**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**
**Microeconometria – 2015/3**

# Microeconometrics: Lecture Notes

**Autor: Paulo Ferreira Naibert**
**Professor: Hudson Torrent**

**Porto Alegre**
**30/06/2020**
**Revisão: July 7, 2020**

# 1 Regressão MQO Clássico

Wooldridge (2010, C.4 – The Single-Equation Linear Model and OLS Estimation, p.49–76)

## 1.1 Modelo de equações lineares

O modelo populacional que estudamos é linear em seus parâmetros,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_K x_K + u \tag{1.1}$$

onde:

$y, x_1, \ldots, x_K$ são escalares aleatórios e observáveis (i.e., conseguimos observá-los em uma amostra aleatória da população);

$u$ é o *random disturbance* não observável, ou erro;

$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_K$ são parâmetros (constantes) que gostaríamos de estimar.

### Notação Vetorial

Wooldridge (2010, Sec. 4.2 – Asymptotic Properties of OLS; p.51)
Por conveniência, escrevemos a equação populacional em forma de vetor:

$$y = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta} + u \tag{1.2}$$

onde,
$\boldsymbol{x} \equiv (x_1, \ldots, x_K)$ é um vetor $1 \times K$ de regressores;
$\boldsymbol{\beta} \equiv (\beta_1, \ldots, \beta_K)'$ é um vetor $K \times 1$.

Uma vez que a maioria das equações contém um intercepto, assumiremos que $x_1 \equiv 1$, visto que essa hipótese deixa a interpretação mais fácil.

### Amostra Aleatória

Assumimos que conseguimos obter uma amostra aleatória de tamanho $N$ da população para estimarmos $\boldsymbol{\beta}$. Dessa forma, $\{(\boldsymbol{x}_i, y_i); i = 1, 2, \ldots, N\}$ são tratados como variáveis aleatória independentes, identicamente distribuídas, onde $\boldsymbol{x}_i$ é $1 \times K$ e $y_i$ é escalar. Para cada observação $i$, temos:

$$y_i = \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta} + u_i. \tag{1.3}$$

onde $\boldsymbol{x}_i$ é um vetor $1 \times K$ de regressores.

## 1.2 Hipóteses

**OLS.1** $y_i = \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta} + u_i\,, \quad i = 1, \ldots, N;$

**OLS.2** **X** é **não** estocástica;

**OLS.3** $\{u_i\}_{i=1}^{N}$ é *iid* com e para cada $i = 1, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(u_i) &= 0 \\ \mathrm{Var}(u_i) &= \mathrm{E}(u_i^2) = \sigma^2 \end{aligned}$$

**OLS.2'** $\mathbf{X}$ é estocástica;

**OLS.3'**

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(u_i|\mathbf{X}) &= 0, \\ \mathrm{Var}(u_i|\mathbf{X}) &= E\left\{ [u_i - \mathrm{E}(u_i|\mathbf{X})]^2 \,|\mathbf{X} \right\} = \mathrm{E}(u_i^2|\mathbf{X}) = \sigma^2. \end{aligned}$$

*Remark.* $\mathrm{E}(u_i|\mathbf{X}) = 0$ implica que $u_i$ é **não correlacionado** com todos os regressores $x_k$ para $k = 1, \dots, K$. Exogeneidade estrita.

## 1.3 Estimação

Usando **OLS.1:**

$$\begin{aligned} y_i &= \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{\beta} + u_i \\ \boldsymbol{x}_i' y_i &= \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{x}_i' u_i \\ \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' y_i) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i) \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' u_i) \end{aligned}$$

Usando $\boxed{\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' u_i) = 0}$ [Qual seria essa hipótese?]

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' y_i) = \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i) \boldsymbol{\beta}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\beta} = [\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i)]^{-1} \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' y_i)}. \tag{1.4}$$

Agora, usando o **princípio da analogia** e utilizando **estimadores amostrais**:

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left( N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \left( N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' y_i \right)}. \tag{1.5}$$

Podemos desenvolver essa equação para:

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\beta}} &= \left( N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \left( N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' (\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}_i) \right) \\ &= \left( N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \left( N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{\beta} \right) + \left( N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{u}_i \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left( N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \left( N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{u}_i \right)}. \tag{1.6}$$

### 1.3.1 Notação Matricial

Empilhando as $N$ observações, obtemos a **Notação Matricial**:

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u} \tag{1.7}$$

$\boldsymbol{y}$ é um vetor $N \times 1$;
$\mathbf{X}$ é uma matriz $N \times K$ de regressores, com $N$ vetores, $\boldsymbol{x}_i$, de dimensão $1 \times K$ empilhados;
$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$;
$\boldsymbol{u}$ é um vetor $N \times 1$;

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{NK} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}.$$

As somas de vetores viram simples multiplicações de matrizes e a equação (1.5), vira:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (N^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(N^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{y}) \implies \boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\boldsymbol{y})} \tag{1.8}$$

## 1.4 Valor Esperado

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathrm{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{y}\right] = \mathrm{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{u})\right] = \mathrm{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}\right] \\ &= \mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}) + \mathrm{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}] \implies \boxed{\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}]} \end{aligned}$$

### 1.4.1 Viés

$$\mathrm{B}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - \boldsymbol{\beta} \implies \boxed{\mathrm{B}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathrm{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}]}$$

*Remark.* Sob **OLS.2’** e **OLS.3’**:

$$\mathrm{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}] = \mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}|\mathbf{X}\right]\right\} = \mathrm{E}\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\underbrace{\mathrm{E}(\boldsymbol{u}|\mathbf{X})}_{=\mathbf{0}}\right\} = 0$$

ou seja, $\mathrm{B}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = 0$, logo $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é **não-viciado**. O que também é equivalente a $\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$.

## 1.5 Variância

Supondo **OLS.2’** e **OLS.3’**:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X}) &= \mathrm{E}\left\{\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X})\right]^2 |\mathbf{X}\right\} \\ &= \mathrm{E}\left\{\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X})\right]\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X})\right]' |\mathbf{X}\right\} \\ &= \mathrm{E}\left\{\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}\right]\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}\right]' |\mathbf{X}\right\} \\ &= \mathrm{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}|\mathbf{X}\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathrm{E}\left[\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'|\mathbf{X}\right]\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}$$

### 1.5.1 Homocedasticidade

Supondo **homocedasticidade** e ausência de correlação serial: $\boxed{\mathrm{E}\left[\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'|\mathbf{X}\right] = \sigma^2 I_N}$. Assim,

$$\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'I_N\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \implies \boxed{\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}.$$

# 2 Ausência de Exogeneidade Estrita

Nem sempre poderemos supor **exogeneidade estrita**. Por exemplo, no modelo com variável defasada mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 x_{1t} + u_t \\ y_{t-1} &= \beta_0 + \beta_1 y_{t-2} + \beta_2 x_{1t-1} + u_{t-1} \\ y_t &= \beta_0(1+\beta_1) + \beta_1^2 y_{t-2} + \beta_1\beta_2 x_{1t-1} + \beta_2 x_{1t} + u_t + \beta_1 u_{t-1}, \end{aligned}$$

o erro é correlacionado com o regressor $y_{t-1}$. Nesse caso, tentaremos obter apenas **consistência** e **variância assintótica** do estimador. Para tanto, utilizaremos a equação (1.6):

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left( N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \left( N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{u}_i \right).$$

Aqui comeceçaria a seção 16.

## 2.1 Consistência

Vamos definir a matriz $K \times K$, $\mathbf{A} \equiv \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i)$. Supondo $\mathbf{A}$, finita e positiva definida, posto$(\mathbf{A}) = K$. Usando **LGN matricial** (Definição 16.7 na página 37), temos:
[lembrar que as dimensões dos vetores estão invertidas: $1 \times K$ e **não** $K \times 1$]

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \xrightarrow{p} \mathbf{A} \implies \left( N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \xrightarrow{p} \mathbf{A}^{-1}. \tag{2.1}$$

Além disso, vamos supor $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' u_i) = 0$, o que corresponde a $Cov(\boldsymbol{x}_i, u_i) = 0$, ou seja, o erro $u_i$ **não** é correlacionado com os regressores da própria equação. Isso é bem menos que exogeneidade estrita. Então,

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \xrightarrow{p} \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' u_i) = \mathbf{0}_K.$$

Logo,

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \underbrace{\left( \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \right)}_{\xrightarrow{p} 0}}$$

Então, $(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{p} 0$ que é equivalente a $\widehat{\boldsymbol{\beta}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\beta}$ e $\operatorname{plim} \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$, ou seja, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é **consistente** para $\boldsymbol{\beta}$.

## 2.2 Normalidade Assintótica

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1} \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i\right)$$

$$(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1} \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i\right)$$

$$\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1} \left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i\right)$$

Supondo $\mathrm{E}(x_{ik}^2 u_i^2) < +\infty$, $k = 1, \ldots, K$, e definindo $\mathbf{B} = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_i' u_i' u_i \boldsymbol{x}_i] = \mathrm{E}[u_i^2 \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i]$. Temos, pela Definição 16.16 (**TCL**), que

$$N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{B}) \implies N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i = \mathrm{O}_p(1) \tag{2.2}$$

Além disso, vamos utilizar a matriz **simétrica** e **não singular** $\mathbf{A}$ da equação (2.1) Assim, temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) &= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1} \left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i\right) \\
&= \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1} + \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\right] \left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i\right) \\
&= \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\right] \left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i\right) + \mathbf{A}^{-1}\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i\right),
\end{aligned}$$

Podemos inverter $\mathbf{A}$ porque ela tem posto completo (não singular). Pelas propriedades de $\mathbf{A}$, temos:

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i \xrightarrow{p} \mathbf{A} \implies \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1} - \mathbf{A}^{-1} = \mathrm{o}_p(1).$$

Então,

$$\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) = \mathrm{o}_p(1)\mathrm{O}_p(1) + \mathbf{A}^{-1}\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i\right),$$

Usando (2.2) e a Definição 16.13.

$$\mathbf{A}^{-1}\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i\right) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}).$$

Lembrando que $\mathrm{o}_p(1)\mathrm{O}_p(1) = \mathrm{o}_p(1)$, temos:

$$\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}) \implies \sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})$$

## 2.3 Variância

$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$

$\mathbf{V} = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_i'u_i'u_i\boldsymbol{x}_i)]\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}$

$\mathbf{V} = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}\mathrm{E}[(u_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}.$

### 2.3.1 Homocedasticidade

Sob **Homocedasticidade**, temos $\mathbf{B} = \mathrm{E}(u_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i) = \sigma^2\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)$, logo

$$\boxed{\mathbf{V} = \sigma^2\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}}.$$

### 2.3.2 Estimador Amostral

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{V}} &= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}u_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1} \\
&= N\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}u_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\widehat{\mathbf{V}} = N\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}u_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}}.$$

### 2.3.3 Variância do estimador de OLS

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\sqrt{N}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathbf{V} \\
\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= N^{-1}\mathbf{V} \\
&\boxed{\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}u_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}}.
\end{aligned}$$

A variância **Robusta** é:

$$\boxed{\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\widehat{u}_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}.$$

A variância sob **Homocedasticidade** é:

$$\boxed{\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \widehat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}.$$

# 3 System OLS (SOLS)

Wooldridge (2010, C.7 – Estimating Systems of Equations by OLS and GLS, p.143–179)
Wooldridge (2010, Sec.7.3 – System OLS Estimation of a Multivariate Linear System, p.147)

## 3.1 Modelo Linear

Assumimos que temos as seguintes observações *cross section iid*: $\{(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{y}_i) : i = 1, \dots, N\}$, onde:

$\mathbf{X}_i$ é uma matriz $G \times K$ e contém as variáveis explicativas que aparecem em qualquer lugar do sistema.

$\boldsymbol{y}_i$ é um vetor $G \times 1$, que contém as variáveis dependentes para todas as equações $G$ (ou períodos de tempo, no caso de dados de painel).

O modelo linear multivariado para uma observação (draw) aleatória da população pode ser expresso como:

$$\boxed{\boldsymbol{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}_i\,, \quad i = 1, \dots, N,} \tag{3.1}$$

onde:

$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$ de parâmetros de interesse; e

$\boldsymbol{u}_i$ é um vetor $G \times 1$ de não observáveis.

A equação (3.1) explica as $G$ variáveis $y_{i1}, \dots, y_{iG}$ em termos de $\mathbf{X}_i$ e das não observáveis $\boldsymbol{u}_i$. Por causa da hipótese de amostra aleatória podemos escrever tudo em temos de uma observação genérica.

## 3.2 Hipóteses

Wooldridge (2010, Sec.7.3.1)

**SOLS.1** $\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i) = \mathbf{0}_{K\times 1}$.

**SOLS.2** $\mathbf{A} \equiv \mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)$ é não singular (tem posto pleno, posto igual a $K$).

## 3.3 Estimação

Note que, sob **SOLS.1**, temos:

$$\mathrm{E}[\mathbf{X}_i'(\boldsymbol{y}_i - \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta})] = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)\boldsymbol{\beta} = \mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\beta} = \left[\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)\right]^{-1}\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i)} \tag{3.2}$$

Usando estimadores amostrais:

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS} = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i\right)}. \tag{3.3}$$

Para computar $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ usando linguagem de computação é mais fácil utilizar a notação matricial. Para tanto, cortamos os $N^{-1}$ e substituímos os somatórios por multiplicações de matrizes.

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\boldsymbol{y})} \tag{3.4}$$

onde

$\mathbf{X} \equiv (\mathbf{X}_1', \dots, \mathbf{X}_N')$ é uma matriz $NG \times K$ dos $\mathbf{X}_i$ empilhados.
$\boldsymbol{y} \equiv (\boldsymbol{y}_1', \dots, \boldsymbol{y}_N')$ é um vetor $NG \times 1$ das observações $\boldsymbol{y}_i$ empilhadas.

### 3.4 Consistência

Para provarmos a **consistência** do estimador, usamos as equações (3.3) e (3.1):

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS} &= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i\right)\\
&= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'(\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{u}_i)\right]\\
&= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}\right)+\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right).
\end{aligned}$$

E chegamos em:

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS} = \boldsymbol{\beta}+\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right)}. \tag{3.5}$$

Por **SOLS.1**:

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i \xrightarrow{p} \mathbf{0};$$

e por **SOLS.2**

$$\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1} \xrightarrow{p} \mathbf{A}^{-1}.$$

Resumimos esse resultado pelo seguinte Teorema:

**Theorem 3.1** (Consistência do SOLS)**.** Sob Hipóteses **SOLS.1** e **SOLS.2**, temos

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\beta}}.$$

### 3.5 Normalidade Assintótica

De (3.5):

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= \boldsymbol{\beta}+\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right)\\
(\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) &= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right).
\end{aligned}$$

E chegamos em:

$$\boxed{\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right)}. \tag{3.6}$$

Uma vez que $\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i)=0$, sob a hipótese **SOLS.1**, a definição 16.16 (**TCL**) implica que:

$$N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i\boldsymbol{u}_i \xrightarrow{d} N(\mathbf{0},\mathbf{B}),$$

onde

$$\mathbf{B} \equiv \mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i'\mathbf{X}_i) \equiv \mathrm{Var}(\mathbf{X}_i\boldsymbol{u}_i).$$

Em particular,

$$N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i\boldsymbol{u}_i = \mathrm{O}_p(1).$$

Porém,

$$\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1} = (\mathbf{X}'\mathbf{X}/N)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathrm{o}_p(1).$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) &= \left[\mathbf{A}^{-1} + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\right]\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right)\\
&= \mathbf{A}^{-1}\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right) + [(\mathbf{X}'\mathbf{X}/N)^{-1} - \mathbf{A}^{-1}]\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right)\\
&= \mathbf{A}^{-1}\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right) + \mathrm{o}_p(1)\mathrm{O}_p(1)\\
&= \mathbf{A}^{-1}\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right) + \mathrm{o}_p(1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0},\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})} \tag{3.7}$$

### 3.6 Variância Assintótica

**SOLS.3: Homocedasticidade** $\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i'\mathbf{X}_i) = \sigma^2\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)$.

De (3.7), vamos definir $\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$. Sob **SOLS.3**, $\mathbf{V} = \sigma^2\left[\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)\right]^{-1}$. Estimando:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{NG-K}\sum_{i=1}^{N}\sum_{g=1}^{G}\hat{u}_{ig}^2$$

onde $\hat{u}_{ig} = y_{ig} - \boldsymbol{x}_{ig}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS}$

#### 3.6.1 A Matriz Robusta

$$\widehat{\mathbf{V}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\widehat{\boldsymbol{u}}_i'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\mathbf{X}\right)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\widehat{\Omega}\mathbf{X}_i \xrightarrow{p} \mathrm{E}(\mathbf{X}_i\Omega\mathbf{X}_i)$$

Mas **não** é verdade que $\widehat{\Omega} \xrightarrow{p} \Omega$.

- Havendo constante, **SOLS.1** $\implies$ $\mathrm{E}(\boldsymbol{u}_i) = 0$
- Ausência de correlação entre os regressores de uma equação e o erro da própria equação $\implies$ **SOLS.1**.

### 3.6.2 Variância Asstintótica

REVER

$$\mathrm{Avar}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}/N. \tag{3.8}$$

Assim, $\mathrm{Avar}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS})$ tende a zero a uma taxa $1/N$, como esperado. Estimação consistente de $\mathbf{A}$ é:

$$\widehat{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{X}'\mathbf{X}/N = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i$$

Um estimador consistente para $\mathbf{B}$ pode ser achado usando o princípio da analogia.

$$\mathbf{B} = \mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i'\mathbf{X}_i), \quad N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i'\mathbf{X}_i \xrightarrow{p} \mathbf{B}.$$

Uma vez que não podemos observar $\boldsymbol{u}_i$, usamos os resíduos da estimação de SOLS:

$$\widehat{\boldsymbol{u}}_i \equiv \boldsymbol{y}_i - \mathbf{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{u}_i - \mathbf{X}_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}).$$

Assim, definimos $\widehat{\mathbf{B}}$ e usando LGN, podemos mostrar que:

$$\widehat{\mathbf{B}} \equiv N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i'\mathbf{X}_i \xrightarrow{p} \mathbf{B}.$$

onde supomos que certos momentos envolvendo $\mathbf{X}_i$ e $\boldsymbol{u}_i$ são finitos.

Portanto, $\mathrm{Avar}[\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})]$ é **consistentemente** estimado por $\widehat{\mathbf{A}}^{-1}\widehat{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{A}}^{-1}$, e $\mathrm{Avar}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ é estimado como:

$$\widehat{\mathbf{V}} \equiv \left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i'\mathbf{X}_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}.$$

Sob as hipóteses **SOLS.1** e **SOLS.2**, nós fazemos inferência em $\boldsymbol{\beta}$ como $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ fosse normalmente distribuído com média $\boldsymbol{\beta}$ e variância $\widehat{\mathbf{V}}$.

# 4 Dados de Painel (POLS)

Wooldridge (2010, Sec.7.8 – The Linear Panel Data Model, Revisited. p.169)

## 4.1 Modelo Linear para Dados de Painel

No caso de dados de painel, temos a seguinte amostra aleatória:

$$y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + u_{it}\,, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T. \tag{4.1}$$

onde
$y_{it}$ é um escalar.
$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$.
$\boldsymbol{x}_{it}$ é um vetor $K \times 1$.
$u_{it}$ é um escalar.

Em notação vetorial:

$$\boldsymbol{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}_i\,, \quad i = 1, \dots, N,$$

onde
$\boldsymbol{y}_i$ é um vetor $T \times 1$.
$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$.
$\mathbf{X}_i$ é uma matriz $K \times T$.
$\boldsymbol{u}_{it}$ é um vetor $T \times 1$.

Em notação matricial:

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}$$

onde
$\boldsymbol{y}$ é um vetor $NT \times 1$.
$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$.
$\mathbf{X}$ é uma matriz $NT \times K$.
$\boldsymbol{u}$ é um vetor $NT \times 1$.

*Remark.*

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{x}_{it}; \quad \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{x}_{it}'y_{it}.$$

Portanto, podemos escrever $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ como:

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{POLS} = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{x}_{it}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{x}_{it}'y_{it}\right)}. \tag{4.2}$$

Este estimador é chamado **estimador de Mínimos Quadrados Agrupados (POLS)** porque ele corresponde a rodar uma regressão OLS nas observações agrupadas através de $i$ e $t$. O estimador da equação (4.2) é o mesmo para unidades de *cross section* amostradas em diferentes pontos do tempo.

## 4.2 Hipóteses

**POLS.1** $\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i) = \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_{it}'u_{it}) = \mathbf{0}_{K\times 1}$, para cada $i = 1, \dots, N$ e $t = 1, \dots, T$.
De fato, **POLS.1** $\implies$ **SOLS.1**.

*Remark.* O modelo (4.1) permite $y_{i,t-1}$ como regressor, se satisfeita **POLS.1**.

### 4.3 Presença de *Efeito Individual*

$$y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}$$
$$y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it}$$

onde $c_i + u_{it} = v_{it}$. Estamos supondo $c_i$ **não** observável.

Considerando $y_{i,t-1}$ como regressor:

$$\left.\begin{aligned} y_{it} &= \alpha y_{i,t-1} + \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it} \\ y_{it-1} &= \alpha y_{i,t-2} + \boldsymbol{x}_{i,t-1}\boldsymbol{\beta} + v_{i,t-1} \end{aligned}\right\} \operatorname{Cov}(y_{i,t-1}, v_{it}) \neq 0.$$

### 4.4 Estimação I

REVER

$$\boldsymbol{y}_{it} = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}_i$$
$$\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_{it} = \mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}_i'\mathbf{v}_i.$$

Tirando Valores Esperados:

$$\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_{it}) = \mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)\boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{v}_i) \implies \boxed{\boldsymbol{\beta} = \left[\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)\right]^{-1}\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i) - \left[\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)\right]^{-1}\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{v}_i)}.$$

Usando estimadores amostrais:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i\right) - \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{v}_i\right),$$

usando $\boldsymbol{y}_{it} = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}_i$

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}_i)\right] - \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{v}_i\right) \\ &= \boldsymbol{\beta} + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{v}_i\right) - \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{v}_i\right)\end{aligned}$$

### 4.5 Estimação II

REVER

$$\boldsymbol{y}_{it} = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + c_i\mathbf{1} + \boldsymbol{u}_i$$
$$\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_{it} = \mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + c_i\mathbf{X}_i'\mathbf{1} + \mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i$$

onde $\mathbf{1}$ é um vetor $T \times 1$ de uns. Tirando Valores Esperados:

$$\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_{it}) = \mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)\boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}(c_i\mathbf{X}_i'\mathbf{1}) + \mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i)$$

por **POLS.1**, $E(\mathbf{X}_i\boldsymbol{u}_i) = 0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)\boldsymbol{\beta} &= \mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i) - \mathrm{E}(c_i\mathbf{X}_i'\mathbf{1}) \\ \boldsymbol{\beta} &= \left[\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)\right]^{-1}\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i) - \left[\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)\right]^{-1}\mathrm{E}(c_i\mathbf{X}_i'\mathbf{1})\end{aligned}$$

Usando estimadores amostrais:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i\right) - \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}c_i\mathbf{X}_i'\mathbf{1}\right)$$

usando $\boldsymbol{y}_{it} = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + c_i\mathbf{1} + \boldsymbol{u}_i$

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = &\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left\{\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}\right) + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'c_i\mathbf{1}\right) + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right)\right\}\\ &- \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}c_i\mathbf{X}_i'\mathbf{1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = &\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}\right) + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'c_i\mathbf{1}\right)\\ &+ \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right) - \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}c_i\mathbf{X}_i'\mathbf{1}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right)}$$

- Se $c_i$ é **não** correlacionado com os regressores, então o POLS é consistente (mas não é eficiente).
- O estimador eficiente, neste caso, é o GLS (Modelo de **Efeitos Aleatórios**).
- Se $c_i$ é correlacionado com **pelo menos** um regressor, o POLS é **inconsistente**. Nesse caso, usaremos o Modelo de **Efeitos Fixos** ou **Primeira Diferença**.

# 5 Alguns Testes

## 5.1 Autocorrelação dos Resíduos

## 5.2 Heterocedasticidade

## 5.3 Teste de Wald

# 6 Fixed Effects (EF, FE)

Aula 3

## 6.1 Modelo

O modelo linear de **efeitos não observados**:

$$y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \tag{6.1}$$

onde $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N$.

O modelo contém explicitamente um componente não observado que não varia no tempo $c_i$. Abordamos esse componente como parte do erro, não como parâmetro a não observado. No caso da análise de **Efeitos Fixos (EF, FE)**, permitimos que esse componente $c_i$ seja correlacionado com $\boldsymbol{x}_{it}$. Assim, se decidíssemos estimar o modelo (6.1) por POLS, ignorando $c_i$, teríamos problemas de inconsistência devido a **endogeneidade**.

As $T$ equações do modelo (6.1) podem ser reescritas como:

$$\boldsymbol{y}_i = X_i\boldsymbol{\beta} + c_1\mathbf{1}_T + \boldsymbol{u}_i, \tag{6.2}$$

com $\boldsymbol{v}_i = c_i\mathbf{1}_T + \boldsymbol{u}_i$ sendo os erros compostos.

### Matriz $M^0$

Definimos a matriz $M^0$ como:

$$M^0 = I_T - T^{-1}\mathbf{1}_T\mathbf{1}_T' = I_T - \mathbf{1}_T(\mathbf{1}_T'\mathbf{1}_T)^{-1}\mathbf{1}_T'.$$

A matriz $M^0$ é idempotente e simétrica.

$$M^0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}\mathbf{1}_T = \ddot{\boldsymbol{x}}.$$

Podemos transformar o modelo (6.3) ao premultiplicarmos todo o modelo por $M^0$.

$$M^0\boldsymbol{y}_i = M^0X_i\boldsymbol{\beta} + M^0(c_1\mathbf{1}_T) + M^0\boldsymbol{u}_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$M^0(c_1\mathbf{1}_T) = (I_T - T^{-1}\mathbf{1}_T\mathbf{1}_T')c_i\mathbf{1}_T = c_i\mathbf{1}_T - T^{-1}c_i\mathbf{1}_T\mathbf{1}_T'\mathbf{1}_T = c_i\mathbf{1}_T - c_i\mathbf{1}_T \implies \boxed{M^0(c_1\mathbf{1}_T) = 0}$$

$$\ddot{\boldsymbol{y}}_i = \ddot{X}_i\boldsymbol{\beta} + \ddot{\boldsymbol{u}}_i, \quad i = 1, \dots, N. \tag{6.3}$$

### Estimação POLS

Aplicando POLS no modelo (6.3)

$$\boxed{\boldsymbol{\beta}^{FE} = \left[\sum_{i=1}^{N}\ddot{X}_i'\ddot{X}_i\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\ddot{X}_i'\ddot{\boldsymbol{y}}_i\right]} \tag{6.4}$$

### Hipóteses

As Hipóteses que usamos para $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FE}$ são:

**FE.1:** Exogeneidade Estrita: $\mathrm{E}(u_{it} \,|\, \boldsymbol{x}_{i1}, \dots, \boldsymbol{x}_{iT}, c_i) = 0$, para $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N$.

**FE.2:** Posto completo de $\mathrm{E}(X_i'\Omega^{-1}X_i)$ (para inverter a matriz). $posto[\mathrm{E}(X_i'\Omega^{-1}X_i)] = K$.

**FE.3:** Homoscedasticidade: $\mathrm{E}(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i' \,|\, X_i, c_i) = \sigma_u^2 I_T$.

### Valor Esperado

Usando **FE.1** e **FE.2**, apenas.

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{X}_i'\ddot{X}_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{X}_i'\ddot{\boldsymbol{u}}_i\right)\right]$$

$$\boxed{\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left[(\ddot{X}'\ddot{X})^{-1}(\ddot{X}'\ddot{\boldsymbol{u}})\right]}$$

Sabendo que $\ddot{X} = (I_N \otimes M^0)X$ e $\ddot{\boldsymbol{u}} = (I_N \otimes M^0)\boldsymbol{u}$, definimos:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\left[X'(I_N \otimes M^0)(I_N \otimes M^0)\boldsymbol{u}\right]\right\}$$

$$\boxed{\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\left[X'(I_N \otimes M^0)\boldsymbol{u}\right]\right\}}$$

### Variância

Usamos a variância do estimador para inferência. Usando **FE.1** e **FE.2**, apenas:

$$\boxed{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \mathrm{E}\left[(\ddot{X}'\ddot{X})^{-1}(\ddot{X}'\ddot{\boldsymbol{u}})(\ddot{\boldsymbol{u}}'\ddot{X})(\ddot{X}'\ddot{X})^{-1}\right]}$$

**Pão:**

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[(\ddot{X}'\ddot{X})^{-1}\right] &= \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\}\\ &= \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\}\end{aligned}$$

**Recheio:**

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[(\ddot{X}'\ddot{\boldsymbol{u}})(\ddot{\boldsymbol{u}}'\ddot{X})\right] &= \mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)(I_N \otimes M^0)\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'(I_N \otimes M^0)(I_N \otimes M^0)X\right]\\ &= \mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'(I_N \otimes M^0)X\right]\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \text{Pão Recheio Pão}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\}\mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'(I_N \otimes M^0)X\right]\mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\}}$$

### Variância sob Homocedasticidade

Usando **FE.3**, temos

**Recheio':**

$$\mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)\right]\sigma_u^2 I_{NT}\mathrm{E}\left[(I_N \otimes M^0)X\right] = \sigma_u^2\mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]$$

$(I_N \otimes M^0)$ é uma matrix de dimensão $NT \times NT$, visto que $I_N$ é $N \times N$ e $M^0$ é $T \times T$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) &= \text{Pão Recheio' Pão}\\ &= \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\}\sigma_u^2\mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]\mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\}\\ &= \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\}\sigma_u^2 I_{NT}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \sigma_u^2 \cdot \mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]}$$

# 7 First Difference (FD, PD)

## 7.1 Modelo

O modelo linear de **efeitos não observados**:

$$y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \tag{7.1}$$

para $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N$.

O modelo contém explicitamente um componente não observado, $c_i$, que não varia no tempo. Tratamos o componente não observado como parte do erro, não como parâmetro a ser estimado. Aqui permitimos que $c_i$ seja correlacionado com $\boldsymbol{x}_{it}$. Deste modo, **não** podemos ignorar a sua presença e estimar (7.1) por POLS, visto que isso resultaria num estimador inconsistente devido a **endogeneidade**.

Assim, transformamos o modelo para eliminar $c_i$ e conseguirmos fazer uma estimação consistente de $\boldsymbol{\beta}$. A trasnformação a ser feita é a primeira diferença. Para tanto, seguimos os seguintes passos:

- Reescrevemos (7.1) defasado:

$$y_{it-1} = \boldsymbol{x}_{it-1}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it-1} \tag{7.2}$$

- Tiramos a diferença entre (7.2) e (7.1):

$$\begin{aligned} y_{it} - y_{it-1} &= (\boldsymbol{x}_{it} - \boldsymbol{x}_{it-1})\boldsymbol{\beta} + c_i - c_i + u_{it} - u_{it-1} \\ \Delta y_{it} &= \Delta \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

  para $t = 2, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N$.

Reescrevendo (7.3) no formato matricial empilhando $T$:

$$\Delta \boldsymbol{y}_i = \Delta X_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}_i \tag{7.4}$$

com $\boxed{e_{it} = \Delta u_{it}}$.

- $\Delta \boldsymbol{y}_i$ vetor $(T-1) \times 1$
- $\Delta X_i$ matriz $(T-1) \times K$
- $\boldsymbol{\beta}$ vetor $K \times 1$
- $\boldsymbol{e}_i$ vetor $(T-1) \times 1$

## 7.2 Estimação POLS

O estimador $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FD}$ é o POLS da regressão no modelo (7.4), assim:

$$\boxed{\boldsymbol{\beta}^{FD} = \left[\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i' \Delta X_i\right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i' \Delta \boldsymbol{y}_i\right]} \tag{7.5}$$

## 7.3 Hipóteses

As Hipóteses que usamos para $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FD}$ são:

**FD.1:** Exogeneidade Estrita: $\mathrm{E}(u_{it} \,|\, \boldsymbol{x}_{i1}, \dots, \boldsymbol{x}_{iT}, c_i) = 0$, para $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N$.

**FD.2:** Posto completo de $\mathrm{E}(\Delta X_i' \Delta X_i)$ (para inverter a matriz). *posto*$[\mathrm{E}(\Delta X_i' \Delta X_i)] = K$.

**FD.3:** Homoscedasticidade: $\mathrm{E}(\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i' \,|\, X_i, c_i) = \sigma_e^2 I_{T-1}$.

## 7.4 Valor Esperado

Usando apenas **FD.1** e **FD.2**:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FD}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i' \Delta X_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i' \boldsymbol{e}_i\right)\right]$$

$$\boxed{\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FD}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left[(\Delta X' \Delta X)^{-1} (\Delta X' \boldsymbol{e}\right]}$$

### Variância

Usando apenas **FD.1** e **FD.2**:

$$\boxed{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FD}) = \mathrm{E}\left[(\Delta X' \Delta X)^{-1} (\Delta X' \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}' \Delta X)(\Delta X' \Delta X)^{-1}\right]}$$

### Variância sob Homocedasticidade

Usando **FD.3**, temos

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FD}) = \sigma_e^2 \mathrm{E}\left[(\Delta X' \Delta X)^{-1} (\Delta X' \Delta X)(\Delta X' \Delta X)^{-1}\right]$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FD}) = \sigma_e^2 \mathrm{E}\left[(\Delta X' \Delta X)^{-1}\right]}$$

com

$$\sigma_e^2 = [N(T-1) - K]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \hat{e}_{it}^2\right],$$

que é a média de todos $\hat{e}_{it}^2$ contando $K$ regressores.

# 8 System GLS (SGLS)

Wooldridge (2010, Sec.7.4 – Consistency and Asymptotic Normality of Generalized Least Squares, p.153)

## 8.1 Modelo Linear

## 8.2 Hipóteses

Para implementarmos o estimador de **GLS** precisamos das seguintes hipótese:

1. $\mathrm{E}(\mathbf{X}_i \otimes \boldsymbol{u}_i) = 0$.

   Para SGLS ser consistente, precisamos que $\boldsymbol{u}_i$ não seja correlacionada com nenhum elemento de $\mathbf{X}_i$.

2. $\Omega$ é positiva definida (para ter inversa). $\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\Omega^{-1}\mathbf{X}_i)$ é **não** singular (para ter invesa).

   Onde, $\Omega$ é a seguinte matriz **simétrica**, positiva-definida:

   $$\Omega = \mathrm{E}(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i').$$

### Estimação

Agora, transformamos o sistema de equações ao realizarmos a pré-multiplicação do sistema por $\Omega^{-1/2}$:

$$\begin{aligned}
\Omega^{-1/2}\boldsymbol{y}_i &= \Omega^{-1/2}\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \Omega^{-1/2}\boldsymbol{u}_i \\
\boldsymbol{y}_i^* &= \mathbf{X}_i^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}_i^*
\end{aligned}$$

Estimando a equação acima por **SOLS**:

$$\begin{aligned}
\beta^{SOLS} &= \left(\sum_{i=1} \mathbf{X}_i^{*\prime}\mathbf{X}_i^*\right)^{-1} \left(\sum_{i=1} \mathbf{X}_i^{*\prime}\boldsymbol{y}_i^*\right) \\
&= \left(\sum_{i=1} \mathbf{X}_i'\Omega^{-1/2}\Omega^{-1/2}\mathbf{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1} \mathbf{X}_i'\Omega^{-1/2}\Omega^{-1/2}\boldsymbol{y}_i\right) \\
&= \left(\sum_{i=1} \mathbf{X}_i'\Omega^{-1}\mathbf{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1} \mathbf{X}_i'\Omega^{-1}\boldsymbol{y}_i\right)
\end{aligned}$$

# 9 GLS Factível

Wooldridge (2010, Sec.7.5 – Feasible GLS, p.153)

### FSGLS: SGLS Factível

Para obtermos $\beta^{SGLS}$ precisamos conhecer $\Omega$, o que não ocorre na prática. Então, precisamos estimar $\Omega$ com um estimador consistente. Para tanto usamos um procedimento de dois passos:

1. Estimar $\boldsymbol{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}_i$ via **SOLS** e guardar o resíduo estimado $\widehat{\boldsymbol{u}}_i$.
2. Estimar $\Omega$ com o seguinte estimador $\widehat{\Omega}$:

$$\widehat{\Omega} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i'$$

Com a estimativa $\widehat{\Omega}$ feita, podemos obter $\beta^{FSGLS}$ pela fórmula do $\beta^{SGLS}$:

$$\beta^{FGLS} = \left[\sum_i \mathbf{X}_i'\widehat{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i\right]^{-1}\left[\sum_i \mathbf{X}_i'\widehat{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}_i\right]$$

Empilhando as $N$ observações:

$$\beta^{FGLS} = \left[\mathbf{X}\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)\boldsymbol{y}\right]$$

Reescrevendo a equação acima:

$$\begin{aligned}\beta^{FGLS} &= \left[\mathbf{X}\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)(\mathbf{X}\beta + u)\right]\\ &= \left[\mathbf{X}\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left\{\left[\mathbf{X}'\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\beta\right] + \left[\mathbf{X}'\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)u\right]\right\}\\ &= \beta + \left[\mathbf{X}\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)u\right]\end{aligned}$$

### Valor Esperado

$$\mathrm{E}(\beta^{FGLS}) = \beta + \left[\mathbf{X}\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)u\right]$$

Concluímos que, se $\widehat{\Omega} \xrightarrow{p} \Omega$, então, $\beta^{FSGLS} \xrightarrow{p} \beta$,

### Variância

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\beta^{FGLS}) &= \left[\mathbf{X}\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)u\right]\left\{\left[\mathbf{X}\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)u\right]\right\}'\\ &= \left[\mathbf{X}\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)uu'\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]\left[\mathbf{X}\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\end{aligned}$$

Tirando o valor Esperado e supondo que:

$\mathrm{E}(\mathbf{X}_i\Omega^{-1}u_iu_i'\mathbf{X}_i) = \mathrm{E}(\mathbf{X}_i\Omega^{-1})$

temos:

$$\mathrm{E}\left[\mathbf{X}'\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)uu'\left(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1}\right)'\mathbf{X}\right] = \mathrm{E}(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})$$

e temos:

$$\mathrm{Var}(\beta^{FSGLS}) = \left[\mathrm{E}(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right]^{-1}.$$

# 10 Random Effects (RE, EA)

## Modelo

O modelo linear de **efeitos não observados**:

$$y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \tag{10.1}$$

onde $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N$.

O modelo contém explicitamente um componente não observado que não varia no tempo $c_i$. Abordamos esse componente como parte do erro, não como parâmetro a ser estimado. Para a análise de **Efeitos Aleatórios, (EA) ou (RE)**, supomos que os regressões $\boldsymbol{x}_{it}$ são **não correlacionados** com $c_i$, mas fazemos hipóteses mais restritas que o **POLS**; pois assim exploramos a presença de **correlação serial** do erro composto por GLS e garantimos a consitência do estimador de FGLS.

Podemos reescrever (10.1) como:

$$y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it}, \tag{10.2}$$

onde $t = 1, \dots, T$, $i = 1, \dots, N$ e $\boxed{v_{it} = c_i + u_{it}}$ é o erro composto.

Agora, vamos empilhar os $t$'s e reescrever (10.2) como:

$$\boldsymbol{y}_i = X_i\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{v}_i, \tag{10.3}$$

onde $i = 1, \dots, N$ e $\boxed{\boldsymbol{v}_i = c_i\mathbf{1}_T + \boldsymbol{u}_i}$.

## Hipóteses de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{RE}$

As Hipóteses que usamos para $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{RE}$ são:

1. Usamos o modelo correto e $c_i$ não é endógeno.

   a) $\mathrm{E}(u_{it} \,|\, x_{i1}, \dots, x_{iT}, c_i) = 0$, $i = 1, \dots, N$.
   b) $\mathrm{E}(c_{it} \,|\, x_{i1}, \dots, x_{iT}) = \mathrm{E}(c_i) = 0$, $i = 1, \dots, N$.

2. Posto completo de $\mathrm{E}(X_i'\Omega^{-1}X_i)$.

   Definindo a matriz $T \times T$, $\boxed{\Omega \equiv \mathrm{E}(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i')}$, queremos que $\mathrm{E}(X_i\Omega^{-1}X_i)$ tenha posto completo (posto $= K$).

A matriz $\Omega$ é simétrica $\Omega' = \Omega$ e positiva definida $\det(\Omega) > 0$. Assim podemos achar $\Omega^{1/2}$ e $\Omega^{-1/2}$ com $\Omega = \Omega^{1/2}\Omega^{1/2}$ e $\Omega^{-1} = \Omega^{-1/2}\Omega^{-1/2}$.

## Estimação

Premultiplicando (10.3) port $\Omega^{-1/2}$ do dois lados, temos:

$$\begin{aligned}\Omega^{-1/2}\boldsymbol{y}_i &= \Omega^{-1/2}X_i\boldsymbol{\beta} + \Omega^{-1/2}\boldsymbol{v}_i \\ \boldsymbol{y}_i^* &= X_i^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{v}_i^*,\end{aligned} \tag{10.4}$$

Estimando o modelo acima por POLS:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^{POLS} &= \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{*\prime} X_i^{*}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{*\prime} \boldsymbol{y}_i^{*}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{\prime} \Omega^{-1} X_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{\prime} \Omega^{-1} \boldsymbol{y}_i\right) \\
&= \left(X^{\prime}(I_N \otimes \Omega^{-1})X\right)^{-1} \left(X^{\prime}(I_N \otimes \Omega^{-1})\boldsymbol{y}\right). \qquad (10.5)
\end{aligned}$$

O problema, agora, é estimar $\Omega$. Supondo:

- $\mathrm{E}(u_{it}u_{it}) = \sigma_u^2$;
- $\mathrm{E}(u_{it}u_{is}) = 0$.

Como $\Omega = \mathrm{E}(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^{\prime}) = \mathrm{E}[(c_i\mathbf{1}_T + \boldsymbol{u}_i)(c_i\mathbf{1}_T + \boldsymbol{u}_i)^{\prime}]$, temos que:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(v_{it}v_{it}) = \mathrm{E}(c_i^2 + 2c_iu_{it} + u_{it}^2) = \sigma_c^2 + \sigma_u^2 \\
&\mathrm{E}(v_{it}v_{is}) = \mathrm{E}[(c_i + u_{it})(c_i + u_{is})] = \mathrm{E}(c_i^2 + c_iu_{is} + u_{it}c_i + u_{it}u_{is}) = \sigma_c^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\Omega = \mathrm{E}(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^{\prime}) = \sigma_u^2 I_T + \sigma_c^2 \mathbf{1}_T\mathbf{1}_T^{\prime}$$

onde $\sigma_u^2 I_T$ é uma matriz diagonal, e $\sigma_c^2 \mathbf{1}_T\mathbf{1}_T^{\prime}$ é uma matriz com todos os elementos iguais a $\sigma_c^2$.

Agora, rodando POLS em (10.3) e guardando os resíduos, temos:

$$\hat{v}_{it}^{POLS} = \hat{y}_{it}^{POLS} - \boldsymbol{x}_{it}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{POLS}$$

e conseguimos estimar $\sigma_v^2$ e $\sigma_c^2$ por estimadores amostrais:

- como $\sigma_v^2 = \mathrm{E}(v_{it}^2)$:

$$\hat{\sigma}_v^2 = (NT - K)^{-1} \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \hat{v}_{it}^2$$

- como $\sigma_c^2 = \mathrm{E}(v_{it}v_{is})$:

$$\hat{\sigma}_c^2 = \left[N\frac{T(T-1)}{2} - K\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{s=t+1}^{T} \hat{v}_{it}\hat{v}_{is}$$

- $N$ indivíduos;
- $T$ elementos da diagonal principal de $\Omega$
- $\frac{T(T-1)}{2}$ elementos da matriz triangular superior dos elementos fora da diagonal.
- $K$ regressores.

Agora que temos $\hat{\sigma}_v^2$ e $\hat{\sigma}_c^2$ podemos achar $\hat{\sigma}_u^2$ pela equação $\boxed{\hat{\sigma}_u^2 = \hat{\sigma}_v^2 - \hat{\sigma}_c^2}$. Dessa forma, achamos os $T^2$ elementos de $\widehat{\Omega}$, e podemos escrever:

$$\widehat{\Omega} = \hat{\sigma}_u^2 I_T + \hat{\sigma}_c^2 \mathbf{1}_T\mathbf{1}_T^{\prime}$$

Com $\widehat{\Omega}$ estimado, reescrevemos (10.5) como:

$$\boldsymbol{\beta}^{RE} = \left[X^{\prime}(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})X\right]^{-1} \left[X^{\prime}(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})\boldsymbol{y}\right]. \qquad (10.6)$$

### Valor Esperado

$$\boxed{\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{RE}) = \boldsymbol{\beta} + \left[X'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})X\right]^{-1}\left[X'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})\boldsymbol{v}\right]}.$$

### Variância

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{RE}) = E\left\{\left[X'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})X\right]^{-1}\left[X'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})'X\right]\left[X'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})X\right]\right\},$$

como $\mathrm{E}(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i') = \Omega$,

$$\boxed{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{RE}) = E\left[X'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})X\right]}.$$

# 11 Modelo de Efeitos Não Observados

Wooldridge (2010, C.10 – Basic Linear Unobserved Effects Panel Data Models)

# 12 Endogeneity and GMM

## Modelo

No seguinte modelo *cross-section*:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i \; ; \quad i = 1, \dots, N. \tag{12.1}$$

A variável explicativa $x_k$ é dita **endógena** se ela for correlacionada com erro. Se $x_k$ for não correlacionada com o erro, então $x_k$ é dita **exógena**.

Endogeneidade surge, normalmente, de três maneiras diferentes:

1. Variável Omitida;
2. Simultaneidade;
3. Erro de Medida.

No modelo (12.1) vamos supor:

- $x_1$ é exógena.
- $x_2$ é endógena.

## Hipóteses

Assim, precisamos encontrar um instrumento $z_i$ para $x_2$, uma vez que queremos estimar $\beta_0$, $\beta_1$ e $\beta_2$ de maneira consistente. Para $z_i$ ser um bom instrumento precisamos que $z$ tenha:

1. $Cov(z, \varepsilon) = 0 \implies z$ é exógena em (12.1).
2. $Cov(z, x_2) \neq 0 \implies$ correlação com $x_2$ após controlar para outras vaariáveis.

## Estimação

Indo para o problema de dados de painel, temos:

$$\boldsymbol{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}_i \; ; \quad i = 1, \dots, N. \tag{12.2}$$

onde $\boldsymbol{y}_i$ é um vetor $T \times 1$, $\mathbf{X}_i$ é uma matriz $T \times K$, $\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de coeficientes $K \times 1$, $\boldsymbol{u}_i$ é o vetor de erros $T \times 1$.

Se é verdade que há endogeneidade em (12.2), então:

$$\mathrm{E}(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{u}_i) \neq 0$$

Definimos $Z_i$ como uma matriz $T \times L$ com $L \geq K$ de variáveis exógenas (incluindo o instrumento). Queremos acabar com a endogeneidade, ou seja:

$$\mathrm{E}(Z_i' \boldsymbol{u}_i) = 0$$

Supondo $L = K$ (apenas substituímos a variável endógena por um instrumento).

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Z_i'(\boldsymbol{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})] &= 0 \\
\mathrm{E}(Z_i' \boldsymbol{y}_i) - \mathrm{E}(Z_i' \mathbf{X}_i) \boldsymbol{\beta} &= 0 \\
\mathrm{E}(Z_i' \boldsymbol{y}_i) &= \mathrm{E}(Z_i' \mathbf{X}_i) \boldsymbol{\beta} \\
&\boxed{\boldsymbol{\beta} = \left[\mathrm{E}(Z_i' \mathbf{X}_i)\right]^{-1} \left[\mathrm{E}(Z_i' \boldsymbol{y}_i)\right]}
\end{aligned}$$

Se Usarmos estimadores amostrais:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N} Z_i'\mathbf{X}_i\right]^{-1}\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N} Z_i'\boldsymbol{y}_i\right]$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}} = (Z'\mathbf{X})^{-1}(Z'\boldsymbol{y})}$$

Se $L > K$, vamos considerar:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}}{\text{Min}}\ \text{E}(Z_i\boldsymbol{u}_i)^2$$

onde:

$$\begin{aligned}\text{E}(Z_i\boldsymbol{u}_i)^2 &= \text{E}[(Z_i\boldsymbol{u}_i)'(Z_i\boldsymbol{u}_i)] = (Z'\boldsymbol{y} - Z'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(Z'\boldsymbol{y} - Z'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= \boldsymbol{y}'ZZ'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'ZZ'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'ZZ'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'ZZ'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

Derivando em relação em $\boldsymbol{\beta}$ e igualando a zero:

$$\begin{aligned}-2\boldsymbol{y}'ZZ'\mathbf{X} + 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'ZZ'\mathbf{X} &= 0 \\ \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'ZZ'\mathbf{X} &= \boldsymbol{y}'ZZ'\mathbf{X} \\ \boldsymbol{\beta}' &= (\boldsymbol{y}'ZZ'\mathbf{X})(\mathbf{X}'ZZ'\mathbf{X})^{-1} \\ \boxed{\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}'ZZ'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'ZZ'\boldsymbol{y})}\end{aligned}$$

Um estimador mais eficiente pode ser encontrado fazendo:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}}{\text{Min}}\ \text{E}[(Z_i'\boldsymbol{y} - Z'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'W(Z_i'\boldsymbol{y} - Z'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})].$$

Escolhendo $\widehat{W}$, a priori, temos:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}}{\text{Min}}\ \left\{\boldsymbol{y}'Z\widehat{W}Z'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'Z\widehat{W}Z'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right\}$$

Derivando em relação em $\boldsymbol{\beta}$ e igualando a zero:

$$\begin{aligned}-2\boldsymbol{y}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X} + 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X} &= 0 \\ \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X} &= \boldsymbol{y}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X} \\ \boldsymbol{\beta}' &= (\boldsymbol{y}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X})(\mathbf{X}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X})^{-1} \\ \boxed{\boldsymbol{\beta}^{GMM} = (\mathbf{X}'Z\widehat{W}'Z'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'Z\widehat{W}'Z'\boldsymbol{y})}\end{aligned}$$

## Valor Esperado

$$\boxed{\text{E}(\boldsymbol{\beta}^{GMM}) = \boldsymbol{\beta} + \text{E}[(\mathbf{X}'Z\widehat{W}'Z'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'Z\widehat{W}'Z'\boldsymbol{u})]}.$$

### Variância

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\boldsymbol{\beta}^{GMM}) &= \text{E}\left\{\left[(X'Z\widehat{W}'Z'X)^{-1}(X'Z\widehat{W}'Z'\boldsymbol{u})\right]\left[(X'Z\widehat{W}'Z'X)^{-1}(X'Z\widehat{W}'Z'\boldsymbol{u})\right]'\right\} \\
&= \text{E}\left\{(X'Z\widehat{W}'Z'X)^{-1}X'Z\widehat{W}'Z'\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'Z\widehat{W}Z'X(X'Z\widehat{W}Z'X)^{-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Definindo $\Delta = \text{E}(Z'\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'Z)$ com $\Delta = W^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\boldsymbol{\beta}^{GMM}) &= \text{E}\left\{(X'Z\widehat{W}'Z'X)^{-1}X'Z\widehat{W}'W^{-1}\widehat{W}Z'X(X'Z\widehat{W}Z'X)^{-1}\right\} \\
&= \text{E}\left\{(X'Z\widehat{W}'Z'X)^{-1}(X'Z\widehat{W}'Z'X)(X'Z\widehat{W}Z'X)^{-1}\right\}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Var}(\boldsymbol{\beta}^{GMM}) = \text{E}\left[(X'Z\widehat{W}Z'X)^{-1}\right]}.$$

Se tivéssemos definido $W = (Z'Z)^{-1}$, teríamos $\beta^{2SLS}$.

# 13 Exogeneidade Estrita e FDIV

## Modelo

No seguinte modelo

$$y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + u_{it},$$

para $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N$.

- $y_{it}$ escalar;
- $\boldsymbol{x}_{it}$ vetor $1 \times K$;
- $\boldsymbol{\beta}$ vetor $K \times 1$;
- $u_{it}$ escalar.

$\{x_{it}\}$ é estritamente **exógeno** se valer:

$$\mathrm{E}(u_{it} \,|\, \boldsymbol{x}_{i1}, \dots, \boldsymbol{x}_{iT}) = 0 \,, \qquad t = 1, \dots, T$$

ou seja:

$$\mathrm{E}(y_{it} \,|\, \boldsymbol{x}_{i1}, \dots, \boldsymbol{x}_{iT}) = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} \,, \qquad t = 1, \dots, T$$

o que é equivalente a hipótese de que utilizamos o modelo linear correto.

Para o seguinte modelo:

$$y_{it} = \boldsymbol{z}_{it}\boldsymbol{\gamma} + \rho y_{it-1} + c_i + u_{it}. \,, \qquad t = 2, \dots, T$$

é **impossível** termos exogeneidade estrita. Isso porque, nesse modelo, de efeitos não observados temos:

$$\mathrm{E}(y_{it} \,|\, \boldsymbol{z}_{i1}, \dots, \boldsymbol{z}_{iT}, y_{it-1}, c_i) \neq 0.$$

Isso ocorre porque, $y_{it}$ é afetado por $y_{it-1}$ que contribui para $y_{it}$ com, pelo menos, $\rho c_i$.

$$\left.\begin{aligned} y_{it} &= \boldsymbol{z}_{it}\boldsymbol{\gamma} + \rho y_{it-1} + c_i + u_{it} \\ y_{it-1} &= \boldsymbol{z}_{it-1}\boldsymbol{\gamma} + \rho y_{it-2} + c_i + u_{it-1} \end{aligned}\right\} \implies y_{it} = \boldsymbol{z}_{it}\boldsymbol{\gamma} + \rho(\boldsymbol{z}_{it-1}\boldsymbol{\gamma} + \rho y_{it-2} + c_i + u_{it-1}) + c_i + u_{it}.$$

Para eliminarmos este efeito, podemos tirar a primeira diferença do modelo:

$$\begin{aligned} y_{it} - y_{it-1} &= (\boldsymbol{z}_{it} - \boldsymbol{z}_{it-1})\boldsymbol{\gamma} + \rho(y_{it-1} - y_{it-2}) + (c_i - c_i) + (u_{it} - u_{it-1}) \\ &\boxed{\Delta y_{it} = \Delta \boldsymbol{z}_{it}\boldsymbol{\gamma} + \rho \Delta y_{it-1} + \Delta u_{it} \,, \qquad t = 3, \dots, T} \end{aligned} \tag{13.1}$$

## Estimação

Não podemos estimar o modelo (13.1) por POLS, uma vez que $Cov(\Delta y_{it-1}, \Delta u_{it}) \neq 0$. Como saída, podemos estimar por P2SLS, usando instrumentos para $\Delta y_{it-1}$ (alguns intrumentos para $\Delta y_{it-1}$ são $y_{it-2}, y_{it-3}, \dots, y_{i1}$).

**P2SLS**

$y_{it} = \boldsymbol{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + u_{it}$

- $i = 1, \ldots, N$
- $t = 1, \ldots, T$
- $y_{it}$ escalar;
- $\boldsymbol{x}_{it}$ vetor $K \times 1$;
- $\boldsymbol{\beta}$ vetor $K \times 1$;
- $u_{it}$ escalar.

$\boxed{\boldsymbol{\beta}^{P2SLS} = (X'P_Z X)^{-1}(X'P_Z \boldsymbol{y})}$

com

$\boxed{P_Z = Z'(Z'Z)^{-1}Z}$

onde $P_Z$ é a matriz de projeção em $Z$.

**FDIV**

$$\begin{aligned} y_{it} &= \boldsymbol{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it} \ , \quad i = 1, \ldots, N \ , \quad t = 1, \ldots, T \\ \Delta y_{it} &= \Delta \boldsymbol{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it} \ , \quad i = 1, \ldots, N \ , \quad t = 2, \ldots, T \end{aligned}$$

Vamos supor $\Delta x'_{it}$ tem variável endógena ($y_{it}$, no caso). $\boldsymbol{w}_{it}$ é um vetor $1 \times L_t$ de instrumentos, onde $L_t \geq K$. Se os instrumentos forem diferentes:

$W_i = diag(\boldsymbol{w}'_{i2}, \boldsymbol{w}'_{i3}, \ldots, \boldsymbol{w}'_{iT})$

onde $W_i$ é uma matriz $(T-1) \times L$

$L = L_2 + L_3 + \cdots + L_T$

### Hipóteses

**FDIV.1:** $\mathrm{E}(\boldsymbol{w}_{it}\Delta u'_{it})$ para $i = 1, \ldots, N$, $t = 2, \ldots, T$.

**FDIV.2:** $Posto\,[\mathrm{E}(W'_i W_i)] = L$

**FDIV.3:** $Posto\,[\mathrm{E}(W'_i \Delta X_i)] = K$

### Estimação FDIV

$\boxed{\boldsymbol{\beta}^{FDIV} = \left(\Delta X' P_W \Delta X\right)^{-1}\left(\Delta X' P_W \Delta \boldsymbol{y}\right)}$ $\boxed{P_W = W(W'W)^{-1}W'}$

### Valor Esperado

$\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FDIV}) = \beta + \left(\Delta X' P_W \Delta X\right)^{-1}\left(\Delta X' P_W \boldsymbol{e}\right)$

### Variância

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FDIV}) &= \mathrm{E}\left\{\left[\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FDIV}) - \beta\right]\left[\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FDIV}) - \beta\right]'\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{\left[\Delta X' P_W \Delta X\right]^{-1}\left[\Delta X' P_W \boldsymbol{e}\right]\left[\Delta X' P_W \boldsymbol{e}\right]'\left[\Delta X' P_W \Delta X\right]^{-1}\right\} \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\Delta X' P_W \Delta X\right)^{-1}\left(\Delta X' P_W \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}' P_W \Delta X\right)\left(\Delta X' P_W \Delta X\right)^{-1}\right]
\end{aligned}
$$

$e_i = \Delta u_{it}$.

# 14 Latent Variables, Probit and Logit

## Modelo

Suponha $y^*$ não observável (**latente**) seguindo o seguinte modelo:

$$y_i^* = \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i. \tag{14.1}$$

Defina $y$ como:

$$y_i = \begin{cases} 1\,, & y_i^* \geq 0 \\ 0\,, & y_i^* < 0 \end{cases}$$

temos que:

$$P(y_i = 1|\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})$$
$$P(y_i = 0|\boldsymbol{x}) = 1 - p(\boldsymbol{x}).$$

Além disso, pela definição de $y_i$, equação (14.1), temos:

$$\begin{aligned} P(y_i = 1|\boldsymbol{x}) &= P(y_i^* \geq 0\,|\boldsymbol{x}) \\ &= P(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \geq 0\,|\boldsymbol{x}) \\ &= P(\varepsilon_i \geq -\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}\,|\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Agora, supondo que $\varepsilon_i$ tem FDA, $G$, tal que $G' = g$ é simétrica ao redor de zero:

$$\begin{aligned} P(y_i = 1|\boldsymbol{x}) &= 1 - P(\varepsilon_i < -\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}\,|\boldsymbol{x}) \\ &= 1 - G(-\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}\,|\boldsymbol{x}) \\ &= G(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}). \end{aligned}$$

Se $G(\cdot)$ for uma distribuição:

**Normal Padrão:** $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é o estimador **probit**.

**Logística:** $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é o estimador **logit**.

Supondo $\boldsymbol{y}_i\,|\,\boldsymbol{x} \sim Bernoulli(p(\boldsymbol{x}))$, sua fmp é dada por:

$$f(y_i\,|\,\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\beta}) = \left[G(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})\right]^{y_i}\left[1 - G(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})\right]^{1-y_i} \quad , \quad y = 0, 1.$$

Para estimarmos $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ por máxima verossimilhança, temos de encontrar $\boldsymbol{\beta} \in B$, onde $B$ é o espaço paramétrico, tal que $\boldsymbol{\beta}$ maximize o valor da distribuição conjunta de $\boldsymbol{y}$, ou seja:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}\in B}{\text{Max}} \prod_{i=1}^{N} f(y_i\,|\,\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\beta}).$$

Tirando o logaritmo e dividindo tudo por $N$ (podemos fazer isso pois são transformações monotônicas e não alteram o lugar onde $\boldsymbol{\beta}$ ótimo irá parar):

$$\underset{\boldsymbol{\beta}\in B}{\text{Max}} \left\{ N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \ln\left[f(y_i\,|\,\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\beta})\right] \right\}.$$

Podemos definir $\ell_i(\boldsymbol{\beta}) = \ln[f(y_i\,|\,\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\beta})]$ como sendo a verossimilhança condicional da observação $i$:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}\in B}{\text{Max}} \left\{ N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \ell_i(\boldsymbol{\beta}) \right\}.$$

Dessa forma, podemos ver que o problema acima é a analogia amostral de:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}\in B}{\text{Max}} \ \mathrm{E}\left[\ell_i(\boldsymbol{\beta})\right].$$

Definindo o *vector score* da observação $i$:

$$s_i(\boldsymbol{\beta}) = [\nabla_{\boldsymbol{\beta}} \ell_i(\boldsymbol{\beta})]' = \left[ \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1}, \dots, \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_K} \right]$$

Definindo a **Matriz Hessiana** da observação $i$:

$$H_i(\boldsymbol{\beta}) = \nabla_{\boldsymbol{\beta}} s_i(\boldsymbol{\beta}) = \nabla^2_{\boldsymbol{\beta}} \ell_i(\boldsymbol{\beta})$$

Tendo essas definições, o **Teorema do Valor Médio** (TVM) nos diz que no intervalo $[a, b]$, existe um número, $c$, tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

FAZER DESENHO

Trocando $f(\cdot)$ por $s_i(\cdot)$, $a$ por $\boldsymbol{\beta}_0$, $b$ por $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ e $c$ por $\bar{\boldsymbol{\beta}}$, temos:

$$H_i(\bar{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{s_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - s_i(\boldsymbol{\beta}_0)}{\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0},$$

tirando médias dos dois lados:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} H_i(\bar{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0} N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left[ s_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - s_i(\boldsymbol{\beta}_0) \right]$$

Supondo que $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ maximiza $\ell(\boldsymbol{\beta} \,|\, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, temos que: $N^{-1} \sum_{i=1}^{N} s_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = 0$. E podemos reescrever a equação anterior como:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0 = (-1) \left[ N^{-1} \sum_{i=1}^{N} H_i(\bar{\boldsymbol{\beta}}) \right]^{-1} N^{-1} \sum_{i=1}^{N} s_i(\boldsymbol{\beta}_0)$$

$$\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) = \left[ -N^{-1} \sum_{i=1}^{N} H_i(\bar{\boldsymbol{\beta}}) \right]^{-1} \sqrt{N} \cdot N^{-1} \sum_{i=1}^{N} s_i(\boldsymbol{\beta}_0)$$

$$\boxed{\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) = \left[ -N^{-1} \sum_{i=1}^{N} H_i(\bar{\boldsymbol{\beta}}) \right]^{-1} N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} s_i(\boldsymbol{\beta}_0)}.$$

Onde

$$\left[-N^{-1}\sum_{i=1}^{N} H_i(\bar{\boldsymbol{\beta}})\right]^{-1} \xrightarrow{p} A_0^{-1}, \qquad N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N} s_i(\boldsymbol{\beta}_0) \xrightarrow{d} N(0, B_0).$$

Assim, temos que:

$$\boxed{\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) \rightarrow N(0, A_0^{-1}B_0A_0^{-1})}.$$

A forma mais simples de achar $\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ é:

$$\boxed{\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = -\mathrm{E}[H_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}})]^{-1}}.$$

# 15 ATT, ATE, Propensity Score

### Modelo

- $y_1 \to$ variável de interesse com tratamento
- $y_0 \to$ variável de interesse sem tratamento

$$w = \begin{cases} 1 & \text{se tratam} \\ 0 & \text{se não tratam} \end{cases}$$

Idealmente, para isolarmos completamente o efeito de $w = 1$, gostaríamos de pode calcular:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} (y_{i1} - y_{i0}) \,.$$

Ou seja, o efeito que o tratamento causa sobre um indivíduo com todo o resto permanecendo constante. Em outras palavras, queríamos que houvesse dois mundos paralelos observáveis onde seria possível observar o que acontece com $y_i$ com e sem tratamento. Infelizmente, para ccada indivíduo $i$, observamos apenas $y_{i1}$ ou $y_{i0}$, nunca ambos.

Antes de continuarmos, faremos as seguintes definições:

**ATE:** $\mathrm{E}(y_1 - y_0)$

**ATT:** $\mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|\, w = 1)$ (ATE no tratado).

### $ATE$ e $ATT$ condicional a variáveis $\boldsymbol{x}$

$$\begin{aligned} ATE(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|\boldsymbol{x}) \\ ATT(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|\boldsymbol{x}, w = 1) \end{aligned}$$

<u>OBS:</u>

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(y_1 - y_0) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|w)\right] \\ \mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|w) &= \mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|w = 0) \cdot P(w = 0) + \mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|w = 1) \cdot P(w = 1). \end{aligned}$$

### Métodos Assumindo Ignorabilidade do Tratamento

**ATE.1:** Ignorabilidade.
$w$ e $(y_1, y_0)$ são independentes condicionais a $\boldsymbol{x}$.

**ATE.1':** Ignorabilidade da Média.
a) $\mathrm{E}(y_0 \,|\, w, \boldsymbol{x}) = \mathrm{E}(y_0 \,|\, \boldsymbol{x})$
b) $\mathrm{E}(y_1 \,|\, w, \boldsymbol{x}) = \mathrm{E}(y_1 \,|\, \boldsymbol{x})$

Vamos definir

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(y_0 \,|\, \boldsymbol{x}) &= \mu_0(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{E}(y_1 \,|\, \boldsymbol{x}) &= \mu_1(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Sob **ATE.1** e **ATE.1'**:

$$\begin{aligned} ATE(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|\boldsymbol{x}) = \mu_1(\boldsymbol{x}) - \mu_0(\boldsymbol{x}) \\ ATT(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|\boldsymbol{x}, w = 1) = \mu_1(\boldsymbol{x}) - \mu_0(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

**ATE.2:** *Overlap*
Para todo $\boldsymbol{x}$, $P(w = 1 \,|\, \boldsymbol{x}) \in (0, 1)$, $p(\boldsymbol{x}) = p(w = 1|\boldsymbol{x})$.

$p(\boldsymbol{x})$ é o *Propensity Score*, ele representa a probabilidade de $y_i$ ser tratado dado o valor das covariáveis $\boldsymbol{x}$. Essa hipótese é importante visto que podemos expressar o $ATE$ em função de $p(\boldsymbol{x})$.

Para o $ATT$ vamos supor:

**ATT.1':** $\mathrm{E}(y_0 \,|\boldsymbol{x}, w) = \mathrm{E}(y_0 \,|\, \boldsymbol{x})$

**ATT.2:** *Overlap:* Para todo $\boldsymbol{x}$, $P(w = 1|\boldsymbol{x}) < 1$.

### Propensity Score

Como foi dito anteriormente, apenas observamos ou $y_1$ ou $y_0$ para a mesma pessoa, mas não ambos. Mais precisamente, junto com $w$, o resultado observado é:

$y = wy_1 + (1 - w)y_0$

como $w$ é binário, $w^2 = w$, assim, temos:

$$
\begin{aligned}
wy &= w^2 y_1 + (w - w^2)y_0 \implies \boxed{wy = wy_1} \\
(1 - w)y &= (w - w^2)y_1 + (w^2 - 2w + 1)y_0 \implies \boxed{(1 - w)y = (1 - w)y_0}.
\end{aligned}
$$

Fazemos isso para tentar isolar $\mu_0(\boldsymbol{x})$ e $\mu_1(\boldsymbol{x})$:

$\mu_1(\boldsymbol{x})$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(wy|\boldsymbol{x}) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(wy_1|\boldsymbol{x}, w\right)|\boldsymbol{x}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[w\mu_1(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\right] \\
&= \mu_1(\boldsymbol{x})\mathrm{E}(w|\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
$$

Como $w$ é binaria: $\mathrm{E}(w|\boldsymbol{x}) = P(w = 1|\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})$. Assim:

$$
\mathrm{E}(wy|\boldsymbol{x}) = \mu_1(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})
$$

$$
\boxed{\mu_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{E}(wy|\boldsymbol{x})}{p(\boldsymbol{x})}}
$$

$\mu_0(\boldsymbol{x})$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[(1 - w)y|\boldsymbol{x}] &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left((1 - w)y_0|\boldsymbol{x}, w\right)|\boldsymbol{x}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[(1 - w)\mu_0(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\right] \\
&= \mu_0(\boldsymbol{x})\mathrm{E}(w|\boldsymbol{x}) \\
\mathrm{E}[(1 - w)y|\boldsymbol{x}] &= \mu_0(\boldsymbol{x})[1 - p(\boldsymbol{x})] \implies \\
&\boxed{\mu_0(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{E}[(1 - w)y|\boldsymbol{x}]}{1 - p(\boldsymbol{x})}}
\end{aligned}
$$

**ATE:**

$$
\mu_1(\boldsymbol{x}) - \mu_0(\boldsymbol{x}) = \mathrm{E}\left[\frac{[w - p(\boldsymbol{x})]y}{p(\boldsymbol{x})[1 - p(\boldsymbol{x})]}|\boldsymbol{x}\right]
$$

$$
\boxed{\widehat{ATE} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{[w_i - p(\boldsymbol{x}_i)]y_i}{p(\boldsymbol{x}_i)[1 - p(\boldsymbol{x}_i)]}}
$$

**ATT:**

$$\mathrm{E}(y_1|\boldsymbol{x}, w=1) - \mathrm{E}(y_0|\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\hat{P}(w=1)}\mathrm{E}\left[\frac{[w-\hat{p}(\boldsymbol{x})]y}{[1-\hat{p}(\boldsymbol{x})]}|\boldsymbol{x}\right]$$

$$\hat{P}(w=1) = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} w_i$$

$$\widehat{ATT} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} w_i} N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \frac{[w_i - \hat{p}(\boldsymbol{x}_i)]y_i}{[1-\hat{p}(\boldsymbol{x}_i)]}$$

$$\boxed{\widehat{ATT} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_i} \sum_{i=1}^{N} \frac{[w_i - \hat{p}(\boldsymbol{x}_i)]y_i}{[1-\hat{p}(\boldsymbol{x}_i)]}}$$

# Appêndice

## Sums of Values

(Greene, 2012, p. 977, A.2.7)

$$\mathbf{1}_N'\mathbf{1}_N = N \quad ; \qquad \mathbf{1}_N\mathbf{1}_N' = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

Defining $\boldsymbol{x}$ with dimension $1 \times N$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}'\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N'\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}'\mathbf{1}_N)' = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\mathbf{1}_N\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & \dots & x_N \end{bmatrix}_{N\times N} \quad ; \qquad \boldsymbol{x}\mathbf{1}_N' = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & \dots & x_N \end{bmatrix}_{N\times N}$$

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{x}} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} x_i = N^{-1}\boldsymbol{x}'\mathbf{1}_N$$

## Important Idempotent Matrices

(Greene, 2012, p. 978, A.28)

Centering Matrix

$$M^0 = I_N - \mathbf{1}_N(\mathbf{1}_N'\mathbf{1}_N)^{-1}\mathbf{1}_N' = I_N - N^{-1}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N'$$

A Matriz $M^0$ é **idempotente** e **simétrica**.

**Idempotência:** $AA = A$

**Simetria:** $A' = A$

$$M^0\boldsymbol{x} = (I_N - N^{-1}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N')\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - N^{-1}\mathbf{1}_N(\mathbf{1}_N'\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}_N\overline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{x}} \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix}$$

$$M^0\mathbf{1} = (I_N - N^{-1}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N')\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N - N^{-1}\mathbf{1}_N(\mathbf{1}_N'\mathbf{1}_N) = \mathbf{0}_N$$

# 16 Conceitos Básicos de Convergência Estatística

**Definition 16.1 (Estimador Consistente).** Um estimador $\hat{\theta}$ é **consistente** para um parâmetro $\theta$ se

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta.$$

**Definition 16.2 (Convergência em Probabilidade).** Uma sequência de variáveis aleatórias: $\{X_n\}_{n\geq 1}$ **converge em probabilidade** para uma variável aleatória $X$ se, dado $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0,$$

quando $n \to +\infty$. E denotamos

$$X_n \xrightarrow{p} X.$$

**Definition 16.3 (Desigualdade de Markov).** Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $E|X_n|^K < +\infty$, $K > 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n| > \varepsilon) \leq \frac{E|X_n|^K}{\varepsilon^K}$$

**Definition 16.4.**

$$0 \leq P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) \leq \frac{E|X_n|^2}{\varepsilon^2}$$

**Definition 16.5 (Erro Quadrático Médio).**

$$EQM(\hat{\theta}) = \mathrm{E}\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right] = \left[Bias(\hat{\theta})^2 + \mathrm{Var}(\hat{\theta})\right]$$

Então, se $Bias(\hat{\theta}) \to 0$ e $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \to 0$, temos que $EQM(\hat{\theta}) \to 0$. Pelo **Teorema do Sanduíche**, $P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) \to 0$; logo, $\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$.

**Definition 16.6 (LGN – Lei dos Grandes Números).** Seja $\{X_i\}_{i\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias *iid* com $\mathrm{E}(X_i) = \mu$. Então,

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow{p} \mu.$$

**Definition 16.7 (LGN – Caso Matricial).** Seja $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^N$, uma sequência *iid* de vetores aleatórios $K \times 1$ com $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i') = Q_{K\times K}$ finita. Então,

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i' \xrightarrow{p} Q.$$

Se $Q$ for positiva definida, $Q$ terá inversa.

**Multiplicação de Matriz**

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$[AB]_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \implies AB = \sum_{i=1}^{2} a_i b_i$$

onde $a_i$ é a $i$-ésima **coluna** da matriz $A$. $b_i$ é a $i$-ésima **linha** da matriz $B$.

**Definition 16.8.**

$$\begin{aligned} P(|X_n - X| > \varepsilon) &\to 0 \\ X_n - X &\xrightarrow{p} 0 \\ X_n &\xrightarrow{p} X \end{aligned}$$

**Definition 16.9** ($\mathrm{o}_p$)**.**

$$\begin{aligned} X_n = \mathrm{o}_p(1) &\implies X_n \xrightarrow{p} 0 \\ X_n = \mathrm{o}_p(Y_n) &\implies \frac{X_n}{Y_n} = \mathrm{o}_p(1) \implies \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{p} 0 \\ X_n = W_n + \mathrm{o}_p(1) &\implies (X_n - W_n) = \mathrm{o}_p(1) \implies (X_n - W_n) \xrightarrow{p} 0 \end{aligned}$$

**Definition 16.10** (Limitação em Probabilidade: $\mathrm{O}_p$)**.** Dizemos que $X_n$ é **limitado em probabilidade** e denotado por $X_n = \mathrm{O}_p(1)$, se existe $M$ maior que zero, tal que para todo $\varepsilon$ maior que zero, $P(|X_n| > 0) < \varepsilon$.

$$X_n = \mathrm{O}_p(1) \implies \exists M > 0\,;\ \forall \varepsilon > 0\,,\ P(|X_n| > 0) < \varepsilon.$$

**Definition 16.11.** Dizemos que $X_n = \mathrm{O}_p(Y_n)$ se existe $M$ maior que zero, tal que para todo $\varepsilon$ maior que zero, $P(|X_n/Y_n| > 0) < \varepsilon$.

$$X_n = \mathrm{O}_p(Y_n) \implies \exists M > 0\,;\ \forall \varepsilon > 0\,,\ P(|X_n/Y_n| > 0) < \varepsilon.$$

**Definition 16.12.** Se $X_n = \mathrm{O}_p(1)$ e $Y_n = \mathrm{o}_p(1)$, então

$$X_n Y_n = \mathrm{O}_p(1)\mathrm{o}_p(1) = \mathrm{o}_p(1).$$

**Definition 16.13** (Equivalência Assintótica)**.** Seja $\{\boldsymbol{x}_n\}$ e $\{\boldsymbol{z}_n\}$ sequências de vetores aleatórios $K \times 1$. Se $\boldsymbol{z}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{z}_n \xrightarrow{p} \mathbf{0}_K$. Então,

$$\boldsymbol{x}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{z}.$$

**Definition 16.14** (Convergência em Distribuição)**.** Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias e $X$ uma variável aleatória com $F_n$ e $F$ suas respectivas FDAs, então

$$X_n \xrightarrow{d} X, \text{ se } F_n(X) \to F(X)$$

para todo $X$ onde $F$ é contínuo.

**Definition 16.15** (Convergência em Distribuição e Limitação em Probabilidade)**.** Se $X_n \xrightarrow{d} X$, $X$ um variável aleatória qualquer; então $X_n = \mathrm{O}_p(1)$.

**Definition 16.16** (TCL – Teorema Central do Limite)**.** Seja $\{X_n\}_{n=1}^N$ *iid* com $\mathrm{E}(X_n) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 < +\infty$. Então, para $S_N = \sum_{n=1}^N X_n$:

$$\frac{S_N - N\mu}{\sqrt{N}\sigma} = \frac{N(\overline{X} - \mu)}{\sqrt{N}\sigma} = \frac{N(\overline{X} - \mu)}{\sqrt{N}\sigma} = \boxed{\frac{\sqrt{N}(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)}.$$

**Definition 16.17** (TCL – Caso Vetorial)**.** Seja $\{\boldsymbol{w}_i\}_{i=1}^n$ uma sequência *iid* de vetores aleatórios $K \times 1$ com $\mathrm{E}(w_{ik}^2) < +\infty$, $k = 1, \ldots K$ e $\mathrm{E}(\boldsymbol{w}_i) = \mathbf{0}_K$. Então,

$$N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{w}_i \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, B),$$

onde, $B = \mathrm{Var}(\boldsymbol{w}_i) = \mathrm{E}(\boldsymbol{w}_i \boldsymbol{w}_i')$.

**Definition 16.18.** Seja $\{\boldsymbol{z}_n\}$ uma sequência de vetores $K \times 1$ aleatórios com

$$\boldsymbol{z}_n \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, V).$$

Então, para qualquer matriz $A$ de dimensão $K \times M$ **não** estocástica,

$$A'\boldsymbol{z}_n \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, A'VA).$$

# TODO

1. Acabar Aula 2
2. Revisar Aula 1 com C.4
3. Revisar Conceitos Estatísticos com C.3
4. Fazer POLS com Sec 7.8

# References

Greene, William H. 2012. *Econometric Analysis*. 7 edn. Boston: Prentice Hall.

Wooldridge, Jeffrey M. 2010. *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*. 2 edn. Boston, Massachussetts: MIT Press.