

F-Praktikum

Noise Fundamentals

Anna Andrlé (550727)
Sebastian Pfitzner (553983)

19. Mai 2015

Abstract

In diesem Experiment wird das Rauschen als Eigenschaft von elektronischen Bauelementen (Widerstand, Halbleiterdiode und ein weiteres Halbleiterbauelement) untersucht. Mit Hilfe des thermischen Rauschen in einem Widerstand lässt sich die Boltzmann-Konstante k_B und mit Hilfe des Stromrauschen in einer Diode die Elementarladung e zumindest größenordnungsmäßig bestimmen. Weiterhin wird die Frequenzabhängigkeit des Funkelrauschens untersucht und eine Probe auf das Vorhandensein von Generations-Rekombinations-Rauschen geprüft.

Inhaltsverzeichnis

1	Versuchsaufbau	1
2	Thermisches Rauschen	1
3	Stromrauschen	4
4	Funkelrauschen	6
4.1	Generations-Rekombinations-Rauschen	8
5	Zusammenfassung	9

1 Versuchsaufbau

Im folgenden Versuch werden Messungen zu verschiedenen Arten des Rauschens (thermisches Rauschen, Stromrauschen, Funkelrauschen und Generations-Rekombinations-Rauschen) ausgeführt. Da die rauschbedingten Fluktuationen im jeweils gemessenen Signal sehr klein sind (ungefähr 1×10^{-15} V), ist eine Verstärkung um viele Größenordnungen nötig.

Dazu wird eine zweistufige Anordnung verwendet: Ein Vorverstärker, bestehend aus einem Operationsverstärker und einem Präzisionswiderstand R_F zur Rückkopplung wird vor ein Hochpass, einen Tiefpass und einen Nachverstärker geschaltet. Mit der Kombination aus Hoch- und Tiefpass lässt sich ein Frequenzbereich Δf (bestimmbar aus den Grenzfrequenzen beider Filter nach [3]) selektieren, in dem das Rauschen registriert wird. Der Nachverstärker bringt noch eine weitere, einstellbare Verstärkung mit sich und ist an ein Oszilloskop zur zeitabhängigen Messung des Rauschens sowie an einen Quadrierer mit einem nachfolgenden Digitalmultimeter angeschlossen.

Aus der quadrierten und mit dem DMM gemessenen Spannung lässt sich die spektrale Leistungsdichte nach folgender Formel ermitteln:

$$S_j = \frac{\langle j^2(t) \rangle}{\Delta f}, \quad j = u, i. \quad (1)$$

j kann hier entweder eine Spannung oder ein Strom sein und berechnet sich aus der gemessenen Spannung u_{mess} – wie genau, hängt vom konkreten Messaufbau und wird in den einzelnen Abschnitten genauer beschrieben.

2 Thermisches Rauschen

Das thermische Rauschen (auch Widerstandsrauschen, Nyquist-Rauschen, Johnson-Rauschen oder Johnson-Nyquist-Rauschen) ist frequenzunabhängig und somit auch ein weißes Rauschen. Es entsteht durch die thermische Bewegung der Ladungsträger in elektrischen Schaltkreisen. Die spektrale Leistungsdichte S_u des thermischen Rauschen ergibt sich zu

$$S_u = 4k_B T R, \quad (2)$$

wobei hier T die Temperatur, Δf das Frequenzspektrum und R der benutzte Widerstand sind. Als Bestimmungsgleichung für die Boltzmann-Konstante k_B ergibt sich also mit (1)

$$k_B = \frac{S_u}{4TR}. \quad (3)$$

Die spektrale Leistungsdichte S_u ergibt sich aus der Messung der Spannung mit dem DMM durch

$$S_u = \frac{10V \cdot u_{\text{mess}}}{G^2 \Delta f}, \quad (4)$$

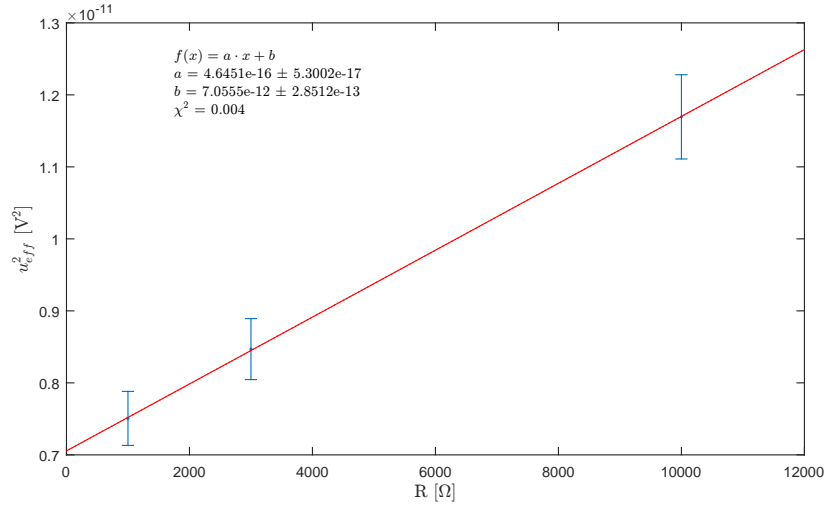


Abb. 1: Abhängigkeit des thermischen Rauschens vom Widerstand bei Kühlung mit flüssigem Stickstoff.

wobei G die Gesamtverstärkung vor dem Quadrieren ist und der Faktor 10 V beim Quadrieren dazukommt. Für diese Messung ist der Operationsverstärker im Vorverstärker nicht-invertierend beschaltet, R_F wird zu $10\text{ k}\Omega$ gewählt, während ein weiterer Widerstand $R_1 = (200,0 \pm 0,2)\Omega$ zwischen Masse und invertierendem Eingang des Op-Amps hängt. Die Verstärkung dieser Bauteilgruppe ergibt sich also zu $G_{\text{vor}} = 1 + R_F/R_1 = 6$.

In dem Versuch werden vier verschiedene Widerstände R_{in} bei Raumtemperatur $T_R = (293 \pm 4)\text{ K}$ und konstanter Bandbreite $\Delta f = (110\,961 \pm 4438)\text{ Hz}$ [3] vermessen. Danach wird bei konstantem Widerstand $R_{\text{in}} = 10\text{ k}\Omega$ die Frequenzbreite Δf variiert. Diese beiden Messungen werden bei mit flüssigem Stickstoff gekühlten Widerständen bei $T_K = (90 \pm 4)\text{ K}$ wiederholt.

Die Unsicherheit der Temperatur aufgrund der Temperaturschwankungen während der Messung auf $u_T = \pm 4\text{ K}$ abgeschätzt, der Fehler des Thermometers ist klein demgegenüber und kann vernachlässigt werden. Für die gemessene quadrierte Spannung wird die statistische Unsicherheit auf $u_u = \pm 5\%$ abgeschätzt, systematische Unsicherheiten, insbesondere in G , werden nicht berücksichtigt.

Die Messwerte für verschiedene Widerstände R_{in} lassen sich durch

$$u^2 = aR + b \quad (5)$$

mit einem Anstieg $a = 4k_B T \Delta f$, für den y-Achsenschnittpunkt b wird ein Wert von 0 V^2 erwartet.

Aus dem Fit der Messdaten bei Raumtemperatur (siehe Abbildung 2) ergibt sich $a = (1,92 \pm 0,01) \times 10^{-15}\text{ J Hz}$ und $b = (6,81 \pm 0,05) \times 10^{-12}\text{ V}^2$. Für die Boltzmann-Konstante ergibt sich also

$$k_B^{(1)} = (1,48 \pm 0,06) \times 10^{-23}\text{ J/K},$$

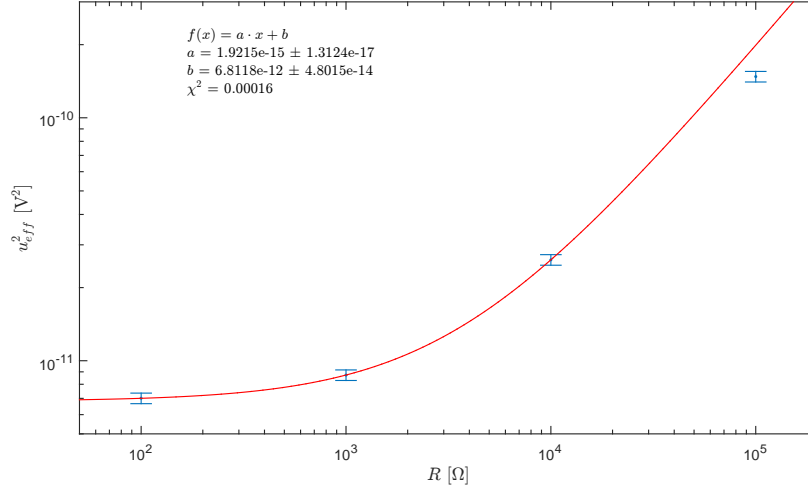


Abb. 2: Abhängigkeit des thermischen Rauschens vom Widerstand bei Raumtemperatur. Es werden nur die ersten drei Datenpunkte berücksichtigt, der vierte wird als Ausreißer angesehen und geht nicht in den Fit mit ein.

wobei die Unsicherheit sich durch gaußsche Fehlerfortpflanzung errechnen lässt.

Für die Daten bei $T_K = (90 \pm 4)$ K (siehe Abbildung 1) ergibt sich für die Fitparameter $a = (4,6 \pm 0,5) \times 10^{-16}$ J Hz und $b = (7,1 \pm 0,3) \times 10^{-13}$ V² und k_B zu

$$k_B^{(2)} = (1,16 \pm 0,07) \times 10^{-23} \text{ J/K.}$$

In beiden Fällen ergibt sich, entgegen der Erwartung, ein Wert für b ungleich Null. Dies lässt sich mit dem thermischen Rauschen in der Messapparatur erklären, das unabhängig von der Temperatur als auch von R_{in} ist. Es lässt sich demzufolge als additive Konstante in der Mittelung des gesamten gemessenen Rauschens finden.

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Boltzmann-Konstante liegt darin, die Abhängigkeit des Rauschens vom Frequenzbereich Δf mit

$$u^2 = a\Delta f + b \quad (6)$$

zu fitten; hier gilt $a = 4k_B T R$. Aus dem Fit für die variierten Bandbreiten (Abbildung 3) folgt $a = (2,34 \pm 0,02) \times 10^{-16}$ J Ω und $b = (-3,5 \pm 0,1) \times 10^{-14}$ V². Für die Boltzmann-Konstante ergibt sich

$$k_B^{(3)} = (2,00 \pm 0,03) \times 10^{-23} \text{ J/K.}$$

Für diesen Fit ergibt sich im Rahmen der Unsicherheit $b = 0$, was der Erwartung entspricht.

Wenn man die Werte für die Boltzmann Konstante mit einem Vergleichswert $k_B = (1,380\,648\,8 \pm 0,000\,001\,3) \times 10^{-23}$ J/K [4] vergleicht, kann man feststellen, dass die hier gewonnen Werte nahe am Vergleichswert liegen. Allerdings scheinen die Unsicherheiten

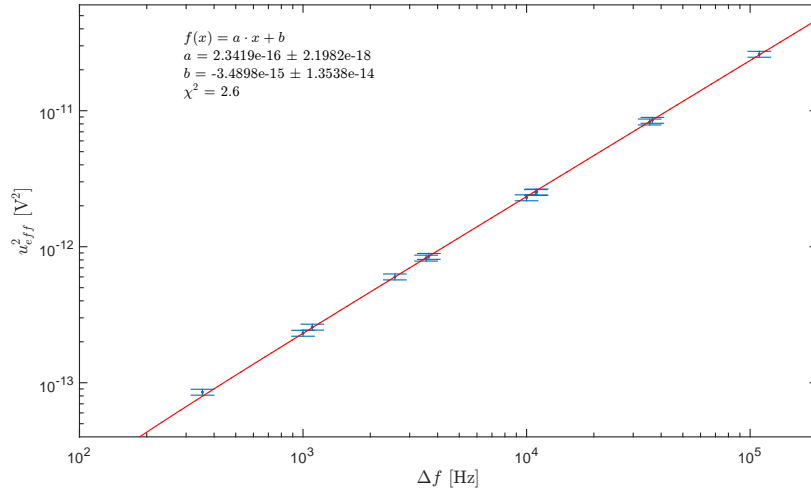


Abb. 3: Abhängigkeit des thermischen Rauschens von der Bandbreite Δf mit zugehörigem linearen Fit (bei Raumtemperatur).

insbesondere im letzten Fit zu klein abgeschätzt zu sein oder eine unberücksichtigte systematische Unsicherheit vorzuliegen, da die Abweichung gegenüber dem realen Wert um ein vielfaches größer als die Unsicherheit ist.

3 Stromrauschen

Stromrauschen ist eine zufällige Fluktuation bei einem elektrischen Strom. Es tritt in allen elektronischen Schaltungen auf und wird auch Schrot-, Schottky-Rauschen oder Shot Noise genannt. Dieses Rauschen entsteht, wenn ein elektrischer Strom eine Potentialbarriere überwinden muss. Der Gesamtstromfluss setzt sich aus der Bewegung vieler einzelner Ladungsträger zusammen, die alle einzeln die Barriere überwinden müssen. Das ist ein stochastischer Prozess und so ist insgesamt eine Fluktuation im Stromfluss zu beobachten. Die spektrale Leistungsdichte des Stromrauschen kann mit folgender Gleichung beschrieben werden:

$$S_I = 2eI, \quad (7)$$

wobei hier e die Elementarladung und I der durchschnittliche Gleichstrom ist.

Das Stromrauschen lässt sich am besten über eine Diode messen. Auch hier wird die Messung einmal bei Raumtemperatur und im flüssigen Stickstoff durchgeführt. Der Op-Amp im Vorverstärker wird hier invertierend und als Strom-Spannungs-Wandler beschaltet; Für den Strom ergibt sich $i = u/R_F$ bei $R_F = (100 \pm 1) \text{ k}\Omega$. Daraus folgt für die spektrale Leistungsdichte

$$S_i = \frac{10V \cdot u_{\text{mess}}}{G^2 \cdot R_F^2 \cdot \Delta f} \quad (8)$$

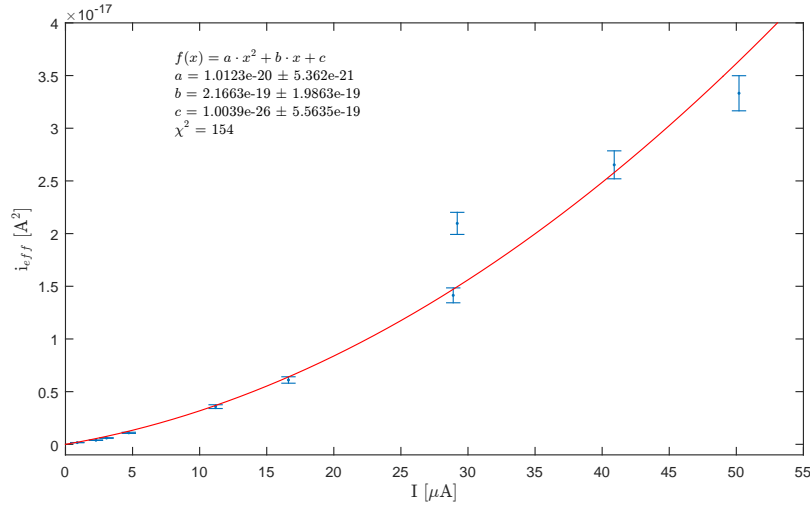


Abb. 4: Abhängigkeit des Stromrauschens vom durchschnittlichen Gleichstrom bei Kühlung mit flüssigem Stickstoff gekühlt.

mit G als eingestellten Verstärkungsfaktor hinter dem Vorverstärker. Wie in der vorigen Messung wird eine Bandbreite von $\Delta f = (110\,961 \pm 4438)$ Hz eingestellt.

Zum Fitten des Stromrauschens in Abhängigkeit vom Gleichstrom wird

$$i_{eff}^2 = aI^2 + bI + c \quad (9)$$

verwendet, wobei $b = 2e\Delta f$ gilt. Der quadratische Term ergibt sich heuristisch daraus, dass die Daten nicht zu einer linearen Funktion passen. Eine mögliche Ursache ist eine andere Art des Rauschens, welche quadratisch von mittleren Gleichstrom abhängt.

Der durchschnittliche Strom am Monitorausgang wird über einen Widerstand R_A gemessen, daraus folgt für $I = U_A/R_A$. Auch hier wird die Unsicherheit der Messwerte auf 5 % abgeschätzt.

Aus dem Fit der bei Raumtemperatur aufgenommenen Messwerte (Abbildung 5) ergibt sich $a = (4 \pm 1) \times 10^{-21}$, $b = (2,6 \pm 0,9) \times 10^{-21}$ A und $c = (1,02 \pm 0,09) \times 10^{-19}$ A². Aus b folgt die Elementarladung zu

$$e^{(1)} = (1,16 \pm 0,05) \times 10^{-19} \text{ C}, \quad (10)$$

wobei die Unsicherheit sich durch gaußsche Fehlerfortpflanzung ergibt.

Die Messung wird unter Einsatz der Kühlung mit flüssigem Stickstoff wiederholt. Aus dem Fit (Abbildung 4) folgt $a = (1,0 \pm 0,5) \times 10^{-21}$, $b = (2 \pm 2) \times 10^{-21}$ A und $c = (0,0 \pm 0,6) \times 10^{-19}$ A². Die Elementarladung lässt sich in diesem Fall zu

$$e^{(2)} = (9,7 \pm 0,4) \times 10^{-19} \text{ C} \quad (11)$$

bestimmen.

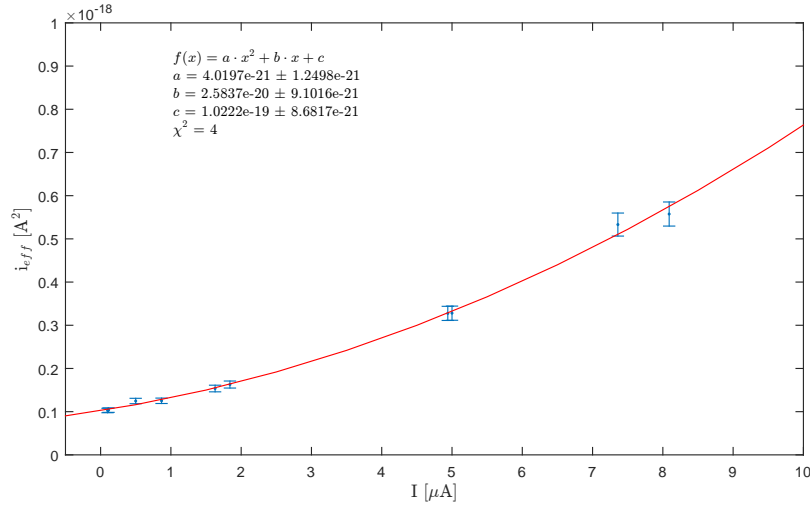


Abb. 5: Abhängigkeit des Stromrauschens vom durchschnittlichen Gleichstrom bei Raumtemperatur.

Für den Fit der bei Raumtemperatur aufgenommenen Messdaten ergibt sich ein von Null verschiedener y-Achsen-Schnittpunkt, während bei der Niedrigtemperaturmessung $b = 0$ gilt. Dies lässt sich möglicherweise mit einem zusätzlichen temperaturabhängigen Rauschen erklären.

Werden die hier bestimmten Werte für die Elementarladung mit dem Literaturwert von $e = (1,602\,176\,565 \pm 0,000\,000\,035) \times 10^{-19} \text{ C}$ [5] verglichen, lässt sich eine gute Übereinstimmung von $e^{(1)}$ mit letzterem feststellen, während $e^{(2)}$ etwa um einen Faktor 6 zu groß ist. In beiden Fällen sind die Unsicherheiten deutlich zu klein abgeschätzt oder es liegen nicht berücksichtigte systematische Fehler vor.

4 Funkelrauschen

Das Funkelrauschen, auch $1/f$ -Rauschen genannt, tritt in Halbleitern auf und lässt sich heuristisch durch

$$S_u(f) = \frac{\alpha_H}{f \cdot N} = a \frac{1}{f} \quad (12)$$

beschreiben. α_H ist der sogenannte Hooge-Faktor und N die Ladungsträgerzahl – beide sollen hier allerdings nicht bestimmt werden, weswegen sie im Folgenden zum Faktor a zusammengefasst werden.

Auch das Funkelrauschen wird sowohl bei Raumtemperatur als auch bei rund -184°C untersucht. Dazu wird ein nicht näher spezifiziertes und vom Versuchsleiter bereitgestelltes Halbleiterbauelement in den Probenhalter eingesetzt und mit dem Oszilloskop die um den Faktor $4 \cdot 10^8$ verstärkte Spannung in Abhängigkeit von der Zeit aufgezeichnet. Wie bereits in der vorherigen Messung wird der Vorverstärker hier als Strom-

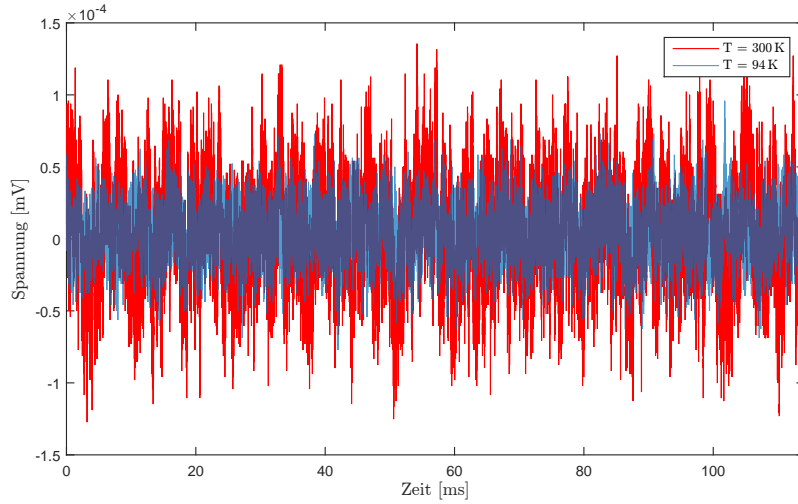


Abb. 6: Spannungsverlauf des Rauschens am Halbleiterbauelement bei verschiedenen Temperaturen.

Spannungs-Konverter eingesetzt, sodass für den Strom durch das Halbleiterbauelement $i(t) = u_{\text{vorverstärkt}}(t)/R_f$ gilt, wobei R_f hier zu $100\text{ k}\Omega$ gewählt wird. In Abbildung 6 ist der zeitliche Verlauf des Rauschens am Halbleiterbauelement dargestellt. Es ist offensichtlich, dass die Amplitude bei geringeren Temperaturen abnimmt; über die Frequenzanteile lässt sich keine Aussage treffen. Die Bandbreite der Reihenschaltung von Tief- und Hochpass beträgt $110\,961\text{ Hz}$, sodass sich die spektrale Leistungsdichte nach

$$S_u(f) = \mathcal{F} \left(\frac{u^2(t)}{110\,961\text{ Hz}} \right) \quad (13)$$

ergibt, wobei \mathcal{F} die FFT darstellt. In Abbildung 7 ist die die spektrale Leistungsdichte in einem doppelt-logarithmischen Plot dargestellt, die Gleichung (12) wird als Fitfunktion verwendet.

Es ist deutlich zu erkennen, dass das Rauschen (ab einer Frequenz von 20 Hz) eine $1/f$ -Abhängigkeit besitzt. Die spektrale Leistungsdichte ist bei 94 K rund eine Größenordnung kleiner als bei Raumtemperatur. Ab einer Frequenz von rund 1 kHz ist, insbesondere im gekühlten Fall, eine Abweichung von der erwarteten $1/f$ -Abhängigkeit zu erkennen – eine mögliche Erklärung hierfür ist ein unterliegendes weißes Rauschen, das erst in diesem Bereich in die Größenordnung des Funkelrauschens kommt.

4.1 Generations-Rekombinations-Rauschen

Generations-Rekombinations-Rauschen (GR-Rauschen) wird durch die namensgebenden Generations-Rekombinationszentren in Materialien verursacht, die durch Ladungsträger für eine gewisse Zeit τ besetzt werden können. Dieser Ladungsträgereinfang verringert die Zahl freier Ladungsträger, wodurch auch die Leitfähigkeit des Materials fluktuiert[1].

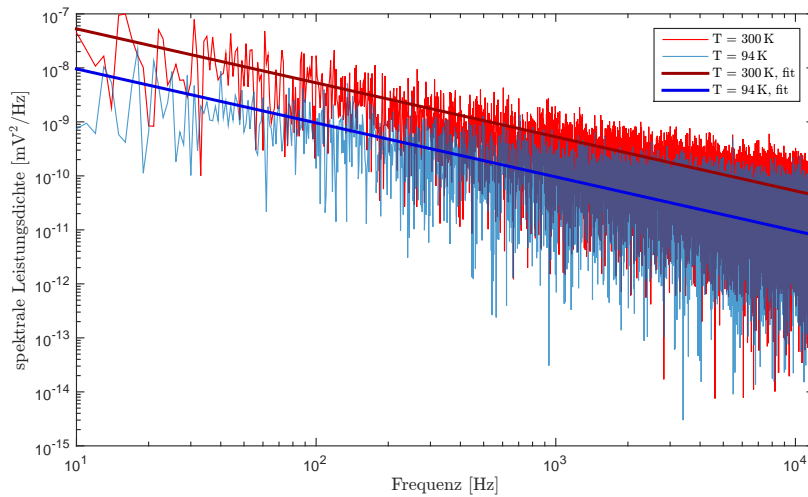


Abb. 7: FFT der spektralen Leistungsdichte des Funkelrauschens bei verschiedenen Temperaturen und die dazugehörigen Fits. Die FFT liefert auch höherfrequente Anteile, diese sind allerdings aufgrund des Nyquist-Shannon-Abtasttheorems nicht unbedingt sinnvoll (die Abtastfrequenz des Oszilloskops beträgt rund 20 kHz, also sind Frequenzen von über 10 kHz aus den Daten nicht rekonstruierbar).

Zur Untersuchung der vorliegenden Probe auf möglicherweise vorhandenes GR-Rauschen wird folgende Methode verwendet [1]: Das Produkt aus Frequenz und der spektralen Leistungsdichte wird gegen die (logarithmisierte) Frequenz geplottet und nach einem lokalen Maximum gesucht, welches bei der Eckfrequenz des Leistungsdichte-Spektrums auftritt.

Für das hier untersuchte Bauelement allerdings ist in diesem Plot (siehe Abbildung 8) kein lokales Maximum erkennbar, welches aus dem $1/f$ -Rauschen hervorsticht.

5 Zusammenfassung

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass mit Hilfe des Rauschen zumindest die Größenordnung fundamentaler Konstanten wie der Boltzmann-Konstante oder der Elementarladung bestimmt werden können. Als Messmethode für ebenjene Größen liegen allerdings um Größenordnungen präzisere Experimente vor – trotzdem ist es interessant, dass sich mit einem so alltäglichen Effekt wie dem Rauschen überhaupt Rückschlüsse auf diese Konstanten ziehen lassen.

Mit den hier verwendeten Methoden lassen sich die verschiedenen Rauscharten quantifizieren, was unter anderem Rückschlüsse auf die Qualität der elektronischen Bauteile und – im Fall des Funkelrauschens und des (hier nicht beobachteten) GR-Rauschens – auch auf die zugrundeliegenden Materialien zulässt.

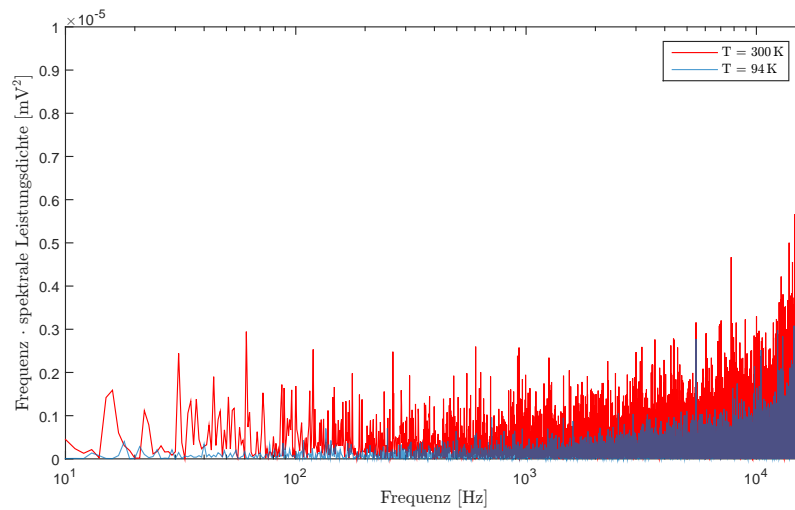


Abb. 8: Produkt aus Frequenz mit der FFT der spektralen Leistungsdichte über der Frequenz bei beiden Temperaturen.

Literatur

- [1] MARGRAF, M.: Niederfrequenz-Rauschen und Intermodulationen von resistiven FET-Mischern. 2004.
- [2] Versuchsbeschreibung: Noise Fundamentals.
- [3] VAN BAAK, D., HEROLD, G., REICHERT, J.: Noise Fundamentals - Instructor's manual. Teachspin Inc. 2012.
- [4] <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?k>
- [5] <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?e>