

## **CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD.**

ALAN REYES-FIGUEROA  
TEORÍA DE NÚMEROS

(AULA 11) 09.AGOSTO.2024

# Criterios de Divisibilidad

Mostramos ahora algunos de los criterios de divisibilidad que comúnmente usamos. Para ello, consideramos la representación de un número entero  $n$  en base 10:

$$n = (a_d \dots a_2 a_1 a_0)_{10} = \sum_{k=0}^d a_k 10^k.$$

**Criterio del 2:** Como  $10 \equiv 0 \pmod{2}$ , entonces

$$n = \sum_{k=0}^d a_k 10^k \equiv \underbrace{\sum_{k=1}^d a_k 10^k}_{\equiv 0} + a_0 \equiv a_0 \pmod{2}.$$

Así,  $n \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \pmod{2}$ .

Luego,  $2 \mid n \Leftrightarrow 2 \mid a_0$ , esto es, **un número es par, si y sólo si su último dígito es par.**

# Criterios de Divisibilidad

**Criterio del 5:** De igual forma, como  $10 \equiv 0 \pmod{5}$ , entonces

$$n = \sum_{k=0}^d a_k 10^k \equiv \sum_{k=1}^d a_k 10^k + a_0 \equiv a_0 \pmod{5}.$$

Así,  $n \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \pmod{5}$ . Luego,  $5 \mid n \Leftrightarrow 5 \mid a_0$ , esto es, **un número es divisible entre 5, si y sólo si su último dígito es 0 ó 5**.

**Criterio del 10:** De nuevo, como  $10 \equiv 0 \pmod{10}$ , entonces

$$n = \sum_{k=0}^d a_k 10^k \equiv \sum_{k=1}^d a_k 10^k + a_0 \equiv a_0 \pmod{10}.$$

Así,  $n \equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \pmod{10}$ . Luego,  $10 \mid n \Leftrightarrow 10 \mid a_0$ , esto es, **un número es divisible entre 10, si y sólo si su último dígito es 0**.

# Criterios de Divisibilidad

**Criterio del 4:** Observe que  $10 \equiv 2 \pmod{4}$ , y  $10^k \equiv 0 \pmod{4}$ , para  $k \geq 2$ . Entonces

$$n = \sum_{k=0}^d a_k 10^k \equiv \sum_{k=2}^d a_k 10^k + a_1 10 + a_0 \equiv 10a_1 + a_0 \pmod{4}.$$

Así,  $n \equiv 0 \pmod{4} \Leftrightarrow (a_1 a_0)_{10} = 10a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{4}$ . Luego,  $4 \mid n \Leftrightarrow 4 \mid (a_1 a_0)_{10}$ , esto es, **un número es divisible entre 4, si y el número formado por sus últimos dos dígitos es múltiplo de 4.**

**Criterio del 8:** Observe que  $10^k \equiv 0 \pmod{8}$ , para  $k \geq 3$ . Entonces

$$n = \sum_{k=0}^d a_k 10^k \equiv \sum_{k=3}^d a_k 10^k + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \equiv 100a_2 + 10a_1 + a_0 \pmod{8}.$$

Así,  $n \equiv 0 \pmod{8} \Leftrightarrow (a_2 a_1 a_0)_{10} = 100a_2 + 10a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{8}$ . Luego,  $8 \mid n \Leftrightarrow 8 \mid (a_2 a_1 a_0)_{10}$ , esto es, **un número es divisible entre 8, si y el número formado por sus últimos tres dígitos es múltiplo de 8.**

# Criterios de Divisibilidad

**Criterio del 3:** Observe que  $10 \equiv 1 \pmod{3}$ , entonces

$$n = \sum_{k=0}^d a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^d a_k 1^k \equiv \sum_{k=0}^d a_k \pmod{3}.$$

Así,  $n \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^d a_k \equiv 0 \pmod{3}$ . Luego,  $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid \sum_{k=0}^d a_k$ , esto es, **un número es divisible entre 3, si y sólo si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.**

**Criterio del 9:** Observe que  $10 \equiv 1 \pmod{9}$ , entonces

$$n = \sum_{k=0}^d a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^d a_k 1^k \equiv \sum_{k=0}^d a_k \pmod{9}.$$

Así,  $n \equiv 0 \pmod{9} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^d a_k \equiv 0 \pmod{9}$ . Luego,  $9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid \sum_{k=0}^d a_k$ , esto es, **un número es divisible entre 9, si y sólo si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9.**

# Criterios de Divisibilidad

**Criterio del 11:** Observe que  $10 \equiv -1 \pmod{11}$ , entonces

$$n = \sum_{k=0}^d a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^d a_k (-1)^k \pmod{11}.$$

Así,  $n \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^d (-1)^k a_k \equiv 0 \pmod{11}$ . Luego,  $11 \mid n \Leftrightarrow 11 \mid \sum_{k=0}^d (-1)^k a_k$ , esto es, **un número es divisible entre 11, si y sólo si la suma alterna de sus dígitos es múltiplo de 11.**

Existen otros criterios que son combinación de los anteriores. Por ejemplo:

- $n$  es divisible entre 6 si, y sólo si, es divisible entre 2 y es divisible entre 3.
- $n$  es divisible entre 15 si, y sólo si, es divisible entre 3 y es divisible entre 5.

Estamos interesados en generar criterios para números primos, por lo general, números terminados en 1, 3, 7 ó 9.

# Criterios de Divisibilidad

**Criterio del 7:** Dado  $n = (a_d \dots a_2 a_1 a_0)_{10}$ , consideramos los números que se obtienen de separar la última cifra de  $n$ , esto es

$$a_d \dots a_2 a_1 \mid a_0 \longrightarrow (a_d \dots a_2 a_1)_{10} \text{ y } a_0.$$

En particular, el número  $q = (a_d \dots a_2 a_1)_{10}$  corresponde a  $\frac{n-a_0}{10}$ , y tenemos que  $n = 10q + a_0$ .

Consideramos ahora el número  $F(n) = q - 2a_0 = \frac{n-a_0}{10} - 2a_0$ . Observe ahora que en módulo 7

$$\begin{aligned} F(n) = q - 2a_0 \equiv 0 \pmod{7} &\iff q \equiv 2a_0 \pmod{7} \iff 10q \equiv 20a_0 \pmod{7} \\ &\iff n = 10q + a_0 \equiv 21a_0 \equiv 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Luego,  $7 \mid n \iff 7 \mid F(n) = q - 2a_0$ . Este tipo de criterios radica en reducir la divisibilidad módulo  $k$  de  $n$ , a un número mucho menor ( $F(n)$  es aproximadamente la décima parte de  $n$ ).

# Criterios de Divisibilidad

Ejemplo: ¿Es 441 divisible entre 7? ¿Y 1846?

Aplicamos el criterio anterior de forma sucesiva:

$$441 \equiv 44 - 2(1) = 42 \equiv 4 - 2(2) \equiv 0 \pmod{7}.$$

Como  $7 \mid 0$ , esto muestra que  $7 \mid 441$ .

En el otro caso, de nuevo aplicamos el criterio

$$1846 \equiv 184 - 2(6) = 172 \equiv 17 - 2(2) = 13 \equiv 6 \pmod{7}.$$

Como  $7 \nmid 13$ , esto muestra que  $7 \nmid 1846$ .



# Algoritmo para generar Criterios de Divisibilidad

Mostramos un criterio de divisibilidad general para números terminados en 1,3, 7, ó 9.

Al igual que en el caso del 7, si  $n = (a_d \dots a_2 a_1 a_0)_{10}$ , consideramos los números que se obtienen de separar la última cifra de  $n$ :  $q = (a_d \dots a_2 a_1)_{10} = \frac{n-a_0}{10}$  y  $a_0$ , de modo que  $n = 10q + a_0$ .

Definimos el número  $F(n)$  en función de la terminación del módulo  $m$  en el cual queremos dividir:

$$F(n) = q + ta_0, \text{ donde } t = \begin{cases} \frac{9m+1}{3m^{10}+1} = 9k+1, & \text{si } m = 10k+1; \\ \frac{3m^{10}+1}{7m^{10}+1} = 3k+1, & \text{si } m = 10k+3; \\ \frac{7m^{10}+1}{m^{10}+1} = 7k+5, & \text{si } m = 10k+7; \\ \frac{m^{10}+1}{10} = k+1, & \text{si } m = 10k+9. \end{cases}$$

Veremos que la divisibilidad de un número módulo  $m$ , se reduce a mostrar la divisibilidad de  $F(n)$  módulo  $m$ . Para ello, dividimos la prueba en casos:

# Algoritmo para generar Criterios de Divisibilidad

Prueba: Mostramos que  $m \mid n \iff m \mid F(n)$ .

Observe primero que para  $m$  terminado en 1, 3, 7 y 9, se tiene que  $(10, m) = 1$ .

- $m = 10k + 1$ :

( $\Leftarrow$ ) Suponga que  $F(n) \equiv 0 \pmod{m}$ . Entonces

$$\begin{aligned} F(n) = q + ta_0 &\equiv 0 \pmod{m} \implies q + (9k + 1)a_0 \equiv 0 \pmod{m} \\ &\implies q + (10k + 1)a_0 - ka_0 \equiv a - ka_0 \equiv 0 \pmod{m} \\ &\implies q \equiv ka_0 \pmod{m}. \end{aligned}$$

Luego,  $n = 10q + a_0 \equiv 10(ka_0) + a_0 \equiv (10k + 1)a_0 \equiv ma_0 \equiv 0 \pmod{m}$ .

( $\Rightarrow$ ) Suponga ahora que  $n \equiv 0 \pmod{m}$ . Para mostrar que  $F(n) \equiv 0 \pmod{m}$ , es suficiente mostrar que  $10F(n) \equiv 0 \pmod{m}$  (ley de cancelación):

$$\begin{aligned} n \equiv 0 \pmod{m} &\implies 10F(n) = 10q + 10ta_0 \equiv (10q + a_0) + (10t - 1)a_0 \pmod{m} \\ &\implies 10F(n) \equiv n + (10 \cdot (9k + 1) - 1)a_0 \pmod{m} \\ &\implies 10F(n) \equiv 9(10k + 1)a_0 \equiv 9ma_0 \equiv 0 \pmod{m}. \end{aligned}$$

# Algoritmo para generar Criterios de Divisibilidad

- $m = 10k + 1$ :

$$F(n) = q + ta_0 = q + (9k + 1)a_0 \equiv q + (10k + 1)a_0 - ka_0 \equiv q - ka_0 \pmod{m}. \text{ Luego } F(n) \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow q \equiv ka_0 \pmod{m} \text{ y}$$

$$\begin{aligned} n = 10q + a_0 &\equiv 10(ka_0) + a_0 \equiv (10k + 1)a_0 \pmod{m} \\ &\equiv 0 \pmod{m}. \end{aligned}$$

Entonces  $F(n) \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{m}$ .

- $m = 10k + 3$ :

$$F(n) = q + ta_0 = q + (3k + 1)a_0 \equiv q + (10k + 3)a_0 - 7ka_0 - 2a_0 \equiv q - 7ka_0 - 2a_0 \pmod{m}. \text{ Luego } F(n) \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow q \equiv 7ka_0 + 2a_0 \pmod{m} \text{ y}$$

$$\begin{aligned} n = 10q + a_0 &\equiv 10(7ka_0 + 2a_0) + a_0 \equiv 7(10k + 3)a_0 \pmod{m} \\ &\equiv 0 \pmod{m}. \end{aligned}$$

Entonces  $F(n) \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{m}$ .

# Algoritmo para generar Criterios de Divisibilidad

- $m = 10k + 7$ :

$$F(n) = q + ta_0 = q + (7k + 5)a_0 \equiv q + (10k + 7)a_0 - 3ka_0 - 2a_0 \equiv q - 3ka_0 - 2a_0 \pmod{m}.$$

Luego  $F(n) \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow q \equiv 3ka_0 + 2a_0 \pmod{m}$  y

$$\begin{aligned} n = 10q + a_0 &\equiv 10(3ka_0 + 2a_0) + a_0 \equiv 3(10k + 7)a_0 \pmod{m} \\ &\equiv 0 \pmod{m}. \end{aligned}$$

Entonces  $F(n) \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{m}$ .

- $m = 10k + 9$ :

$$F(n) = q + ta_0 = q + (k + 1)a_0 \equiv q + (10k + 9)a_0 - 9ka_0 - 8a_0 \equiv q - 9ka_0 - 8a_0 \pmod{m}.$$

Luego  $F(n) \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow q \equiv 9ka_0 + 8a_0 \pmod{m}$  y

$$\begin{aligned} n = 10q + a_0 &\equiv 10(9ka_0 + 8a_0) + a_0 \equiv 9(10k + 9)a_0 \pmod{m} \\ &\equiv 0 \pmod{m}. \end{aligned}$$

Entonces  $F(n) \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{m}$ .

# Ejemplos

**Ejemplo:** Criterio de divisibilidad entre 7.

$m = 7$  es de la forma  $10(0) + 7$ , de modo que  $F(n) = q + (7k + 5)a_0 \equiv q + 5a_0 \equiv q - 2a_0 \pmod{7}$ .

Por ejemplo, si quisiéramos saber si  $7 \mid 1810$ . Hacemos

$$1810 \equiv 181 - 2(0) \equiv 181 \equiv 18 - 2(1) \equiv 16 \equiv 2 \pmod{7}.$$

Como  $7 \nmid 16$ , esto muestra que  $7 \nmid 1810$ .

**Ejemplo:** Criterio de divisibilidad entre 93.

$m = 93$  es de la forma  $10(9) + 3$ , de modo que  $F(n) = q + (3k + 1)a_0 \equiv q + 28a_0 \pmod{93}$ .

Por ejemplo, si quisiéramos saber si  $93 \mid 174189$ . Hacemos

$$\begin{aligned} 174189 &\equiv 17418 + 28(9) \equiv 17670 \equiv 1767 + 28(0) \equiv 1767 \equiv 176 + 28(7) \equiv 372 \equiv 37 + 28(2) \\ &\equiv 93 \equiv 0 \pmod{93}. \end{aligned}$$

Como  $93 \mid 93$ , esto muestra que  $93 \mid 174189$ .

# Ejemplos

**Ejemplo:** Criterio de divisibilidad entre 47.

$m = 47$  es de la forma  $10(4) + 7$ , de modo que

$$F(n) = q + (7k + 5)a_0 \equiv q + 33a_0 \equiv q - 14a_0 \pmod{47}.$$

Por ejemplo, si quisiéramos saber si  $47 \mid 2021$ . Hacemos

$$2021 \equiv 202 - 14(1) \equiv 188 \equiv 18 - 14(8) \equiv -94 \equiv 0 \pmod{47}.$$

Como  $47 \mid -94$ , esto muestra que  $47 \mid 2021$ .

**Ejemplo:** Criterio de divisibilidad entre 95.

$95 = 5 \cdot 19$ . Basta estudiar el criterio del 19.  $m = 19$  es de la forma  $10(1) + 9$ , de modo que  $F(n) = q + (k + 1)a_0 \equiv q + 2a_0 \pmod{19}$ .

Por ejemplo, si quisiéramos saber si  $19 \mid 11325$ . Hacemos

$$11305 \equiv 1130 + 2(5) \equiv 1140 \equiv 114 + 2(0) \equiv 114 \equiv 11 + 2(4) \equiv 19 \equiv 0 \pmod{19}.$$

Como  $19 \mid 19$ , esto muestra que  $19 \mid 11305$ . Además,  $5 \mid 11305$ , de modo que  $95 \mid 11305$ .