

# Teoría de Números 2023

Lista 06

02.noviembre.2023

1. Mostrar que  $(3n, 4n, 5n)$ , para  $n = 1, 2, \dots$  son las únicas ternas pitagóricas que están en progresión aritmética.
  2. Mostrar que la ecuación  $x^2 + y^2 = z^3$  posee infinitas soluciones en los enteros positivos.
  3. Mostrar que la ecuación  $x^4 - 4y^4 = z^2$  no posee soluciones enteras positivas.
  4. Probar lo siguiente:
    - a) Un entero positivo es representable como diferencia de dos cuadrados si, y sólo si, es producto de dos factores que son ambos pares o ambos impares.
    - b) Un entero positivo par puede escribirse como diferencia de dos cuadrados si, y sólo si, es divisible entre 4.
  5. Verificar que 45 es el menor entero positivo que admite tres representaciones distintas como diferencia de dos cuadrados.
  6. Muestre que si el número irracional  $x > 1$  se representa por la fracción continua infinita  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ , entonces  $\frac{1}{x}$  tiene la expansión  $[0; a_0, a_1, a_2, \dots]$ .  
Use lo anterior para calcular el valor de  $[0; 1, 1, 1, \dots] = [0; \bar{1}]$ .
  7. Determinar fracciones continuas para las siguientes cantidades irracionales:
    - a)  $\sqrt{5}$ .
    - b)  $\sqrt{7}$ .
    - c)  $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$
    - d)  $\frac{5 + \sqrt{37}}{4}$
-