

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
Microeconometria – 2015/3

Microeconometrics: Lecture Notes

Autor: Paulo Ferreira Naibert
Professor: Hudson Torrent

Porto Alegre
30/06/2020
Revisão: July 27, 2020

1 Regressão MQO Clássico

Wooldridge (2010, C.4 – The Single-Equation Linear Model and OLS Estimation, p.49–76)

1.1 Modelo de equações lineares

O modelo populacional que estudamos é linear em seus parâmetros,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_K x_K + u \quad (1.1)$$

onde:

y, x_1, \dots, x_K são escalares aleatórios e observáveis (i.e., conseguimos observá-los em uma amostra aleatória da população);

u é o *random disturbance* não observável, ou erro;

$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_K$ são parâmetros (constantes) que gostaríamos de estimar.

Notação Vetorial

Wooldridge (2010, Sec. 4.2 – Asymptotic Properties of OLS; p.51)

Por conveniência, escrevemos a equação populacional em forma de vetor:

$$y = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + u \quad (1.2)$$

onde,

$\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_K)$ é um vetor $1 \times K$ de regressores;

$\boldsymbol{\beta} \equiv (\beta_1, \dots, \beta_K)'$ é um vetor $K \times 1$.

Uma vez que a maioria das equações contém um intercepto, assumiremos que $x_1 \equiv 1$, visto que essa hipótese deixa a interpretação mais fácil.

Amostra Aleatória

Assumimos que conseguimos obter uma amostra aleatória de tamanho N da população para estimarmos $\boldsymbol{\beta}$. Dessa forma, $\{(\mathbf{x}_i, y_i); i = 1, 2, \dots, N\}$ são tratados como variáveis aleatória independentes, identicamente distribuídas, onde \mathbf{x}_i é $1 \times K$ e y_i é escalar. Para cada observação i , temos:

$$y_i = \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta} + u_i. \quad (1.3)$$

onde \mathbf{x}_i é um vetor $1 \times K$ de regressores.

1.2 Hipóteses

OLS.1 $y_i = \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta} + u_i, \quad i = 1, \dots, N;$

OLS.2 \mathbf{X} é não estocástica;

OLS.3 $\{u_i\}_{i=1}^N$ é *iid* com e para cada $i = 1, \dots, N$:

$$E(u_i) = 0$$

$$\text{Var}(u_i) = E(u_i^2) = \sigma^2$$

OLS.2' \mathbf{X} é estocástica;

OLS.3'

$$E(u_i|\mathbf{X}) = 0,$$

$$\text{Var}(u_i|\mathbf{X}) = E\left\{[u_i - E(u_i|\mathbf{X})]^2|\mathbf{X}\right\} = E(u_i^2|\mathbf{X}) = \sigma^2.$$

Remark. $E(u_i|\mathbf{X}) = 0$ implica que u_i é **não correlacionado** com todos os regressores x_k para $k = 1, \dots, K$. **Exogeneidade estrita.**

1.3 Estimação

Usando **OLS.1:**

$$y_i = \mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta} + u_i$$

$$\mathbf{x}_i'y_i = \mathbf{x}_i'\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{x}_i'u_i$$

$$E(\mathbf{x}_i'y_i) = E(\mathbf{x}_i'\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\beta} + E(\mathbf{x}_i'u_i)$$

Usando $E(\mathbf{x}_i'u_i) = 0$ [Qual seria essa hipótese?]

$$E(\mathbf{x}_i'y_i) = E(\mathbf{x}_i'\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\beta}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\beta} = [E(\mathbf{x}_i'\mathbf{x}_i)]^{-1}E(\mathbf{x}_i'y_i)} \quad (1.4)$$

Agora, usando o **princípio da analogia** e utilizando **estimadores amostrais**:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i'\mathbf{x}_i\right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i'y_i\right)} \quad (1.5)$$

Podemos desenvolver essa equação para:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i'\mathbf{x}_i\right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i'(\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta} + u_i)\right) \\ &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i'\mathbf{x}_i\right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i'\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}\right) + \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i'u_i\right) \\ \boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}} &= \boldsymbol{\beta} + \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i'\mathbf{x}_i\right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i'u_i\right)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.3.1 Notação Matricial

Empilhando as N observações, obtemos a **Notação Matricial**:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \quad (1.7)$$

\mathbf{y} é um vetor $N \times 1$;

\mathbf{X} é uma matriz $N \times K$ de regressores, com N vetores, \mathbf{x}_i , de dimensão $1 \times K$ empilhados;

$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$;

\mathbf{u} é um vetor $N \times 1$;

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{NK} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}.$$

As somas de vetores viram simples multiplicações de matrizes e a equação (1.5), vira:

$$\hat{\beta} = (N^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(N^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}) \implies \boxed{\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y})} \quad (1.8)$$

1.4 Valor Esperado

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}] = E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\beta + \mathbf{u})] = E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}] \\ &= E(\beta) + E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}] \implies \boxed{E(\hat{\beta}) = \beta + E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}]} \end{aligned}$$

1.4.1 Viés

$$B(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}) - \beta \implies \boxed{B(\hat{\beta}) = E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}]}$$

Remark. Sob **OLS.2'** e **OLS.3'**:

$$E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}] = E\{E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}|\mathbf{X}]\} = E\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\underbrace{E(\mathbf{u}|\mathbf{X})}_{=0}\right\} = 0$$

ou seja, $B(\hat{\beta}) = 0$, logo $\hat{\beta}$ é **não-viciado**. O que também é equivalente a $E(\hat{\beta}) = \beta$.

1.5 Variância

Supondo **OLS.2'** e **OLS.3'**:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}|\mathbf{X}) &= E\left\{\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta}|\mathbf{X})\right]^2|\mathbf{X}\right\} \\ &= E\left\{\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta}|\mathbf{X})\right]\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta}|\mathbf{X})\right]'\mathbf{X}\right\} \\ &= E\left\{[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}][(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}]'\mathbf{X}\right\} \\ &= E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}|\mathbf{X}] \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Var}(\hat{\beta}|\mathbf{X}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E[\mathbf{u}\mathbf{u}'|\mathbf{X}]\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}$$

1.5.1 Homocedasticidade

Supondo **homocedasticidade** e ausência de correlação serial: $E[\mathbf{u}\mathbf{u}'|\mathbf{X}] = \sigma^2\mathbf{I}_N$. Assim,

$$\text{Var}(\hat{\beta}|\mathbf{X}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{I}_N\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \implies \boxed{\text{Var}(\hat{\beta}|\mathbf{X}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}.$$

2 Ausência de Exogeneidade Estrita

Nem sempre poderemos supor **exogeneidade estrita**. Por exemplo, no modelo com variável defasada mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 x_{1t} + u_t \\ y_{t-1} &= \beta_0 + \beta_1 y_{t-2} + \beta_2 x_{1t-1} + u_{t-1} \\ y_t &= \beta_0(1 + \beta_1) + \beta_1^2 y_{t-2} + \beta_1 \beta_2 x_{1t-1} + \beta_2 x_{1t} + u_t + \beta_1 u_{t-1}, \end{aligned}$$

o erro é correlacionado com o regressor y_{t-1} . Nesse caso, tentaremos obter apenas **consistência** e **variância assintótica** do estimador. Para tanto, utilizaremos a equação (1.6):

$$\hat{\beta} = \beta + \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i \right).$$

Aqui começaria a seção 20.

2.1 Consistência

Vamos definir a matriz $K \times K$, $\mathbf{A} \equiv E(\mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i)$. Supondo \mathbf{A} , finita e positiva definida, posto(\mathbf{A}) = K . Usando **LGN matricial** (Definição 20.2 na página 54), temos:

[lembrar que as dimensões dos vetores estão invertidas: $1 \times K$ e **não** $K \times 1$]

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \xrightarrow{p} \mathbf{A} \implies \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} \xrightarrow{p} \mathbf{A}^{-1}. \quad (2.1)$$

Além disso, vamos supor $E(\mathbf{x}'_i u_i) = 0$, o que corresponde a $\text{Cov}(\mathbf{x}_i, u_i) = 0$, ou seja, o erro u_i **não** é correlacionado com os regressores da própria equação. Isso é bem menos que exogeneidade estrita. Então,

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i \xrightarrow{p} E(\mathbf{x}'_i u_i) = \mathbf{0}_K.$$

Logo,

$$\boxed{\hat{\beta} = \beta + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i \right)}_{\xrightarrow{p} 0}}$$

Então, $(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{p} 0$ que é equivalente a $\hat{\beta} \xrightarrow{p} \beta$ e $\text{plim } \hat{\beta} = \beta$, ou seja, $\hat{\beta}$ é **consistente** para β .

2.2 Normalidade Assintótica

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \beta + \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i \right) \\ (\hat{\beta} - \beta) &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i \right) \\ \sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i \right)\end{aligned}$$

Supondo $E(x_{ik}^2 u_i^2) < +\infty$, $k = 1, \dots, K$, e definindo $\mathbf{B} = E[\mathbf{x}'_i u_i u_i \mathbf{x}_i] = E[u_i^2 \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i]$. Temos, pela Definição 20.7 (TCL), que

$$N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{B}) \implies N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i = O_p(1) \quad (2.2)$$

Além disso, vamos utilizar a matriz **simétrica** e **não singular** \mathbf{A} da equação (2.1). Assim, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i \right) \\ &= \left[\left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} + \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \right] \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i \right) \\ &= \left[\left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \right] \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i \right) + \mathbf{A}^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i \right),\end{aligned}$$

Podemos inverter \mathbf{A} porque ela tem posto completo (não singular). Pelas propriedades de \mathbf{A} , temos:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \xrightarrow{p} \mathbf{A} \implies \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} - \mathbf{A}^{-1} = o_p(1).$$

Então,

$$\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) = o_p(1)O_p(1) + \mathbf{A}^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i \right),$$

Usando (2.2) e o Lema 20.2.

$$\mathbf{A}^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i u_i \right) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}).$$

Lembrando que $o_p(1)O_p(1) = o_p(1)$, temos:

$$\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}) \implies \sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1})$$

2.3 Variância

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{V} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i)]^{-1} \mathbb{E}[(\mathbf{x}'_i u'_i u_i \mathbf{x}_i)] \mathbb{E}[(\mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i)]^{-1}$$

$$\mathbf{V} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i)]^{-1} \mathbb{E}[u_i^2 \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i] \mathbb{E}[(\mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i)]^{-1}.$$

2.3.1 Homocedasticidade

Sob **Homocedasticidade**, temos $\mathbf{B} = \mathbb{E}(u_i^2 \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i) = \sigma^2 \mathbb{E}(\mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i)$, logo

$$\boxed{\mathbf{V} = \sigma^2 \mathbb{E}[(\mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i)]^{-1}}.$$

2.3.2 Estimador Amostral

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}} &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N u_i^2 \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right) \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} \\ &= N \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N u_i^2 \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{V}} = N (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \left(\sum_{i=1}^N u_i^2 \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right) (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1}}.$$

2.3.3 Variância do estimador de OLS

$$\text{Var}(\sqrt{N} \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{V}$$

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = N^{-1} \mathbf{V}$$

$$\boxed{\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \left(\sum_{i=1}^N u_i^2 \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right) (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1}}.$$

A variância **Robusta** é:

$$\boxed{\widehat{\text{Var}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 \mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i \right) (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1}}.$$

A variância sob **Homocedasticidade** é:

$$\boxed{\widehat{\text{Var}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1}}.$$

3 System OLS (SOLS)

Wooldridge (2010, C.7 – Estimating Systems of Equations by OLS and GLS, p.143–179)

Wooldridge (2010, Sec.7.3 – System OLS Estimation of a Multivariate Linear System, p.147)

3.1 Modelo Linear

Assumimos que temos as seguintes observações *cross section iid*: $\{(\mathbf{X}_i, \mathbf{y}_i) : i = 1, \dots, N\}$, onde:

\mathbf{X}_i é uma matriz $G \times K$ e contém as variáveis explicativas que aparecem em qualquer lugar do sistema.

\mathbf{y}_i é um vetor $G \times 1$, que contém as variáveis dependentes para todas as equações G (ou períodos de tempo, no caso de dados de painel).

O modelo linear multivariado para uma **observação (draw)** aleatória da população pode ser expresso como:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

onde:

$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$ de parâmetros de interesse; e

\mathbf{u}_i é um vetor $G \times 1$ de não observáveis.

A equação (3.1) explica as G variáveis y_{i1}, \dots, y_{iG} em termos de \mathbf{X}_i e das não observáveis \mathbf{u}_i . Por causa da hipótese de amostra aleatória podemos escrever tudo em termos de uma observação genérica.

3.2 Hipóteses

Wooldridge (2010, Sec.7.3.1)

SOLS.1 $E(\mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i) = \mathbf{0}_{K \times 1}$.

SOLS.2 $\mathbf{A} \equiv E(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)$ é não singular (tem posto pleno, posto igual a K).

3.3 Estimação

Note que, sob **SOLS.1**, temos:

$$E[\mathbf{X}_i' (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})] = \mathbf{0}$$

$$E(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i) \boldsymbol{\beta} = E(\mathbf{X}_i' \mathbf{y}_i)$$

$$\boldsymbol{\beta} = [E(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)]^{-1} E(\mathbf{X}_i' \mathbf{y}_i) \quad (3.2)$$

Usando estimadores amostrais:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS} = \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{y}_i \right). \quad (3.3)$$

Para computar $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ usando linguagem de computação é mais fácil utilizar a notação matricial. Para tanto, cortamos os N^{-1} e substituímos os somatórios por multiplicações de matrizes.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS} = (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{y}) \quad (3.4)$$

onde

$\mathbf{X} \equiv (\mathbf{X}_1', \dots, \mathbf{X}_N')$ é uma matriz $NG \times K$ dos \mathbf{X}_i empilhados.

$\mathbf{y} \equiv (\mathbf{y}_1', \dots, \mathbf{y}_N')$ é um vetor $NG \times 1$ das observações \mathbf{y}_i empilhadas.

3.4 Consistência

Para provarmos a **consistência** do estimador, usamos as equações (3.3) e (3.1):

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{SOLS} &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{y}_i \right) \\ &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' (\mathbf{X}_i \beta + \mathbf{u}_i) \right] \\ &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \beta \right) + \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \right).\end{aligned}$$

E chegamos em:

$$\boxed{\hat{\beta}^{SOLS} = \beta + \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \right).} \quad (3.5)$$

Por **SOLS.1**:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \xrightarrow{p} \mathbf{0};$$

e por **SOLS.2**

$$\left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} \xrightarrow{p} \mathbf{A}^{-1}.$$

Resumimos esse resultado pelo seguinte Teorema:

Theorem 3.1 (Consistência do SOLS). Sob Hipóteses **SOLS.1** e **SOLS.2**, temos

$$\boxed{\hat{\beta}^{SOLS} \xrightarrow{p} \beta}.$$

3.5 Normalidade Assintótica

De (3.5):

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \beta + \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \right) \\ (\hat{\beta} - \beta) &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \right).\end{aligned}$$

E chegamos em:

$$\boxed{\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) = \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \right).} \quad (3.6)$$

Uma vez que $E(\mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i) = 0$, sob a hipótese **SOLS.1**, a definição 20.7 (**TCL**) implica que:

$$N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i \mathbf{u}_i \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{B}),$$

onde

$$\mathbf{B} \equiv E(\mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \mathbf{X}_i) \equiv \text{Var}(\mathbf{X}_i \mathbf{u}_i).$$

Em particular,

$$N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i \mathbf{u}_i = O_p(1).$$

Porém,

$$\left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} = (\mathbf{X}' \mathbf{X} / N)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + o_p(1).$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) &= \left[\mathbf{A}^{-1} + \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \right] \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \right) \\ &= \mathbf{A}^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \right) + [(\mathbf{X}' \mathbf{X} / N)^{-1} - \mathbf{A}^{-1}] \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \right) \\ &= \mathbf{A}^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \right) + o_p(1) O_p(1) \\ &= \mathbf{A}^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \right) + o_p(1) \end{aligned}$$

$\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1})$

(3.7)

3.6 Variância Assintótica

SOLS.3: Homocedasticidade $E(\mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \mathbf{X}_i) = \sigma^2 E(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)$.

De (3.7), vamos definir $\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}$. Sob **SOLS.3**, $\mathbf{V} = \sigma^2 [E(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)]^{-1}$. Estimando:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{NG - K} \sum_{i=1}^N \sum_{g=1}^G \hat{u}_{ig}^2$$

onde $\hat{u}_{ig} = y_{ig} - \mathbf{x}_{ig} \hat{\beta}^{SOLS}$

3.6.1 A Matriz Robusta

$$\hat{\mathbf{V}} = (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i' \mathbf{X}_i \right) (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \hat{\Omega} \mathbf{X}_i \xrightarrow{p} E(\mathbf{X}_i \Omega \mathbf{X}_i)$$

Mas **não** é verdade que $\hat{\Omega} \xrightarrow{p} \Omega$.

- Havendo constante, **SOLS.1** $\implies E(\mathbf{u}_i) = 0$
- Ausência de correlação entre os regressores de uma equação e o erro da própria equação \implies **SOLS.1**.

3.6.2 Variância Assintótica

REVER

$$\text{Avar}(\hat{\beta}^{SOLS}) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} / N. \quad (3.8)$$

Assim, $\text{Avar}(\hat{\beta}^{SOLS})$ tende a zero a uma taxa $1/N$, como esperado. Estimação consistente de \mathbf{A} é:

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{X}'\mathbf{X}/N = N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i$$

Um estimador consistente para \mathbf{B} pode ser achado usando o princípio da analogia.

$$\mathbf{B} = E(\mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \mathbf{X}_i), \quad N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \mathbf{X}_i \xrightarrow{p} \mathbf{B}.$$

Uma vez que não podemos observar \mathbf{u}_i , usamos os resíduos da estimação de SOLS:

$$\hat{\mathbf{u}}_i \equiv \mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\beta} = \mathbf{u}_i - \mathbf{X}_i (\hat{\beta} - \beta).$$

Assim, definimos $\hat{\mathbf{B}}$ e usando LGN, podemos mostrar que:

$$\hat{\mathbf{B}} \equiv N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i' \mathbf{X}_i \xrightarrow{p} \mathbf{B}.$$

onde supomos que certos momentos envolvendo \mathbf{X}_i e \mathbf{u}_i são finitos.

Portanto, $\text{Avar}[\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta)]$ é **consistentemente** estimado por $\hat{\mathbf{A}}^{-1} \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{A}}^{-1}$, e $\text{Avar}(\hat{\beta})$ é estimado como:

$$\hat{\mathbf{V}} \equiv \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i' \mathbf{X}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i \right)^{-1}.$$

Sob as hipóteses **SOLS.1** e **SOLS.2**, nós fazemos inferência em β como $\hat{\beta}$ fosse normalmente distribuído com média β e variância $\hat{\mathbf{V}}$.

4 Dados de Painei (POLS)

Wooldridge (2010, C.7 – Estimating Systems of Equations by OLS and GLS. p.143-179)

Wooldridge (2010, Sec.7.8 – The Linear Panel Data Model, Revisited. p.169)

4.1 Modelo Linear para Dados de Painei

No caso de dados de painei, temos a seguinte amostra aleatória:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + u_{it}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T. \quad (4.1)$$

onde

y_{it} é um escalar.

$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$.

\mathbf{x}_{it} é um vetor $1 \times K$.

u_{it} é um escalar.

$$\mathbf{x}_{it} = [x_{1,it} \quad \dots \quad x_{K,it}]_{1 \times K} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}_{K \times 1}$$

Notação Vetorial: $\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_i$, pra cada $i = 1, \dots, N$.

onde

\mathbf{y}_i é um vetor $T \times 1$.

$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$.

\mathbf{X}_i é uma matriz $T \times K$.

\mathbf{u}_i é um vetor $T \times 1$.

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_T \end{bmatrix}_{T \times K} = \begin{bmatrix} x_{1,i1} & \dots & x_{K,i1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,iT} & \dots & x_{K,iT} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{iT} \end{bmatrix}_{T \times 1} \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{iT} \end{bmatrix}_{T \times 1}$$

Notação Matricial: $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$

onde

\mathbf{y} é um vetor $NT \times 1$.

$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$.

\mathbf{X} é uma matriz $NT \times K$.

\mathbf{u} é um vetor $NT \times 1$.

$$\ddot{\mathbf{X}}_{NT \times K} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{X}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{X}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{1,11} & \dots & \ddot{x}_{K,11} \\ \vdots & & \vdots \\ \ddot{x}_{1,1T} & \dots & \ddot{x}_{K,1T} \\ \ddot{x}_{1,21} & \dots & \ddot{x}_{K,21} \\ \vdots & & \vdots \\ \ddot{x}_{1,2T} & \dots & \ddot{x}_{K,2T} \\ \vdots & & \vdots \\ \ddot{x}_{1,N1} & \dots & \ddot{x}_{K,N1} \\ \vdots & & \vdots \\ \ddot{x}_{1,NT} & \dots & \ddot{x}_{K,NT} \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{y}}_{NT \times 1} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \vdots \\ \ddot{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_{11} \\ \vdots \\ \ddot{y}_{1T} \\ \ddot{y}_{21} \\ \vdots \\ \ddot{y}_{2T} \\ \vdots \\ \ddot{y}_{N1} \\ \vdots \\ \ddot{y}_{NT} \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{u}}_{NT \times 1} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_{11} \\ \vdots \\ \ddot{u}_{1T} \\ \ddot{u}_{21} \\ \vdots \\ \ddot{u}_{2T} \\ \vdots \\ \ddot{u}_{N1} \\ \vdots \\ \ddot{u}_{NT} \end{bmatrix}$$

4.2 Estimação

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \sum_{i=1}^N \mathbf{X}'_i \mathbf{X}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \mathbf{x}'_{it} \mathbf{x}_{it}; \quad \mathbf{X}'\mathbf{y} = \sum_{i=1}^N \mathbf{X}'_i \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \mathbf{x}'_{it} y_{it}.$$

Portanto, podemos escrever $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ como:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{POLS} = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \mathbf{x}'_{it} \mathbf{x}_{it} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \mathbf{x}'_{it} y_{it} \right). \quad (4.2)$$

Este estimador é chamado **estimador de Mínimos Quadrados Agrupados (POLS)** porque ele corresponde a rodar uma regressão OLS nas observações agrupadas através de i e t . O estimador da equação (4.2) é o mesmo para unidades de *cross section* amostradas em diferentes pontos do tempo.

4.3 Hipóteses

POLS.1 $E(\mathbf{X}'_i \mathbf{u}_i) = E(\mathbf{x}'_{it} u_{it}) = \mathbf{0}_{K \times 1}$, para cada $i = 1, \dots, N$ e $t = 1, \dots, T$.
De fato, **POLS.1** \implies **SOLS.1**.

Obs: O modelo (4.1) permite $y_{i,t-1}$ como regressor, se satisfeita **POLS.1**.

5 Alguns Testes

Lembrando a equação do modelo (4.1):

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + u_{it}$$

5.1 Autocorrelação dos Resíduos

Nos dois testes apresentado, primeiro precisamos guardar os resíduos estimado. Para tanto, rodamos a regressão do modelo (4.1) e guardamos os resíduos:

$$\hat{u}_{it} = y_{it} - \mathbf{x}_{it}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{POLS}. \quad (5.1)$$

Com Exogeneidade Estrita Sob exogeneidade estrita, rodamos a seguinte regressão dos resíduos:

$$\hat{u}_{it} = \delta_0 + \delta\hat{u}_{it-1} + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T.$$

Então, testamos

$$H_0 : \delta_1 = 0$$

$$H_1 : \delta_1 \neq 0$$

via teste t (pode ser robusto).

Sem Exogeneidade Estrita (Apenas exogeneidade contemporânea) Sem exogeneidade estrita, rodamos a seguinte regressão dos resíduos:

$$\hat{u}_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\alpha} + \delta\hat{u}_{it-1} + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T.$$

Então, testamos

$$H_0 : \delta_1 = 0$$

$$H_1 : \delta_1 \neq 0$$

via teste t .

5.2 Heterocedasticidade

Com os resíduos da equação (5.1), rodamos a seguinte regressão:

$$\hat{u}_{it}^2 = \gamma_0 + \gamma_1\hat{y}_{it}' + \gamma_2\hat{y}_{it}^2 + \varepsilon_{it}$$

onde $\hat{y}_{it} = \mathbf{x}_{it}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{POLS}$. Definindo $\mathbf{h}_{it} = (\hat{y}_{it}', \hat{y}_{it}^2)$, podemos reescrever a equação acima como

$$\hat{u}_{it}^2 = \gamma_0 + \mathbf{h}_{it}\boldsymbol{\gamma} + \varepsilon_{it}$$

Então, testamos

$$H_0 : \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad (\gamma_1 = 0 \text{ e } \gamma_2 = 0)$$

$$H_1 : \boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$$

via teste de Wald.

5.3 Teste de Wald

Se é verdade que

$$\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{V}}).$$

Seja \mathbf{R} uma matriz $Q \times K$ com $Q \leq K$ e $\text{posto}(\mathbf{R}) = Q$ (posto pleno), então

$$\sqrt{N}\mathbf{R}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}\hat{\mathbf{V}}\mathbf{R}').$$

e

$$\left[\sqrt{N}\mathbf{R}(\hat{\beta} - \beta) \right]' (\mathbf{R}\hat{\mathbf{V}}\mathbf{R}')^{-1} \left[\sqrt{N}\mathbf{R}(\hat{\beta} - \beta) \right] \stackrel{a}{\sim} \chi_Q^2$$

O resultado acima vale para $\hat{\mathbf{V}}$ no lugar de \mathbf{V} , desde que $\hat{\mathbf{V}} \xrightarrow{p} \mathbf{V}$. Ou seja, vale para estimadores **consistentes** de \mathbf{V} .

Teste de Wald

$$H_0 : \mathbf{R}\beta = \mathbf{r}$$

$$H_1 : \mathbf{R}\beta \neq \mathbf{r}$$

A estatística do teste acima é:

$$N \left[\mathbf{R}\hat{\beta} - \mathbf{r} \right]' \left(\mathbf{R}\hat{\mathbf{V}}\mathbf{R}' \right)^{-1} \left[\mathbf{R}\hat{\beta} - \mathbf{r} \right] \stackrel{a}{\sim} \chi_Q^2$$

Remarks

1. $\hat{\mathbf{V}}$ pode ser a matriz robusta.
2. Uma aproximação, via distribuição F é dado por:

$$\frac{\text{Est. Teste}}{Q} \stackrel{a}{\sim} F_{Q, N-K}$$

$$\text{com } \text{Avar}(\hat{\beta}) = \frac{N}{N-K} \hat{\mathbf{V}}.$$

6 Modelo de Efeitos Não Observados (UEM)

Wooldridge (2010, C.10 – Basic Linear Unobserved Effects Panel Data Models, p.247–291)

Wooldridge (2010, Sec.10.1 – Motivation: The Omitted Variables Problem, p.247)

Wooldridge (2010, Sec.10.2 – Assumptions about the Unobserved Effects and Explanatory Variables, p.251)

Wooldridge (2010, Sec.10.3 – Estimating UEM by POLS, p.256)

6.1 Modelo UEM

O modelo básico de efeitos não observados (UEM) pode ser escrito para uma amostra *cross-section* aleatória i como:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (6.1)$$

onde c_i é o efeito não observado (componente não observado, variável latente, heterogeneidade não observada, efeito individual, heterogeneidade individual). Estamos supondo c_i **não** observável.

Definindo os erros compostos $v_{it} = c_i + u_{it}$, temos:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it} \quad (6.2)$$

Ou, em forma de vetor:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}_i \quad (6.3)$$

6.2 Estimação e Consistência

Wooldridge (2010, Sec.10.3 – Estimating UEM by POLS, p.256).

Se usarmos o estimador POLS na equação (6.1), o estimador será consistente se:

$$E(\mathbf{x}'_{it}v_{it}) = \mathbf{0}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Ou seja, precisamos que:

$$E(\mathbf{x}'_{it}u_{it}) = \mathbf{0}, \quad t = 1, \dots, T.$$

$$E(\mathbf{x}'_{it}c_i) = \mathbf{0}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Caso 1: $E(\mathbf{x}'_{it}c_i) = \mathbf{0}$.

POLS é consistente, mas não é eficiente.

Efeitos Aleatórios é consistente e eficiente.

EA é o **FGLS** do modelo.

Caso 2: $E(\mathbf{x}'_{it}c_i) \neq \mathbf{0}$.

Se POLS é **inconsistente**.

Nesse caso, usaremos o Modelo de **Efeitos Fixos** ou **Primeira Diferença**.

EF e PD é o POLS nos modelos transformados.

Obs: Modelos com variáveis dependentes defasadas em \mathbf{x}_{it} *devem* violar a hipótese $E(\mathbf{x}'_{it}u_{it}) = \mathbf{0}$ uma vez que $y_{i,t-1}$ e c_i devem ser correlacionados. Considerando $y_{i,t-1}$ como regressor:

$$\left. \begin{aligned} y_{it} &= \alpha y_{i,t-1} + \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it} \\ y_{it-1} &= \alpha y_{i,t-2} + \mathbf{x}_{i,t-1}\boldsymbol{\beta} + v_{i,t-1} \end{aligned} \right\} \text{Cov}(y_{i,t-1}, v_{it}) \neq 0.$$

Mesmo se $E(\mathbf{x}'_{it}u_{it}) = \mathbf{0}$ é verdadeiro, os erros compostos serão serialmente correlacionados devido a presença de c_i em cada período de tempo. Portanto, a inferência do POLS requer um estimador robusto de matriz de covariância e estatísticas robustas de teste.

7 Modelo de Efeitos Fixos (EF), (Fixed Effects FE)

Wooldridge (2010, Sec.10.5 – Fixed Effects Methods, p.265)

7.1 Modelo

O modelo linear de **efeitos individuais não observados (UEM)**:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T. \quad (7.1)$$

Estamos supondo c_i **não** observável. Definindo $v_{it} = c_i + u_{it}$.

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T. \quad (7.2)$$

No modelo FE permitimos $\text{Cov}(\mathbf{x}_{it}, c_i) \neq 0$.

7.2 Transformação *Within*

Tirando a média do modelo ao longo de $t = 1, \dots, T$:

$$\bar{y}_i = \bar{\mathbf{x}}_i\boldsymbol{\beta} + \bar{c}_i + \bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.3)$$

onde:

$$\bar{y}_i = T^{-1} \sum_{t=1}^T y_{it}; \quad \bar{\mathbf{x}}_i = T^{-1} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_{it}; \quad \bar{c}_i = T^{-1} \sum_{t=1}^T c_i = c_i; \quad \bar{u}_i = T^{-1} \sum_{t=1}^T u_{it}.$$

Então, subtraindo (7.3) de (7.1):

$$y_{it} - \bar{y}_i = (\mathbf{x}_{it} - \bar{\mathbf{x}}_i)\boldsymbol{\beta} + \underbrace{c_i - \bar{c}_i}_{=0} + u_{it} - \bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T.$$

Finalmente, obtemos:

$$\ddot{y}_{it} = \ddot{\mathbf{x}}_{it}\boldsymbol{\beta} + \ddot{u}_{it}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T. \quad (7.4)$$

Onde $\ddot{y}_{it} \equiv y_{it} - \bar{y}_i$, $\ddot{\mathbf{x}}_{it} \equiv \mathbf{x}_{it} - \bar{\mathbf{x}}_i$ e $\ddot{u}_{it} \equiv u_{it} - \bar{u}_i$. E eliminamos variáveis que não variam ao longo do tempo.

7.3 Notação Vetorial e Matriz Centralizadora (*Centering Matrix*) \mathbf{M}^0

Utilizando notação vetorial para o modelo linear de **efeitos individuais não observados (UEM)**:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + c_i\mathbf{1} + \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.5)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}_{it}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.6)$$

Agora, definimos a matriz \mathbf{M}^0 (Wooldridge (2010, p. 268) usa a notação \mathbf{Q}_T para essa matriz) como:

$$\mathbf{M}^0 = \mathbf{I}_T - \mathbf{1}_T(\mathbf{1}'_T\mathbf{1}_T)^{-1}\mathbf{1}'_T = \mathbf{I}_T - T^{-1}\mathbf{1}_T\mathbf{1}'_T$$

A matriz \mathbf{M}^0 tem dimensão $T \times T$. Além disso, ela é idempotente ($\mathbf{M}^0\mathbf{M}^0 = \mathbf{M}^0$) e simétrica ($\mathbf{M}^{0'} = \mathbf{M}^0$).

Podemos transformar o modelo (7.5) ao premultiplicarmos todo o modelo por \mathbf{M}^0 :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^0 \mathbf{y}_i &= (\mathbf{I}_T - T^{-1} \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T') \mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i - \mathbf{1}_T \bar{y}_i = \ddot{\mathbf{y}}_i \\ \mathbf{M}^0 \mathbf{X}_i &= \mathbf{X}_i - T^{-1} \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T' \bar{\mathbf{X}}_i = \mathbf{X}_i - \mathbf{1}_T \bar{\mathbf{x}}_i = \ddot{\mathbf{X}}_i \\ \mathbf{M}^0 \mathbf{u}_i &= (\mathbf{I}_T - T^{-1} \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T') \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{1}_T \bar{u}_i = \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \mathbf{M}^0 (c_1 \mathbf{1}_T) &= (\mathbf{I}_T - T^{-1} \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T') c_1 \mathbf{1}_T = c_i (\mathbf{I}_T - T^{-1} \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T') \mathbf{1}_T = c_i (\mathbf{1}_T - \mathbf{1}_T) = \mathbf{0}_T\end{aligned}$$

onde $\bar{\mathbf{x}}_i$ é o vetor $1 \times K$ com a média dos K regressores.

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^0 \mathbf{y}_i &= \mathbf{M}^0 \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{M}^0 (c_1 \mathbf{1}_T) + \mathbf{M}^0 \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, N. \\ \ddot{\mathbf{y}}_i &= \ddot{\mathbf{X}}_i \boldsymbol{\beta} + \ddot{\mathbf{u}}_i, \quad i = 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{7.7}$$

Exemplo: (Wooldridge, 2010, p.266) Considere o modelo:

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_2 d2_t + \dots + \beta_T dT_t + \mathbf{z}_i \boldsymbol{\delta} + d2_t \mathbf{z}_i \boldsymbol{\delta}_2 + \dots + dT_t \mathbf{z}_i \boldsymbol{\delta}_T + \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\alpha} + v_{it}$$

Após a transformação:

$$\ddot{y}_{it} = \beta_2 \ddot{d2}_t + \dots + \beta_T \ddot{dT}_t + \ddot{d2}_t \mathbf{z}_i \boldsymbol{\delta}_2 + \dots + \ddot{dT}_t \mathbf{z}_i \boldsymbol{\delta}_T + \ddot{\mathbf{x}}_{it} \boldsymbol{\alpha} + \ddot{u}_{it}$$

Então, não podemos estimar o coeficiente da variável sexo do indivíduo, por exemplo. Mas podemos estimar se houve mudança desse efeito ao longo do tempo, em relação a categoria de referência.

7.4 Hipóteses

FE.1: Exogeneidade Estrita: $E(u_{it} | \mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{iT}, c_i) = 0$, para $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N$.

FE.2: Posto pleno de $E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i)$ (para inverter a matriz). $\text{posto}[E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i)] = K$.

FE.3: Homoscedasticidade: $E(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' | \mathbf{X}_i, c_i) = \sigma_u^2 \mathbf{I}_T$.

7.5 Estimação POLS

Wooldridge (2010, p.269)

Aplicando POLS no modelo transformado (7.7), temos:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FE} = \left(\sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{y}}_i \right) = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ddot{\mathbf{x}}_{it}' \ddot{\mathbf{x}}_{it} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ddot{\mathbf{x}}_{it}' \ddot{y}_{it} \right)}\tag{7.8}$$

Este estimador também é chamado de **estimador within**.

7.6 Consistência

Wooldridge (2010, sec.10.5.1 – Consistency of the Fixed Effects Estimator, p.265–269)

Wooldridge (2010, p.269)

Usando a equação (7.7) em (7.8), temos:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FE} = \boldsymbol{\beta} + \left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i \right]^{-1} \left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{u}}_i \right]\tag{7.9}$$

Nota que para $E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{u}}_i) = \mathbf{0}$ é necessário não haver correlação entre todos os erros u_{it} $t = 1, \dots, T$ e todos os regressores \mathbf{x}_{it}' $t = 1, \dots, T$. **FE.1** implica a condição acima. Além disso, sob **FE.1**, $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FE}$ é não viciado.

Formato Totalmente Matricial

Empilhando os vetores N vezes, vamos definir:

$$\ddot{\mathbf{X}}_{NT \times K} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{X}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{X}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{1,11} & \dots & \ddot{x}_{K,11} \\ \vdots & & \vdots \\ \ddot{x}_{1,1T} & \dots & \ddot{x}_{K,1T} \\ \ddot{x}_{1,21} & \dots & \ddot{x}_{K,21} \\ \vdots & & \vdots \\ \ddot{x}_{1,2T} & \dots & \ddot{x}_{K,2T} \\ \vdots & & \vdots \\ \ddot{x}_{1,N1} & \dots & \ddot{x}_{K,N1} \\ \vdots & & \vdots \\ \ddot{x}_{1,NT} & \dots & \ddot{x}_{K,NT} \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{y}}_{NT \times 1} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \vdots \\ \ddot{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_{11} \\ \vdots \\ \ddot{y}_{1T} \\ \ddot{y}_{21} \\ \vdots \\ \ddot{y}_{2T} \\ \vdots \\ \ddot{y}_{N1} \\ \vdots \\ \ddot{y}_{NT} \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{u}}_{NT \times 1} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_{11} \\ \vdots \\ \ddot{u}_{1T} \\ \ddot{u}_{21} \\ \vdots \\ \ddot{u}_{2T} \\ \vdots \\ \ddot{u}_{N1} \\ \vdots \\ \ddot{u}_{NT} \end{bmatrix}$$

A matriz \mathbf{X} é $NT \times K$, a matriz \mathbf{M}^0 é $T \times T$ e a matriz \mathbf{I}_N é $N \times N$. A produto **Kronecker** de \mathbf{I}_N por \mathbf{M}^0 ,

$$\mathbf{I}_{N \times N} \otimes \mathbf{M}_{T \times T}^0$$

é uma matriz $NT \times NT$. Dessa forma, podemos definir:

$$\ddot{\mathbf{y}} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{M}^0) \mathbf{y},$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{M}^0) \mathbf{X}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{M}^0) \mathbf{u},$$

E com isso, reescrevermos (7.9) como:

$$\hat{\beta}^{FE} = \beta + \left(\ddot{\mathbf{X}}' \ddot{\mathbf{X}} \right)^{-1} \ddot{\mathbf{X}}' \ddot{\mathbf{u}} \quad (7.10)$$

Ou ainda, como:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{FE} &= \beta + [\mathbf{X}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{M}^0)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{M}^0)\mathbf{X}]^{-1} [\mathbf{X}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{M}^0)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{M}^0)\mathbf{u}] \\ \hat{\beta}^{FE} &= \beta + [\mathbf{X}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{M}^0)\mathbf{X}]^{-1} [\mathbf{X}'(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{M}^0)\mathbf{u}] \end{aligned} \quad (7.11)$$

onde usamos as propriedades de simetria e idempotência da matriz \mathbf{M}^0 .

7.7 Matriz de Covariância Robusta

Wooldridge (2010, sec.10.5.2 – Asymptotic Inference with Fixed Effects, p.269–272)

A matriz de covariância assintótica fica:

$$\mathbf{E} \left(\ddot{\mathbf{X}}' \ddot{\mathbf{X}} \right)^{-1} \mathbf{E} \left(\ddot{\mathbf{X}}' \ddot{\mathbf{u}} \ddot{\mathbf{u}}' \ddot{\mathbf{X}} \right) \mathbf{E} \left(\ddot{\mathbf{X}}' \ddot{\mathbf{X}} \right)^{-1}$$

A qual pode ser estimada por

$$\left(\ddot{\mathbf{X}}' \ddot{\mathbf{X}} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \ddot{\mathbf{x}}_i' \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i' \ddot{\mathbf{x}}_i \right) \left(\ddot{\mathbf{X}}' \ddot{\mathbf{X}} \right)^{-1}$$

Analizando $E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{u}}_i \ddot{\mathbf{u}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i)$:

$$\begin{aligned} E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{u}}_i \ddot{\mathbf{u}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i) &= E[(\mathbf{X}_i' \mathbf{M}^{0'}) (\mathbf{M}^0 \mathbf{u}_i) (\mathbf{u}_i' \mathbf{M}^{0'}) (\mathbf{M}^0 \mathbf{X}_i)] \\ &= E[(\mathbf{X}_i' \mathbf{M}^{0'}) \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' (\mathbf{M}^0 \mathbf{X}_i)] \\ &= E[\ddot{\mathbf{X}}_i' \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i] \end{aligned}$$

onde usamos as propriedades de simetria e idempotência da matriz \mathbf{M}^0 e as definições de $\ddot{\mathbf{X}}_i$ e $\ddot{\mathbf{u}}_i$.

Sob **FE.3**, $E(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' | \ddot{\mathbf{X}}_i) = \sigma_u^2 \mathbf{I}_T$, temos:

$$E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i) = E[E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i | \mathbf{X}_i, c_i)] = E[\ddot{\mathbf{X}}_i' E(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' | \mathbf{X}_i, c_i) \ddot{\mathbf{X}}_i] = \sigma_u^2 \mathbf{I}_T E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i)$$

Assim, a matriz de covariância fica:

$$E(\ddot{\mathbf{X}}' \ddot{\mathbf{X}})^{-1} \sigma_u^2 \mathbf{I}_T E(\ddot{\mathbf{X}}_i' \ddot{\mathbf{X}}_i) E(\ddot{\mathbf{X}}' \ddot{\mathbf{X}})^{-1} = \boxed{\sigma_u^2 E(\ddot{\mathbf{X}}' \ddot{\mathbf{X}})^{-1}}$$

Estimando Elementos da Matriz de Covariância

Queremos estimar σ_u^2 por valores amostrais:

$$E(u_{it}^2) = \sigma_u^2 \quad \text{e} \quad E(\ddot{u}_{it}^2) = \sigma_u^2$$

$$\sigma_u^2 = E[(u_{it} - \bar{u}_i)^2] = E(u_{it}^2) + E(\bar{u}_i^2) - 2E(u_{it} \bar{u}_i)$$

utilizando $\bar{u}_i = T^{-1} \sum_{t=1}^T u_{it}$:

$$\begin{aligned} E(\ddot{u}_{it}^2) &= E(u_{it}^2) + T^{-1} \sum_{t=1}^T E(u_{it}^2) - 2E(u_{it} T^{-1} \sum_{t=1}^T u_{it}) = E(u_{it}^2) + T^{-1} \sum_{t=1}^T E(u_{it}^2) - 2T^{-1} \sum_{t=1}^T E(u_{it}^2) \\ &= \sigma_u^2 + \sigma_u^2/T - 2\sigma_u^2/T = \sigma_u^2(1 - 1/T) \implies \boxed{\sigma_u^2 = \frac{T}{T-1} \sigma_{\ddot{u}}^2} \end{aligned}$$

Utilizando estimadores amostrais para $E(\ddot{u}_{it}^2)$:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{T}{T-1} \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{\ddot{u}}_{it}^2$$

Ajustando os Graus de Liberdade (Cortando T s e subtraindo K do número de regressores):

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{N(T-1) - K} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{\ddot{u}}_{it}^2. \quad (7.12)$$

Teste para Autocorrelação AR(1)

Wooldridge (2010, p.275)

$$\begin{aligned} E(\ddot{u}_{it} \ddot{u}_{i,t-1}) &= E[(u_{i,t} - \bar{u}_i)(u_{i,t-1} - \bar{u}_i)] \\ &= E(u_{i,t} u_{i,t-1}) - E(u_{i,t} \bar{u}_i) - E(\bar{u}_i u_{i,t-1}) + E(\bar{u}_i^2) \\ &= 0 - T^{-1} \sigma_u^2 - T^{-1} \sigma_u^2 + T^{-1} \sigma_u^2 \\ E(\ddot{u}_{it} \ddot{u}_{i,t-1}) &= -T^{-1} \sigma_u^2 \end{aligned}$$

$$\text{Corr}(\ddot{u}_{it}, \ddot{u}_{i,t-1}) = \frac{\text{E}(\ddot{u}_{it}\ddot{u}_{i,t-1})}{\text{E}(\ddot{u}_{it}^2)} = \frac{-T^{-1}\sigma_u^2}{\frac{T-1}{T}\sigma_u^2} = \frac{-1}{T-1}$$

Vamos testar

$$H_0 : \delta = \frac{-1}{T-1}$$

(ausência de correlação em ***u***) na equação:

$$\hat{\ddot{u}}_{it} = \delta \hat{\ddot{u}}_{i,t-1} + e_{it}$$

para $t = 2, \dots, T$. Fazer teste t robusto.

8 Primeira Diferença (First Difference, FD, PD)

Wooldridge (2010, Sec.10.6 – First Difference Methods, p.279)

8.1 Modelo

O modelo linear de **efeitos não observados**:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \quad i = 1, \dots, N, \text{ e } t = 1, \dots, T. \quad (8.1)$$

$$y_{i,t-1} = \mathbf{x}_{i,t-1}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{i,t-1},$$

$$\begin{aligned} y_{it} - y_{i,t-1} &= (\mathbf{x}_{it} - \mathbf{x}_{i,t-1})\boldsymbol{\beta} + c_i - c_i + u_{it} - u_{i,t-1} \\ \Delta y_{it} &= \Delta \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it} \quad i = 1, \dots, N, \text{ e } t = 2, \dots, T. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Definindo $e_{it} = \Delta u_{it}$, reescrevemos (8.2) no formato matricial empilhando T :

$$\Delta \mathbf{y}_i = \Delta \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}_i \quad i = 1, \dots, N. \quad (8.3)$$

onde,

$\Delta \mathbf{y}_i$ é um vetor $(T-1) \times 1$

$\Delta \mathbf{X}_i$ é uma matriz $(T-1) \times K$

$\Delta \mathbf{x}_{it}$ é a $(t-1)$ -ésima linha da matriz $\Delta \mathbf{X}_i$.

$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$

\mathbf{e}_i é um vetor $(T-1) \times 1$

8.1.1 Matriz D

Vamos definir \mathbf{D} como a matriz $(T-1) \times T$ como a matriz bidiagonal cuja diagonal inferior é -1 e a diagonal superior é 1 . Assim,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

E podemos escrever $\Delta \mathbf{y}_i$ como:

$$\Delta \mathbf{y}_i = \mathbf{D} \mathbf{y}_i.$$

8.2 Estimação POLS

O estimador $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FD}$ é o POLS da regressão no modelo (8.3), assim:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FD} = \left(\sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{X}_i' \Delta \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{X}_i' \Delta \mathbf{y}_i \right)} \quad (8.4)$$

8.3 Hipóteses

As Hipóteses que usamos para $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FD}$ são:

FD.1: Exogeneidade Estrita: $E(u_{it} | \mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{iT}, c_i) = 0$, para $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N$.

FD.2: Posto completo de $E(\Delta \mathbf{X}_i' \Delta \mathbf{X}_i)$ (para inverter a matriz). $\text{posto}[E(\Delta \mathbf{X}_i' \Delta \mathbf{X}_i)] = K$.

FD.3: Homoscedasticidade: $E(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' | \mathbf{X}_i, c_i) = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{T-1}$.

8.4 Consistência

Usando (8.3) em (8.4):

$$\beta^{FD} = \beta + \left(\sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{X}_i' \Delta \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{X}_i' \mathbf{e}_i \right)$$

FD.1 é suficiente para $E(\Delta \mathbf{X}_i' \mathbf{e}) = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, N$. Uma condição necessária para $\hat{\beta}^{FD} \xrightarrow{p} \beta$ é $E(\mathbf{x}_{it} u_{it}) = E(\mathbf{x}_{it} u_{i,t-1}) = 0$, para $i = 1, \dots, N$ e $t = 2, \dots, T$. Note que sob **FD.1**, $E(\hat{\beta}^{FD} | \mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{iT}, c_i) = \beta$. Ou seja, $\hat{\beta}^{FD}$ é não viciado.

8.5 Variância

$$\text{Cov}(\beta^{FD}) = E(\Delta \mathbf{X}_i' \Delta \mathbf{X}_i)^{-1} E(\Delta \mathbf{X}_i' \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \Delta \mathbf{X}_i) E(\Delta \mathbf{X}_i' \Delta \mathbf{X}_i)^{-1}$$

Usando estimadores amostrais:

rever

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Cov}}(\beta^{FD}) &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{X}_i' \Delta \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{X}_i' \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \Delta \mathbf{X}_i \right) \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{X}_i' \Delta \mathbf{X}_i \right)^{-1} \\ &= N(\Delta \mathbf{X}' \Delta \mathbf{X}_i)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{X}_i' \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \Delta \mathbf{X}_i \right) (\Delta \mathbf{X}' \Delta \mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

onde $\Delta \mathbf{X}$ é a matriz $N(T-1) \times K$ das matrizes $\Delta \mathbf{X}_i$ empilhadas.

$$\Delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{X}_N \end{bmatrix}$$

8.5.1 Variância sob Homocedasticidade

Usando **FD.3**, temos

$$\begin{aligned} E(\Delta \mathbf{X}_i' \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \Delta \mathbf{X}_i) &= E[E(\Delta \mathbf{X}_i' \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i' \Delta \mathbf{X}_i | \mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{iT}, c_i)] \\ &= E(\Delta \mathbf{X}_i' \sigma_e^2 \mathbf{I}_{T-1} \Delta \mathbf{X}_i) = \sigma_e^2 E(\Delta \mathbf{X}_i' \Delta \mathbf{X}_i) \end{aligned}$$

Então, sob **FD.3**:

$$\widehat{\text{Cov}}(\beta^{FD}) = \sigma_e^2 E(\Delta \mathbf{X}_i' \Delta \mathbf{X}_i)^{-1}$$

onde

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{N(T-1) - K} \sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T \hat{e}_{it}^2.$$

8.5.2 Teste para autocorrelação AR(1) dos resíduos

A equação do erro e_{it} é

$$e_{it} = u_{it} - u_{i,t-1}$$

rearranjando os termos, encontramos

$$\boxed{u_{it} = u_{i,t-1} + e_{it}}, \quad t = 2, \dots, T.$$

que é um passeio aleatório. Sob **FD.3**, $e_{it} \sim \text{RB}(0, \sigma_e^2)$ e u_{it} é um passeio aleatório.

$$\hat{e}_{it} = \delta \hat{e}_{it-1} + \varepsilon_{it}, \quad t = 2, \dots, T.$$

Note que sob **FD.1**,

$$E(e_{it} | \mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{iT}, c_i) = 0$$

$$H_0 : \delta = 0$$

$$H_1 : \delta \neq 0$$

Sob **FD.3**,

$$\begin{aligned} E(e_{it}^2) &= E[(u_{it} - u_{it-1})^2] \\ &= E[u_{it}^2 + u_{it-1}^2 - 2u_{it}u_{it-1}] = 2\sigma_u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(e_{it}e_{i,t-1}) &= E[(u_{it} - u_{it-1})(u_{it-1} - u_{it-2})] \\ &= E[u_{it}u_{it-1} - u_{it}u_{it-2} - u_{it-1}^2 + u_{it-1}u_{it-2}] \\ &= E(-u_{it-1}^2) = -E(u_{it-1}^2) = -\sigma_u^2 \end{aligned}$$

$$E(e_{it}e_{i,t-2}) = E[(u_{it} - u_{it-1})(u_{it-2} - u_{it-3})] = 0$$

Assim, temos que, sob **FD.3**, $E(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i')$ é uma matriz tridiagonal $\mathbf{XX} \times \mathbf{XX}$:

$$E(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i') = \begin{bmatrix} 2\sigma_u^2 & -\sigma_u^2 & & & 0 \\ -\sigma_u^2 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\sigma_u^2 \\ 0 & & & -\sigma_u^2 & 2\sigma_u^2 \end{bmatrix}$$

onde

$$\text{Cov}(e_{it}, e_{it-1}) = \frac{-\sigma_u^2}{2\sigma_u^2} = \frac{-1}{2}.$$

Assim, podemos testar $H_0 : \delta = -1/2$ na seguinte equação

$$\hat{e}_{it} = \delta \hat{e}_{it-1} + \varepsilon_{it}.$$

Se **não rejeitar** H_0 temos evidência **favorável** a FE.

8.6 Teste de Exogeneidade Estrita

8.6.1 Teste para o Estimador FD

$$\Delta y_{it} = \Delta x_{it}\beta + w_{it}\gamma + e_{it}$$

onde w_{it} é um subconjunto de x_{it} (excluindo as dummies de tempo).

Testamos

$$H_0 : \gamma = \mathbf{0}$$

$$H_1 : \gamma \neq \mathbf{0}$$

via teste de Wald (Robusto).

8.6.2 Teste para o Estimador FE

$$y_{it} = x_{it}\beta + w_{it}\gamma + v_{it}$$

Testamos

$$H_0 : \gamma = \mathbf{0}$$

$$H_1 : \gamma \neq \mathbf{0}$$

Sob H_0 , podemos estimar o modelo via FE.

8.7 Alguns Detalhes

Remark. Como no modelo FE, perdemos as variáveis constantes no tempo. Por exemplo, uma variável cujo incremento é igual a 1 a cada período (e.g. experiência profissional), causa multicolinearidade perfeita, pois

$$\Delta d_2 + \cdots + \Delta d_T = \Delta exper.$$

8.7.1 Avaliação de Políticas

Se $T = 2$:

$$y_{i1} = x_{i1}\beta + \delta prog_{i1} + v_{i1}$$

$$y_{i2} = x_{i2}\beta + \delta prog_{i2} + v_{i2}$$

onde $prog_{i1} = 0$ para todo mundo. Vamos considerar

$$\Delta y_{i2} = \Delta x_{i2}\beta + \delta prog_{i2} + e_{i2}$$

como $prog_{i1} = 0$, então $prog_{i2} = prog_{i2} - prog_{i1} = \Delta prog_{i2}$.

Para $T > 2$:

$$\Delta y_{it} = \Delta x_{it}\beta + \delta \Delta prog_{it} + e_{it}, \quad t = 2, \dots, T.$$

Exemplo

$$\log(scrap_{it}) = x_{it}\beta + \delta_1 grant_t + \delta_2 grant_{t-1} + v_{it}.$$

9 System GLS (SGLS)

Wooldridge (2010, Sec.7.4 – Consistency and Asymptotic Normality of Generalized Least Squares, p.153)

9.1 Modelo Linear

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_i,$$

onde

\mathbf{y} é um vetor $G \times 1$

\mathbf{X}_i é uma matriz $G \times K$

$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$

\mathbf{u} é um vetor $G \times 1$

9.2 Hipóteses

SGLS.1: $E(\mathbf{X}_i \otimes \mathbf{u}_i) = \mathbf{0}_{G^2 \times K}$.

Isso implica que se \mathbf{X}_i contém constante,

$$E(u_{ig}) = 0, \quad g = 1, \dots, G.$$

Nesse caso, implica também que $E(x_{ikg}u_{ig}) = 0, k = 1, \dots, K, g = 1, \dots, G$.

SGLS.2: $\boldsymbol{\Omega} = E(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i')$.

Com $\boldsymbol{\Omega}$ positiva definida (para ter inversa).

SGLS.3: $E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i) = E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i)$.

É suficiente para **SGLS.3** supor $E(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' | \mathbf{X}_i) = \boldsymbol{\Omega}$, pois

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i) &= E[E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i | \mathbf{X}_i)] \\ &= E\left[\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \underbrace{E(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' | \mathbf{X}_i)}_{=\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i\right] \\ &= E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i) \end{aligned}$$

9.3 Estimação

O estimador SOLS é consistente, nesse caso, mas sua matriz de covariância é dada por:

$$\text{Avar}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS}) = E(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)^{-1} E(\mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \mathbf{X}_i) E(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)^{-1},$$

supondo $E(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' | \mathbf{X}_i) = \boldsymbol{\Omega}$,

$$\text{Avar}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS}) = E(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)^{-1} E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X}_i) E(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)^{-1}.$$

É possível encontrar $\boldsymbol{\Omega}^{1/2}$ e $\boldsymbol{\Omega}^{-1/2}$ tais que:

$$\boldsymbol{\Omega}^{1/2} \boldsymbol{\Omega}^{1/2} = \boldsymbol{\Omega} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \boldsymbol{\Omega}^{-1/2} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}$$

Agora, transformamos o sistema de equações ao realizarmos a pré-multiplicação do sistema por $\boldsymbol{\Omega}^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \mathbf{y}_i &= \boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{y}_i^* &= \mathbf{X}_i^* \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_i^* \end{aligned} \tag{9.1}$$

$$E(\mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_i^{*'}) = E\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1/2}\right) = \boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \underbrace{E(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i')}_{\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^{1/2} \boldsymbol{\Omega}^{1/2}} \boldsymbol{\Omega}^{-1/2} = \mathbf{I}_G.$$

$$E(\mathbf{X}_i^{*'} \mathbf{u}_i^*) = E\left(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \mathbf{u}_i\right) = E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{u}_i) = \mathbf{0}_{K \times 1}.$$

Então, o estimador SOLS aplicado ao modelo transformado (9.1) nos fornece um estimador consistente e eficiente.

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{SGLS} &= \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i^{*'} \mathbf{X}_i^* \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i^{*'} \mathbf{y}_i^* \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \mathbf{y}_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{y}_i \right) \end{aligned}$$

No formato puramente matricial:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}}^{SGLS} = [\mathbf{X} (\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1}) \mathbf{X}]^{-1} [\mathbf{X} (\mathbf{I}_N \otimes \boldsymbol{\Omega}^{-1}) \mathbf{y}]}$$

9.4 Variância

$$\begin{aligned} \text{Avar}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{SGLS}) &= E(\mathbf{X}_i^{*'} \mathbf{X}_i^*)^{-1} E(\mathbf{X}_i^{*'} \mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_i^{*'} \mathbf{X}_i^*) E(\mathbf{X}_i^{*'} \mathbf{X}_i^*)^{-1} \\ &= E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i)^{-1} E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i) E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i)^{-1}. \end{aligned}$$

Sob **SGLS.3**:

$$\text{Avar}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{SGLS}) = E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i)^{-1} E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i) E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i)^{-1} = E(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{X}_i).$$

9.5 Estimtação FSGLS (SGLS Factível)

Wooldridge (2010, Sec.7.5 – Feasible GLS, p.153)

Para obtermos $\boldsymbol{\beta}^{SGLS}$ precisamos conhecer $\boldsymbol{\Omega}$, o que não ocorre na prática. Então, precisamos estimar $\boldsymbol{\Omega}$ com um estimador consistente. Para tanto usamos um procedimento de dois passos:

1. Estimar $\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_i$ via **SOLS** e guardar o resíduo estimado $\hat{\mathbf{u}}_i$.
2. Estimar $\boldsymbol{\Omega}$ com o seguinte estimador $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$:

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i'$$

Note que $\hat{\boldsymbol{\Omega}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\Omega}$.

Com a estimativa $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ feita, podemos obter $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FSGLS}$ pela fórmula do $\boldsymbol{\beta}^{SGLS}$:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FGLS} = \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{X}_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{y}_i \right] \quad (9.2)$$

Empilhando as N observações, podemos expressar $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FGLS}$ matricialmente:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{FGLS} = [\mathbf{X}' (\mathbf{I}_N \otimes \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}) \mathbf{X}]^{-1} [\mathbf{X}' (\mathbf{I}_N \otimes \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}) \mathbf{y}] \quad (9.3)$$

9.6 Consistência FGLS

Reescrevendo a equação (9.3):

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{FGLS} &= \left[\mathbf{X}' \left(\mathbf{I}_N \otimes \hat{\Omega}^{-1} \right) \mathbf{X} \right]^{-1} \left[\mathbf{X}' \left(\mathbf{I}_N \otimes \hat{\Omega}^{-1} \right) (\mathbf{X}\beta + \mathbf{u}) \right] \\ &= \left[\mathbf{X}' \left(\mathbf{I}_N \otimes \hat{\Omega}^{-1} \right) \mathbf{X} \right]^{-1} \left\{ \left[\mathbf{X}' \left(\mathbf{I}_N \otimes \hat{\Omega}^{-1} \right) \mathbf{X} \right] \beta + \left[\mathbf{X}' \left(\mathbf{I}_N \otimes \hat{\Omega}^{-1} \right) \mathbf{u} \right] \right\} \\ \boxed{\hat{\beta}^{FGLS} &= \beta + \left[\mathbf{X}' \left(\mathbf{I}_N \otimes \hat{\Omega}^{-1} \right) \mathbf{X} \right]^{-1} \left[\mathbf{X}' \left(\mathbf{I}_N \otimes \hat{\Omega}^{-1} \right) \mathbf{u} \right]}\end{aligned}$$

Então, $\hat{\beta}^{FGLS} \xrightarrow{p} \beta$, se $\hat{\Omega} \xrightarrow{p} \Omega$.

9.7 Variância FGLS

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}^{FGLS}) = \left[\mathbf{X}' \left(\mathbf{I}_N \otimes \hat{\Omega}^{-1} \right) \mathbf{X} \right]^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i' \hat{\Omega}^{-1} \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i' \hat{\Omega}^{-1} \mathbf{x}_i \right) \left[\mathbf{X}' \left(\mathbf{I}_N \otimes \hat{\Omega}^{-1} \right) \mathbf{X} \right]^{-1}$$

onde $\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\beta}^{FGLS}$.

Sob Homocedasticidade (SGLS.3)

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}^{FGLS}) = \left[\mathbf{X}' \left(\mathbf{I}_N \otimes \hat{\Omega}^{-1} \right) \mathbf{X} \right]^{-1}$$

9.8 Testes

Podemos fazer o teste t e de Wald.

Além disso, podemos comparar o modelo restrito e irrestrito.

$$\text{Est. Teste} = \left[\tilde{\mathbf{u}}' \left(\mathbf{I} \otimes \hat{\Omega}^{-1} \right) \tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}' \left(\mathbf{I} \otimes \hat{\Omega}^{-1} \right) \hat{\mathbf{u}} \right]$$

Sob H_0 , Est. Teste $\sim \chi_Q^2$. Onde,

$\tilde{\mathbf{u}}$ é o vetor de resíduos FGLS do modelo restrito.

$\hat{\mathbf{u}}$ é o vetor de resíduos FGLS do modelo irrestrito.

$\hat{\Omega}$ é construída com os resíduos SOLS do modelo irrestrito.

Q é o número de restrições.

10 Modelo de Efeitos Aleatórios (EA, Random Effects, RE)

Wooldridge (2010, Sec.10.4 – Random Effects Methods, p.257)

10.1 Modelo

O modelo linear de **efeitos não observados**:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \quad t = 1, \dots, T \quad \text{e} \quad i = 1, \dots, N. \quad (10.1)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + c_i\mathbf{1} + \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (10.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + c_i\mathbf{1} + \mathbf{u}. \quad (10.3)$$

10.2 Hipóteses

As Hipóteses que usamos para $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{RE}$ são:

Hipótese (RE.1). Usamos o modelo correto e c_i não é endógeno.

- a) $E(u_{it} | \mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{iT}, c_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$
- b) $E(c_i | \mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{iT}) = E(c_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$

Hipótese (RE.2). Posto completo de $E(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i)$.

Definindo a matriz $T \times T$, $\boldsymbol{\Omega} \equiv E(\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i')$, queremos que $E(\mathbf{X}_i\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i)$ tenha posto completo (posto = K).

A matriz $\boldsymbol{\Omega}$ é simétrica $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega}$ e positiva definida $\det(\boldsymbol{\Omega}) > 0$. Assim podemos achar $\boldsymbol{\Omega}^{1/2}$ e $\boldsymbol{\Omega}^{-1/2}$ com $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^{1/2}\boldsymbol{\Omega}^{1/2}$ e $\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \boldsymbol{\Omega}^{-1/2}\boldsymbol{\Omega}^{-1/2}$.

Hipótese (RE.3).

- a) $E(\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i' | \mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{iT}, c_i) = \sigma_u^2\mathbf{I}_T;$
- b) $E(c_{it} | \mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{iT}) = E(c_i) = \sigma_c^2.$

Remark.

RE.1 (a) está presente em FE e FD.

RE.1 (b) está presente em POLS e implica ausência de correlação entre c_i e os regressores do modelo.

10.3 Estimação

Vamos considerar o modelo:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it}, \quad t = 1, \dots, T \quad \text{e} \quad i = 1, \dots, N.$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}.$$

Sob **RE.3**:

$$E(v_{it}v_{it}) = E(c_i^2 + 2c_iu_{it} + u_{it}^2) = \sigma_c^2 + \sigma_u^2 = \sigma_v^2$$

$$E(v_{it}v_{is}) = E[(c_i + u_{it})(c_i + u_{is})] = E(c_i^2 + c_iu_{is} + u_{it}c_i + u_{it}u_{is}) = \sigma_c^2.$$

Então,

$$E(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i') = \begin{bmatrix} \sigma_c^2 + \sigma_u^2 & \sigma_c^2 & \cdots & \sigma_c^2 \\ \sigma_c^2 & \sigma_c^2 + \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_c^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_c^2 & \sigma_c^2 & \cdots & \sigma_c^2 + \sigma_u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_c^2 + \sigma_u^2 & & & \sigma_c^2 \\ & \ddots & & \\ \sigma_c^2 & & & \sigma_c^2 + \sigma_u^2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{\Omega}$$

Também poderíamos escrever:

$$\mathbf{\Omega} = E(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i') = \sigma_u^2 \mathbf{I}_T + \sigma_c^2 \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T'$$

onde $\sigma_u^2 \mathbf{I}_T$ é uma matriz diagonal, e $\sigma_c^2 \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T'$ é uma matriz com todos os elementos iguais a σ_c^2 .

10.3.1 Estimador RE

$$\hat{\beta}^{RE} = \left[\mathbf{X}' (\mathbf{I}_N \otimes \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}) \mathbf{X} \right]^{-1} \left[\mathbf{X}' (\mathbf{I}_N \otimes \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}) \mathbf{y} \right] \quad (10.4)$$

onde

$$\hat{\mathbf{\Omega}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_v^2 & & \hat{\sigma}_c^2 \\ & \ddots & \\ \hat{\sigma}_c^2 & & \hat{\sigma}_v^2 \end{bmatrix}$$

onde conseguimos estimar σ_v^2 e σ_c^2 por estimadores amostrais:

$$\hat{\sigma}_v^2 = (NT - K)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2$$

$$\hat{\sigma}_c^2 = \left[N \frac{T(T-1)}{2} - K \right]^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{s=t+1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{is}$$

e \hat{v}_{it} é o resíduo de POLS do modelo (10.1)

$$\hat{v}_{it}^{POLS} = y_{it} - \hat{y}_{it}^{POLS} = y_{it} - \mathbf{x}_{it} \hat{\beta}^{POLS}$$

10.4 Inferência

Robusta:

$$\text{Var}(\hat{\beta}^{RE}) = E \left\{ \left[\mathbf{X}' (\mathbf{I}_N \otimes \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}) \mathbf{X} \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i' \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1} \hat{\mathbf{v}}_i \hat{\mathbf{v}}_i' \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1} \mathbf{x}_i \right] \left[\mathbf{X}' (\mathbf{I}_N \otimes \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}) \mathbf{X} \right]^{-1} \right\},$$

Sob Homocedasticidade:

$$\text{Var}(\hat{\beta}^{RE}) = E \left[\mathbf{X}' (\mathbf{I}_N \otimes \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}) \mathbf{X} \right].$$

10.5 Testes

Teste para presença de componente não observável

$$H_0 : \sigma_c^2 = 0$$

$$H_1 : \sigma_c^2 \neq 0$$

Estatística do teste:

$$\text{Est. Teste} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{s=t+1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{is}}{\left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^{T-1} \sum_{s=t+1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{is} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

Sob H_0 , Est. Teste $\sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Teste de Hausman (FE v. RE)

H_0 : Tanto FE, quanto RE são consistentes

H_1 : Apenas FE é consistente

Estatística do teste:

$$\text{Est. Teste} = \left(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{FE} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_{RE} \right) \left[\widehat{\text{Var}}(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{FE}) - \widehat{\text{Var}}(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{RE}) \right]^{-1} \left(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{FE} - \hat{\boldsymbol{\delta}}_{RE} \right)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ é um vetor $M \times 1$ e M é o número de regressores que variam no tempo.
Sob H_0 ,

Est. Teste $\overset{a}{\sim} \chi_M^2$.

11 Variáveis Instrumentais

11.1 Modelo *cross-section*

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i ; \quad i = 1, \dots, N. \quad (11.1)$$

Vamos supor:

x_1 é exógena.

x_2 é endógena.

Assim, precisamos encontrar um instrumento z_i para x_{2i} , uma vez que queremos estimar β_0 , β_1 e β_2 de maneira consistente.

Endogeneidade A variável explicativa x_k é dita **endógena** se ela for correlacionada com erro. Se x_k for não correlacionada com o erro, então x_k é dita **exógena**.

Endogeneidade surge, normalmente, de três maneiras diferentes:

1. Variável Omitida;
2. Simultaneidade;
3. Erro de Medida.

Características de Bom Instrumento Para z_i ser um bom instrumento precisamos que z tenha:

1. $Cov(z_i, \varepsilon_i) = 0 \implies z$ é exógena.
2. $Cov(z_i, x_{2i}) \neq 0 \implies$ correlação com x_{2i} após controlar para outras variáveis.

11.2 Estimação

1º Estágio Estimar \hat{x}_{2i} via MQO e guardar valores *fitados* de:

$$x_{2i} = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 z_i + v_i.$$

Note que: $Cov(x_{1i}, \varepsilon_i) = Cov(z_i, \varepsilon_i) = 0 \implies Cov(\hat{x}_{2i}, \varepsilon_i) = 0$.

2º Estágio

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 \hat{x}_{2i} + \varepsilon_i$$

$$\hat{\beta}_1 \xrightarrow{p} \beta_1 \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_2 \xrightarrow{p} \beta_2.$$

Formato Matricial

$$\hat{\beta}^{MQLE} = (\hat{\mathbf{X}}' \hat{\mathbf{X}})^{-1} \hat{\mathbf{X}}' \mathbf{y}$$

$\hat{\mathbf{X}}$ são as variáveis exógenas do modelo estrutural e preditos no primeiro estágio. Podemos representar $\hat{\mathbf{X}}$ por

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{Z} (\mathbf{Z}' \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}' \mathbf{X} = \mathbf{P}_Z \mathbf{X}$$

onde \mathbf{Z} é a matriz contendo todas as variáveis exógenas do problema (exógenas da eq. estrutural) mais os instrumentos.

Além disso, definimos a matriz de projeção em \mathbf{Z} .

$$\mathbf{P}_Z = \mathbf{Z} (\mathbf{Z}' \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}'$$

Pelas propriedades das matrizes de projeção, \mathbf{P}_Z é simétrica e idempotente:

$$\mathbf{P}_Z' = \mathbf{P}_Z \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_Z \mathbf{P}_Z = \mathbf{P}_Z.$$

Então,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{MQLE} &= \left(\hat{\mathbf{X}}' \hat{\mathbf{X}} \right)^{-1} \hat{\mathbf{X}}' \mathbf{y} = \left(\mathbf{X}' \mathbf{P}_Z \mathbf{P}_Z \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{P}_Z \mathbf{y} = \left(\mathbf{X}' \mathbf{P}_Z \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{P}_Z \mathbf{y} = \hat{\beta}^{IV} \\ \hat{\beta}^{IV} &= \beta + \left(\mathbf{X}' \mathbf{P}_Z \hat{\mathbf{X}} \right)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{P}_Z \varepsilon\end{aligned}$$

12 System Instrumental Variable (SIV)

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_i; \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T. \quad (12.1)$$

onde

\mathbf{y}_i é um vetor $T \times 1$,

\mathbf{X}_i é uma matriz $T \times K$,

$\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de coeficientes $K \times 1$,

\mathbf{u}_i é o vetor de erros $T \times 1$.

Se é verdade que há endogeneidade em (12.1), então:

$$E(\mathbf{X}_i' \mathbf{u}_i) \neq 0$$

Seja \mathbf{Z}_i uma matriz $T \times L$ com $L \geq K$ de variáveis exógenas (incluindo o instrumento).

Hipótese (SIV.1).

$$E(\mathbf{Z}_i' \mathbf{u}_i) = 0$$

Hipótese (SIV.2).

$$\text{posto} [E(\mathbf{X}_i' \mathbf{Z}_i)] = 0$$

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{iT} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{iT} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{iT} \end{bmatrix},$$

Se os instrumentos forem os mesmos em todas as equações:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} z_{i1} \\ \vdots \\ z_{iT} \end{bmatrix}.$$

Se os instrumentos forem os diferentes:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} z_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & z_{iT} \end{bmatrix}_{T \times L},$$

onde $L = L_1, \dots, L_T$.

12.1 Estimação

O estimador **SIV** é dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{SIV} = \left[\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{Z}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i' \mathbf{Z}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i' \mathbf{X}_i \right) \right]^{-1} \left[\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i' \mathbf{Z}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i' \mathbf{Z}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i' \mathbf{y}_i \right) \right]$$

No formato puramente matricial:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{SIV} = [\mathbf{X}' \mathbf{Z} (\mathbf{Z}' \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}' \mathbf{X}]^{-1} [\mathbf{X}' \mathbf{Z} (\mathbf{Z}' \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}' \mathbf{y}]$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{SIV} = (\mathbf{X}' \mathbf{P}_Z \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{P}_Z \mathbf{y}).$$

O estimador SIV também é chamado de S2SLS.

A consistência é garantida por **SIV.1** e utilizando estimador amostral:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i' \mathbf{u}_i \xrightarrow{p} E(\mathbf{Z}_i' \mathbf{u}_i) = 0.$$

12.2 Matriz de Covariância

$$\begin{aligned} \text{Avar}(\hat{\beta}^{SIV}) &= [\text{E}(\mathbf{X}'_i \mathbf{Z}_i) \text{E}(\mathbf{Z}'_i \mathbf{Z}_i)^{-1} \text{E}(\mathbf{Z}'_i \mathbf{X}_i)]^{-1} \\ &\quad [\text{E}(\mathbf{X}'_i \mathbf{Z}_i) \text{E}(\mathbf{Z}'_i \mathbf{Z}_i)^{-1} \text{E}(\mathbf{Z}'_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}'_i \mathbf{Z}_i) \text{E}(\mathbf{Z}'_i \mathbf{Z}_i)^{-1} \text{E}(\mathbf{Z}'_i \mathbf{X}_i)] \\ &\quad [\text{E}(\mathbf{X}'_i \mathbf{Z}_i) \text{E}(\mathbf{Z}'_i \mathbf{Z}_i)^{-1} \text{E}(\mathbf{Z}'_i \mathbf{X}_i)]^{-1} \end{aligned}$$

Hipótese (SIV.3).

$$\text{E}(\mathbf{Z}'_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}'_i \mathbf{Z}_i) = \sigma_u^2 \text{E}(\mathbf{Z}'_i \mathbf{Z}_i)$$

Nesse caso,

$$\begin{aligned} \text{Avar}(\hat{\beta}^{SIV}) &= \sigma_u^2 [\text{E}(\mathbf{X}'_i \mathbf{Z}_i) \text{E}(\mathbf{Z}'_i \mathbf{Z}_i)^{-1} \text{E}(\mathbf{Z}'_i \mathbf{X}_i)]^{-1} \\ \text{Var}(\hat{\beta}^{SIV}) &= \hat{\sigma}_u^2 [(\mathbf{X}' \mathbf{Z})(\mathbf{Z}' \mathbf{Z})^{-1} (\mathbf{Z}' \mathbf{X})]^{-1} = \hat{\sigma}_u^2 (\mathbf{X}' \mathbf{P}_Z \mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

Matriz Robusta

$$\text{Var}(\hat{\beta}^{SIV}) = (\mathbf{X}' \mathbf{P}_Z \mathbf{X})^{-1} \left[\mathbf{X}' \mathbf{Z} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{z}'_i \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}'_i \mathbf{z}_i \right) \mathbf{Z}' \mathbf{X} \right] (\mathbf{X}' \mathbf{P}_Z \mathbf{X})^{-1}$$

onde

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}^{SIV} = \mathbf{y} - \mathbf{X}_i \hat{\beta}^{SIV}.$$

13 GMM

Wooldridge (2010, Sec 8.3, p.188)

A condição de ortogonalidade em **SIV.1** sugere uma estratégia de estimação. Sob hipóteses **SIV.1** e **SIV.2**, β é o *único* vetor $K \times 1$ que resolve o conjunto de condições de momentos populacionais

$$E[\mathbf{Z}'_i(\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i\beta)] = \mathbf{0}$$

Assim, temos que β é identificado. Uma vez que médias amostrais são estimadores consistentes para momentos populacionais, podemos aplicar o princípio da analogia e um estimador $\hat{\beta}$ de β pode ser achado quando resolvemos a seguinte equação:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{Z}'_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\beta}) = \mathbf{0}. \quad (13.1)$$

A equação acima é um sistema de L equações com K incógnitas em $\hat{\beta}$.

Primeiro, resolvemos o caso onde $L = K$ (apenas substituímos a variável endógena por um instrumento). Então, se a matriz $K \times K$, $\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}'_i \mathbf{X}_i$, é não singular podemos resolver para $\hat{\beta}$ e achamos:

$$\hat{\beta} = \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{Z}'_i \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{Z}'_i \mathbf{y}_i \right) \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = (\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{y})}$$

No entanto, quando $L > K$, temos mais colunas na matriz \mathbf{X} , do que precisamos para identificação. Desse modo, a escolha de $\hat{\beta}$ é mais complicada. Exceto em casos especiais, a equação (13.1) não tem solução. Então, temos que escolher $\hat{\beta}$ de modo a minimizar (13.1). Para tanto, uma ideia é minimizar o quadrado da norma Euclidiana do vetor $L \times 1$ na equação (13.1). Assim, tirando N^{-1} , temos:

$$\min_{\beta} \left\| \sum_{i=1}^N \mathbf{Z}'_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\beta}) \right\|^2 \Rightarrow \min_{\beta} \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}'_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\beta}) \right]' \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}'_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\beta}) \right]$$

onde:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}'_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\beta}) \right]' \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}'_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\beta}) \right] &= (\mathbf{Z}'\mathbf{y} - \mathbf{Z}'\mathbf{X}\beta)' (\mathbf{Z}'\mathbf{y} - \mathbf{Z}'\mathbf{X}\beta) \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{X}\beta - \beta'\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{y} + \beta'\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{X}\beta \end{aligned}$$

Derivando em relação em β e igualando a zero:

$$-2\mathbf{y}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{X} + 2\beta'\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{X} = 0 \Rightarrow \beta'\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{X} = \mathbf{y}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{X}$$

$$\beta' = (\mathbf{y}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1} \Rightarrow \boxed{\beta = (\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Z}\mathbf{Z}'\mathbf{y})}$$

Estimador mais Eficiente Uma classe mais geral de estimadores é obtido usando uma **matriz peso** na forma quadrática. Seja $\widehat{\mathbf{W}}$ uma matriz $L \times L$ simétrica e positiv semidefinida, onde incluimos o chapéu para enfatizarmos que $\widehat{\mathbf{W}}$ é, geralmente, um estimador. Um **estimador GMM** (Método Generalizado dos Momentos) de β é um vetor $\hat{\beta}$ que resolve o problema:

$$\min_{\beta} \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}'_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\beta}) \right]' \widehat{\mathbf{W}} \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{Z}'_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\beta}) \right]$$

Usando notação vetorial temos:

$$\text{Min}_{\hat{\beta}} \left[\mathbf{y}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{X} \hat{\beta} - \hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{y} + \hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{X} \hat{\beta} \right]$$

Derivando em relação em $\hat{\beta}$ e igualando a zero:

$$-2\mathbf{y}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{X} + 2\hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{X} = 0 \implies \hat{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{X} = \mathbf{y}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{X}$$

$$\hat{\beta}' = (\mathbf{y}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{X}) (\mathbf{X}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{X})^{-1}$$

$$\boxed{\hat{\beta}^{GMM} = (\mathbf{X}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{y})}$$

13.1 Valor Esperado

$$\boxed{E(\hat{\beta}^{GMM}) = \beta + E[(\mathbf{X}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}' \mathbf{u})]}.$$

13.2 Matriz de Covariância Assintótica

Hipótese (SIV.4).

$$\widehat{\mathbf{W}} \xrightarrow{p} \mathbf{W}.$$

$$\text{Avar}(\beta^{GMM}) = [E(\mathbf{X}'_i \mathbf{Z}_i) \mathbf{W} E(\mathbf{Z}'_i \mathbf{X}_i)]^{-1} [E(\mathbf{X}'_i \mathbf{Z}_i) \mathbf{\Lambda} \mathbf{W} \mathbf{\Lambda} E(\mathbf{Z}'_i \mathbf{X}_i)] [E(\mathbf{X}'_i \mathbf{Z}_i) \mathbf{W} E(\mathbf{Z}'_i \mathbf{X}_i)]^{-1}$$

onde $\mathbf{\Lambda} = E(\mathbf{Z}'_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}'_i \mathbf{Z}_i)$ com $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{W}^{-1}$:

$$\text{Avar}(\beta^{GMM}) = [E(\mathbf{X}'_i \mathbf{Z}_i) \mathbf{\Lambda} E(\mathbf{Z}'_i \mathbf{X}_i)]^{-1}$$

O estimador com $\mathbf{W} = \mathbf{\Lambda}^{-1}$ é eficiente na classe dos GMM. Também é chamado de minimum chi-square estimator.

OBS. Se $\mathbf{W} = (\mathbf{Z}' \mathbf{Z})^{-1}$ temos S2LS.

13.3 GMM - 3SLS

Podemos supor alguma estrutura para $E(\mathbf{Z}_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}'_i \mathbf{Z}_i)$, por exemplo:

$$E(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i | i) = \mathbf{\Omega} \quad \text{ou} \quad E(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i | i) = \sigma_u^2 \mathbf{I}_G.$$

Nesse caso:

$$\hat{\mathbf{\Omega}} = N^{-1} \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}'_i$$

$$\widehat{\mathbf{W}} = [\mathbf{Z} (\mathbf{I}_N \otimes \hat{\mathbf{\Omega}}) \mathbf{Z}]^{-1}.$$

Supondo correta uma estrutura particular para $\mathbf{\Omega}$, o GMM-3SLS é mais eficiente que o GMM (min. chi-square).

13.4 Modelo de Painei Dinâmico

$$y_{it} = \rho y_{i,t-1} + \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}; \quad t = 2, \dots, T$$

$$y_{i1} = \rho y_{i,t-2} + \mathbf{x}_{i,t-1}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{i,t-1};$$

onde $c_i + u_{it} = v_{it}$ e temos $\text{Cov}(y_{i,t-1}, v_{it}) \neq 0$.

$$\Delta y_{it} = \rho \Delta y_{i,t-1} + \Delta \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it}; \quad t = 3, \dots, T$$

definindo

$$\Delta y_{i,t-1} = y_{i,t-1} - y_{i,t-2}$$

$$\Delta u_{i,t} = u_{i,t} - u_{i,t-1}$$

temos que

$$\text{Cov}(y_{i,t-1}, u_{i,t-1}) \neq 0 \implies \text{Cov}(\Delta y_{i,t-1}, \Delta u_{i,t}) \neq 0$$

Instrumentos para $\Delta y_{i,t-1}$ são $y_{i,t-2}, y_{i,t-3}, \dots, y_{i1}$. Podemos usar todos instrumentos disponíveis ou uma subconjunto deles (regra de bolso: 4 instrumentos).

14 S2SLS

14.1 FEIV

14.2 FDIV

14.3 REIV

14.4 Alguns Testes

15 Exogeneidade Estrita e FDIV

15.1 Modelo

No seguinte modelo

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + u_{it},$$

para $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N$.

- y_{it} escalar;
- \mathbf{x}_{it} vetor $1 \times K$;
- $\boldsymbol{\beta}$ vetor $K \times 1$;
- u_{it} escalar.

$\{x_{it}\}$ é estritamente **exógeno** se valer:

$$E(u_{it} | \mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{iT}) = 0, \quad t = 1, \dots, T$$

ou seja:

$$E(y_{it} | \mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{iT}) = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta}, \quad t = 1, \dots, T$$

o que é equivalente a hipótese de que utilizamos o modelo linear correto.

Para o seguinte modelo:

$$y_{it} = \mathbf{z}_{it}\boldsymbol{\gamma} + \rho y_{it-1} + c_i + u_{it}, \quad t = 2, \dots, T$$

é **impossível** termos exogeneidade estrita. Isso porque, nesse modelo, de efeitos não observados temos:

$$E(y_{it} | \mathbf{z}_{i1}, \dots, \mathbf{z}_{iT}, y_{it-1}, c_i) \neq 0.$$

Isso ocorre porque, y_{it} é afetado por y_{it-1} que contribui para y_{it} com, pelo menos, ρc_i .

$$\left. \begin{aligned} y_{it} &= \mathbf{z}_{it}\boldsymbol{\gamma} + \rho y_{it-1} + c_i + u_{it} \\ y_{it-1} &= \mathbf{z}_{it-1}\boldsymbol{\gamma} + \rho y_{it-2} + c_i + u_{it-1} \end{aligned} \right\} \implies y_{it} = \mathbf{z}_{it}\boldsymbol{\gamma} + \rho(\mathbf{z}_{it-1}\boldsymbol{\gamma} + \rho y_{it-2} + c_i + u_{it-1}) + c_i + u_{it}.$$

Para eliminarmos este efeito, podemos tirar a primeira diferença do modelo:

$$y_{it} - y_{it-1} = (\mathbf{z}_{it} - \mathbf{z}_{it-1})\boldsymbol{\gamma} + \rho(y_{it-1} - y_{it-2}) + (c_i - c_i) + (u_{it} - u_{it-1})$$

$\Delta y_{it} = \Delta \mathbf{z}_{it}\boldsymbol{\gamma} + \rho \Delta y_{it-1} + \Delta u_{it}, \quad t = 3, \dots, T$

(15.1)

15.2 Estimação

Não podemos estimar o modelo (15.1) por POLS, uma vez que $Cov(\Delta y_{it-1}, \Delta u_{it}) \neq 0$. Como saída, podemos estimar por P2SLS, usando instrumentos para Δy_{it-1} (alguns instrumentos para Δy_{it-1} são $y_{it-2}, y_{it-3}, \dots, y_{i1}$).

15.2.1 P2SLS

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}'\boldsymbol{\beta} + u_{it}$$

- $i = 1, \dots, N$
- $t = 1, \dots, T$
- y_{it} escalar;
- \mathbf{x}_{it} vetor $K \times 1$;
- $\boldsymbol{\beta}$ vetor $K \times 1$;
- u_{it} escalar.

$$\boxed{\boldsymbol{\beta}^{P2SLS} = (\mathbf{X}'\mathbf{P}_Z\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{P}_Z\mathbf{y})}$$

com

$$\boxed{\mathbf{P}_Z = \mathbf{Z}'(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}}$$

onde \mathbf{P}_Z é a matriz de projeção em Z .

15.2.2 FDIV

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}'\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T$$

$$\Delta y_{it} = \Delta \mathbf{x}_{it}'\boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 2, \dots, T$$

Vamos supor $\Delta \mathbf{x}_{it}'$ tem variável endógena (y_{it} , no caso). \mathbf{w}_{it} é um vetor $1 \times L_t$ de instrumentos, onde $L_t \geq K$. Se os instrumentos forem diferentes:

$$W_i = \text{diag}(\mathbf{w}_{i2}', \mathbf{w}_{i3}', \dots, \mathbf{w}_{iT}')$$

onde W_i é uma matriz $(T-1) \times L$

$$L = L_2 + L_3 + \dots + L_T$$

15.3 Hipóteses

FDIV.1: $E(\mathbf{w}_{it}\Delta u_{it}') = 0$ para $i = 1, \dots, N, t = 2, \dots, T$.

FDIV.2: $E(W_i'W_i) = L$

FDIV.3: $E(W_i'\Delta X_i) = K$

15.4 Estimação FDIV

$$\boxed{\boldsymbol{\beta}^{FDIV} = (\Delta \mathbf{X}'\mathbf{P}_W\Delta \mathbf{X})^{-1}(\Delta \mathbf{X}'\mathbf{P}_W\Delta \mathbf{y})}$$

$$\boxed{\mathbf{P}_W = \mathbf{W}(\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}'}$$

15.5 Valor Esperado

$$E(\boldsymbol{\beta}^{FDIV}) = \boldsymbol{\beta} + (\Delta \mathbf{X}'\mathbf{P}_W\Delta \mathbf{X})^{-1}(\Delta \mathbf{X}'\mathbf{P}_W\mathbf{e})$$

15.6 Variância

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FDIV}) &= E \left\{ [E(\boldsymbol{\beta}^{FDIV}) - \boldsymbol{\beta}] [E(\boldsymbol{\beta}^{FDIV}) - \boldsymbol{\beta}]' \right\} \\
 &= E \left\{ [\Delta \mathbf{X}' \mathbf{P}_W \Delta \mathbf{X}]^{-1} [\Delta \mathbf{X}' \mathbf{P}_W \mathbf{e}] [\Delta \mathbf{X}' \mathbf{P}_W \mathbf{e}]' [\Delta \mathbf{X}' \mathbf{P}_W \Delta \mathbf{X}]^{-1} \right\} \\
 &= E \left[(\Delta \mathbf{X}' \mathbf{P}_W \Delta \mathbf{X})^{-1} (\Delta \mathbf{X}' \mathbf{P}_W \mathbf{e} \mathbf{e}' \mathbf{P}_W \Delta \mathbf{X}) (\Delta \mathbf{X}' \mathbf{P}_W \Delta \mathbf{X})^{-1} \right]
 \end{aligned}$$

$$e_i = \Delta u_{it}.$$

16 Máxima Verossimilhança

17 Latent Variables, Probit and Logit

17.1 Modelo

Suponha y^* não observável (**latente**) seguindo o seguinte modelo:

$$y_i^* = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i. \quad (17.1)$$

Defina y como:

$$y_i = \begin{cases} 1, & y_i^* \geq 0 \\ 0, & y_i^* < 0 \end{cases}$$

temos que:

$$P(y_i = 1 | \mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$$

$$P(y_i = 0 | \mathbf{x}) = 1 - p(\mathbf{x}).$$

Além disso, pela definição de y_i , equação (17.1), temos:

$$\begin{aligned} P(y_i = 1 | \mathbf{x}) &= P(y_i^* \geq 0 | \mathbf{x}) \\ &= P(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \geq 0 | \mathbf{x}) \\ &= P(\varepsilon_i \geq -\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} | \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Agora, supondo que ε_i tem FDA, G , tal que $G' = g$ é simétrica ao redor de zero:

$$\begin{aligned} P(y_i = 1 | \mathbf{x}) &= 1 - P(\varepsilon_i < -\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} | \mathbf{x}) \\ &= 1 - G(-\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} | \mathbf{x}) \\ &= G(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}). \end{aligned}$$

Se $G(\cdot)$ for uma distribuição:

Normal Padrão: $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é o estimador **probit**.

Logística: $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é o estimador **logit**.

Supondo $\mathbf{y}_i | \mathbf{x} \sim \text{Bernoulli}(p(\mathbf{x}))$, sua fmp é dada por:

$$f(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\beta}) = [G(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})]^{y_i} [1 - G(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})]^{1-y_i}, \quad y = 0, 1.$$

Para estimarmos $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ por máxima verossimilhança, temos de encontrar $\boldsymbol{\beta} \in B$, onde B é o espaço paramétrico, tal que $\boldsymbol{\beta}$ maximize o valor da distribuição conjunta de \mathbf{y} , ou seja:

$$\text{Max}_{\boldsymbol{\beta} \in B} \prod_{i=1}^N f(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\beta}).$$

Tirando o logaritmo e dividindo tudo por N (podemos fazer isso pois são transformações monotônicas e não alteram o lugar onde $\boldsymbol{\beta}$ ótimo irá parar):

$$\text{Max}_{\boldsymbol{\beta} \in B} \left\{ N^{-1} \sum_{i=1}^N \ln [f(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\beta})] \right\}.$$

Podemos definir $\ell_i(\boldsymbol{\beta}) = \ln[f(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\beta})]$ como sendo a verossimilhança condicional da observação i :

$$\text{Max}_{\beta \in B} \left\{ N^{-1} \sum_{i=1}^N \ell_i(\beta) \right\}.$$

Dessa forma, podemos ver que o problema acima é a analogia amostral de:

$$\text{Max}_{\beta \in B} E[\ell_i(\beta)].$$

Definindo o *vector score* da observação i :

$$s_i(\beta) = [\nabla_{\beta} \ell_i(\beta)]' = \left[\frac{\partial \ell_i(\beta)}{\partial \beta_1}, \dots, \frac{\partial \ell_i(\beta)}{\partial \beta_K} \right]$$

Definindo a **Matriz Hessiana** da observação i :

$$H_i(\beta) = \nabla_{\beta} s_i(\beta) = \nabla_{\beta}^2 \ell_i(\beta)$$

Tendo essas definições, o **Teorema do Valor Médio** (TVM) nos diz que no intervalo $[a, b]$, existe um número, c , tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

FAZER DESENHO

Trocando $f(\cdot)$ por $s_i(\cdot)$, a por β_0 , b por $\hat{\beta}$ e c por $\bar{\beta}$, temos:

$$H_i(\bar{\beta}) = \frac{s_i(\hat{\beta}) - s_i(\beta_0)}{\hat{\beta} - \beta_0},$$

tirando médias dos dois lados:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N H_i(\bar{\beta}) = \frac{1}{\hat{\beta} - \beta_0} N^{-1} \sum_{i=1}^N [s_i(\hat{\beta}) - s_i(\beta_0)]$$

Supondo que $\hat{\beta}$ maximiza $\ell(\beta | \mathbf{y}, \mathbf{x})$, temos que: $N^{-1} \sum_{i=1}^N s_i(\hat{\beta}) = 0$. E podemos reescrever a equação anterior como:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} - \beta_0 &= (-1) \left[N^{-1} \sum_{i=1}^N H_i(\bar{\beta}) \right]^{-1} N^{-1} \sum_{i=1}^N s_i(\beta_0) \\ \sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta_0) &= \left[-N^{-1} \sum_{i=1}^N H_i(\bar{\beta}) \right]^{-1} \sqrt{N} \cdot N^{-1} \sum_{i=1}^N s_i(\beta_0) \\ \boxed{\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta_0) &= \left[-N^{-1} \sum_{i=1}^N H_i(\bar{\beta}) \right]^{-1} N^{-1/2} \sum_{i=1}^N s_i(\beta_0).} \end{aligned}$$

Onde

$$\left[-N^{-1} \sum_{i=1}^N H_i(\hat{\beta}) \right]^{-1} \xrightarrow{p} A_0^{-1}, \quad N^{-1/2} \sum_{i=1}^N s_i(\beta_0) \xrightarrow{d} N(0, B_0).$$

Assim, temos que:

$$\boxed{\sqrt{N}(\hat{\beta} - \beta_0) \rightarrow N(0, A_0^{-1} B_0 A_0^{-1})}.$$

A forma mais simples de achar $\text{Var}(\hat{\beta})$ é:

$$\boxed{\text{Var}(\hat{\beta}) = -E[H_i(\hat{\beta})]^{-1}}.$$

18 ATT, ATE, Propensity Score

18.1 Modelo

- $y_1 \rightarrow$ variável de interesse com tratamento
- $y_0 \rightarrow$ variável de interesse sem tratamento

$$w = \begin{cases} 1 & \text{se tratam} \\ 0 & \text{se não tratam} \end{cases}$$

Idealmente, para isolarmos completamente o efeito de $w = 1$, gostaríamos de poder calcular:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N (y_{i1} - y_{i0}).$$

Ou seja, o efeito que o tratamento causa sobre um indivíduo com todo o resto permanecendo constante. Em outras palavras, queríamos que houvesse dois mundos paralelos observáveis onde seria possível observar o que acontece com y_i com e sem tratamento. Infelizmente, para cada indivíduo i , observamos apenas y_{i1} ou y_{i0} , nunca ambos.

Antes de continuarmos, faremos as seguintes definições:

ATE: $E(y_1 - y_0)$

ATT: $E(y_1 - y_0 | w = 1)$ (ATE no tratado).

18.2 ATE e ATT condicional a variáveis dependentes

$$ATE(\mathbf{x}) = E(y_1 - y_0 | \mathbf{x})$$

$$ATT(\mathbf{x}) = E(y_1 - y_0 | \mathbf{x}, w = 1)$$

OBS:

$$E(y_1 - y_0) = E[E(y_1 - y_0 | w)]$$

$$E(y_1 - y_0 | w) = E(y_1 - y_0 | w = 0) \cdot P(w = 0) + E(y_1 - y_0 | w = 1) \cdot P(w = 1).$$

18.3 Métodos Assumindo Ignorabilidade do Tratamento

ATE.1: Ignorabilidade.

w e (y_1, y_0) são independentes condicionais a \mathbf{x} .

ATE.1': Ignorabilidade da Média.

$$\text{a) } E(y_0 | w, \mathbf{x}) = E(y_0 | \mathbf{x})$$

$$\text{b) } E(y_1 | w, \mathbf{x}) = E(y_1 | \mathbf{x})$$

Vamos definir

$$E(y_0 | \mathbf{x}) = \mu_0(\mathbf{x})$$

$$E(y_1 | \mathbf{x}) = \mu_1(\mathbf{x}).$$

Sob **ATE.1** e **ATE.1'**:

$$ATE(\mathbf{x}) = E(y_1 - y_0 | \mathbf{x}) = \mu_1(\mathbf{x}) - \mu_0(\mathbf{x})$$

$$ATT(\mathbf{x}) = E(y_1 - y_0 | \mathbf{x}, w = 1) = \mu_1(\mathbf{x}) - \mu_0(\mathbf{x})$$

ATE.2: Overlap

Para todo \mathbf{x} , $P(w = 1 | \mathbf{x}) \in (0, 1)$, $p(\mathbf{x}) = p(w = 1 | \mathbf{x})$.

$p(\mathbf{x})$ é o *Propensity Score*, ele representa a probabilidade de y_i ser tratado dado o valor das covariáveis \mathbf{x} . Essa hipótese é importante visto que podemos expressar o *ATE* em função de $p(\mathbf{x})$.

Para o *ATT* vamos supor:

ATT.1': $E(y_0 | \mathbf{x}, w) = E(y_0 | \mathbf{x})$

ATT.2: Overlap: Para todo \mathbf{x} , $P(w = 1 | \mathbf{x}) < 1$.

18.4 Propensity Score

Como foi dito anteriormente, apenas observamos ou y_1 ou y_0 para a mesma pessoa, mas não ambos. Mais precisamente, junto com w , o resultado observado é:

$$y = wy_1 + (1 - w)y_0$$

como w é binário, $w^2 = w$, assim, temos:

$$\begin{aligned} wy &= w^2y_1 + (w - w^2)y_0 \implies \boxed{wy = wy_1} \\ (1 - w)y &= (w - w^2)y_1 + (w^2 - 2w + 1)y_0 \implies \boxed{(1 - w)y = (1 - w)y_0}. \end{aligned}$$

Fazemos isso para tentar isolar $\mu_0(\mathbf{x})$ e $\mu_1(\mathbf{x})$:

$$\mu_1(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} E(wy | \mathbf{x}) &= E[E(wy_1 | \mathbf{x}, w) | \mathbf{x}] \\ &= E[w\mu_1(\mathbf{x}) | \mathbf{x}] \\ &= \mu_1(\mathbf{x})E(w | \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Como w é binária: $E(w | \mathbf{x}) = P(w = 1 | \mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$. Assim:

$$E(wy | \mathbf{x}) = \mu_1(\mathbf{x})p(\mathbf{x})$$

$$\boxed{\mu_1(\mathbf{x}) = \frac{E(wy | \mathbf{x})}{p(\mathbf{x})}}$$

$$\mu_0(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} E[(1 - w)y | \mathbf{x}] &= E[E((1 - w)y_0 | \mathbf{x}, w) | \mathbf{x}] \\ &= E[(1 - w)\mu_0(\mathbf{x}) | \mathbf{x}] \\ &= \mu_0(\mathbf{x})E(w | \mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$E[(1 - w)y | \mathbf{x}] = \mu_0(\mathbf{x})[1 - p(\mathbf{x})] \implies$$

$$\boxed{\mu_0(\mathbf{x}) = \frac{E[(1 - w)y | \mathbf{x}]}{1 - p(\mathbf{x})}}$$

ATE:

$$\mu_1(\mathbf{x}) - \mu_0(\mathbf{x}) = E\left[\frac{[w - p(\mathbf{x})]y}{p(\mathbf{x})[1 - p(\mathbf{x})]} | \mathbf{x}\right]$$

$$\boxed{\widehat{ATE} = N^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{[w_i - p(\mathbf{x}_i)]y_i}{p(\mathbf{x}_i)[1 - p(\mathbf{x}_i)]}}$$

ATT:

$$E(y_1|\mathbf{x}, w = 1) - E(y_0|\mathbf{x}) = \frac{1}{\hat{P}(w = 1)} E \left[\frac{[w - \hat{p}(\mathbf{x})]y}{[1 - \hat{p}(\mathbf{x})]} | \mathbf{x} \right]$$

$$\hat{P}(w = 1) = N^{-1} \sum_{i=1}^N w_i$$

$$\widehat{ATT} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N w_i} N^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{[w_i - \hat{p}(\mathbf{x}_i)]y_i}{[1 - \hat{p}(\mathbf{x}_i)]}$$

$$\boxed{\widehat{ATT} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i} \sum_{i=1}^N \frac{[w_i - \hat{p}(\mathbf{x}_i)]y_i}{[1 - \hat{p}(\mathbf{x}_i)]}}$$

19 Regressão Descontínua

20 Álgebra Linear

20.1 Vetores

20.2 Operações com Vetores

Vamos definir os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} com dimensão $1 \times N$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Multiplicação por escalar

Soma

Subtração

Multiplicação de vetores

Produto Interno (Produto Escalar, Dot Product, Inner Product)

$$\mathbf{x}'\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x} \rangle \mathbf{y} = \sum_{i=1}^N x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_N y_N. \quad (20.1)$$

Podemos utilizar a equação (19.1) para denotarmos a soma dos elementos de um vetor. Para tanto, definimos o vetor $\mathbf{1}_N$ como sendo o vetor cujos elementos são 1 e tem dimensão $N \times 1$. (Greene, 2012, p. 977, A.2.7)

$$x_1 + \cdots + x_N = \sum_{i=1}^N x_i = \mathbf{x}'\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N' \mathbf{x} = (\mathbf{x}'\mathbf{1}_N)'$$

Com a definição do vetor $\mathbf{1}_N$, também podemos escrever: $\mathbf{1}_N' \mathbf{1}_N = N$.

Usando a definição de **média aritmética**, também podemos representá-la da seguinte forma:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_N}{N} = \bar{x} = N^{-1} \sum_{i=1}^N x_i = N^{-1} \mathbf{x}'\mathbf{1}_N$$

Usando a definição de **média ponderada**, também podemos representá-la da seguinte forma:

$$w_1 x_1 + \cdots + w_N x_N = \sum_{i=1}^N w_i x_i = \mathbf{w}' \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{w}'\mathbf{1} = 1$

Produto Externo (Outer Product)

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_N \mathbf{1}'_N &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} & \mathbf{1}_N \mathbf{x}' &= \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & \dots & x_N \end{bmatrix}_{N \times N} & \mathbf{x} \mathbf{1}'_N &= \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & \dots & x_N \end{bmatrix}_{N \times N} \\
\mathbf{x} \mathbf{x}' &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \dots & x_1 x_N \\ x_2 x_1 & x_2^2 & \dots & x_2 x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N x_1 & x_N x_2 & \dots & x_N^2 \end{bmatrix} \quad (20.2)
\end{aligned}$$

Distância e Ângulo O coseno do ângulo, α , entre dois vetores é:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u}'\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$$

Dois vetores são **ortogonais** se $\mathbf{u}'\mathbf{v} = 0$.

Projeções Ortogonal

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{u}}{\mathbf{u}'\mathbf{u}}\mathbf{u}$$

é a **projeção ortogonal** de \mathbf{y} em \mathbf{u} .

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \frac{\mathbf{y}'\mathbf{u}}{\mathbf{u}'\mathbf{u}}\mathbf{u}$$

é a **componente de \mathbf{y} ortogonal a \mathbf{u} (Rejeição)**.

Por construção, temos:

$$\mathbf{z} + \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}.$$

[FIGURA AQUI]

Outras Notações Projeções Ortogonal Dado que

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{u}}{\mathbf{u}'\mathbf{u}}\mathbf{u}$$

é a **projeção ortogonal** de \mathbf{y} em \mathbf{u} . Usando $\mathbf{y}'\mathbf{u} = \mathbf{u}'\mathbf{y}$, temos

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}'}{\mathbf{u}'\mathbf{u}}\mathbf{y}$$

Tirando o \mathbf{y} da equação, obtemos o **operador de projeção (Matriz de projeção em \mathbf{u} ?)**:

$$\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}'}{\mathbf{u}'\mathbf{u}} = \mathbf{u}(\mathbf{u}'\mathbf{u})^{-1}\mathbf{u}' = (\mathbf{u}'\mathbf{u})^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}' = (\|\mathbf{u}\|^2)^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}'$$

Agora, podemos definir o **operador rejeição** como:

$$\mathbf{I}_N - \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}'}{\mathbf{u}'\mathbf{u}}$$

Usando o caso especial onde \mathbf{u} é um vetor de uns ($\mathbf{u} = \mathbf{1}_N$), temos a **projeção** no eixo de 45 graus:

$$(\mathbf{1}'_N \mathbf{1}_N)^{-1} \mathbf{1}_N \mathbf{1}'_N = N^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} = \begin{bmatrix} 1/N & \dots & 1/N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/N & \dots & 1/N \end{bmatrix}_{N \times N}$$

A **rejeição** no eixo de 45 graus:

$$\mathbf{I}_N - \frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}'_N}{\mathbf{1}'_N \mathbf{1}_N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/N & 1/N & \dots & 1/N \\ 1/N & 1/N & \dots & 1/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/N & 1/N & \dots & 1/N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N-1)/N & 1/N & \dots & 1/N \\ 1/N & (N-1)/N & \dots & 1/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/N & 1/N & \dots & (N-1)/N \end{bmatrix}$$

Centering Matrix (Greene, 2012, p. 978, A.28)

$$\mathbf{M}^0 = \mathbf{I}_N - \mathbf{1}_N (\mathbf{1}'_N \mathbf{1}_N)^{-1} \mathbf{1}'_N = \mathbf{I}_N - N^{-1} \mathbf{1}_N \mathbf{1}'_N$$

A Matriz \mathbf{M}^0 é **idempotente** e **simétrica**.

Idempotência: $\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}$

Simetria: $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$

$$\mathbf{M}^0 \mathbf{x} = (\mathbf{I}_N - N^{-1} \mathbf{1}_N \mathbf{1}'_N) \mathbf{x} = \mathbf{x} - N^{-1} \mathbf{1}_N (\mathbf{1}'_N \mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{1}_N \bar{x}$$

onde podemos denotar

$$\bar{x} = \mathbf{1}_N \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \vdots \\ \bar{x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^0 \mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{x}$$

$$\mathbf{M}^0 \mathbf{1} = (\mathbf{I}_N - N^{-1} \mathbf{1}_N \mathbf{1}'_N) \mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N - N^{-1} \mathbf{1}_N (\mathbf{1}'_N \mathbf{1}_N) = \mathbf{1}_N - \mathbf{1}_N = \mathbf{0}_N$$

20.3 Operações com Matrizes

Multiplicação por escalar

Soma

Subtração

Multiplicação de Matriz

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$[AB]_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} [b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13}] + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} [b_{21} \quad b_{22} \quad b_{23}] \implies AB = \sum_{i=1}^2 a_i b_i$$

onde a_i é a i -ésima **coluna** da matriz A . b_i é a i -ésima **linha** da matriz B .

20.3.1 Projeções

$$\mathbf{P}_X = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

$$\mathbf{M}_X = (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')$$

Usando o modelo

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

E definindo $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$, temos

$$\mathbf{P}_X\mathbf{y} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{M}_X\mathbf{y} = \mathbf{I}\mathbf{y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{u}}$$

20.3.2 Cálculo com Matrizes

Greene (2012, A.8, p.1007)

Sydsaeter *et al.* (2005, C.23, p.157)

Petersen & Pedersen (2012, Sec.2.3, p.10)

Uma **função linear** pode ser escrita como:

$$y(x) = \mathbf{a}'\mathbf{x} = \mathbf{x}'\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N a_i x_i$$

então

$$\frac{\partial y(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{a}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

Em particular, note que $\frac{\partial \mathbf{a}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}$ não \mathbf{a}' .

Em um conjunto de funções lineares:

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

onde cada elemento y_i de \mathbf{y} é:

$$y_i(x) = \mathbf{a}_i'\mathbf{x}$$

onde \mathbf{a}_i é a i -ésima linha de \mathbf{A} . Portanto

$$\frac{\partial y_i}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}_i = \text{transposta da } i\text{-ésima linha de } \mathbf{A}.$$

e

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \mathbf{x}'} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_N}{\partial \mathbf{x}'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N' \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

ou seja,

$$\frac{\partial \mathbf{y}(x)}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{A},$$

ou também,

$$\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}'.$$

Uma **forma quadrática** pode ser escrita como:

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j a_{ij}.$$

A derivada em relação a \mathbf{x} é:

$$\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{x}$$

no caso de simetria de \mathbf{A} ($\mathbf{A} = \mathbf{A}'$), temos:

$$\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$$

21 Conceitos Básicos de Convergência Estatística

Definition 21.1 (Convergência em Probabilidade). Wooldridge (2010, Def 3.3, p.36)

Uma sequência de variáveis aleatórias: $\{X_N\}_{N \geq 1}$ **converge em probabilidade** para uma variável aleatória X se, dado $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_N - X| > \varepsilon) \rightarrow 0,$$

quando $N \rightarrow +\infty$. E denotamos

$$\text{plim } X_N = X, \quad \text{ou} \quad X_N \xrightarrow{p} X, \quad \text{ou} \quad X_N - X \xrightarrow{p} 0.$$

Definition 21.2 (Estimador Consistente). Wooldridge (2010, Def 3.8, p.40)

Seja $\{\theta_N : N = 1, 2, \dots\}$ uma sequência de estimadores do vetor $\theta \in \Theta$ com dimensão $P \times 1$, onde N indexa o tamanho da amostra. Se

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta \tag{21.1}$$

Para qualquer valor de θ , então dizemos que θ_N é um estimador consistente de θ .

Theorem 21.1 (LGN – Lei dos Grandes Números). Achar referência

Seja $\{X_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias *iid* com $E(X_i) = \mu$. Então,

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow{p} \mu.$$

Theorem 21.2 (LGN – Caso Matricial). Achar referência. O Teorema (20.3), abaixo, é diferente.

Seja $\{x_i\}_{i=1}^N$, uma sequência *iid* de vetores aleatórios $K \times 1$ com $E(x_i x_i') = Q_{K \times K}$ finita. Então,

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N x_i x_i' \xrightarrow{p} Q.$$

Se Q for positiva definida, Q terá inversa.

Theorem 21.3 (LGNF – WLLN). Wooldridge (2010, Teo 3.1, p.39)

Seja $\{w_i : i = 1, 2, \dots\}$, uma sequência *iid* de vetores aleatórios $G \times 1$ com $E(|w_{ig}|) < \infty$ para $g = 1, \dots, G$. Então, a sequência satisfaz a **Lei dos Grandes Números Fraca (WLLN)**:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N w_i \xrightarrow{p} \mu_w,$$

onde $\mu_w \equiv E(w_i)$.

Definition 21.3 (o_p).

Wooldridge (2010, Def 3.4, p.36)

Wooldridge (2010, Lemma 3.2, p.36)

$$X_n = o_p(1) \implies X_n \xrightarrow{p} 0$$

$$X_n = o_p(Y_n) \implies \frac{X_n}{Y_n} = o_p(1) \implies \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{p} 0$$

$$X_n = W_n + o_p(1) \implies (X_n - W_n) = o_p(1) \implies (X_n - W_n) \xrightarrow{p} 0$$

Definition 21.4 (Limitação em Probabilidade: O_p). Wooldridge (2010, Def 3.3 (3), p.36)

Dizemos que X_n é **limitado em probabilidade** e denotado por $X_n = O_p(1)$, se existe M maior que zero, tal que para todo ε maior que zero, $P(|X_n| > 0) < \varepsilon$.

$$X_n = O_p(1) \implies \exists M > 0; \forall \varepsilon > 0, P(|X_n| > 0) < \varepsilon.$$

Definition 21.5. Wooldridge (2010, Def 3.4, p.36)

Dizemos que $X_n = O_p(Y_n)$ se existe M maior que zero, tal que para todo ε maior que zero, $P(|X_n/Y_n| > 0) < \varepsilon$.

$$X_n = O_p(Y_n) \implies \exists M > 0; \forall \varepsilon > 0, P(|X_n/Y_n| > 0) < \varepsilon.$$

Lemma 21.1. Wooldridge (2010, Lemma 3.2, p.36)

Se $X_n = O_p(1)$ e $Y_n = o_p(1)$, então

$$X_n Y_n = O_p(1) o_p(1) = o_p(1).$$

Lemma 21.2 (Equivalência Assintótica). Wooldridge (2010, Lemma 3.7, p.39)

Seja $\{x_n\}$ e $\{z_n\}$ sequências de vetores aleatórios $K \times 1$. Se $z_n \xrightarrow{d} z$ e $x_n - z_n \xrightarrow{p} \mathbf{0}_K$. Então,

$$x_n \xrightarrow{d} z.$$

Definition 21.6 (Convergência em Distribuição). Wooldridge (2010, Def 3.6, p.38)

Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória com F_n e F suas respectivas FDAs, então

$$X_n \xrightarrow{d} X, \text{ se } F_n(X) \rightarrow F(X)$$

para todo X onde F é contínuo.

Lemma 21.3 (Convergência em Distribuição e Limitação em Probabilidade). Wooldridge (2010, Lemma 3.5, p.39)

Se $X_n \xrightarrow{d} X$, X um variável aleatória qualquer; então $X_n = O_p(1)$.

Definition 21.7 (TCL – Teorema Central do Limite). Achar Referência

Seja $\{X_n\}_{n=1}^N$ iid com $E(X_n) = \mu$ e $\text{Var}(X_n) = \sigma^2 < +\infty$. Então, para $S_N = \sum_{n=1}^N X_n$:

$$\frac{S_N - N\mu}{\sqrt{N}\sigma} = \frac{N(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{N}\sigma} = \frac{N(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{N}\sigma} = \boxed{\frac{\sqrt{N}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)}.$$

Theorem 21.4 (TCL – Lindeberg-Levy). Wooldridge (2010, Teo 3.2, p.40)

Seja $\{w_i : i = 1, 2, \dots\}$ uma sequência iid de vetores aleatórios $G \times 1$ com $E(w_{ig}^2) < \infty$ para $g = 1, \dots, G$ e $E(w_i) = \mathbf{0}$. Então, $\{w_i : i = 1, 2, \dots\}$ satisfaz o **Teorema Central do Limite (CLT)**; qual seja:

$$N^{-1/2} \sum_{i=1}^N w_i \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{B}),$$

onde, $\mathbf{B} = \text{Var}(w_i) = E(w_i w_i')$ é necessariamente positiva semidefinida. Para nossos propósitos, \mathbf{B} será sempre positiva definida.

Corollary 21.1. Wooldridge (2010, Cor 3.2, p.39)

Seja $\{z_N\}$ uma sequência de vetores $K \times 1$ aleatórios tal que $z_N \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{V})$, então:

1. Para qualquer matriz \mathbf{A} de dimensão $K \times M$ **não** estocástica, temos:

$$\mathbf{A}' z_N \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}' \mathbf{V} \mathbf{A}).$$

$$2. z_N' \mathbf{V}^{-1} z_N \xrightarrow{d} \chi_K^2 \text{ (ou } z_N' \mathbf{V}^{-1} z_N \overset{a}{\sim} \chi_K^2).$$

Definition 21.8 (raiz de N assintoticamente normalmente distribuido). Wooldridge (2010, Def 3.9, p.40)

Seja $\{\hat{\theta}_N : N = 1, 2, \dots\}$ uma sequência de estimadores do vetor $\theta \in \Theta$ com dimensão $P \times 1$. Suponha que

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{V}) \quad (21.2)$$

onde \mathbf{V} é uma matriz $P \times P$ positiva semidefinida. Então dizemos que $\hat{\theta}_N$ é \sqrt{N} -asintoticamente normalmente distribuido e \mathbf{V} é a **variância assintótica** de $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)$, denotada $\text{Avar} \sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta) = \mathbf{V}$

Remark. Apesar de $\mathbf{V}/N = \text{Var}(\hat{\theta}_N)$ ser verdade apenas em casos especiais, e raramente $\hat{\theta}_N$ ter uma distribuição exatamente normal, tratamos $\hat{\theta}_N$ como se

$$\hat{\theta}_N \sim \mathcal{N}(\theta, \mathbf{V}/N). \quad (21.3)$$

sempre que a equação (20.2) for verdade. Por essa razão, \mathbf{V}/N é chamado de **variância assintótica** de $\hat{\theta}_N$, e escrevemos:

$$\text{Avar}(\hat{\theta}_N) = \mathbf{V}/N. \quad (21.4)$$

Abaixo, temos as definições necessárias para mostrar como verificar se um estimador é consistente por EQM. Quero saber se mantemos essa parte. Se sim, precisamos de referências.

Definition 21.9 (Desigualdade de Markov). Achar referência

Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $E|X_n|^K < +\infty$, $K > 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n| > \varepsilon) \leq \frac{E|X_n|^K}{\varepsilon^K}$$

Definition 21.10. Achar referência

$$0 \leq P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) \leq \frac{E|X_n|^2}{\varepsilon^2}$$

Definition 21.11 (Erro Quadrático Médio). Achar referência

$$EQM(\hat{\theta}) = E \left[(\hat{\theta} - \theta)^2 \right] = \left[\text{Bias}(\hat{\theta})^2 + \text{Var}(\hat{\theta}) \right]$$

Remark. Achar referência?

Então, se $\text{Bias}(\hat{\theta}) \rightarrow 0$ e $\text{Var}(\hat{\theta}) \rightarrow 0$, temos que $EQM(\hat{\theta}) \rightarrow 0$. Pelo **Teorema do Sanduíche**, $P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0$; logo, $\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$.

References

- GREENE, WILLIAM H. 2012. *Econometric Analysis*. 7 edn. Boston: Prentice Hall.
- PETERSEN, K. B., & PEDERSEN, M. S. 2012 (nov). *The Matrix Cookbook*. Version 20121115.
- SYDSAETER, KNUT, STROM, ARNE, & BERCK, PETER. 2005. *Economists' Mathematical Manual*. 4th edn. Heidelberg: Springer.
- WOOLDRIDGE, JEFFREY M. 2010. *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*. 2 edn. Boston, Massachussetts: MIT Press.