

# Protokoll: Grundpraktikum II O2 - Mikroskop

Sebastian Pfitzner

12. März 2014

**Durchführung:** Anna Andrle (550727), Sebastian Pfitzner (553983)

**Arbeitsplatz:** Platz 1

**Betreuer:** Gerd Schneider

**Versuchsdatum:** 11.03.2014

## Abstract

In diesem Experiment werden die Eigenschaften eines Mikroskops untersucht. Es wird gezeigt, dass sich die Vergrößerung des Mikroskops tatsächlich als Produkt der Vergrößerungen von Objektiv und Okular ausdrücken lässt, indem die Vergrößerung mit einer davon unabhängigen Methode bestimmt wird. Weiterhin wird die Okularskala mittels einer Objektskala kalibriert und damit nachfolgend der Durchmesser zweier Drähte bestimmt. Abschließend werden die Öffnungswinkel beider Objektive bestimmt und daraus das Auflösungsvermögen abgeleitet.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Messwerte und Auswertung</b>	<b>2</b>
1.1	Bestimmung der Vergrößerung . . . . .	2
1.2	Kalibrierung der Okularskala . . . . .	3
1.3	Messung der Drahtdurchmesser . . . . .	4
1.4	Bestimmung der Auflösungsgrenzen . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Ergebnisdiskussion</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Anhang</b>	<b>7</b>

# 1 Messwerte und Auswertung

## 1.1 Bestimmung der Vergrößerung

Zur Bestimmung der Vergrößerung des Mikroskops wird eine Objektskala durch das Mikroskop betrachtet. Durch einen halbdurchlässigen Spiegel kann gleichzeitig eine Millimeterskala betrachtet werden, die um  $s_0 = (25,0 \pm 0,5)$  cm vom Mikroskop entfernt ist.

Ein Vergleich der beiden Skalen ist dank der Bildüberlagerung durch den halbdurchlässigen Spiegel möglich, wenn die beiden Bilder eine ähnliche Helligkeit aufweisen. Die Vergrößerung  $V_M$  lässt sich einfach aus dem Verhältnis der beiden Skalen bestimmen, denn sie ist als das Verhältnis der Sehwinkel mit bzw. ohne Mikroskop definiert (wobei sich der Gegenstand ohne Mikroskop in der deutliche Sehweite  $s_0$  befindet). Diese sind proportional zur bei der Messung wahrgenommenen Größe der Skala, sodass die Vergrößerung einfach als das Verhältnis der beiden Skalengrößen berechnet werden kann.

Auf der Objektskala entsprechen - laut Prägung - 100 Skt fünf Millimetern, d.h.  $1 \text{ Skt} \hat{=} 0,05 \text{ mm}$  bzw.  $u = 0,05 \text{ mm/Skt}$ . Hier wird eine Unsicherheit der Angabe zu 1 Skt abgeschätzt, was zu  $\Delta u = 0,0005 \text{ mm/Skt}$  führt.

Die auftretenden Messunsicherheiten lassen sich zu einem großen Teil auf Ablesefehler zurückführen, allerdings kommt durch den fehlerbehafteten Abstand  $s_0$  auch eine systematische Komponente hinzu. Die Ablesungsunsicherheiten  $\Delta B_{\text{ab}}$  an der Millimeterskala werden mit 0,5 mm für das 10x-Objektiv, mit 1 mm für das 40x-Objektiv mit 10x-Okular und 2 mm mit 16x-Okular abgeschätzt. Die Objektskala wird als fehlerfrei ablesbar angenommen, denn die Unsicherheiten gehen hier in die o.g. Unsicherheiten mit ein.

Durch den nur auf 0,5 cm genau bestimmten Abstand zwischen Mikroskop und Millimeterskala kommt eine systematische Unsicherheit  $\Delta B_{\text{sys}}$  dazu, die sich mithilfe des Strahlensatzes abschätzen lässt. Eine Veränderung von  $s_0$  um 0,5 cm wirkt sich in einem Relativfehler von rund 2 % auf den aufgenommenen Messwert der Millimeterskala aus.

Die Vergrößerung  $V$  und ihre Unsicherheit (aus gaußscher Fehlerfortpflanzung) ergibt sich wie folgt aus der wahrgenommenen Größe der Objektskala  $G$  und der Größe der Millimeterskala  $B$ :

$$V = \frac{B}{G} \quad (1)$$

$$\Delta V = \frac{\Delta B}{G} \quad (2)$$

Für die Berechnung der Unsicherheit wird  $\Delta u$  vernachlässigt, da dieser systematische Fehler mit 1 % im Vergleich zu der Ablesegenauigkeit (mehr als 5 %) sehr klein ist. Für die Unsicherheit von  $B$  ergibt sich wie oben erklärt folgende Gleichung:

$$\Delta B = \sqrt{\Delta B_{\text{ab}}^2 + (0,02 \cdot B)^2} \quad (3)$$

Für die vier Kombinationen aus Okularen und Objektiven ergeben sich die in Tabelle 1 dargestellten Vergrößerungen.

$V_{\text{Ob}}$	$V_{\text{Ok}}$	$B$ [mm]	$\Delta B_{\text{ab}}$ [mm]	$\Delta B_{\text{sys}}$ [mm]	$V$	$\Delta V$	$V_{\text{Ob}} \cdot V_{\text{Ok}}$
10	10	5	0,5	0,10	100	10	100
10	16	8	0,5	0,16	160	10	160
40	10	20	1,0	0,40	400	22	400
40	16	34	2,0	0,68	680	42	640

**Tab. 1:** Messwerte und Vergrößerungen samt Unsicherheiten für die verschiedenen Kombination von Okular und Objektiv

Die in der letzten Spalte aufgetragenen Werte ergeben sich aus der Multiplikation der auf den Objektiven bzw. Okularen angegebenen Vergrößerungen derselben. Dies liefert laut [2] (Seite 48, Formel 4) ebenfalls einen Wert für die Vergrößerung des Mikroskops.

## 1.2 Kalibrierung der Okularskala

In dem 16x vergrößernden Okular ist eine Skala angebracht, die für die weitere Messung kalibriert werden muss. Da der Maßstab der Objektskala aufgrund des Aufdrucks bekannt ist, lässt sich durch einen Vergleich der beiden Skalen der Maßstab der Okularskala bestimmen.

Im folgenden bezeichnet  $\text{Skt}_{\text{ob}}$  einen Skalenteil der Objektivskala und  $\text{Skt}_{\text{ok}}$  einen Skalenteil der Okularskala.

Als Ableseunsicherheit werden  $0,5 \text{Skt}_{\text{ok}}$  abgeschätzt - mögliche systematische Fehler können dagegen nicht angegeben werden, da jegliche Grundlage für eine Abschätzung fehlt. Der Maßstab  $M$  gibt an, wie vielen Millimetern ein Skalenteil

$V_{\text{Ob}}$	$V_{\text{Ok}}$	$x_{\text{ob}}$ [Skt <sub>ob</sub> ]	$x_{\text{ok}}$ [Skt <sub>ok</sub> ]	$\Delta x_{\text{ok}}$ [Skt <sub>ok</sub> ]	$M_i$ [ $\frac{\mu\text{m}}{\text{Skt}_{\text{ok}}}$ ]	$\Delta M_i$ [ $\frac{\mu\text{m}}{\text{Skt}_{\text{ok}}}$ ]
10	16	10	50	0,5	10,0	0,1
40	16	1	20	0,5	2,50	0,07

**Tab. 2:** Auflistung der abgelesenen Längen an der Okularskala ( $x_{\text{ok}}$ ) bzw. an der Objektskala ( $x_{\text{ob}}$ ) sowie des Umrechnungsverhältnisses  $M$  von Okularskalenteilen zu mm

der Okularskala entspricht und wird samt Unsicherheit wie folgt bestimmt:

$$M = \frac{x_{\text{ob}} \cdot u}{x_{\text{ok}}} \quad (4)$$

$$\Delta M = \sqrt{\left(-\frac{x_{\text{ob}} \cdot u}{x_{\text{ok}}^2}\right)^2 \cdot \Delta x_{\text{ok}}^2 + \left(\frac{x_{\text{ob}}}{x_{\text{ok}}}\right)^2 \cdot \Delta u^2} \quad (5)$$

Hier ist  $x_{\text{ok}}$  die abgelesene Länge in Okular-Skalenteilen,  $x_{\text{ob}}$  die damit verglichene abgelesene Länge der Objektskala und  $u$  der oben angegebene Umrechnungsfaktor für die Objektskala. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in Tabelle 2 dargestellt.

### 1.3 Messung der Drahtdurchmesser

Die Durchmesser der Drähte können mit der kalibrierten Okularskala bestimmt werden. Dabei wird jeder Draht zunächst bei geringerer Vergrößerung (10x-Objektiv) gesucht und der Durchmesser bestimmt und dann bei starker Vergrößerung (mit dem 40x-Objektiv) erneut vermessen.

Die abgelesenen Werte  $D'$  können wie folgt umgerechnet werden, die Unsicherheit des Ergebnisses ergibt sich aus gaußscher Fehlerfortpflanzung, wobei eine Ablesungenauigkeit von  $\Delta D' = 0,5 \text{ Skt}_{\text{ok}}$  sowie die Ungenauigkeit  $\Delta M$  eingeht:

$$D_i = M_i \cdot D'_i \quad (6)$$

$$\Delta D_i = \sqrt{(D'_i \cdot \Delta M_i)^2 + (M_i \cdot \Delta D')^2} \quad (7)$$

	$D'_{40,16}$	$D'_{10,16}$	$\Delta D'$	$D_{40,16}$	$\Delta D_{40,16}$	$D_{10,16}$	$\Delta D_{10,16}$
Draht 1	13	3	0,5	32,5	1,5	30	5
Draht 2	30	7,5	0,5	75	2	75	5

**Tab. 3:** Auflistung der Drahtdurchmesser. Gestrichene Größen sind in  $\text{Skt}_{\text{ok}}$ , ungestrichene in  $\mu\text{m}$  angegeben.

Aus den in Tabelle 3 angegebenen Drahtdurchmessern lässt sich nun ein gewichtetes Mittel bilden, denn die Unsicherheiten der Werte überlappen. Daraus ergeben sich folgende Endergebnisse:

$$d_1 = (32 \pm 1) \mu\text{m}$$

$$d_2 = (75 \pm 2) \mu\text{m}$$

### 1.4 Bestimmung der Auflösungsgrenzen

Die Auflösungsgrenzen der Objektive lassen sich laut dem Skript ([2], Seite 49) durch folgende Formel bestimmen, wobei die Wellenlänge mit  $\lambda = 550 \text{ nm}$  abgeschätzt wird (dort ist das Auge am empfindlichsten).  $n$  ist der Brechungsindex des

Materials vor dem Objektiv - in diesem Fall Luft, also  $n = 1$ . Der Winkel  $\varphi_{\text{ob}}$  wird gemessen und ist der halbe Öffnungswinkel des Objektivs.

$$d = \frac{\lambda}{n \cdot \sin \varphi_{\text{ob}}} \quad (8)$$

$$\Delta d = \left| \frac{\lambda \cdot \cos \varphi_{\text{ob}} \cdot \Delta \varphi_{\text{ob}}}{n \cdot \sin \varphi_{\text{ob}}} \right| \quad (9)$$

Zur Bestimmung von  $\varphi_{\text{ob}}$  wird anstelle der eigentlichen Lampe ein kleines Lämpchen auf einer runden Schiene mit Gradskala verwendet. Wenn nun ohne Okular durch das Mikroskop geblickt wird, verschwindet das Lämpchen in jede Richtung bei jeweils einem bestimmten Winkel aus dem Blickfeld. Das gewichtete Mittel dieser beiden Werte liefert nun den halben Öffnungswinkel. Die Unsicherheit der Winkelmessung wird nach rechts mit  $\pm 0,5^\circ$  und nach links - da das Objektiv in diese Richtung stärker verschmutzt ist und damit das Verschwinden der Lampe schlechter abgeschätzt werden kann - mit  $\pm 0,8^\circ$  abgeschätzt.

Für den kleinsten auflösbaren Abstand zweier Punkte ergibt sich für die Objektive mit zehn- bzw. vierzigfacher Vergrößerung

$$d_{V=10} = (2040 \pm 54) \text{ nm}$$

$$d_{V=40} = (834 \pm 7) \text{ nm}$$

Aus den Öffnungswinkeln lässt sich die numerische Apertur berechnen, für die Vergleichswerte auf die Objektive aufgedruckt sind. Es gilt

$$N_A = \sin \varphi_{\text{ob}}$$

$$\Delta N_A = |\cos \varphi_{\text{ob}} \cdot \Delta \varphi_{\text{ob}}|$$

Für die numerischen Aperturen ergibt sich also

$$N_{A,V=10} = (0,270 \pm 0,007)$$

$$N_{A,V=40} = (0,659 \pm 0,006)$$

Aufgedruckt sind  $N_{A,\text{ver},V=10} = 0,25$  und  $N_{A,\text{ver},V=40} = 0,65$ . Diese Werte sind zwar signifikant kleiner, allerdings liegt der Vergleichswert der numerischen Apertur für das 40-fach vergrößernde Objektiv noch im zweifachen Fehlerintervall.

## 2 Ergebnisdiskussion

Die Bestimmung der Vergrößerung durch die Bestimmung des Verhältnisses der beiden Skalen liefert Werte, die sehr nah an den Herstellerangaben des Mikroskops liegen. Einzig im letzten betrachteten Fall - bei einer vierzigfachen Objektivvergrößerung und einer sechzehnfachen Okularvergrößerung - weicht das gewonnene

Ergebnis deutlich vom erwarteten Wert ab. Dies lässt sich auf die äußerst schlechte Erkennbarkeit der Objektskala bei dieser Vergrößerung zurückführen. Allerdings liegt der erwartete Wert von 640 noch in der einfachen Ungenauigkeit der aus dem Experiment bestimmten Vergrößerung. Die Hauptfehlerquelle ist hier die Ablesungenauigkeit auf der Millimeterskala, aufgrund derer die Relativfehler der Vergrößerung zwischen 6 % und 10 % liegen. Die Unsicherheit des Abstands  $s_0$  geht im Vergleich schwächer ein und die Unsicherheit des Umrechnungsfaktors  $u$  der Objektskala kann hier vernachlässigt werden.

Der Okularskala lässt sich sehr präzise kalibrieren - die relative Unsicherheit des Umrechnungsfaktors  $M$  liegt bei rund einem Prozent. Demzufolge können mit der Okularskala die zu mikroskopierenden Objekte mit hoher Genauigkeit vermessen werden, wie sich auch im folgenden Versuchsteil zeigt. Allerdings sind keine Angaben zum systematischen Fehler der Okularskala möglich - dazu müssten viele Werte des gleichen Objekts an verschiedenen Stellen der Okularskala aufgenommen werden.

Die Durchmesser der beiden Drähte können dank der präzisen Umrechnung gut bestimmt werden. Wenig überraschend liefert eine stärkere Vergrößerung auch genauere Ergebnisse, die aber auch sehr gut mit denen übereinstimmen, die bei der 160-fachen Vergrößerung aufgenommen wurden.

Bei der Bestimmung der Auflösungsgrenzen der Objektive kann der Winkel recht genau bestimmt werden. Allerdings fällt es teilweise schwer, genau zu beurteilen, wann das Lämpchen aus dem Blickfeld des Objektivs verschwindet, da insbesondere der Rand desselben verschmutzt ist. Mögliche Erklärung für den signifikanten Unterschied zwischen den experimentell bestimmten numerischen Aperturen und den Herstellerangaben ist einerseits eine sehr sicher, d.h. unter keinen Umständen zu groß, abgeschätzte Angabe seitens des Herstellers und andererseits etwas zu groß gemessene Winkel.

## Literatur

- [1] MÜLLER, U. : *Physikalisches Grundpraktikum - Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik*. <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik%20und%20Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik%20und%20Optik.pdf>. Version: 2007
- [2] MÜLLER, U. : *Physikalisches Grundpraktikum - Elektrodynamik und Optik*. <http://gpr.physik.hu-berlin.de/Skripten/Elektrodynamik%20und%20Optik/PDF-Dateien/Elektrodynamik%20und%20Optik.pdf>. Version: 2010

### 3 Anhang

11.3.2014		02 Mikroskop	
Platz 1		geod. schneider@helmholtz-berlin.de	
10/2,25		40/0,65	
Objektiv	Okular	Abstand 25cm ±	
10	10	15kt ± 5mm	5.100
10	16	15kt ± 8mm	
40	10	15kt ± 2cm	
25	21,6	40 16	15kt ± 3,4cm
Eichung		Objektiv	Okular
10	16	10	± 50
40	16	1	± 20
Summe ± 100kt		Objektiv Skala	7,5.4
Messung Durchmesser Draht			
Draht 1		Draht 2	
40	16	10 16	40 16
135kt Okular 3		30.30 Okular 7,5 Okular	
Messung Öffnungswinkel			
10x	16°	15,5°	
40x	33,5° 40,5°	41,5°	
11.3.14			