racionales. Si la pendiente es t , la ecuación de esta línea es

$$Y = t(X + 1).$$

Recíprocamente, cualquier recta de esta forma, con pendiente racional t , se encuentra con el círculo S^1 en un punto racional $R \in \mathbb{Q}^2$. Esto se puede ver calculando las coordenadas de R : sustituyendo $Y = t(X + 1)$ en $X^2 + Y^2 = 1$, lo que resulta

$$X^2 + t^2(X + 1)^2 = 1, \quad \Rightarrow \quad (1 + t^2)X^2 + 2t^2X + t^2 - 1 = 0.$$

de donde obtenemos las soluciones $X = -1$ y $X = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

La solución $X = -1$ corresponde al punto Q , entonces la coordenada X en R es $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, y por tanto la coordenada Y es

$$Y = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Así, un punto racional arbitrario en el círculo unitario S^1 tiene coordenadas

$$R = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad \text{con } t \in \mathbb{Q}.$$

Ternas Pitagóricas

Ahora podemos recuperar las fórmulas pitagóricas de Euclides.

Sea $t \in \mathbb{Q}$ un racional arbitrario, $t = \frac{u}{v}$ donde $u, v \in \mathbb{Z}$. El punto racional R se convierte en

$$R = \left(\frac{1 - u^2/v^2}{1 + u^2/v^2}, \frac{2u/v}{1 + u^2/v^2} \right) = \left(\frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2}, \frac{2uv}{v^2 + u^2} \right) = \left(\frac{\frac{v^2 - u^2}{2}}{\frac{v^2 + u^2}{2}}, \frac{uv}{\frac{v^2 + u^2}{2}} \right), \quad \text{con } u, v \in \mathbb{Z},$$

y recuperamos las mismas ecuaciones paramétricas anteriores, y el punto racional

$$\boxed{y = uv, \quad x = \frac{v^2 - u^2}{2}, \quad z = \frac{v^2 + u^2}{2}. \quad R = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right).}$$

Teorema

Los puntos racionales sobre la circunferencia S^1 son todos puntos de la forma

$$(x, y) = (-1, 0) \quad \text{y} \quad (x, y) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad \text{con } t \in \mathbb{Q}. \quad \square$$

Sumas de Cuadrados

Sumas de Cuadrados:

Vamos a probar un resultado debido a Legendre que proporciona un criterio para determinar cuándo una ecuación del tipo $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ posee solución no nula, y que da una generalización natural de las ternas pitagóricas.

Teorema (Legendre)

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ enteros libres de cuadrados, primos relativos entre sí, dos a dos, y no todos del mismo signo. La ecuación $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ posee solución no trivial $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, con $x, y, z \in \mathbb{Z}$ si, y sólo si, $-bc$ es un cuadrado módulo a , $-ca$ es cuadrado módulo b , y $-ab$ es cuadrado módulo c .

Prueba: (\Rightarrow) Mostramos que $-bc$ es un cuadrado módulo a . De hecho, x, y y z son primos relativos dos a dos, pues si $d \mid x, d \mid y$, entonces $d^2 \mid x^2, d^2 \mid y^2 \Rightarrow d^2 \mid ax^2 + by^2 = -cz^2$ y como c es libre de cuadrados, $d^2 \mid cz^2 \Rightarrow d \mid z$. Al igual que en el caso de las ternas pitagóricas

Sumas de Cuadrados

Podemos escribir entonces $x = dx'$, $y = dy'$, $z = dz'$, con $z', y', z' \in \mathbb{Z}$, y tenemos que

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 &\implies a(dx')^2 + b(dy')^2 + c(dz')^2 = 0 \\ &\implies a(x')^2 + b(y')^2 + c(z')^2 = 0, \end{aligned}$$

y podemos limitarnos a buscar soluciones primitivas (x, y, z) .

Ahora, como $by^2 + cz^2 \equiv 0 \pmod{a}$, se sigue que $b^2y^2 \equiv -bcz^2 \pmod{a}$. Observe que z debe ser primo relativo con a , pues si p es un primo tal que $p \mid a$ y $p \mid z$, entonces $p \mid by^2$, y como $(a, b) = 1$, entonces $p \mid y$. Esto contradice el hecho que y y z son primos relativos entre sí. Portanto, $(a, z) = 1$. Luego, z es invertible módulo a y $(byz^{-1})^2 \equiv -bc \pmod{a}$. Esto muestra que $-bc$ es residuo cuadrático módulo a .

Por la simetría de la ecuación, también se prueba que $-ca$ es cuadrado módulo b , y que $-ab$ es cuadrado módulo c .

(\Leftarrow) Vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que $a < 0$, $b < 0$ y $c > 0$. Por hipótesis, existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que $-bc \equiv u^2 \pmod{a}$. Entonces, módulo a

Sumas de Cuadrados

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cz^2 &\equiv by^2 + cz^2 \equiv b^{-1}(b^2y^2 + bcz^2) \equiv b^{-1}(b^2y^2 - u^2z^2) \\ &\equiv b^{-1}(by - uz)(by + uz) \equiv (y - b^{-1}uz)(by + uz) \\ &\equiv L_1(x, y, z) M_1(x, y, z) \pmod{a}, \end{aligned}$$

donde $L_1(x, y, z) = d_1x + e_1y + f_1z$, $M_1(x, y, z) = g_1x + h_1y + i_1z$ son funciones lineales, con $d_1 = g_1 = 0$, $e_1 = 1$, $f_1 = -b^{-1}u$, $h_1 = b$ e $i_1 = u$.

Similarmente,

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cz^2 &\equiv L_2(x, y, z) M_2(x, y, z) \pmod{b}, \\ ax^2 + by^2 + cz^2 &\equiv L_3(x, y, z) M_3(x, y, z) \pmod{c}, \end{aligned}$$

con $L_k(x, y, z) = d_kx + e_ky + f_kz$, $M_k(x, y, z) = g_kx + h_ky + i_kz$, para $k = 2, 3$. Como a, b, c son primos relativos entre sí, por el Teorema Chino podemos hallar dos formas lineales $L(x, y, z) = dx + ey + fz$, y $M(x, y, z) = gx + hy + iz$, tales que

$$\begin{aligned} L &\equiv L_1 \pmod{a}, & L &\equiv L_2 \pmod{b}, & L &\equiv L_3 \pmod{c}, \\ M &\equiv M_1 \pmod{a}, & M &\equiv M_2 \pmod{b}, & M &\equiv M_3 \pmod{c}. \end{aligned}$$

Sumas de Cuadrados

Luego,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 \equiv L(x, y, z) M(x, y, z) \pmod{abc}.$$

Consideramos ahora todas las triplas $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, con $0 \leq x \leq \sqrt{|bc|}$, $0 \leq y \leq \sqrt{|ca|}$, $0 \leq z \leq \sqrt{|ab|}$.

Tenemos en total $(\lfloor \sqrt{|bc|} \rfloor + 1)(\lfloor \sqrt{|ca|} \rfloor + 1)(\lfloor \sqrt{|ab|} \rfloor + 1) > abc$ de estas triplas.

Por el Principio de Dirichlet (principio de las casillas), existen dos triplas distintas de entre estas, (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) , con $L(x_1, y_1, z_1) \equiv L(x_2, y_2, z_2) \pmod{abc}$

$$\iff L(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \equiv 0 \pmod{abc}.$$

Haciendo $\tilde{x} = x_1 - x_2$, $\tilde{y} = y_1 - y_2$, $\tilde{z} = z_1 - z_2$, tenemos

$$a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 + c\tilde{z}^2 \equiv L(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) M(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \pmod{abc}.$$

Note que $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq (0, 0, 0)$. Además, $|\tilde{x}| < \sqrt{|bc|}$, $|\tilde{y}| < \sqrt{|ca|}$ y $|\tilde{z}| < \sqrt{|ab|}$.

De hecho, como a, b, c son coprimos dos a dos y libres de cuadrados, no puede ocurrir la igualdad.

Sumas de Cuadrados

Por otro lado, como $a, b, < 0$ y $c > 0$, tenemos

$$-2abc = a|bc| + b|ca| < a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 + c\tilde{z}^2 \leq c\tilde{z}^2 < |ab|c = abc.$$

Como $abc \mid a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 + c\tilde{z}^2$, entonces tenemos $a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 + c\tilde{z}^2 = 0$, lo que resuelve el problema, o tenemos $a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 + c\tilde{z}^2 = -abc$.

En este último caso tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2 + c\tilde{z}^2 + abc)(\tilde{z}^2 + ab), \\ &= a(\tilde{x}\tilde{z} + b\tilde{y})^2 + b(\tilde{z}\tilde{y} - a\tilde{x})^2 + c(\tilde{z}^2 + ab)^2. \end{aligned}$$

Lo que nos da la solución $(\tilde{x}\tilde{z} + b\tilde{y}, \tilde{z}\tilde{y} - a\tilde{x}, \tilde{z}^2 + ab)$. \square