El Teorema de los Números Primos

Alan Reyes-Figueroa
Teoría de Números (Aula 34) 14.noviembre.2023

El Teorema de los Números Primos

En la clase anterior mostramos que $\pi(x) \asymp \frac{x}{\log x}$.

De hecho, Este resultado puede mejorarse en el llamado **Teorema de los Números Primos**. Éste describe la distribución asintótica de los números primos entre los enteros positivos. El teorema fue probado de forma independiente por HADAMARD y DE LA VALLÉE POUSSIN usando análisis complejo (en particular, la función zeta de Riemann).

Teorema (Teorema de los Números Primos)

Las funciones $\pi(x)$ y $\frac{x}{\log x}$ son asintóticamente equivalentes, esto es

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1.$$

En notación asintótica: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

El Teorema de los Números Primos

Este resultado fue conjeturado por varios matemáticos, entre ellos Legendre y Gauss, y fue demostrada hasta en 1896 por Hadamard y de la Vallée Poussin.

Las pruebas del Teorema de los Números Primos a menudo se clasifican como **elementales** o **no elementales**, dependiendo de los métodos utilizados para llevarlos a cabo. (no elemental = utiliza herramientas del análisis complejo).

La prueba de Hadamard y de la Vallée Poussin es no elemental, utiliza funciones complejas y propiedades de la función zeta de Riemann.

Una prueba elemental fue dada en 1949 por Selberg y Erdös. Su prueba no hace uso de la función zeta ni de la teoría de funciones complejas, pero es bastante elaborada. (Ver Capítulos 4 y 13 del libro de Apostol).

El teorema de los números primos se puede expresar en varias formas equivalentes.

Por ejemplo, es posible mostrar que el teorema de los números primos es equivalente a la fórmula asintótica

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n) \sim x, \qquad \text{cuando } x \to \infty.$$

Las sumas parciales de la función de VON MANGOLDT $\Lambda(n)$ definen una función introducida por CHEBYSHEV en 1848.

Definición

*Introducimos la **función ψ de Chebyshev**, definida para $x > 0$, por*

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n).$$

*y la **función ϑ de Chebyshev**, por*

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \log p.$$

El Teorema de los Números Primos

La fórmula asintótica en (1) establece que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Dado que $\Lambda(n) = 0$ a menos que n sea una potencia de primo, $n = p^k$, podemos escribir la definición de $\psi(x)$ como

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p:\, p^k\leq x} \Lambda(p^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p:\, p^k\leq x} \log p.$$

La suma sobre k es en realidad una suma finita. De hecho, la suma de p es vacía si $x^{1/k} < 2$, esto es, si $\frac{1}{k} \log x < \log 2$, o si

$$m > \frac{\log x}{\log 2} = \log_2 x.$$

Portanto, tenemos

$$\psi(x) = \sum_{k\leq \log_2 x} \sum_{p\leq x^{1/k}} \log p.$$

Esto se puede escribir de una forma ligeramente diferente usando la función ϑ de Chebyshev:

$$\psi(x) = \sum_{k \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/k}).$$

El siguiente teorema relaciona los dos cocientes $\frac{\psi(x)}{x}$ y $\frac{\vartheta(x)}{x}$.

Teorema

Para $x > 0$, tenemos

$$0 < \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x}\log 2}.$$

Obs! Esta desigualdad implica que

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \right) = 0.$$

En otras palabras, si uno de $\frac{\psi(x)}{x}$ ó $\frac{\vartheta(x)}{x}$ tiende a un límite, entonces el otro también.

Relación entre $\vartheta(x)$ y $\pi(x)$:

Obtenemos dos fórmulas que relacionan $\vartheta(x)$ y $\pi(x)$. Estas son utilizadas para demostrar otras formas equivalentes a Teorema de los Números Primos.

Ambas funciones $\pi(x)$ y $\vartheta(x)$ pueden verse como funciones escalonadas con saltos en los números primos; $\pi(x)$ tiene un salto de 1 en cada primo p, mientras que $\vartheta(x)$ tiene un salto de $\log p$ en cada primo p.

Proposición

Para $x \geq 2$, valen

a) $\vartheta(x) = \pi(x)\,\log(x) - \displaystyle\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt.$

b) $\pi(x) = \dfrac{\vartheta(x)}{\log x} + \displaystyle\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\,(\log t)^2}\,dt.$

Formas equivalentes del Teorema de los Números Primos:

Teorema

Las siguientes relaciones son equivalentes:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$$

El Teorema de los Números Primos

Si p_n denota el n-ésimo número primo, entonces

Teorema

Las siguientes relaciones son equivalentes:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1,$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log \pi(x)} = 1,$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1.$$

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Logaritmo Integral

Una aproximación más precisa para $\pi(x)$ es dada por la función **logaritmo integral**:

Definición

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}.$$

Obs! Note que esta función posee una singularidad en $x = 1$. Entonces, en la definición de $\mathrm{Li}(x)$, debemos tomar el valor principal de Cauchy

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\log t} \Big).$$

Existen formas alternas más simples de usar en la práctica. Por ejemplo,

$$\mathrm{Li}(x) = li(x) - li(2),$$

donde

$$li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}, \qquad \text{y } li(2) = 1.045163780117492784\ldots$$

Logaritmo Integral

De hecho, integrando por partes, es posible ver que

$$li(x) = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{1}{(\log t)^2}\,dt - \frac{2}{\log 2},$$

de modo que

$$li(x) \sim \frac{x}{\log x}, \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

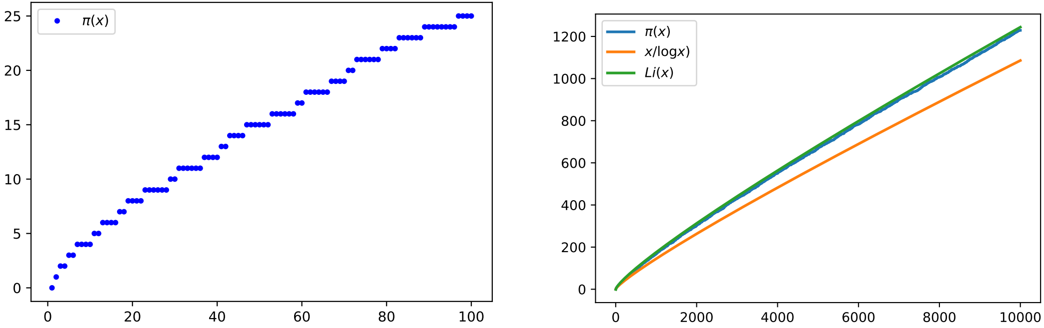
En consecuencia, tenemos el siguiente resultado:

Teorema

Las funciones $\pi(x)$ y $\mathrm{Li}(x)$ (ó $li(x)$) son asintóticamente equivalentes. Esto es

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1.$$

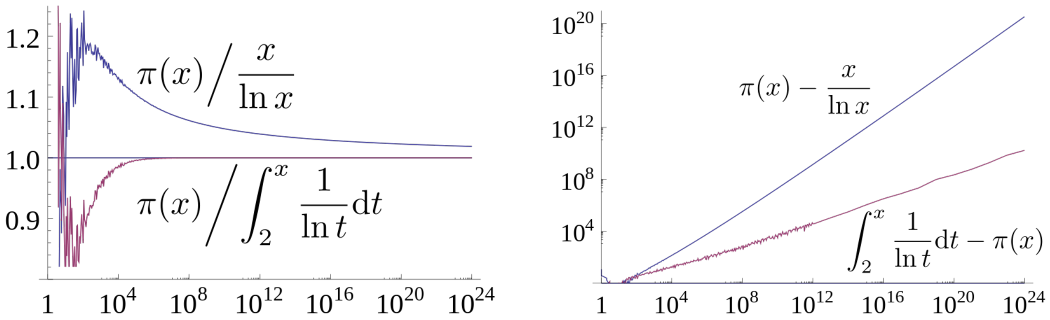
Logaritmo Integral



(a) La función $\pi(x)$. (b) Comparación asintótica entre $\pi(x)$, $\frac{x}{\log x}$ y $\mathrm{Li}(x)$.

UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Logaritmo Integral



Comparación de diferencias y radios entre las aproximaciones $\frac{x}{\log x}$ y $\mathrm{Li}(x)$.