Ecuaciones Diofantinas II: La ecuación de Pell

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de Números (Aula 25b) 17.octubre.2023

Un poco de Historia

En febrero de 1657, Fermat lanza el siguiente desafío, tratando directamente con el punto teórico en cuestión:

Encontrar un número y que haga de $dy^2 + 1$ un cuadrado perfecto, donde d es un número entero positivo que no es un cuadrado; por ejemplo, $3 \cdot 1^2 + 1 = 2^2$ y $5 \cdot 4^2 + 1 = 9^2$.

Si, dijo Fermat, no se puede obtener una regla general, encuentre el menor valor de y que satisface las ecuaciones $61y^2 + 1 = x^2$; ó $109y^2 + 1 = x^2$.

Frenicle procedió a calcular las soluciones positivas más pequeñas de $x^2 - dy^2 = 1$ para todos los valores permitidos de d hasta 150 y sugirió que Wallis extendiera la tabla a $d = 200$ o al menos que resolviera $x^2 - 151y^2 = 1$ y $x^2 - 313y^2 = 1$, dando a entender que la segundo ecuación podría estar más allá de la capacidad de Wallis. En respuesta, el patrón de Wallis, Lord William Brouncker de Irlanda declaró que solo le había llevado una hora más o menos descubrir

$$(126862368)^2 - 313(7170685)^2 = -1,$$

y por lo tanto $y = 2 \cdot 7170685 \cdot 126862368$ da la solución deseada a $x^2 - 313y^2 = 1$.

Un poco de Historia

WALLIS también resolvió el otro caso

$$(1728148040)^2 - 151(140634693)^2 = 1.$$

La magnitud de estos números, en comparación con los que surgen de otros valores de d, sugiere que FERMAT estaba en posesión de una solución completa al problema. De hecho, el menciona más tarde, que su método de descenso infinito se había utilizado con éxito para mostrar la existencia de una infinidad de soluciones de $x^2 - dy^2 = 1$.

BROUNCKER, bajo la impresión errónea de que se podían admitir soluciones racionales y no necesariamente enteras, no tuvo dificultad en dar una respuesta; simplemente dividió la relación

$$(r^2 + d)^2 - d(2r)^2 = (r^2 - d)^2,$$

por la cantidad $(r^2 - d)^2$ para llegar a la solución

$$x = \frac{r^2 + d}{r^2 - d}, \qquad y = \frac{2r}{r^2 - d},$$

donde $r \neq \sqrt{d}$, es un número racional arbitrario.

Un poco de Historia

Esto, no hace falta decirlo, fue rechazado por Fermat, quien escribió que “las soluciones en fracciones, que se pueden dar de una vez a partir de meros elementos de la aritmética, no me satisfacen”.

Informados de todas las condiciones del desafío, Brouncker y Wallis idearon conjuntamente un método tentativo para resolver $x^2 - dy^2 = 1$ en enteros, sin poder dar una prueba de que su método siempre funciona.
Al parecer, los honores recayeron en Brouncker, pues Wallis felicitó a Brouncker con cierto orgullo de haber “conservado intacta la fama que los ingleses han ganado en épocas anteriores contra los franceses”.

Este tema de cayó en desuso, hasta que Euler, después de casi un siglo, retomó donde Fermat lo había dejado.
Tanto Euler como Lagrange contribuyeron a la resolución de este problema.
Conviertiendo $\sqrt{d}$, en una fracciòn continua infinita, Euler (en 1759) inventó un procedimiento para obtener la menor solución entera de $x^2 - dy^2 = 1$. Sin embargo, no pudo demostrar que el proceso conduce a una solución distinta de $x = 1, y = 0$.

Un poco de Historia

Esto se debió a LAGRANGE. En 1768 LAGRANGE publicó la primera prueba rigurosa de que todas las soluciones surgen a través de la expansión en fracción continua de $\sqrt{d}$.

Como resultado de una referencia errónea, la ecuación $x^2 - dy^2 = 1$, se ha incluido en la literatura como “Ecuación de Pell”. La ecuación se atribuye erróneamente al matemático inglés JOHN PELL (1611-1685), que tenía poco que ver con el problema.
Fue un descuido por parte de Euler. En una lectur superficial de *Opera Mathematica* de WALLIS (1693), se discutía el método de BROUNCKER, así como otros trabajo de PELL sobre análisis diofántico, y EULER debe haber confundido sus contribuciones. La ecuación $x^2 - dy^2 = 1$ bien podría llamarse **“ecuación de Fermat”**.

La Ecuación de Pell

Sea $d \in \mathbb{Z}$. Consideramos las soluciones de la ecuación $x^2 - dy^2 = 1$.

Para cualquier valor entero de d, la ecuación tiene las soluciones triviales $x = \pm 1$, $y = 0$.

Algunos casos simples:

- Si $d < -1$, entonces $x^2 - dy^2 \geq 1$ (excepto cuando $x = y = 0$) de modo que estos agotan las soluciones.
- Cuando $d = -1$, ocurren dos soluciones más, a saber, $x = 0$, $y = \pm 1$.
- El caso en el que es un cuadrado perfecto se descarta fácilmente. Si $d = n^2$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, entonces $x^2 - dy^2 = x^2 - n^2y^2 = 1$ se puede escribir en la forma
$$(x + ny)(x - ny) = 1,$$
la cual es posible si, y sólo si, $x + ny = x - ny = \pm 1$; y en ese caso se sigue que
$$x = \frac{(x + ny) + (x - ny)}{2} = \pm 1, \qquad y = 0,$$
y la ecuación sólo posee las soluciones triviales.

La Ecuación de Pell

En adelante, nos restringimos al caso $d \in \mathbb{Z}$, donde d no es un cuadrado.

Diremos que una solución x, y de la ecuación de Pell es una solución positiva siempre que $x, y > 0$. Debido a que las soluciones más allá de aquellas con $y = 0$ se pueden organizar en conjuntos de cuatro por combinaciones de signos $\pm x, \pm y$, entonces todas las soluciones serán conocidas una vez que se hayan encontrado todas las soluciones positivas. Nos limitamos entonces a hallar soluciones positivas de $x^2 - dy^2 = 1$.

El resultado inicial afirma que cualquier par de enteros positivos que satisfacen la ecuación de Pell se pueden obtener a partir de la fracción continua que representa el número irracional $\sqrt{d}$.

Teorema

Si (p, q) es una solución positiva de $x^2 - dy^2 = 1$, entonces $\frac{p}{q}$ es una convergente de la expansión de fracción continua de $\sqrt{d}$.

Prueba: Como $p^2 - dq^2 = 1$, tenemos que $(p - q\sqrt{d})(p + q\sqrt{d}) = 1$.

lo que implica que $p > q$ así como

$$\frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{1}{q(p + q\sqrt{d})}.$$

Como resultado,

$$0 < \frac{p}{q} - \sqrt{d} < \frac{\sqrt{d}}{q(q\sqrt{d} + q\sqrt{d})} = \frac{\sqrt{d}}{2q^2\sqrt{d}} = \frac{1}{2q^2}.$$

Del teorema de Dirichlet (que vimos en fracciones continuas), indica que entonces $\frac{p}{q}$ debe ser una convergente de la fracción continua de $\sqrt{d}$. $\square$

Comentarios: En general, la recíporica del teorema anterior es falso: no todas las convergentes $\frac{p_n}{q_n}$ de $\sqrt{d}$ son soluciones de $x^2 - dy^2 = 1$.

No obstante, podemos decir algo sobre el tamaño de los valores tomados por la secuencia $p_n^2 - dq_n^2$:

Teorema

Si $\frac{p}{q}$ es un convergente de la expansión fraccionaria continua de $\sqrt{d}$, entonces $x = p$, $y = q$ es una solución de una de las ecuaciones $x^2 - dy^2 = k$, donde $|k| < 1 + 2\sqrt{d}$.

<u>Prueba</u>: Si $\frac{p}{q}$ es una convergente de $\sqrt{d}$, entonces el corolario al Teorema de Dirichlet garantiza que

$$\left|\sqrt{d} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2},$$

y por lo tanto $|p - q\sqrt{d}| < \frac{1}{q}$.
Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} |p + q\sqrt{d}| &= |(p - q\sqrt{d}) + 2q\sqrt{d}| \leq |(p - q\sqrt{d})| + |2q\sqrt{d}| < \frac{1}{q} + 2q\sqrt{d} \\ &< (1 + 2\sqrt{d})q. \end{aligned}$$

Estas dos desigualdades se combinan para producir

$$|p^2 - dq^2| = |p - q\sqrt{d}| \cdot |p + q\sqrt{d}| < \frac{1}{q}(1 + 2\sqrt{d})q = 1 + 2\sqrt{d}. \quad \square$$

Ejemplo: Consideremos el caso de $d = 7$. Usando la expansión de fracción continua $\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$, se determina que los primeros convergentes de, $\sqrt{7}$ son

$$\tfrac{2}{1}, \quad \tfrac{3}{1}, \quad \tfrac{5}{2}, \quad \tfrac{8}{3}, \ldots$$

Haciendo los cálculos de $p_n^2 - 7q_n^2$, encontramos que

$$2^2 - 7 \cdot 1^2 = -3, \qquad 3^2 - 7 \cdot 1^2 = 2, \qquad 5^2 - 7 \cdot 2^2 = -3, \qquad 8^2 - 7.3^2 = 1,$$

de donde $x = 8$, $y = 3$ proporciona una solución positiva de la ecuación $x^2 - 7y^2 = 1$.

Sabemos que todas las expansiones en fracciones continuas de $\sqrt{d}$ son de forma periódica

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n}]$$

es decir, la parte periódica comienza después de un término, siendo este término inicial $\sqrt{d}\rfloor$. También es cierto que el último término a_n de la parte periódica es siempre igual a $2a_0$ y que el período, con el último término excluido, es simétrico. Esto es típico de la situación general:

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_3, a_2, a_1, 2a_0}].$$

Ejemplos:

- $\sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$,
- $\sqrt{73} = [8; \overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16}]$,
- $\sqrt{94} = [9; \overline{1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18}]$.

La siguiente es una lista de las fracciones continuas de $\sqrt{d}$, donde d es un no cuadrado entre 2 y 40:

- $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$,
- $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$,
- $\sqrt{5} = [2; \overline{4}]$,
- $\sqrt{6} = [2; \overline{2, 4}]$,
- $\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$,
- $\sqrt{8} = [2; \overline{1, 4}]$,
- $\sqrt{10} = [3; \overline{6}]$,
- $\sqrt{11} = [3; \overline{3, 6}]$,
- $\sqrt{12} = [3; \overline{2, 6}]$,
- $\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$,
- $\sqrt{14} = [3; \overline{1, 2, 1, 6}]$,
- $\sqrt{15} = [3; \overline{1, 6}]$,
- $\sqrt{17} = [4; \overline{8}]$,
- $\sqrt{18} = [4; \overline{4, 8}]$,
- $\sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$,
- $\sqrt{20} = [4; \overline{2, 8}]$,
- $\sqrt{21} = [4; \overline{1, 1, 2, 1, 1, 8}]$,
- $\sqrt{22} = [4; \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}]$,
- $\sqrt{23} = [4; \overline{1, 3, 1, 8}]$,
- $\sqrt{24} = [4; \overline{1, 8}]$,
- $\sqrt{26} = [5; \overline{10}]$,
- $\sqrt{27} = [5; \overline{5, 10}]$,
- $\sqrt{28} = [5; \overline{3, 2, 3, 10}]$,
- $\sqrt{29} = [5; \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$,
- $\sqrt{30} = [5; \overline{2, 10}]$,
- $\sqrt{31} =$ $[5; \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}]$,
- $\sqrt{32} = [5; \overline{1, 1, 1, 10}]$,
- $\sqrt{33} = [5; \overline{1, 2, 1, 10}]$,
- $\sqrt{34} = [5; \overline{1, 4, 1, 10}]$,
- $\sqrt{35} = [5; \overline{1, 10}]$,
- $\sqrt{37} = [6; \overline{12}]$,
- $\sqrt{38} = [6; \overline{6, 12}]$,
- $\sqrt{39} = [6; \overline{4, 12}]$,
- $\sqrt{40} = [6; \overline{3, 12}]$.

El teorema anterior indica que si la ecuación $x^2 - dy^2 = 1$ posee una solución, entonces sus soluciones positivas se encuentran entre $x = p_k$, $y = q_k$, donde $\frac{p_k}{q_k}$ son las convergentes de $\sqrt{d}$. El período de expansión continua de la fracción de $\sqrt{d}$, proporciona la información que necesitamos para mostrar que $x^2 - dy^2 = 1$ en realidad posee soluciones enteras. Hay infinitas soluciones, todas obtenibles a partir de las convergentes de $\sqrt{d}$.

Un resultado esencial es que si n es la longitud del período de expansión de la fracción continua para $\sqrt{d}$, entonces la convergente $\frac{p_{kn-1}}{q_{kn-1}}$ satisface

$$p_{kn-1}^2 - dq_{kn-1}^2 = (-1)^{kn}, \qquad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Antes de establecer esto, recordemos que la expansión $\sqrt{d} = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ se obtiene definiendo

$$\alpha_0 = \sqrt{d}, \qquad \text{y} \qquad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}, \qquad a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor.$$

Lema

Dada la expansión de la fracción continua $\sqrt{d} = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, definamos s_k y t_k recursivamente por

$$s_0 = 0, \qquad t_0 = 1, \qquad s_{k+1} = a_k t_k - s_k, \qquad t_{k+1} = \frac{d - s_{k+1}^2}{t_k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Luego

a) s_k *y* t_k *son números enteros, con* $t_k \neq 0$.

b) $t_k \mid (d - s_k^2)$.

c) $\alpha_k = (s_k + \sqrt{d})/t_k$, $k \geq 0$.

<u>Prueba</u>: Por inducción sobre k. Observe que (a), (b) y (c) se cumplen cuando $k = 0$. Suponga que son verdaderas para un entero positivo fijo k. Como $a_k, s_k, t_k \in \mathbb{Z}$, $s_{k+1} = a_k t_k - s_k$ también será entero. Además, $t_{k+1} \neq 0$, de lo contrario $d = s_{k+1}^2$, contrario al supuesto que d no es un cuadrado.

La ecuación

$$t_{k+1} = \frac{d - s_{k+1}}{t_k} = \frac{d - s_k^2}{t_k} + (2a_k s_k - a_k^2 t_k),$$

donde $t_k \mid (d - s_k^2)$ por hipótesis inductiva, implica que t_{k+1} es entero; mientras que $t_k t_{k+1} = d - s_{k+1}^2$ da $t_{+1} \mid (d - s_{k+1}^2)$.

Finalmente, obtenemos

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} = \frac{t_k}{(s_k + \sqrt{d}) - t_k a_k} = \frac{t_k}{\sqrt{d} - s_{k+1}} = \frac{t_k(s_{k+1} + \sqrt{d})}{d - s_{k+1}^2} = \frac{s_{k+1} + \sqrt{d}}{t_{k+1}},$$

y así (a), (b) y (c) son válidos en el caso de $k+1$, por lo tanto, para todos los enteros positivos. $\square$

Necesitamos un resultado colateral más antes de recurrir a las soluciones de la ecuación Pell. Aquí atamos los convergentes de $\sqrt{d}$ a los enteros de t_k del lema.

Teorema

Si $\frac{p_k}{q_k}$ son las convergentes de la fracción continua de $\sqrt{d}$, entonces

$$p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k+1}\, t_{k+1}, \qquad \textit{donde } t_{k+1} > 0, \;\; \textit{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

<u>Prueba</u>: Como $\sqrt{d} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \alpha_{k+1}]$, sabemos que

$$\sqrt{d} = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}}.$$

Al sustituir $\alpha_{k+1} = (s_{k+1} + \sqrt{d})/t_{k+1}$ y simplificar

$$\sqrt{d}(s_{k+1} q_k + t_{k+1} q_{k-1} - p_k) = s_{k+1} p_k + t_{k+1} p_{k-1} - dq_k.$$

El lado derecho es racional y $\sqrt{d}$ es irracional, esto implica que

$$s_{k+1} q_k + t_{k+1} q_{k-1} = p_k \qquad \text{y} \qquad t_{k+1} p_k + t_{k+1} p_{k-1} = dq_k.$$

Ahora, multiplicamos la primera de estas relaciones por p_k y la segunda por $-q_k$, y sumando

$$p_k^2 - dq_k^2 = t_{k+1}(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k) = t_{k+1}(-1)^{t-1} = (-1)^{t+1}\, t_{k+1}.$$

A continuación, recordemos de la discusión de los convergentes que

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \sqrt{d} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \qquad \forall k \geq 0.$$

En consecuencia, $p_k^2 - dq_k^2 < 0$ para k par, y $p_k^2 - dq_k^2 > 0$ para k impar. Por tanto, el lado izquierdo de la ecuación

$$\frac{p_k^2 - dq_k^2}{p_{k-1}^2 - dq_{k-1}^2} = -\frac{t_{k+1}}{t_k}, \qquad k \geq 1,$$

es siempre negativo, lo que hace $\frac{t_{k+1}}{t_k}$ sea positivo. Comenzando con $t_1 = d - a_0^2 > 0$, esto muestra que $t_{k+1} > 0$, $\forall k$. $\square$

Nos interesa, en particular, determinar cuándo el entero $t_k = 1$. El siguiente corolario responde a esta pregunta.

La Ecuación de Pell

Corolario

Si n es la longitud del período de expansión de $\sqrt{d}$, entonces $t_k = 1$ si, y sólo si, $n \mid k$.

<u>Prueba</u>: $(\Leftarrow)$ Sea $\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n}]$, tenemos $\alpha_{kn+1} = \alpha_1$, para $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia

$$\frac{s_{kn+1} + \sqrt{d}}{t_{kn+1}} = \frac{s_{kn+1} + \sqrt{d}}{t_1} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{d}(t_{kn+1} - t_1) =_{kn+1} t_1 - s_1 t_{kn+1}.$$

La irracionalidad de $\sqrt{d}$ implica que $t_{kn+1} = t_1$, $s_{kn+1} = s_1$, y portanto $t_1 = d - s_1^2 = d - s_{kn+1}^2 = t_{kn} t_{kn+1} = t_{kn} t_1$, de modo que $t_1 = 1$. El resultado neto de esto es que $t_k = 1$ siempre que $n \mid k$.

$(\Rightarrow)$ Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $t_k = 1$. Entonces $\alpha_k = s_k + \sqrt{d}$, y tomando partes enteras, podemos escribir

$$a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor = s_k + \lfloor \sqrt{d} \rfloor = s_k + a_0.$$

La definición de α_{k+1} ahora produce

$$\alpha_k = \lfloor \alpha_k \rfloor + \tfrac{1}{\alpha_{k+1}} = s_k + a_0 + \tfrac{1}{\alpha_{k+1}},$$

y combinando ambos resultados

$$a_0 + \tfrac{1}{\alpha_{k+1}} = \alpha_0 = \sqrt{d} = \alpha_k - s_k = a_0 + \tfrac{1}{\alpha_{k+1}},$$

y portanto, $\alpha_{k+1} = \alpha_1$. Esto significa que el bloque $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de k enteros se repite en la expansión de $\sqrt{d}$. En consecuencia, $k \mid n$, debe ser un múltiplo de la longitud n del período. $\square$

Ejemplo: Tomemos la expansión en fracción continua de $\sqrt{15} = [3; \overline{1, 6}]$. Su período es de longitud 2 y las primeras cuatro convergentes son

$$\tfrac{3}{1}, \qquad \tfrac{4}{1}, \qquad \tfrac{27}{7}, \qquad \tfrac{31}{8}.$$

Haciendo cuentas, resulta

$$3^2 - 15 \cdot 1^2 = -6, \qquad 4^2 - 15 \cdot 1^2 = 1, \qquad 27^2 - 15 \cdot 7^2 = -6, \qquad 31^2 - 15 \cdot 8^2 = 1.$$

Por tanto, $t_1 = t_3 = 6$ y $t_2 = t_4 = 1$.

Finalmente podemos describir todas las soluciones positivas de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$, donde $d > 0$ es un número entero no cuadrado. Nuestro resultado se expresa como el siguiente teorema.

Teorema

Sean $\frac{p_k}{q_k}$ las convergentes de la expansión en fracción continua de $\sqrt{d}$ y sea n la longitud del período.

a) *Si n es par, entonces todas las soluciones positivas de $x^2 - dy^2 = 1$ están dadas por*

$$x = p_{kn-1}, y = q_{kn-1}, \qquad \textit{para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

b) *Si n es impar, entonces todas las soluciones positivas de$x^2 - dy^2 = 1$ están dadas por*

$$x = p_{2kn-1}, y = q_{2kn-1}, \qquad \textit{para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

<u>Prueba</u>: Ya se ha establecido en un teorema previo que cualquier solución (x_0, y_0) de

$x^2 - dy^2 = 1$ es de la forma $x_0 = p_k$, $y_0 = q_k$, para algua convergente $\frac{p_k}{q_k}$ de $\sqrt{d}$.
Por el teorema anterior, $p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k+1}\, t_{k+1}$, lo que implica que $k+1$ es par y $t_{k+1} = 1$. El corolario nos dice que $n \mid k+1 \;\Rightarrow\; k+1 = nm$, para algún $m \in \mathbb{Z}$.
Si n es impar, entonces m debe ser par, mientras que si n es impar entonces, cualquier valor de m es suficiente. $\square$

Ejemplo: Como primera aplicación, consideremos nuevamente la ecuación $x^2 - 7y^2 = 1$. Como, $\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$, las 12 convergentes iniciales son

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{37}{14}, \frac{45}{17}, \frac{82}{31}, \frac{127}{48}, \frac{590}{223}, \frac{717}{271}, \frac{1307}{494}, \frac{2024}{765}, \ldots$$

Como la representación en fracción continua de $\sqrt{7}$ tiene período de longitud 4, el numerador y denominador de cualquiera de los convergentes (p_{4k-1}, q_{4k-1}) forman una solución de $x^2 - 7y^2 = 1$. Así, $\frac{p_3}{q_3} = \frac{8}{3}$, $\frac{p_7}{q_7} = \frac{127}{48}$, $\frac{p_{11}}{q_{11}} = \frac{2024}{765}$, dan lugar a las tres primeras soluciones positivas:

$$(x, y) = (8, 3); \qquad (x, y) = (127, 48); \qquad (x, y) = (2024, 765).$$

La Ecuación de Pell

Ejemplo: Para encontrar la solución de $x^2 - 13y^2 = 1$ en los enteros positivos más pequeños, observamos que, $\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$, con un período de longitud 5.
Las primeros diez convergentes son

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{18}{5}, \frac{119}{33}, \frac{137}{38}, \frac{256}{71}, \frac{393}{109}, \frac{649}{180}, \ldots$$

De la parte (b) del Teorema, la menor solución positiva de $x^2 - 13y^2 = 1$ se obtiene del convergente $\frac{p_9}{q_9} = \frac{649}{180}$, lo que produce la solución $(x, y) = (649, 180)$.

Comentarios:

- Existe una forma rápida de generar otras soluciones a partir de una única solución de la eq. de Pell. Definamos la **solución fundamental** de la ecuación $x^2 - dy^2 = 1$ como su menor solución positiva. Es decir, es la solución positiva (x_0, y_0) con la propiedad de que $x_0 < x'$, $y_0 < y'$ para cualquier otra solución positiva (x', y').
- Hallar la solución fundamental en general es difícil, ya que x_0, y_0 pueden ser arbitrariamente grandes. Por ejemplo, $x^2 - 991y^2 = 1$ tiene solución fundamental

$$x = 379516400906811930638014896080, \qquad y = 12055735790331359447442538767.$$

La Ecuación de Pell

A partir de la solución fundamental (x_1, y_1), podemos construir todas las restantes soluciones positivas.

Teorema

Sea (x_1, y_1) la solución fundamental de $x^2 - dy^2 = 1$. Entonces, cada par de enteros (x_n, y_n) definidos por

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n, \qquad \textit{para} \ = 1, 2, 3, \ldots$$

también es una solución positiva.

<u>Prueba</u>: Se deja como ejercicio al lector mostrar que

$$x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n.$$

Es inmediato comprobar que como x_1, y_1 son positivos, entonces x_n, y_n también son enteros positivos.
Ahora, dado que (x_1, y_1) es solución de $x^2 - dy^2 = 1$, obtenemos

$$x_n^2 - dy_n^2 = (x_n + y_n\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = (x_1 + +y_1\sqrt{d})^n(x_1 - y_1\sqrt{d})^n = (x_1 - dy_1^2)^n = 1^n = 1.$$

y por lo tanto (x_n, y_n) es solución. $\square$

Ejemplo: Consideremos la ecuación $x^2 - 35y^2 = 1$. Por simple inspección, $(x_1, y_1) = (6, 1)$ forma la solución fundamental.

Una segunda solución positiva (x_2, y_2) se obtiene como

$$x_2 + y_2\sqrt{35} = (x_1 + y_1\sqrt{35})^2 = (6 + \sqrt{35})^2 = 36 + 12\sqrt{35} + 35 = 71 + 12\sqrt{35}.$$

Así, $x_2 = 71$, $y_2 = 12$. Observe que (x_2, y_2) es solución pues

$$71^2 - 35 \cdot 12^2 = 5041 - 35 \cdot 144 = 5041 - 5040 = 1.$$

Una tercera solución positiva (x_3, y_3) se obtiene como

$$x_3 + y_3\sqrt{35} = (x_1 + y_1\sqrt{35})^3 = (71 + 12\sqrt{35})(6 + \sqrt{35}) = 846 + 143\sqrt{35}.$$

Así, $x_3 = 846$, $y_3 = 143$, y

$$846^2 - 35 \cdot 143^2 = 715716 - 35 \cdot 20449 = 715716 - 715715 = 1.$$

La Ecuación de Pell

Volviendo a la ecuación $x^2 - dy^2 = 1$, un último teorema establece que cualquier solución positiva se puede calcular a partir de la solución fundamental.

Teorema

Si (x_1, y_1) es la solución fundamental de $x^2 - dy^2 = 1$, entonces cada solución positiva de la ecuación viene dada por (x_n, y_n), donde x_n e y_n son los números enteros determinado a partir de

$$x_n + y_n\sqrt{d}, = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n, \qquad para\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA