

GENEROWANIE REALIZACJI ZMIENNYCH LOSOWYCH

1. METODA ODWRACANIA DYSTRBUANTY

- rozkład dyskretny
Założenie: Mamy do dyspozycji operator liczb pseudolosowych.
 $U \sim U(0, 1)$
Algorytm: X - zmienna losowa o rozkładzie $P(X = x_i) = p_i, i = 1, \dots, n$.
Algorytm:
 - Generuj $U \sim U(0, 1)$.
 - Jeśli $\sum_{i=1}^{j-1} p_i < U \leq \sum_{i=1}^j p_i$ dla odpowiedniego j ,
to wstaw $X = x_j$.

- rozkład ciągły
 X - zmienna losowa ciągła o ściśle rosnącej dystrybuancie $F_X(x)$.
Cel: Chcemy generować realizacje X .
FAKT 1. Niech $U \sim U(0, 1)$. Niech $F_X^{-1}(y)$ będzie funkcja odwrotną do $F_X(x)$, wtedy $F_X^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X$.
Algorytm:
 - Generuj $U \sim U(0, 1)$.
 - Wstaw $X = F_X^{-1}(U)$.

Uwaga: Co jeśli $F_X(x)$ nie jest ściśle rosnąca?
Wtedy wykorzystujemy tzw. **uogólnioną odwrotną**.
 $\tilde{F}_X^{-1}(y) \stackrel{d}{=} \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq y\}$
Wtedy analogicznie mamy $X \stackrel{d}{=} \tilde{F}_X^{-1}(U)$.

- Algorytm:**
- Generuj $U \sim U(0, 1)$.
 - Wstaw $X = \tilde{F}_X^{-1}(U)$.

2. METODA AKCEPTACJI-ODRZUCANIA

- rozkład dyskretny
Cel: Chcemy generować realizacje zmiennej losowej X o rozkładzie $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots (i = 1, 2, \dots, n)$.
Założenia:
 - Potrąfimy efektywnie generować inną zmienną losową Y o rozkładzie $P(Y = i) = q_i, i = 1, 2, \dots (i = 1, 2, \dots, n)$.
 - Potrąfimy wyznaczyć stałą $c > 0$, taką że $\max \frac{p_i}{q_i} \leq c$,
(najlepiej znaleźć optymalne c , tzn. $c = \max \frac{p_i}{q_i}$).**Algorytm:**
 - Generuj Y .
 - Generuj $U \sim U(0, 1), U || Y$.
 - Jeśli $U \leq \frac{P_Y}{c \cdot q_Y}$ to wstaw $X = Y$,
w przeciwnym razie wróć do 1.

TW. 1. Powyższy algorytm zwraca realizację zmiennej losowej X o rozkładzie $P(X = i) = p_i, i = 1, 2, \dots (i = 1, 2, \dots, n)$.

- rozkład ciągły
 X - zmienna losowa ciągła o gęstości $f(x)$ przyjmującej wartości dodatnie tylko na odcinku $[a, b]$.
 $m = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.

Algorytm:

- Generuj $U_1 \sim U(a, b), U_2 \sim U(0, m), U_1 || U_2$.
- Jeśli $U_2 \leq f(U_1)$ to wstaw $X = U_1$, w przeciwnym razie wróć do 1.

TW. 2. Powyższy algorytm generuje zmienną losową X o gęstości $f(x)$.

- dowolna gęstość
Chcemy generować realizację zmiennej losowej X o gęstości $f(x)$.
Założenia:
 - Potrąfimy efektywnie generować realizacje innej zmiennej losowej Y o gęstości $g(x)$, które przyjmują wartości z tego samego zbioru A , co zmienna losowa X .
 - Potrąfimy wyznaczyć stałą $c > 0$, spełniającą $\sup_{x \in A} \frac{f(x)}{g(x)} \leq (=) c$ (najlepiej wybierać c w sposób optymalny).

Algorytm

- Generuj Y .
- Generuj $U \sim U(0, 1), U || Y$.
- Jeśli $U \leq \frac{f(Y)}{c \cdot g(Y)}$ to wstaw $X = Y$, w przeciwnym razie wróć do 1.

TW. 3. Zmienna losowa X wygenerowana w powyższym algorytmie ma gęstość $f(x)$.

3. METODA SPŁOTOWA

Założenia: X ma następującą postać $X \stackrel{d}{=} Y_1 + \dots + Y_n$, gdzie $Y_i - iid$ (niezależne, jednakowo rozłożone) oraz potrafiemy generować Y_i .
Algorytm:

- Generuj Y_1, \dots, Y_n .
- Wstaw $X = Y_1 + \dots + Y_n$.

Uwaga $X || Y$,

X ma gęstość $f(x)$,
 Y ma gęstość $g(x)$,
 $X + Y$ ma gęstość $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy$.

TW. 4. $X = Y_1 + \dots + Y_n$, gdzie $Y_i - iid, Y_i \sim Exp(\lambda)$.

Algorytm:

- Generuj $U_i \sim U(0, 1)$, wstaw $Y_i = -\frac{1}{\lambda} \log U_i \sim Exp(\lambda)$.
- Wstaw $X = -\frac{1}{\lambda} \log(U_1 \cdot \dots \cdot U_n)$.

4. METODA KOMPOZYCJI

Założenie: X ma dystrybuantę postaci $F_X(x) \stackrel{*}{=} \sum_{i=1}^n p_i F_{Y_i}(x)$, gdzie $p_i > 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$, a $F_{Y_i}(x)$ to dystrybuanty zmiennych losowych Y_i , które potrafiemy generować.

Jeśli X i Y_i mają gęstości to (*) można równoważnie zapisać $f_X(x) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot f_{Y_i}(x)$

Algorytm: - jak generować X o dystrybuancie (*).

- Generuj zmienną losową I o rozkładzie $P(I = i) = p_i, i = 1, \dots, n$.
- Generuj Y_I .
- Wstaw $X = Y_I$.

TW. 5. Powyższy algorytm generuje zmienną losową X o dystrybuancie (*).

- (a) METODA BOXA-MULLERA
Założenie: Potrafiimy generować zmienną $X \sim N(0, 1)$
TW. 6. Niech $U_1 || U_2$, $U_1, U_2 \sim U(0, 1)$. Wtedy zmienne losowe $X = \sqrt{-2\log U_1} \cdot \cos 2\pi U_2$ oraz $Y = \sqrt{-2\log U_1} \cdot \sin 2\pi U_2$ są niezależne i mają rozkład $N(0, 1)$.
Algorytm:
 - Generuj U_1, U_2 - iid, $U_i \sim U(0, 1)$.
 - Wstaw $X = \sqrt{-2\log U_1} \cdot \cos 2\pi U_2$, $Y = \sqrt{-2\log U_1} \cdot \sin 2\pi U_2$.
- (b) METODA BIEGUNOWA
Weźmy wektor (V_1, V_2) o rozkładzie jednostajnym w kole jednostkowym $(V_1 = R \cdot \cos \alpha, V_2 = R \cdot \sin \alpha)$. $U_1 \sim U(0, 1)$
 $2\pi U_2 \sim U(0, 2\pi)$
Zamiast $2\pi U_2$ wstawiamy α , zamiast U_1 wstawiamy R^2 . Otrzymujemy:
$$X = \sqrt{-2\log R^2} \cdot \cos \alpha = \sqrt{-2\log R^2} \cdot \frac{V_1}{R} = \sqrt{\frac{-2\log R^2}{R^2}} \cdot V_1,$$
$$Y = \sqrt{-2\log R^2} \cdot \sin \alpha = \sqrt{\frac{-2\log R^2}{R^2}} \cdot V_2.$$
Wtedy $X || Y$, $X, Y \sim N(0, 1)$.
Algorytm
 - Generuj $V_1 \sim U(-1, 1)$, $V_2 \sim U(-1, 1)$.
 - Wyznacz $R^2 = V_1^2 + V_2^2$.
 - Jeśli $R^2 > 1$ wróć do 1.
 - Wstaw $X = \sqrt{\frac{-2\log R^2}{R^2}} \cdot V_1$, $Y = \sqrt{\frac{-2\log R^2}{R^2}} \cdot V_2$.Wtedy $X || Y$, $X, Y \sim N(0, 1)$.
Prawdopodobieństwo sukcesu (akceptacji (V_1, V_2)) wynosi $\frac{\pi}{4} = p$.
Średnia liczba powtórzeń pętli wynosi $\frac{1}{p} \approx 1.2$

PROCESY LICZĄCE

Proces stochastyczny $\{X(t) \ t \in \tau\}$ - rodzina zmiennych losowych indeksowana parametrem t. Czyli $\forall t \in \tau, X(t)$ jest zmienną losową, gdzie τ - zbiór indeksów,
t - zazwyczaj czas,
 $X(t)$ - opisuje zjawisko o charakterze losowym zachodzące w czasie.

Trajektoria (realizacja) - funkcja $t \rightarrow X(t, \omega_0)$ procesu $X(t)$ odpowiadająca ω_0

Proces liczący - taki proces stochastyczny $\{N(t), t \geq 0\}$, że $N(t)$ reprezentuje liczbę losowych zdarzeń, które pojawiły się do momentu t.

Własności procesu liczącego N(t):

- $N(0)=0$,
- $N(t)$ ma niemalejące trajektorie,
- $N(t)$ przyjmuje wartości ze zbioru N_0 ,
- $N(t)$ ma skoki wielkości 1,
- $N(t)-N(s)$ oznacza liczbę zdarzeń na przedziale $[s,t)$

1. JEDNORODNY PROCES POISSONA
Jednorodny proces Poissona jest procesem liczącym, stochastycznym.

Jednorodny proces Poissona z intensywnością $\lambda > 0$, to taki proces liczący $\{N(t), t \geq 0\}$, że:

- $N(0)=0$,
- $N(t)$ ma niezależne przyrosty, tzn $\forall(0 < t_1 < t_2 < ... < t_n)$ zmienne losowe $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), ..., N(t_n) - N(t_{n-1})$ są niezależne,
- $N(t)$ ma stacjonarne przyrosty, tzn $\forall(0 < s < t)$ $N(t) - N(s) \stackrel{d}{=} N(t - s)$,
- $N(t) \sim Pois(\lambda t)$, czyli $P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ dla $n = 0, 1, ...,$
- $N(t)$ ma trajektorie prawostronnie ciągłe z lewostronnymi granicami (cadlag).

Uwaga $EN(t) = \lambda t$

Funkcja $f: R_+ \rightarrow R$ jest klasy o(t) , jeśli $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 0$.

Jednorodny proces Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ (równoważnie) , taki proces liczący $\{N(t), t \geq 0\}$, że

- $N(0)=0$,
- $N(t)$ ma niezależne przyrosty, tzn $\forall(0 < t_1 < t_2 < ... < t_n)$ zmienne losowe $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), ..., N(t_n) - N(t_{n-1})$ są niezależne,
- $N(t)$ ma stacjonarne przyrosty, tzn $\forall(0 < s < t)$ $N(t) - N(s) \stackrel{d}{=} N(t - s)$,
- $P(N(t) = 1) = \lambda t + o(t)$
 $P(N(t) \geq 2) = o(t)$
- $N(t)$ ma trajektorie cadlag prawostronnie ciągłe z lewostronnymi granicami.

TW. 7. Dla jednorodnego procesu Poissona z intensywnością λ ciąg czasów oczekiwania na skok $T_1, T_2, ...$ jest ciągiem iid oraz $T_i \sim Exp(\lambda)$.

Stacjonarność: $N(t) - N(s) \stackrel{d}{=} N(t - s)$

Momenty skoków

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i, S_n \sim \Gamma(n, \lambda), f_{n,\lambda}(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Symulacje trajektorii N(t)

- **Metoda 1**
Cel: chcemy wygenerować jedną trajektorię $N(t)$ z intensywnością λ na odcinku $[0,T]$.

Metoda: będziemy generować czasy oczekiwania T_i do momentu gdy $\sum_1^n T_i > T$ dla pewnego n.

Oznaczenia:
I - liczba skoków $N(t)$ na $[0,T]$,
 $S_1, ..., S_I$ - momenty skoków,
t - suma czasów oczekiwania T_i .
Algorytm:
 - Ustaw I=0, t=0.
 - Generuj $U \sim U(0, 1)$.
 - Wstaw $t = t - \frac{1}{\lambda} \log U$ (=Exp(λ)). Jeśli t>T STOP
 - Wstaw I=I+1, $S_I = t$.
 - Wróć do 2.

• **Metoda 2**
Będziemy bezpośrednio generować wektor momentów skoków.
TW. 8. Niech $N(t)$ będzie procesem Poissona z intensywnością λ . Wtedy warunkowy rozkład wektora momentów skoków $(S_1, ..., S_n)$ pod warunkiem $N(t)=n$, jest równy rozkładowi wektora statystyk pozycyjnych $(U_{1:n}, U_{2:n}, ..., U_{n:n})$, gdzie $U_1, ..., U_n$ są iid, $U \sim U(0, T)$.
 $U_{k:n}$ - k-ta najmniejsza wartość ze zbioru $\{U_1, ..., U_n\}$,
 $U_{1:n} = \min\{U_1, ..., U_n\}$,
 $U_{n:n} = \max\{U_1, ..., U_n\}$.
Algorytm:
 - Generuj $n \sim P(\lambda T)$.
 - Jeśli n=0 STOP.
 - Generuj $U_1, ..., U_n$ - iid, $U_i \sim U(0, T)$.
 - Sortuj $(U_1, ..., U_n)$ aby otrzymać $(U_{1:n}, U_{2:n}, ..., U_{n:n})$
 - Wstaw $S_i = U_{i:n}$ (statystyki pozycyjne), $i = 1, ..., n$

2. NIEJEDNORODNY PROCES POISSONA

Niejednorodny proces Poissona z funkcją intensywności $\lambda(t)$,
($\lambda(t) > 0$, ciągła) to proces liczący spełniający (intensywność zależy od czasu):
1. $N(0)=0$,
2. $N(t)$ ma niezależne przyrosty,
3. $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t) \cdot h + o(h)$
 $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$,
4. $N(t)$ ma trajektorie cadlag.

Uwaga Będziemy zakładać, że:

- (i) $\lambda(t) \geq 0$,
- (ii) $\lambda(t)$ jest ciągła.

TW. 9. $N(t) - N(s) \sim P(\int_s^t \lambda(u)du)$

Wnioski

- poza przypadkiem $\lambda(t) = const$, $N(t)$ nie ma stacjonarnych przyrostów.

$N(t) - N(s) \sim P(\int_s^t \lambda(u)du) \neq P(\int_0^{t-s} \lambda(u)du) \sim N(t-s)$

- dla $\lambda(t) = const$, $N(t)$ jest jednorodnym procesem Poissona.

Metody symulacji niejednorodnego $N(t)$

- Rozrzedzenie(thinning)

TW. 10. Niech $\tilde{N}(t)$ będzie jednorodnym procesem Poissona z intensywnością λ . Oznaczmy przez $\{\tilde{S}_i\}_{i=1}^\infty$ ciąg momentów skoków $\tilde{N}(t)$. Załóżmy, że każdy z tych momentów skoków jest niezależnie akceptowany z prawdopodobieństwem $P(\tilde{S}_i)$, gdzie $p: R_+ \rightarrow [0, 1]$. Wtedy proces liczący $N(t)$, którego momenty skoków tworzą tylko zaakceptowane momenty \tilde{S}_i jest niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności $\lambda(t) = \lambda \cdot p(t)$.

Symulacja trajektorii

Cel: chcemy symulować jedną trajektorię procesem $N(t)$ z funkcją intensywności $\lambda(t)$ na $[0, T]$.

I - liczba skoków $N(t)$ na $[0, T]$, S_1, \dots, S_I - momenty skoków,

Wyznaczamy górne ograniczenie $\lambda(t)$ na $[0, T]$, czyli wyznaczamy stałą $\lambda \geq \lambda(t)$, $\forall t \in [0, T]$. Najlepiej $\lambda = \max_{t \in [0, T]} \lambda(t)$ (optymalne). Wtedy $p(t) = \frac{\lambda(t)}{\lambda} \leq 1$

Algorytm:

1. Wstaw $t=0$, $I=0$.
2. Generuj $U_1 \sim U(0, 1)$.
3. Wstaw $t = t - \frac{1}{\lambda} \log U(\sim Exp(\lambda))$. Jeśli $t > T$ STOP
4. Generuj $U_2 \sim U(0, 1)$, $U_2 \parallel U_1$
5. Jeśli $U_2 \leq \frac{\lambda(t)}{\lambda}$ to $I=I+1$, $S_I = t$
6. Wróć do 2.

- Metoda 2

Będziemy generować bezpośrednio kolejne czasy oczekiwania na skok.

TW. 11. Niech $N(t)$ będzie niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności $\lambda(t)$. Jeśli proces $N(t)$ miał skok w punkcie s to dystrybuenta czasu oczekiwania na kolejny skok jest równa $F_S(x) = 1 - e^{-(\int_s^{s+x} \lambda(u)du)}$

Algorytm:

Założenie: Potrafimy wyznaczyć $F_s^{-1}(y)$ - funkcję odwrotną do $F_S(x)$ względem zmiennej x .

1. Wstaw $t=0$, $I=0$.
2. Generuj $U_1 \sim U(0, 1)$.
3. Wstaw $\tau = F_s^{-1}(U)$, $t = t + \tau$. Jeśli $t > T$ STOP
4. Wstaw $I=I+1$, $S_I = t$
5. Wróć do 2.

- Metoda 3

Będziemy generować wektor momentów skoków (S_1, \dots, S_n) na $[0, T]$

TW. 12. Niech $N(t)$ będzie niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności $\lambda(t)$. Wtedy warunkowy rozkład wektora momentów skoków (S_1, \dots, S_n) pod warunkiem $N(t)=n$, jest równy rozkładowi wektora statystyk pozycyjnych $(V_{1:n}, \dots, V_{n:n})$, gdzie zmienne losowe V_1, \dots, V_n są iid o gęstości $f(t) = \frac{\lambda(t)}{\int_0^T \lambda(u)du}$, $t \in [0, T]$

Symulacja

Będziemy generować jedną trajektorię $N(t)$ na $[0, T]$.

Oznaczenia

n - liczba skoków $N(t)$ na $[0, T]$,

S_1, \dots, S_n - momenty skoków

Algorytm:

1. Generuj $n \sim Poiss(\int_0^T \lambda(u)du)$.
2. Jeśli $n=0$, STOP
3. Generuj zmienne losowe V_1, \dots, V_n iid (metoda akceptacji-odrzućcia)
4. Sortuj V_1, \dots, V_n , aby otrzymać $(V_{1:n}, \dots, V_{n:n})$.
5. Wstaw $S_i = V_{i:n}$, $i=1, \dots, n$.

3. MIESZANY PROCES POISSONA

Idea Chcemy, aby intensywność w jednorodnym procesie Poissona była zmienną losową.

Zastosowanie Ubezpieczenia komunikacyjne - w zależności od wieku kierowcy inna jest intensywność powodowanych wypadków.

DEF. 1. Niech $\tilde{N}(t)$ będzie jednorodnym procesem Poissona z intensywnością równą 1. Niech $\Lambda > 0$ będzie zmienną losową niezależną od $\tilde{N}(t)$. Wtedy proces $N(t) \stackrel{def}{=} \tilde{N}(\Lambda t)$ nazywamy **mieszanym procesem Poissona** ze zmienną mieszającą Λ .

Własności (i) $EN(t) = E\tilde{N}(\Lambda t) = E(E(\tilde{N}(\Lambda t)|\Lambda)) = E(\Lambda t) = tE\Lambda$

(ii) $N(t)$ ma stacjonarne przyrosty $t_1 < t_2 : N(t_2 - t_1) \stackrel{d}{=} N(t_2) - N(t_1)$

(iii) Poza przypadkiem $\Lambda = const$ $N(t)$ nie ma niezależnych przyrostów $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

Symulacja $N(t) = \tilde{N}(\Lambda t)$

Założenie Potrafimy generować realizacje Λ

- Metoda 1

Algorytm

1. Generuj jedną realizację λ zmiennej losowej Λ .
2. Ustaw $t=0$, $I=0$.
3. Generuj $U \sim U(0, 1)$, $U \parallel \Lambda$.
4. Wstaw $t = t - \frac{1}{\lambda} \log(U)$. Jeśli $t > T$ STOP.
5. Wstaw $I=I+1$, $S_I = t$.
6. Wróć do 3.

Metoda 2

Algorytm

1. Generuj jedną realizację λ zmiennej losowej Λ .
2. Generuj $n \sim Pois(\lambda T)$.
3. Jeśli $n=0$ STOP.
4. Generuj U_1, \dots, U_n - iid, $U_i \sim U(0, T)$, $U_i \parallel \Lambda$.
5. Sortuj U_1, \dots, U_n aby uzyskać $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$.
6. Wstaw $S_i = U_{i:n}$, $i = 1, \dots, n$.

1. Jednorodny proces Poissona, $\lambda = const$
2. Niejednorodny proces Poissona $\lambda(t)$
3. Mieszany proces Poissona, Λ -zmienna losowa.

4. PROCES COXA (podstawowe stochastyczne prawa Poissona)

Proces Coxa - podwójnie stochastyczny proces Poissona.

Idea - Chcemy, aby funkcja intensywności w niejednorodnym procesie Poissona była procesem stochastycznym.

Zastosowanie procesu Coxa - Liczenie zjawisk o intensywności zmiennej w czasie, losowej (trzęsienia ziemi).

DEF. 2. Niech $\tilde{N}(t)$ będzie jednorodnym procesem Poissona z intensywnością równą 1. Niech $\Lambda(t)$ będzie startującym w zerze, niemalejącym procesem stochastycznym, niezależnym od $\tilde{N}(t)$. Wtedy proces: $N(t) \stackrel{def}{=} \tilde{N}(\Lambda(t))$ nazywamy **procesem Coxa**.

Własności procesu Coxa

- (i) $EN(t) = E(E(\tilde{N}(\Lambda(t))|\Lambda(t))) = E(\Lambda(t))$
- (ii) Jeśli $\Lambda(t)$ ma stacjonarne przyrosty, to $N(t)$ ma stacjonarne przyrosty.
- (iii) Jeśli $\Lambda(t)$ ma niezależne przyrosty, to $N(t)$ ma niezależne przyrosty.

Symulacja

- Metoda 1.
 $N(t) = \tilde{N}(\Lambda(t)), t \in [0, T]$ - przedział jednej trajektorii.
Założenie: Potrafiłmy generować realizację procesu $\Lambda(t)$.
Algorytm:
 - Generuj $\Lambda(t)$ na $[0, T]$.
 - Generuj $\tilde{N}(t)$ na $[0, \Lambda(t)]$
 - Wstaw $N(t) = \tilde{N}(\Lambda(t)), t \in [0, T]$.
- Metoda 2.
Założenie: Potrafiłmy generować realizację procesu $\lambda(t)$, gdzie $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$
Algorytm:
 - Generuj $\lambda(t)$ na $[0, T]$.
 - Wyznacz $\lambda \geq \max \lambda(t), t \in [0, T]$
 - Wstaw $t=0, l=0$.
 - Generuj $U_1 \sim U(0, 1), U_1 \parallel \lambda(t)$
 - Wstaw $t = t - \frac{1}{\lambda} \log U_1$, jeśli $t > T$ STOP
 - Generuj $U_2 \sim U(0, 1), U_1 \parallel U_2 \parallel \lambda(t)$
 - Jeśli $U_2 \leq \frac{\lambda(t)}{\lambda}$, to $l=l+1, S_l = t$
 - Wróć do 4.

5. PROCESY ODNOWY

DEF. 3. Proces liczący $N(t)$, którego ciąg czasów oczekiwania na kolejny skok $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ jest ciągiem iid, nazywamy procesem odnowy, np. jednorodny proces Poissona jest procesem odnowy. (T_1, \dots, T_n są iid).

Oznaczenia:
 $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ - moment n-tego skoku, $N(t) = \sum_{n=1}^\infty 1_{\{S_n \leq t\}}, N(t) = \max\{n \in N_0 : S_n \leq t\}$

Najważniejsze twierdzenia w teorii odnowy:

TW. 13. Niech $ET_1 < \infty$. Wtedy:

- (i) $\frac{EN(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{ET_1}$
- (ii) $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty, a.s.} \frac{1}{ET_1}$

TW. 14. Niech $ET_1 < \infty$ oraz niech $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ będzie ciągiem iid oraz $\{X_i\} \parallel \{T_i\}$. Wtedy: (CTRW-błądzenie losowe z czasem ciągłym) $\frac{\sum_{i=1}^{N(t)} X_i}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty, a.s.} \frac{EX_1}{ET_1}$

Symulacja procesu odnowy
Algorytm:

- Wstaw $t = 0, I = 0$.
- Generuj T_i
- Wstaw $t = t + T_i$, jeśli $t > T$ STOP.
- Wstaw $I = I + 1, S_I = t$
- Wróć do 2.

PROCESY RYZYKA

1. GENEROWANIE TRAJEKTORII PROCESU RYZYKA

Proces ryzyka - proces opisujący kapitał firmy ubezpieczeniowej.

$R(t) \stackrel{d}{=} u + c(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ $u > 0$ - kapitał początkowy,
 $c(t)$ - premia (pieniądze uzyskane ze sprzedaży polis),
 $N(t)$ - proces liczący liczbę szkód,
 X_i - wielkość i-tej szkody; X_i - iid, $E|X_i| \leq \infty$.

Przykłady - sposoby doboru premii.

- (a) N_t - jednorodny proces Poissona z intensywnością $\lambda > 0$
- (b) N_t - niejednorodny proces Poissona z funkcją intensywności $\lambda(t)$
- (c) mieszany proces Poissona
- (d) proces Coxa
- (e) N_t - proces odnowy

2. ESTYMACJA PARAMETRÓW I ROZKŁADÓW PROCESU RYZYKA

- (a) Wykorzystując dane historyczne tworzymy próbkę statystyczną (X_1, \dots, X_n) .
- (b) Wyznaczamy rozkład (X_1, \dots, X_n)
 - dystrybuanta empiryczna,
 - momenty empiryczne,
 - qqplot - wykres kwantylowy,
 - test Kolmogorowa-Smirnowa.
- (c) Estymacja parametru λ .
 - $N(t)$ - jednorodny proces Poissona
 $(T_1, \dots, T_n), T_i$ -iid, $T_i \sim Exp(\lambda)$
 $ET_i = \frac{1}{\lambda}$
 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \approx \frac{1}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i}$
 - $N(t)$ - niejednorodny proces Poissona $= \lambda(t)$
 $N(t) = EN_t = \int_0^t \lambda(u) du = \Lambda(t)$,
Dobieramy funkcję $\Lambda(t)$ do trajektorii, wtedy $\lambda(t) = \Lambda'(t)$.

Algorytm

- Generuj jedną realizację N_t na $[0, T]$.
- Generuj X_1, \dots, X_{N_t} , iid.
- Wstaw $R(t) = u + c(t) - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, t \in [0, T]$.

3. ROZKŁADY LEKKO I CIĘŻKOOGONOWE

Funkcja generująca momenty $M_X(z) \stackrel{d}{=} Ee^{zX}$

DEF. 4. Zmienna losowa X ma **rozkład lekkoogonowy**, jeśli $\exists a,b>0 \forall x>0 \ P(X > x) = 1 - F_X(x) \leq ae^{-bx}$.
Równoważnie: $\exists z>0 \ M_X(z) < \infty$

Interpretacja: Ogon rozkładu $P(X>x)$ zanika do 0 wykładniczo lub szybciej.
Przykłady rozkładów lekkoogonowych:

- 1. $X \sim Exp(\lambda)$
- 2. $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$
- 3. rozkład Weibulla
- 4. rozkład hiperwykładniczy

DEF. 5. Mówimy, że $X > 0$ ma **rozkład ciężkoogonowy**, jeśli $\forall a,b>0 \ \exists x>0 \ 1 - F_X(x) > ae^{-bx}$.
Równoważnie: $\exists z > 0 \ M_X(z) = \infty$

Interpretacja: Ogon rozkładu $P(x > x)$ zanika do 0 wolniej niż wykładniczo.
Przykłady rozkładów ciężkoogonowych:

- 1. rozkład Weibulla
- 2. rozkład lognormalny
- 3. rozkład Pareto
- 4. rozkład Burra

4. PRAWDOPODOBIEŃSTWO RUINY W SKOŃCZONYM I NIESKOŃCZONYM HORYZONCIE CZASOWYM

- RUINA W SKOŃCZONYM CZASIE

Klasyczny proces ryzyka $R(t) = u + c(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$

$c = (1 + \Theta) \cdot \lambda \cdot \mu$
 $\mu = EX_i, \ X_i$ -iid
 N_t - jednorodny proces Poissona z intensywnością $\lambda > 0$

Moment ruiny $\tau(u) = \inf\{t > 0 : R(t) < 0\}$ - pierwszy moment, w którym proces ryzyka spada poniżej 0.

Prawdopodobieństwo ruiny w skończonym czasie T $\Psi(u, T) = P(\tau(u) \leq T)$

Prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym czasie $\Psi(u) = P(\tau(u) < \infty)$

Uwaga $\Psi(u, T)$ jest znane w jawnej postaci tylko dla przypadku $X_i \sim Exp(\beta)$.
Aproksymacja $\Psi(u, T)$ metodą Monte Carlo.

Algorytm:

- 1. Generuj N trajektorii $R^{(1)}(t), \dots, R^{(N)}(t)$ procesu ryzyka na odcinku $[0, T]$.
- 2. Wyznacz liczbę trajektorii, które spadły poniżej 0.
 $n = \#\{i : \inf_{t \in [0, T]} R^{(i)}(t) < 0\}$
- 3. Wstaw $\Psi(u, T) = \frac{n}{N}$

Inne metody aproksymacji $\Psi(u, t)$

- dysfuzyjna
- de Vyldera

- RUINA W NIESKOŃCZONYM CZASIE

Wzór Pollaczka-Chinczyna

$$\Psi(u) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \cdot B_n(u),$$

gdzie $B_n(u) = P(Y_1 + \dots + Y_k > u)$ oraz Y_i - zmienne losowe iid o gęstości $f(x) = \frac{1-P(X_i \leq x)}{\mu} = \frac{P(X_i > x)}{\mu}$

Aproksymacja $\Psi(u) = P(\tau(u) < \infty)$ metodą Monte Carlo.

Uwaga $\Psi(u) = P(Y_1 + \dots + Y_k > u)$,

gdzie K jest zmienną losową o rozkładzie geometrycznym $P(K = n) = p \cdot (1 - p)^n, \ n = 0, 1, \dots$ niezależną od $Y_1, Y_2, \dots, \ p = \frac{\theta}{1+\theta}$.

Algorytm:

- 1. Wstaw $I = 0$.
- 2. for $i = 1 : N$
Generuj $k \sim Geo(\frac{\theta}{1+\theta})$
Generuj Y_1, \dots, Y_k
Jeśli $Y_1, \dots, Y_k > u$ to $I = I + 1$.
- 3. Wstaw $\Psi(u) = \frac{I}{N}$

Jawna postać $\Psi(u)$ 1. $X_i \sim Exp(\beta), \ \mu = EX_i = \frac{1}{\beta},$

- 2. $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.
- 3. X_i - mieszanie rozkładów wykładniczych.

PROCESY SAMOPODOBNE

DEF. 6. Mówimy, że proces $X(t), \ t \geq 0$ jest **samopodobny**, jeśli $\forall a>0 \ \exists b>0 \ X(at) \stackrel{d}{=} bX(t), \ t \geq 0$.

Interpretacja: Dla procesu samopodobnego przeskalowanie czasu jest równoważne (według rozkładu) przeskalowaniu wartości procesu. Trajektorie $X(t)$ na krótkich i długich przedziałach mają te same własności statystyczne.

DEF. 7. Proces $X(t)$ jest **ciągly według prawdopodobieństwa** w punkcie t , jeśli $\forall \epsilon>0 \ \lim_{h \rightarrow 0} P(|X(t+h) - X(t)| > \epsilon) = 0$.

DEF. 8. Mówimy, że $X(t), \ t \geq 0$ jest **trywialny**, jeśli $\forall t_0>0 \ X(t_0)$ jest stałą.

TW. 15. (Lamperti)

Niech $X(t), \ t \geq 0$ będzie nietrywialnym, ciągłym według prawdopodobieństwa w zerze oraz samopodobnym procesem stochastycznym.

Wtedy $b = a^H$ dla pewnego $H \geq 0$. $\forall a > 0, X(at) = a^H X(t)$. Stąd nazwa procesy H-samopodobne, H-indeks samopodobieństwa (Hursta).

TW. 16. (Lamperti 1962) **Fundamentalne Twierdzenie Graniczne**

(i) Niech $Y(t), \ t \geq 0$ będzie procesem stochastycznym takim, że dla pewnego ciągu $a_n \nearrow \infty$ zachodzi zbieżność $\frac{Y(nt)}{a_n} \xrightarrow{d, n \rightarrow \infty} X(t)$. Wtedy $X(t)$ jest H-samopodobny.

(ii) Ciąg a_n w powyższym wzorze ma postać $a_n = n^H L(n)$, gdzie $L(n)$ jest funkcją wolno zmieniającą się,

(iii) Dowolny proces H-samopodobny możemy uzyskać jako granicę $\frac{Y(nt)}{a_n} \xrightarrow{d, n \rightarrow \infty} X(t)$.

Własności procesów H-samopodobnych

(i) jeśli $H>0$ to $X(0)=0$ a.s.

(ii) Niech $X(t)$ będzie nietrywialnym, ciągłym według prawdopodobieństwa w zerze, H-samopodobnym procesem stochastycznym. Wtedy $H = 0 \iff X(t) = X(0), \ \text{a.s.}, \ \forall t > 0$

Uwaga W praktyce rozważamy jedynie procesy samopodobne, które są nietrywialne, ciągle wg prawdopodobieństwa w zerze oraz z $H > 0$

Uwaga2 Samopodobieństwo to własność n-wymiarowych rozkładów, czyli $\forall a>0 \ (X(at_1), \dots, X(at_n)) \stackrel{d}{=} a^H (X(t_1), \dots, X(t_n))$

(iii) transformacje Lampertiego jeśli $X(t)$ jest H-samopodobny to $Y(t) \stackrel{def}{=} e^{-tH} X(e^t)$ jest procesem stacjonarnym.

(iv) Jeśli $Y(t)$ jest stacjonarny, to $X(t) \stackrel{def}{=} \begin{cases} t^H Y(\log t) & \text{gdy } t > 0 \\ 0 & \text{gdy } t = 0 \end{cases}$ jest H-samopodobny.

1. RUCH BROWNA (PROCES WIENERA)

Przykłady procesów H-samopodobnych

(i) $X(t) = t^H, \ X(at) = a^H t^H = a^H X(t)$

(ii) Z - dowolna zmienna losowa

$$X(t) = t^H \cdot Z$$

$$X(at) = a^H t^H \cdot Z = a^H X(t)$$

(iii) ruch Browna

- 1. $B(0)=0$
- 2. $B(t)$ ma niezależne, stacjonarne przyrosty.
- 3. $B(t) \sim N(0, t)$
- 4. $B(t)$ ma ciągle trajektorie.

$B(t)$ jest $\frac{1}{2}$ -samopodobny, $B(at) = a^{\frac{1}{2}} B(t), \ H = \frac{1}{2}$

Symulacja trajektorii B(t)

Cel: Chcemy wygenerować trajektorię B(t) w punktach t_0, t_1, \dots, t_n , gdzie $t_i = ih$, $h = \frac{T}{n}$, $i=0,1,\dots,n$. Chcemy wygenerować wektor $(B(t_0), B(t_1), \dots, B(t_n))$. Zauważmy, że $B(t_k) - B(t_{k-1}) \stackrel{d}{=} B(t_k - t_{k-1}) = B(h) \sim N(0, 1)$. Zatem wystarczy generować przyrosty B(t). **Algorytm:**

1. $B(t_0) = 0$, $(t_0 = 0)$
2. $B(t_{i+1}) = B(t_i) + h^{\frac{1}{2}} \xi_i$, $i=0,1,\dots,n-1$,
 $\xi_0, \dots, \xi_{n-1} \sim iid$, $\xi_i \sim N(0, 1)$,
 $h^{\frac{1}{2}} \xi_i \sim N(0, h)$

DEF. 9. Proces X(t) jest gaussowski jeśli jego rozkłady skończenie wymiarowe są gaussowskie. Przykład: ruch Browna.

Uwaga Proces gaussowski jest jednoznacznie wyznaczony przez funkcję wartości średniej $m(t)=EX(t)$ oraz funkcję autokowariancji $Cov(X(s), X(t))$.

2. UŁAMKOWY RUCH BROWNA

DEF. 10. Ułamkowym ruchem Browna $B_H(t)$, $t \geq 0$, $H \in (0, 1]$, nazywamy proces gaussowski o średniej $m(t) = EB_H(t) = 0$ oraz funkcji autokowariancji $Cov(B_H(s), B_H(t)) = \frac{\sigma^2}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$.

Uwaga Weźmy $H = \frac{1}{2}$. Wtedy $c(s, t) = \frac{\sigma^2}{2}(t + s - |t-s|) = \sigma^2 \frac{t+s-|t-s|}{2} = \sigma^2 \min(s, t)$, czyli dla $H = \frac{1}{2}$, $B_{\frac{1}{2}}(t) = \sigma \cdot B(t)$, gdzie B(t) jest standardowym ruchem Browna

Uwaga Weźmy $H=1$. Wtedy $B_1(t) \stackrel{def}{=} t \cdot B_1(1)$.

Własności $B_H(t)$:

(i) $B_H(t)$ jest H-samopodobny

(ii) $B_H(t)$ ma stacjonarne przyrosty, zatem $B_H(t+h) - B_H(h) \stackrel{d}{=} B_H(t)$

Lemat: Niech $X(t)$ będzie procesem H-samopodobnym o stacjonarnych przyrostach i skończonym drugim momencie.

Wtedy $EX(t)X(s) = \frac{\sigma^2}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$. Tutaj $\sigma^2 = EX^2(1)$.

DEF. 11. Ułamkowym ruchem Browna nazywamy proces gaussowski, który jest H-samopodobny, ma stacjonarne przyrosty i średnią zero.

UŁAMKOWY RUCH BROWNA JAKO CAŁKA STOCHASTYCZNA:

Dla $H \in (0, 1)$, $B_H(t)$ możemy zdefiniować jako: $B_H(t) = c_H [\int_{-\infty}^0 ((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}) dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s)]$,

gdzie $c_H = \sigma [\int_{-\infty}^0 ((1-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}})^2 ds + \frac{1}{2H}]^{-\frac{1}{2}}$.

Własności: $\int_a^b f(s) dB(s) \sim N(0, \int_a^b f(s) ds)$.

LINIE KWANTYLOWE PROCESÓW - SAMOPODOBNYCH

DEF. 12. Linia kwantylową rzędu $p \in (0, 1)$ dla procesu X(t) nazywamy funkcję $q_p(t)$ spełniającą zależność: $P(X(t) \leq q_p(t)) = p$.

Uwaga Dla ustalonego t $q_p(t)$ jest kwantylem rzędu p zmiennej losowej X(t).

Uwaga Jeśli X(t) ma rozkład ciągły ze ściśle rosnącą dystrybuantą $F_{X(t)}(x)$, to $q_p(t) = F_{X(t)}^{-1}(p)$.

Estymacja kwantyla rzędu p zmiennej losowej X: (X_1, \dots, X_n) .

Estymator kwantyla rzędu p ma postać: $q_p = X_{[n \cdot p]:n}$.

FAKT 2. Niech X(t) będzie procesem H-samopodobnym. Wtedy $q_p(t) = t^H \cdot q_p$, gdzie q_p jest kwantylem rzędu p zmiennej losowej X(1).

Uwaga Jeśli chcemy sprawdzić, czy X(t) jest H-samopodobny, to estymujemy linie kwantylowe i sprawdzamy, czy są one postaci: $q_p(t) = t^H \cdot q_p$.

Uwaga Dla $B_H(t)$ linie kwantylowe mają postać: $q_p(t) = t^H \cdot q_p$, gdzie q_p jest kwantylem rzędu p rozkładu $N(0, \sigma^2)$.

Ułamkowy szum gaussowski - stacjonarny proces z dyskretnym czasem: $b_H(n) \stackrel{def}{=} B_H(n+1) - B_H(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$.
 $b_H(n)$ - proces przyrostów ułamkowego ruchu Browna; proces gaussowski
 $E(b_H(n)) = 0$

Uwaga Można rozszerzyć definicję $b_H(n)$ na cały zbiór liczb całkowitych, $n \in \mathbb{Z}$. Wtedy $S_k = \frac{\sigma^2}{2}(|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H})$, $k \in \mathbb{Z}$.

Uwaga Dla $H = \frac{1}{2}$, $b_{\frac{1}{2}}(n)$ jest ciągiem iid., $b_{\frac{1}{2}}(n) \sim N(0, \sigma^2)$, $b_{\frac{1}{2}}(n)$ - biały szum

DEF. 13. Mówimy, że proces stacjonarny $X(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $EX^2(n) \leq \infty$ ma własność **długiej pamięci** (długoterminowej zależności), jeśli $\sum_{k=0}^{\infty} |Cov(X(k), X(0))| = \infty$.

Interpretacja: Kowariancja powoli zanika do 0, nawet odległe zdarzenia mają na siebie istotny wpływ, tzn. kowariancje niesumowalne.

FAKT 3. .

- i) dla $H > \frac{1}{2}$, $\sum_{k=0}^n |s_k| = \infty$, $s_k \sim c \cdot k^{2H-2}$, $\sum_{k=2-2H}^1 \frac{1}{k^{2-2H}} = \infty$, $2-2H < 1$,
 $H > \frac{1}{2}$ oznacza, że szereg jest rozbieżny, tzn. długa pamięć

- ii) $H = \frac{1}{2}$ mamy $s_k = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} |s_k| < \infty$ brak długiej pamięci, ekstremalnie krótka pamięć, bo wszystko jest niezależne

- iii) $H < \frac{1}{2}$, $\sum_{k=0}^{\infty} |s_k| < \infty$ brak długiej pamięci, autokowariancja powoli zanika do 0. $\sum_{k=2-2H}^1 \frac{1}{k^{2-2H}} < \infty$ dla $H < \frac{1}{2}$

Symulacja $b_H(n)$ **Cel:** Chcemy wygenerować wektor $(b_H(0), \dots, b_H(N-1))$, $N \in \mathbb{N}$

Algorytm Daviesa-Harte'a:

1. Dla $k = 0, \dots, 2N-1$. Wyznacz $A_{K,N} = \sum_{j=0}^N s_j e^{\frac{-i\pi k j}{N}} + \sum_{j=N+1}^{2N-1} s_{2N-j} e^{\frac{-i\pi k j}{N}}$
2. Sprawdź, że $A_{k,N} \geq 0$ dla wszystkich k .
3. Generuj z_0, \dots, z_{2N-1} - iid, $z_i \sim N(0, 1)$.
4. Wyznacz $Y_k = \begin{cases} \sqrt{2NA_{0,N}} \cdot z_0 & \text{gdy } k = 0 \\ \sqrt{NA_{k,N}} \cdot (z_{2k-1} + iz_{2k}) & \text{gdy } 1 \leq k \leq N-1 \\ \sqrt{2NA_{N,N}} \cdot z_{2N-1} & \text{gdy } k = N \\ \sqrt{NA_{k,N}} \cdot (z_{4N-1-2k} + iz_{4N-2k}) & \text{gdy } N+1 \leq k \leq 2N-1 \end{cases}$
5. Wstaw $b_H(n) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} Y_k e^{\frac{-i\pi k n}{N}}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$

Symulacja $B_H(t)$ (ułamkowy ruch Browna) **Cel:** Chcemy wygenerować wektor $(B_H(t_0), \dots, B_H(t_N))$.

$t_i = i \cdot n$, $n = \frac{T}{N}$

$b_H(n) = B_H(n+1) - B_H(n)$ **Algorytm:**

1. Generuj $(b_H(0), \dots, b_H(N-1))$.
2. Wstaw $(B_H(t_0), \dots, B_H(t_N)) = h^H$
cumsum $([0, b_H(0), \dots, b_H(N-1)])$.

PROCES (SZEREG CZASOWY) ARFIMA(0, d, 0)

$d \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$

Proces ARFIMA - rozwiązanie: $\Delta^d X(n) = \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$
 ξ_n - iid, $\xi_i \sim N(0, 1)$ biały szum gaussa
 $\Delta X(n) \stackrel{d}{=} X(n) - X(n-1)$
 $\Delta = 1 - B$
 $BX(n) \stackrel{d}{=} X(n-1)$
 $\Delta^d = (1 - B)^d \stackrel{d}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d}{n} (-B)^n$
 $\binom{d}{n} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(d-n+1)}$

Arfima ma postać: $X(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-d}{k} (-1)^k \xi_n$

TW. 17. $X(n)$ jest dobrze określony i stacjonarny dla $d < \frac{1}{2}$.

TW. 18. $Cov(X(n), X(0)) \sim c \cdot n^{2d-1}, \quad n \rightarrow \infty$. Wniosek: dla $0 < d < \frac{1}{2}$, $X(n)$ ma długą pamięć.

TW. 19. Weźmy $t > 0$. Wtedy $\frac{X(1)+X(2)+\dots+X([nt])}{n^H} \xrightarrow{d, n \rightarrow \infty} B_H(t)$. Zatem $b_H(n) \approx X(n)$. (te dwa procesy są bardzo blisko siebie). $H = d + \frac{1}{2}$

Symulacje $X(n)$

$$X(n) \approx \sum_{k=0}^M \binom{-d}{k} (-1)^k \xi_{n-k},$$
 M - duża liczba