Fracciones Continuas. Fracciones de Farey.

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de Números (Aula 24c) 10.octubre.2023

Fracciones Continuas

El siguiente resultado caracteriza las convergentes de una fracción continua en términos del error reducido de aproximación de x por $\frac{p}{q}$, el cual por definición es $|qx - p|$; la razón entre $1x - \frac{p}{q}|$ y el error máximo de aproximación, con

Teorema

Sea $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ con $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ su secuencia de convergentes. Para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, con $0 < q < q_{n+1}$, vale

$$|q_n x - p_n| \leq |qx - p|.$$

Además, si $0 < q < q_n$, la desigualdad arriba es estricta.

Prueba: Como $(p_n, q_n) = 1$, $\forall n$, si $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$, entonces $p = kp_n$ y $q = kq_n$, para algún entero $k \neq 0$. En este caso, el resultado es inmediato pues $|q_n x - p_n| \leq k|q_n x - p_n| = |qx - p|$. Podemos suponer entonces que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ de modo que

$$q < q_{n+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Así, $\frac{p}{q}$ está fuera del intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Portanto,

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \min\left\{\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}}.$$

lo que implica

$$|qx - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$$

Además, la igualdad sólo puede ocurrir si $x = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, con $a_{n+1} \geq 2$ y $q_{n+1} > 2q_n$, pues en una fracción continua finita el último coeficiente a_n es siempre mayor que 1. En este caso, si $q < q_n$, tenemos

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| - \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} > \frac{1}{qq_{n+1}},$$

lo que implica

$$|qx - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|. \quad \square$$

Corolario

Para todo $q < q_n$, vale $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \left|x - \frac{p}{q}\right|$. $\square$

Corolario

Si $|qx - p| \leq |q'x - p'|$, para todo $p' \in \mathbb{Z}$ y todo $q' \leq q$, tales que $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$, entonces $\frac{p}{q}$ es una convergente de la fracción continua de x.

Prueba: Tome n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Por el teorema anterior, $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|$. Portanto $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$. $\square$

Teorema

Si $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, entonces $\frac{p}{q}$ es una convergente de la fracción continua de x.

Prueba: Sea n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Suponga que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. Como en la prueba del teorema anterior, se tiene que $x - \frac{p}{q} \geq \frac{1}{qq_n}$ y así $\frac{p}{q}$ está fuera del intervalo con extremos

$\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

Tenemos dos posibilidades:

- Si $q \geq \frac{q_{n+1}}{2}$, entonces $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^2}$, absurdo.
- Si $q < \frac{q_{n+1}}{2}$, entonces
$$\begin{aligned} \left|x - \frac{p}{q}\right| &\geq \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_nq_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_nq_{n+1}} \\ &> \frac{1}{2qq_n} \geq \frac{1}{2q^2}, \end{aligned}$$
lo que también es un absurdo. $\square$

Definición

*Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos el **orden** de α como*

$$\operatorname{ord} \alpha = \sup \left\{\nu > 0 : \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\nu} \text{ posee infinitas soluciones } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right\}.$$

El orden de cualquier número irracional puede calcularse mediante su representación en fracciones continuas.

Teorema

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un número irracional, con fracción continua $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, y $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ su secuencia de convergentes. Entonces

$$\operatorname{ord} \alpha = 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 2 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n}.$$

Prueba: Sabemos que las mejores aproximaciones por racionales se obtienen mediante convergentes de fracciones continuas (teoremas y corolarios anteriores). Así, para calcular el orden, basta calcular el orden generado por las convergentes.

Sea $s_n > 0$ un número real tal que $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n^{s_n}}$. Como fue demostrado en el aula anterior, tenemos que $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ y

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{2}\left(\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right) = \frac{1}{2}\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{2q_n q_{n+1}}.$$

Luego, obtenemos

$$\frac{1}{2q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^{s_n}} \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Tomando logaritmos, resulta

$$\log 2 + \log q_n + \log q_{n+1} \geq s_n \log q_n \geq \log q_n + \log q_{n+1},$$

y dividiendo entre q_n

$$1 + \frac{\log 2}{\log q_n} + \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} \geq s_n \geq 1 + \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n}.$$

Así,

$$\operatorname{ord} \alpha = \limsup_{n\to\infty} s_n = 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n}.$$

Para mostrar la segunda igualdad, observe que $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$. De ahí

$$a_{n+1}q_n < q_{n+1} < (a_{n+1}+1)\, q_n.$$

De nuevo, tomando el logaritmo

$$\log a_{n+1} + \log q_n < \log q_{n+1} < \log(a_{n+1}+1) + \log q_n,$$

y dividiendo por $\log q_n$

$$1 + \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} < \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < 1 + \frac{\log(a_{n+1}+1)}{\log q_n}.$$

Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n}. \quad \square$$

Ejemplo: Para $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$ se puede mostrar que

$$\operatorname{ord} e = 2.$$

Fracciones Continuas Periódicas

Vamos a mostrar ahora que los números reales con fracción continua periódica corresponden exactamente a las raíces de polinomios de grado 2 sobre $\mathbb{Z}$.

Recordemos que en la representación de x por fracción continua, los coeficientes $a_n, a_{n+1}, \ldots$ son definidos por la recursión

$$a_0 = x, \qquad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor, \qquad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n},$$

donde

$$\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La ecuación (1) da una prueba explícita de que si la fracción continua de x es periódica, entonces x es una raíz de un polinomio cuadrático con coeficientes enteros. De hecho, si $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para algún $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}} = \frac{p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x}{q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}}.$$

Fracciones Continuas Periódicas

Al limpiar denominadores, resulta que $Ax^2 + Bx + C = 0$, donde

$$\begin{aligned} A &= q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1}, \\ B &= p_{n+k-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n+k-1} - p_{n+k-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+k-2}, \\ C &= p_{n-1}p_{n+k-2} - p_{n-2}p_{n+k-1}. \end{aligned}$$

Observe que el coeficiente de x^2 es no-nulo, ya que $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$ es una fracción irreducible de denominador q_{n-2}, pues $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$, y $\frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$ es una fracción irreducible de denominador $q_{n+k-2} > q_{n-2}$; luego $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \neq \frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$ y $A = q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1} \neq 0$.

Ejemplo: El número aúreo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ satisface el polinomio $x^2 - x - 1 = 0$. En particular

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = \ldots$$

Luego, $\varphi = [1; 1, 1, 1, \ldots]$.

Teorema (Lagrange)

Si $x \in \mathbb{R}$ es una irracionalidad cuadrática, esto es $x = r + \sqrt{s}$, $r, s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$, entonces la fracción continua de x es periódica.

Prueba: Existen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $ax^2 + bx + c = 0$, con $b^2 - 4ac > 0$, y $\sqrt{b^2 - 4ac}$ irracional. (basta tomar $a = 1$, $b = -2r$, $c = r^2 - s$).

Como $x = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$, tenemos

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Longrightarrow \quad a\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right)^2 + b\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right) + c = 0 \\ &\Longrightarrow \quad A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2, \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}, \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cp_{n-2}^2. \end{aligned}$$

Note que $C_n = A_{n-1}$. Vamos a mostrar que existe $M > 0$ tal que $0 < |A_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y portanto $0 < |C_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = ap_{n-11}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 = aq_{n-1}^2\Big(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\Big)\Big(\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\Big),$$

donde x y $\bar{x}$ son las raíces de $aX^2 + bX + c = 0$.
Pero $\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2} \leq 1$, de modo que

$$|A_n| = aq_{n-1}^2\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \cdot \left|\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \leq a\Big(|\bar{x} - x| + \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\Big) \leq a\big(|\bar{x} - x| + 1\big) = M.$$

Ahora, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2(b^2 - 4ac) = b^2 - 4ac.$$

$$\implies \quad B_n^2 \leq 4A_nC_n + b^2 - 4ac \quad \implies \quad B_n \leq \sqrt{4A_nC_n + b^2 - 4ac} = M'.$$

Esto muestra que A_n, B_n, C_n están uniformemente limitadas. Así, hay sólo un número finito de poibles ecuaciones $A_nX^2 + B_nX + C_n = 0$, y portanto sólo un nùmero finito de valores de α_n. Esto garantiza la periodicidad $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, para algún $k \in \mathbb{Z}^+$.

Fracciones de Farey

Otro enfoque para aproximar números reales mediante racionales usa lo que se conoce como fracciones de Farey, o secuencias de Farey. Para un entero positivo n, estos se definen como sigue:

Definición

*Las **fracciones de Farey** o **secuencias de Farey** de orden n, denotadas F_n, de definen como el conjunto de números racionales $\frac{r}{s}$ con $0 \leq r \leq s \leq n$ y $(r,s) = 1$.*

Se escriben en orden creciente. Los primeros F_n son

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left\{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{1}\right\}, \\
F_2 &= \left\{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{1}\right\}, \\
F_3 &= \left\{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{1}\right\}, \\
F_4 &= \left\{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{1}\right\}, \\
F_5 &= \left\{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{1}\right\}.
\end{aligned}$$

Obs!

- Vistos como conjuntos, $F_n \subset F_m$, para $m \geq n$.
- Esto es, las fracciones que aparecen en cualquier F_n aparecerán a partir de entonces en cualquier F_m, para $m \geq n$.

Las fracciones de Farey tienen una historia curiosa. El geólogo inglés John Farey (1766–1826) publicó, sin pruebas, varias propiedades de esta serie de fracciones en la *Philosophical Magazine* en 1816.
El matemático Augustin Cauchy vio el artículo y proporcionó las demostraciones más tarde en el mismo año, nombrando las fracciones en reconocimiento a Farey.
Posteriormente resultó que C. H. Haros había probado los resultados 14 años antes, en el *Journal de l'Ecole Polytechnique*.

Comenzamos nuestra investigación con uno de los resultados declarados por Farey pero establecido antes por Haros.

Fracciones de Farey

Teorema

Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ son fracciones consecutivas en la secuencia de Farey F_n, entonces $bc - ad = 1$.

Prueba: Como $(a, b) = 1$, del lema de Bézout, la ecuación lineal $bx - ay = 1$ tiene una solución $x = x_0$, $y = y_0$. Además, $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ también es solución, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Elijamos $t = t_0$ de modo que $0 \leq n - b < y_0 + bt_0 \leq n$ y hagamos $x = x_0 + bt_0$, $y = y_0 + bt_0$. Como $y \leq n$, entonces $\frac{x}{y}$ será una fracción en F_n. Además,

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by} > \frac{1}{b},$$

de modo que $\frac{x}{y}$ ocurre más tarde en la secuencia de Farey que $\frac{a}{b}$. Si $\frac{x}{y} \neq cd$, entonces $\frac{x}{y} > \frac{c}{d}$ y obtenemos

$$\frac{x}{y} - \frac{c}{d} = \frac{dx-cy}{dy} > \frac{1}{dy},$$

y

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd} > \frac{1}{bd}.$$

Sumando ambas desigualdades,

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{dy} - \frac{1}{bd} = \frac{b+y}{bdy}.$$

Pero, $b + y > n$ (ya que $n - b < y$) y $d \leq n$, lo que resulta en la contradicción

$$\frac{1}{by} = \frac{bx-ay}{by} = \frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{b+y}{bdy} > \frac{n}{bdy} > \frac{1}{by}.$$

Por lo tanto, $\frac{x}{y} = \frac{c}{d}$ y la ecuación $bx - ay = 1$ se convierte en $bc - ad = 1$. $\square$

Definición

Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ son dos fracciones en la secuencia de Farey F_n, su ***fracción mediante*** *es $\frac{a+c}{b+d}$.*

El teorema anterior nos permite concluir que la mediante se encuentra entre las fracciones dadas. De las relaciones

$$\begin{aligned} a(b+d) - b(a+c) = ad - bc < 0 \quad &\Longrightarrow \quad a(b+d) < b(a+c), \\ (a+c)d - (b+d)c = ad - bc < 0 \quad &\Longrightarrow \quad (a+c)d < (b+d)c, \end{aligned}$$

tenemos que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Observe que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ son fracciones consecutivas en F_n, y $b + d \leq n$, entonces la mediante sería un miembro de F_n entre ellos, una absurdo. Por lo tanto, para fracciones sucesivas, $b + d \geq n + 1$.

Se puede mostrar que aquellas fracciones que pertenecen a F_{n+1} pero no a F_n son mediantes de fracciones en F_n. Por ejemplo, al pasar de F_4 a F_5, los nuevos elementos son

$$\frac{1}{5} = \frac{0+1}{1+4}, \quad \frac{2}{5} = \frac{1+1}{3+2}, \quad \frac{3}{5} = \frac{1+2}{2+3}, \quad \frac{4}{5} = \frac{3+1}{4+1}.$$

Esto permite construir la secuencia F_{n+1} a partir de F_n insertando mediantes con el denominador apropiado. Al usar el mediante de dos fracciones en F_n para obtener un nuevo miembro de F_{n+1}, las tres fracciones no necesitan ser consecutivas en F_{n+1} (*e.g.* considere $\frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{2}{3}$ en F_8).

Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ son tres fracciones consecutivas en cualquier secuencia de Farey, entonces $\frac{c}{d}$ es el mediante de las otras dos. De hecho, las ecuaciones

$$bc - ad = 1, \quad de - cf = 1 \quad \Longrightarrow \quad (a+e)d = c(b+f) \quad \Longrightarrow \quad \frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f}.$$

con c/d el mediante de a/b y e/f.

Apliquemos algunas de estas ideas para mostrar cómo un número irracional puede ser aproximado, relativamente bien, por un número racional.

Teorema

Para cualquier número irracional $0 < x < 1$ *y cualquier entero* $n > 0$*, existe una fracción* $\frac{a}{b} \in F_n$ *tal que* $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q(n+1)}$.

Prueba: En la secuencia de Farey F_n, hay fracciones consecutivas $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ tales que

$$\frac{a}{b} < x < \frac{a+c}{b+d} \qquad \text{ó} \qquad \frac{a+c}{b+d} < x < \frac{c}{d}.$$

Como $bc - ad = 1$ y $b + d \geq n + 1$, se sigue que

$$x - \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} < \frac{1}{b(n+1)},$$

ó

$$\frac{c}{d} - x < \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} < \frac{1}{d(n+1)},$$

Dependiendo del caso, basta tomar $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ ó $\frac{p}{q} = \frac{c}{d}$. $\square$

Este resultado puede extenderse más allá del intervalo unitario con el siguiente corolario.

Corolario

Dado un número irracional positivo x y un número entero $n > 0$, existe un número racional $\frac{p}{q}$, con $0 < q \leq n$, tal que $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q(n+1)}$.

Prueba: La función mayor entero permite escribir $x = \lfloor x \rfloor + r$, donde $0 \leq r < 1$. Por el teorema anterior, hay un racinal $\frac{p}{q}$ para el cual

$$|r - \tfrac{p}{q}| < \tfrac{1}{q(n+1)}.$$

Tomando $a = \lfloor x \rfloor q + p$ y $b = p$, se tiene que

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| = \left|x - \frac{\lfloor x \rfloor q + p}{q}\right| = \left|r - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q(n+1)} = \frac{1}{b(n+1)},$$

y se muestra el resultado requerido. $\square$

Terminamos con un ejemplo que ilustra el corolario.

Ejemplo: Determinar una fracción $\frac{p}{q}$, con $0 < q < 5$, tal que $|\sqrt{7} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{6q}$.

La función mayor entero produce $\sqrt{7} - \lfloor\sqrt{7}\rfloor = \sqrt{7} - 2 = 0.64755\ldots$.

Para la secuencia de Farey F_5, el valor $0.64755\ldots$ se encuentra en el intervalo entre las fracciones consecutivas $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{3}$. La mediante de estas dos fracciones es $\frac{3+2}{5+3} = \frac{5}{8} = 0.625$, de modo que $\frac{5}{8} < 0.64755\ldots$

Del teorema anterior, tenemos

$$\left|0.64755\ldots - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{6(3)}.$$

El argumento empleado en el corolario traslada esta desigualdad a

$$\left|\sqrt{7} - \frac{8}{3}\right| < \frac{1}{6(3)},$$

y esta es la fracción buscada.