Approximation Algorithms for Channel Coding and Non-Signaling Correlations

Algorithmes d'approximation pour le problème du codage de canal et corrélations non-signalantes

Paul Fermé

ENS de Lyon

29 novembre 2023

Qu'est ce qu'un canal de communication ?

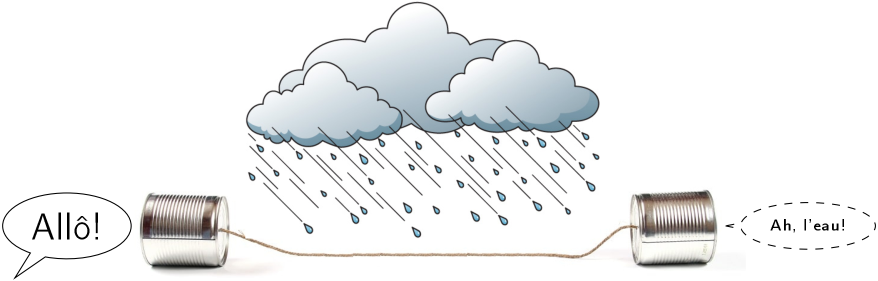
Qu'est ce qu'un canal de communication ?

Qu'est ce qu'un canal de communication ?

Vent ? Pluie ? Obstacles ?

Communiquer avec du bruit ?

Communiquer avec du bruit ?



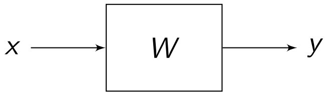
Communiquer avec du bruit ?

Communiquer avec du bruit ?

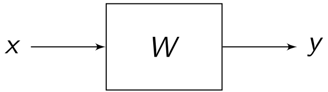
Communiquer avec du bruit ?

Communiquer avec du bruit ?

Modélisation mathématique

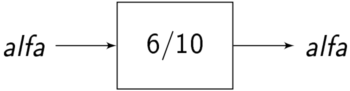


Modélisation mathématique



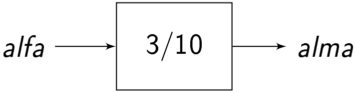
Probabilité $W(y|x)$ d'avoir la sortie y pour l'entrée x

Modélisation mathématique



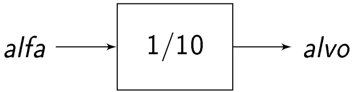
Probabilité 6/10 d'avoir la sortie *alfa* pour l'entrée *alfa*

Modélisation mathématique



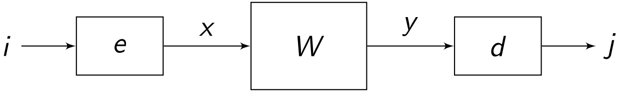
Probabilité 3/10 d'avoir la sortie *alma* pour l'entrée *alfa*

Modélisation mathématique



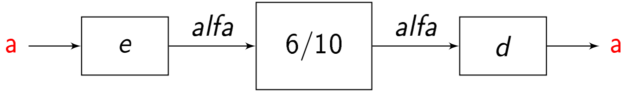
Probabilité 1/10 d'avoir la sortie *alvo* pour l'entrée *alfa*

Le problème du codage de canal



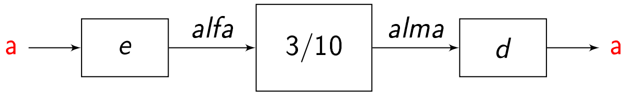
Trouver e et d qui maximise la probabilité d'avoir $j = i$

Le problème du codage de canal



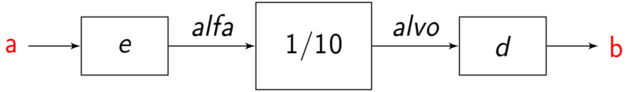
Trouver e et d qui maximise la probabilité d'avoir $j = i$

Le problème du codage de canal



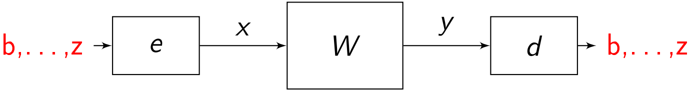
Trouver e et d qui maximise la probabilité d'avoir $j = i$

Le problème du codage de canal



Trouver e et d qui maximise la probabilité d'avoir $j = i$

Le problème du codage de canal



Trouver e et d qui maximise la probabilité d'avoir $j = i \dots$

$\dots$ sur tout l'alphabet (noté $[k]$; ici $k = 26$) ! Formellement:

$$\max_{e,d} \frac{1}{k} \sum_{i,x,y} e(x|i) W(y|x) d(i|y)$$

Résolution [BF18]

- Objectif: méthode systématique (algorithme) pour trouver les meilleurs e, d pour un W.

Résolution [BF18]

- Objectif: méthode systématique (algorithme) pour trouver les meilleurs e, d pour un W.
- Problème: impossible (NP-difficulté) de créer un algorithme efficace (temps polynomial) qui trouve ces e, d.

Résolution [BF18]

- Objectif: méthode systématique (algorithme) pour trouver les meilleurs e, d pour un W.
- Problème: impossible (NP-difficulté) de créer un algorithme efficace (temps polynomial) qui trouve ces e, d.
- Solution: plutôt que les meilleurs e, d, on se contente d'un choix de e, d avec une valeur *proche* des meilleurs.

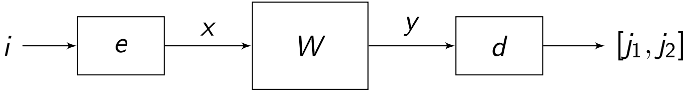
Résolution [BF18]

- Objectif: méthode systématique (algorithme) pour trouver les meilleurs e, d pour un W.
- Problème: impossible (NP-difficulté) de créer un algorithme efficace (temps polynomial) qui trouve ces e, d.

- Solution: plutôt que les meilleurs e, d, on se contente d'un choix de e, d avec une valeur *proche* des meilleurs.

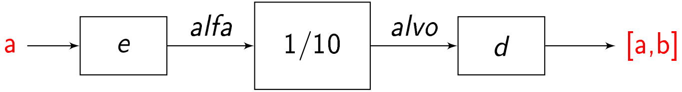
- [BF18]: approximation qui garantit au moins $\simeq 63\%$ (coefficient $1 - e^{-1}$) aussi bien que les meilleurs.
- Impossible (NP-difficile) de faire mieux que $1 - e^{-1}$.

Décodage de liste



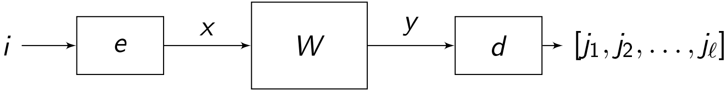
Trouver e, d qui maximise la probabilité que j_1 ou j_2 égal à i.

Décodage de liste



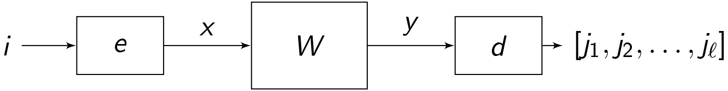
Trouver e, d qui maximise la probabilité que j_1 ou j_2 égal à i.

Décodage de liste



Trouver e, d qui maximise la probabilité que $j_1, j_2, \ldots$ ou j_ℓ égal à i.

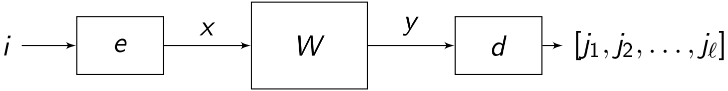
Décodage de liste



Trouver e, d qui maximise la probabilité que $j_1, j_2, \ldots$ ou j_ℓ égal à i.

- [BFGG20]: Algorithme d'approximation avec un facteur $1 - \frac{\ell^\ell e^{-\ell}}{\ell!}$ (pour $\ell = 2$, correspond à $\simeq 73\%$).

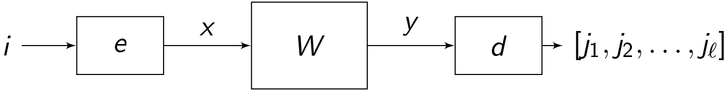
Décodage de liste



Trouver e, d qui maximise la probabilité que $j_1, j_2, \ldots$ ou j_ℓ égal à i.

- [BFGG20]: Algorithme d'approximation avec un facteur $1 - \frac{\ell^\ell e^{-\ell}}{\ell!}$ (pour $\ell = 2$, correspond à $\simeq 73\%$).
- On va montrer que c'est NP-difficile de faire mieux.

Décodage de liste



Trouver e, d qui maximise la probabilité que $j_1, j_2, \ldots$ ou j_ℓ égal à i.

- [BFGG20]: Algorithme d'approximation avec un facteur $1 - \frac{\ell^\ell e^{-\ell}}{\ell!}$ (pour $\ell = 2$, correspond à $\simeq 73\%$).
- On va montrer que c'est NP-difficile de faire mieux.
- On va étudier une généralisation, où la taille ℓ de la liste n'est pas fixée, mais vient avec une pénalité $\frac{\varphi(\ell)}{\ell}$.

Le cantique des quantiques

Bibliography I

Siddharth Barman and Omar Fawzi.
Algorithmic aspects of optimal channel coding.
IEEE Trans. Inf. Theory, 64(2):1038–1045, 2018.
doi:10.1109/TIT.2017.2696963.

Siddharth Barman, Omar Fawzi, Suprovat Ghoshal, and Emirhan Gürpinar.
Tight approximation bounds for maximum multi-coverage.
In Daniel Bienstock and Giacomo Zambelli, editors, *Integer Programming and Combinatorial Optimization - 21st International Conference, IPCO 2020, London, UK, June 8-10, 2020, Proceedings*, volume 12125 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 66–77. Springer, 2020.
doi:10.1007/978-3-030-45771-6_6.