Teoría de Números 2025

Lista 03

01.agosto.2025

1. Pruebe que para todo entero positivo $n > 1$, existe un primo p tal que $1 < p \leq \sqrt{n}$.

2. Implementar en Python dos funciones que simulen una **criba de Eratóstenes**. Su función debe recibir como argumento un entero positivo $n > 1$ y deben devolver cada una, uno de los siguientes resultados:

   (a) una variable booleana o un mensaje que indique si n es primo o es compuesto.

   (b) la lista de todos los primos $1 < p \leq n$.

   Para la función en (a), investigar cuál es la complejidad computacional de la criba de Eratóstenes. Puede utilizar las simplificaciones vistan en clase.
   Ilustrar en una gráfica la complejidad computacional o el tiempo de ejecución de su función en términos del tamaño del entero n, y discutir si sus resultados empíricos corresponden con la complejidad investigada.

3. (a) Investigar la **criba de Sundaram** y explicar cómo funciona.

   (b) Al igual que en el ejercicio anterior, implementar una función que simule la criba de Sundaram y realizar un gráfico que muestra la complejidad computacional o el tiempo de ejecución.

   (c) Según sus gráficas, ¿cuál algoritmo es más eficiente para determinar si n es primo, Eratóstenes o Sundaram? ¿O son similares? Discuta sus resultados.

4. Hasta julio de 2025, se han descubierto 52 primos de Mersenne (de la forma $2^m - 1$). El último de ellos fue descubierto por Luke Durant en 2024.

   Dé una estimación educada, justificada por algún argumento válido, sobre cuándo cree usted que se va a descubrir el siguiente primo de Mersenne (haga las investigaciones necesarias).

5. Para $x \geq 1$, definimos como $\pi(x) =$ número de primos $\leq x$.

   El **Teorema de los Números Primos** establece que una aproximación para contar $\pi(x)$ puede ser dada por la función

   $$\psi(x) = \frac{x}{\log x}.$$

   Elabore una tabla comparativa entre $\pi(x)$ y $\psi(x)$ para los siguientes valores $x = 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000$. En dicha tabla deberá incluir los valores de x, $\pi(x)$, $\psi(x)$, así como un cálculo del error en obtenido entre π y la aproximación mediante:

   $$\text{error absoluto} = |\psi(x) - \pi(x)|, \qquad \text{error relativo} = \frac{|\psi(x) - \pi(x)|}{\pi(x)}, \qquad \text{error cociente} = \frac{\psi(x)}{\pi(x)}.$$