

## **FRACCIONES CONTINUAS. FRACCIONES DE FAREY.**

ALAN REYES-FIGUEROA  
TEORÍA DE NÚMEROS

(AULA 27) 11.OCTUBRE.2024

# Fracciones Continuas

El siguiente resultado caracteriza las convergentes de una fracción continua en términos del error reducido de aproximación de  $x$  por  $\frac{p}{q}$ , el cual por definición es  $|qx - p|$ ; la razón entre  $|x - \frac{p}{q}|$  y el error máximo de aproximación, con

## Teorema

Sea  $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$  con  $\{\frac{p_n}{q_n}\}$  su secuencia de convergentes. Para todo  $p, q \in \mathbb{Z}$ , con  $0 < q < q_{n+1}$ , vale

$$|q_n x - p_n| \leq |qx - p|.$$

Además, si  $0 < q < q_n$ , la desigualdad arriba es estricta.

Prueba: Como  $(p_n, q_n) = 1, \forall n$ , si  $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ , entonces  $p = kp_n$  y  $q = kq_n$ , para algún entero  $k \neq 0$ . En este caso, el resultado es inmediato pues  $|q_n x - p_n| \leq k|q_n x - p_n| = |qx - p|$ . Podemos suponer entonces que  $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$  de modo que

$$q < q_{n+1} \quad \implies \quad \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

# Fracciones Continuas

Así,  $\frac{p}{q}$  está fuera del intervalo de extremos  $\frac{p_n}{q_n}$  y  $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ . Portanto,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \min \left\{ \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right|, \left| \frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}}.$$

lo que implica

$$|qx - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$$

Además, la igualdad sólo puede ocurrir si  $x = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ , con  $a_{n+1} \geq 2$  y  $q_{n+1} > 2q_n$ , pues en una fracción continua finita el último coeficiente  $a_n$  es siempre mayor que 1. En este caso, si  $q < q_n$ , tenemos

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| - \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} > \frac{1}{qq_{n+1}},$$

lo que implica

$$|qx - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|. \quad \square$$

# Fracciones Continuas

## Corolario

Para todo  $q < q_n$ , vale  $|x - \frac{p_n}{q_n}| \leq |x - \frac{p}{q}|$ .  $\square$

## Corolario

Si  $|qx - p| \leq |q'x - p'|$ , para todo  $p' \in \mathbb{Z}$  y todo  $q' \leq q$ , tales que  $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$ , entonces  $\frac{p}{q}$  es una convergente de la fracción continua de  $x$ .

Prueba: Tome  $n$  tal que  $q_n \leq q < q_{n+1}$ . Por el teorema anterior,  $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|$ .

Portanto  $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ .  $\square$

## Teorema

Si  $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$ , entonces  $\frac{p}{q}$  es una convergente de la fracción continua de  $x$ .

Prueba: Sea  $n$  tal que  $q_n \leq q < q_{n+1}$ . Suponga que  $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ . Como en la prueba del teorema anterior, se tiene que  $x - \frac{p}{q} \geq \frac{1}{qq_n}$  y así  $\frac{p}{q}$  está fuera del intervalo con extremos

# Fracciones Continuas

$$\frac{p_n}{q_n} \text{ y } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

Tenemos dos posibilidades:

- Si  $q \geq \frac{q_{n+1}}{2}$ , entonces  $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^2}$ , absurdo.

- Si  $q < \frac{q_{n+1}}{2}$ , entonces

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p}{q} \right| &\geq \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q} \right| - \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} \\ &> \frac{1}{2qq_n} \geq \frac{1}{2q^2}, \end{aligned}$$

lo que también es un absurdo.  $\square$

## Definición

Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definimos el **orden** de  $\alpha$  como

$$\text{ord } \alpha = \sup \left\{ \nu > 0 : \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\nu} \text{ posee infinitas soluciones } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

# Fracciones Continuas

El orden de cualquier número irracional puede calcularse mediante su representación en fracciones continuas.

## Teorema

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  un número irracional, con fracción continua  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ , y  $\{\frac{p_n}{q_n}\}$  su secuencia de convergentes. Entonces

$$\text{ord } \alpha = 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n}.$$

Prueba: Sabemos que las mejores aproximaciones por racionales se obtienen mediante convergentes de fracciones continuas (teoremas y corolarios anteriores). Así, para calcular el orden, basta calcular el orden generado por las convergentes.

Sea  $s_n > 0$  un número real tal que  $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{1}{q_n^{s_n}}$ . Como fue demostrado en el aula anterior, tenemos que  $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$  y

# Fracciones Continuas

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| > \frac{1}{2} \left( \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| \alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \right) = \frac{1}{2} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{2q_n q_{n+1}}.$$

Luego, obtenemos

$$\frac{1}{2q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^{s_n}} \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Tomando logaritmos, resulta

$$\log 2 + \log q_n + \log q_{n+1} \geq s_n \log q_n \geq \log q_n + \log q_{n+1},$$

y dividiendo entre  $q_n$

$$1 + \frac{\log 2}{\log q_n} + \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} \geq s_n \geq 1 + \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n}.$$

Así,

$$\text{ord } \alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n}.$$

# Fracciones Continuas

Para mostrar la segunda igualdad, observe que  $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$ . De ahí

$$a_{n+1}q_n < q_{n+1} < (a_{n+1} + 1)q_n.$$

De nuevo, tomando el logaritmo

$$\log a_{n+1} + \log q_n < \log q_{n+1} < \log(a_{n+1} + 1) + \log q_n,$$

y dividiendo por  $\log q_n$

$$1 + \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n} < \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < 1 + \frac{\log(a_{n+1} + 1)}{\log q_n}.$$

Portanto,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 1 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log q_n}. \quad \square$$

**Ejemplo:** Para  $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$  se puede mostrar que

$$\text{ord } e = 2.$$



# Fracciones Continuas Periódicas

Vamos a mostrar ahora que los números reales con fracción continua periódica corresponden exactamente a las raíces de polinomios de grado 2 sobre  $\mathbb{Z}$ .

Recordemos que en la representación de  $x$  por fracción continua, los coeficientes  $a_n, a_{n+1}, \dots$  son definidos por la recursión

$$a_0 = x, \quad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor, \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n},$$

donde

$$\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La ecuación (1) da una prueba explícita de que si la fracción continua de  $x$  es periódica, entonces  $x$  es una raíz de un polinomio cuadrático con coeficientes enteros. De hecho, si  $\alpha_{n+k} = \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}^+$ , entonces

$$\frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}} = \frac{p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x}{q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}}.$$

# Fracciones Continuas Periódicas

Al limpiar denominadores, resulta que  $Ax^2 + Bx + C = 0$ , donde

$$A = q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1},$$

$$B = p_{n+k-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n+k-1} - p_{n+k-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+k-2},$$

$$C = p_{n-1}p_{n+k-2} - p_{n-2}p_{n+k-1}.$$

Observe que el coeficiente de  $x^2$  es no-nulo, ya que  $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$  es una fracción irreducible de denominador  $q_{n-2}$ , pues  $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$ , y  $\frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$  es una fracción irreducible de denominador  $q_{n+k-2} > q_{n-2}$ ; luego  $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \neq \frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$  y  $A = q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1} \neq 0$ .

**Ejemplo:** El número áureo  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  satisface el polinomio  $x^2 - x - 1 = 0$ . En particular

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \quad \implies \quad \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = \dots$$

Luego,  $\varphi = [1; 1, 1, 1, \dots]$ .

# Fracciones Continuas Periódicas

## Teorema (Lagrange)

Si  $x \in \mathbb{R}$  es una irracionalidad cuadrática, esto es  $x = r + \sqrt{s}$ ,  $r, s \in \mathbb{Q}$ ,  $s > 0$ , entonces la fracción continua de  $x$  es periódica.

Prueba: Existen  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  tales que  $ax^2 + bx + c = 0$ , con  $b^2 - 4ac > 0$ , y  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  irracional. (basta tomar  $a = 1$ ,  $b = -2r$ ,  $c = r^2 - s$ ).

Como  $x = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$ , tenemos

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\implies a\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right)^2 + b\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right) + c = 0 \\ &\implies A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2, \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}, \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2. \end{aligned}$$

# Fracciones Continuas Periódicas

Note que  $C_n = A_{n-1}$ . Vamos a mostrar que existe  $M > 0$  tal que  $0 < |A_n| \leq M$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y portanto  $0 < |C_n| \leq M$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 = aq_{n-1}^2 \left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) \left(\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right),$$

donde  $x$  y  $\bar{x}$  son las raíces de  $aX^2 + bX + c = 0$ .

Pero  $\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2} \leq 1$ , de modo que

$$|A_n| = aq_{n-1}^2 \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \cdot \left|\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \leq a \left(|\bar{x} - x| + \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\right) \leq a(|\bar{x} - x| + 1) = M.$$

Ahora, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} B_n^2 - 4A_nC_n &= (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2(b^2 - 4ac) = b^2 - 4ac. \\ \implies B_n^2 &\leq 4A_nC_n + b^2 - 4ac \implies B_n \leq \sqrt{4A_nC_n + b^2 - 4ac} = M'. \end{aligned}$$

Esto muestra que  $A_n, B_n, C_n$  están uniformemente limitadas. Así, hay sólo un número finito de posibles ecuaciones  $A_nX^2 + B_nX + C_n = 0$ , y portanto sólo un número finito de valores de  $\alpha_n$ . Esto garantiza la periodicidad  $\alpha_{n+k} = \alpha_n$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

# Fracciones de Farey

Otro enfoque para aproximar números reales mediante racionales usa lo que se conoce como fracciones de Farey, o secuencias de Farey. Para un entero positivo  $n$ , estos se definen como sigue:

## Definición

Las **fracciones de Farey** o **secuencias de Farey** de orden  $n$ , denotadas  $F_n$ , se definen como el conjunto de números racionales  $\frac{r}{s}$  con  $0 \leq r \leq s \leq n$  y  $(r, s) = 1$ .

Se escriben en orden creciente. Los primeros  $F_n$  son

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\},$$

$$F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\},$$

$$F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\},$$

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\},$$

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}.$$

# Fracciones de Farey

## Obs!

- Vistos como conjuntos,  $F_n \subset F_m$ , para  $m \geq n$ .
- Esto es, las fracciones que aparecen en cualquier  $F_n$  aparecerán a partir de entonces en cualquier  $F_m$ , para  $m \geq n$ .

Las fracciones de Farey tienen una historia curiosa. El geólogo inglés JOHN FAREY (1766–1826) publicó, sin pruebas, varias propiedades de esta serie de fracciones en la *Philosophical Magazine* en 1816.

El matemático AUGUSTIN CAUCHY vio el artículo y proporcionó las demostraciones más tarde en el mismo año, nombrando las fracciones en reconocimiento a Farey.

Posteriormente resultó que C. H. HAROS había probado los resultados 14 años antes, en el *Journal de l'Ecole Polytechnique*.

Comenzamos nuestra investigación con uno de los resultados declarados por Farey pero establecido antes por Haros.

# Fracciones de Farey

## Teorema

Si  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  son fracciones consecutivas en la secuencia de Farey  $F_n$ , entonces  $bc - ad = 1$ .

Prueba: Como  $(a, b) = 1$ , del lema de Bézout, la ecuación lineal  $bx - ay = 1$  tiene una solución  $x = x_0, y = y_0$ . Además,  $x = x_0 + at, y = y_0 + bt$  también es solución, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ .

Elijamos  $t = t_0$  de modo que  $0 \leq n - b < y_0 + bt_0 \leq n$  y hagamos  $x = x_0 + bt_0, y = y_0 + bt_0$ . Como  $y \leq n$ , entonces  $\frac{x}{y}$  será una fracción en  $F_n$ . Además,

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by} > \frac{1}{b},$$

de modo que  $\frac{x}{y}$  ocurre más tarde en la secuencia de Farey que  $\frac{a}{b}$ . Si  $\frac{x}{y} \neq \frac{c}{d}$ , entonces  $\frac{x}{y} > \frac{c}{d}$  y obtenemos

$$\frac{x}{y} - \frac{c}{d} = \frac{dx - cy}{dy} > \frac{1}{dy},$$

y

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} > \frac{1}{bd}.$$

Sumando ambas desigualdades,

# Fracciones de Farey

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{dy} - \frac{1}{bd} = \frac{b+y}{bdy}.$$

Pero,  $b + y > n$  (ya que  $n - b < y$ ) y  $d \leq n$ , lo que resulta en la contradicción

$$\frac{1}{by} = \frac{bx-ay}{by} = \frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{b+y}{bdy} > \frac{n}{bdy} > \frac{1}{by}.$$

Por lo tanto,  $\frac{x}{y} = \frac{c}{d}$  y la ecuación  $bx - ay = 1$  se convierte en  $bc - ad = 1$ .  $\square$

## Definición

Si  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  son dos fracciones en la secuencia de Farey  $F_n$ , su **fracción mediente** es  $\frac{a+c}{b+d}$ .

El teorema anterior nos permite concluir que la mediente se encuentra entre las fracciones dadas. De las relaciones

$$a(b+d) - b(a+c) = ad - bc < 0 \implies a(b+d) < b(a+c),$$

$$(a+c)d - (b+d)c = ad - bc < 0 \implies (a+c)d < (b+d)c,$$

tenemos que  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .



# Fracciones de Farey

Observe que si  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  son fracciones consecutivas en  $F_n$ , y  $b + d \leq n$ , entonces la mediana sería un miembro de  $F_n$  entre ellos, una absurdo. Por lo tanto, para fracciones sucesivas,  $b + d \geq n + 1$ .

Se puede mostrar que aquellas fracciones que pertenecen a  $F_{n+1}$  pero no a  $F_n$  son medianas de fracciones en  $F_n$ . Por ejemplo, al pasar de  $F_4$  a  $F_5$ , los nuevos elementos son

$$\frac{1}{5} = \frac{0+1}{1+4}, \quad \frac{2}{5} = \frac{1+1}{3+2}, \quad \frac{3}{5} = \frac{1+2}{2+3}, \quad \frac{4}{5} = \frac{3+1}{4+1}.$$

Esto permite construir la secuencia  $F_{n+1}$  a partir de  $F_n$  insertando medianas con el denominador apropiado. Al usar el mediano de dos fracciones en  $F_n$  para obtener un nuevo miembro de  $F_{n+1}$ , las tres fracciones no necesitan ser consecutivas en  $F_{n+1}$  (e.g. considere  $\frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{2}{3}$  en  $F_8$ ).

Si  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$  son tres fracciones consecutivas en cualquier secuencia de Farey, entonces  $\frac{c}{d}$  es el mediano de las otras dos. De hecho, las ecuaciones

$$bc - ad = 1, \quad de - cf = 1 \quad \implies \quad (a + e)d = c(b + f) \quad \implies \quad \frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f}.$$

con  $c/d$  el mediano de  $a/b$  y  $e/f$ .

# Fracciones de Farey

Apliquemos algunas de estas ideas para mostrar cómo un número irracional puede ser aproximado, relativamente bien, por un número racional.

## Teorema

Para cualquier número irracional  $0 < x < 1$  y cualquier entero  $n > 0$ , existe una fracción  $\frac{a}{b} \in F_n$  tal que  $|x - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b(b+1)}$ .

Prueba: En la secuencia de Farey  $F_n$ , hay fracciones consecutivas  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  tales que

$$\frac{a}{b} < x < \frac{a+c}{b+d} \quad \text{ó} \quad \frac{a+c}{b+d} < x < \frac{c}{d}.$$

Como  $bc - ad = 1$  y  $b + d \geq n + 1$ , se sigue que

$$x - \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} < \frac{1}{b(n+1)},$$

ó

$$\frac{c}{d} - x < \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} < \frac{1}{d(n+1)},$$

Dependiendo del caso, basta tomar  $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$  ó  $\frac{p}{q} = \frac{c}{d}$ .  $\square$

# Fracciones de Farey

Este resultado puede extenderse más allá del intervalo unitario con el siguiente corolario.

## Corolario

*Dado un número irracional positivo  $x$  y un número entero  $n > 0$ , existe un número racional  $\frac{p}{q}$ , con  $0 < q \leq n$ , tal que  $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q(n+1)}$ .*

Prueba: La función mayor entero permite escribir  $x = \lfloor x \rfloor + r$ , donde  $0 \leq r < 1$ . Por el teorema anterior, hay un racional  $\frac{p}{q}$  para el cual

$$|r - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q(n+1)}.$$

Tomando  $a = \lfloor x \rfloor q + p$  y  $b = q$ , se tiene que

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| = \left| x - \frac{\lfloor x \rfloor q + p}{q} \right| = \left| r - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q(n+1)} = \frac{1}{b(n+1)},$$

y se muestra el resultado requerido.  $\square$

# Fracciones de Farey

Terminamos con un ejemplo que ilustra el corolario.

**Ejemplo:** Determinar una fracción  $\frac{p}{q}$ , con  $0 < q < 5$ , tal que  $|\sqrt{7} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{6q}$ .

La función mayor entero produce  $\sqrt{7} - \lfloor \sqrt{7} \rfloor = \sqrt{7} - 2 = 0.64755 \dots$

Para la secuencia de Farey  $F_5$ , el valor  $0.64755 \dots$  se encuentra en el intervalo entre las fracciones consecutivas  $\frac{3}{5}$  y  $\frac{2}{3}$ . La mediente de estas dos fracciones es  $\frac{3+2}{5+3} = \frac{5}{8} = 0.625$ , de modo que  $\frac{5}{8} < 0.64755 \dots$

Del teorema anterior, tenemos

$$\left| 0.64755 \dots - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{6(3)}.$$

El argumento empleado en el corolario traslada esta desigualdad a

$$\left| \sqrt{7} - \frac{8}{3} \right| < \frac{1}{6(3)},$$

y esta es la fracción buscada.