UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
Microeconometria – 2015/3

Microeconometrics: Lecture Notes

Autor: Paulo Ferreira Naibert
Professor: Hudson Torrent

Porto Alegre
30/06/2020
Revisão: July 7, 2020

1 Regressão MQO Clássico

Wooldridge (2010, C.4 – The Single-Equation Linear Model and OLS Estimation, p.49–76)

1.1 Modelo de equações lineares

O modelo populacional que estudamos é linear em seus parâmetros,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_K x_K + u \tag{1.1}$$

onde:

$y, x_1, \ldots, x_K$ são escalares aleatórios e observáveis (i.e., conseguimos observá-los em uma amostra aleatória da população);

u é o *random disturbance* não observável, ou erro;

$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_K$ são parâmetros (constantes) que gostaríamos de estimar.

Notação Vetorial

Wooldridge (2010, Sec. 4.2 – Asymptotic Properties of OLS; p.51)
Por conveniência, escrevemos a equação populacional em forma de vetor:

$$y = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta} + u \tag{1.2}$$

onde,
$\boldsymbol{x} \equiv (x_1, \ldots, x_K)$ é um vetor $1 \times K$ de regressores;
$\boldsymbol{\beta} \equiv (\beta_1, \ldots, \beta_K)'$ é um vetor $K \times 1$.

Uma vez que a maioria das equações contém um intercepto, assumiremos que $x_1 \equiv 1$, visto que essa hipótese deixa a interpretação mais fácil.

Amostra Aleatória

Assumimos que conseguimos obter uma amostra aleatória de tamanho N da população para estimarmos $\boldsymbol{\beta}$. Dessa forma, $\{(\boldsymbol{x}_i, y_i);\ i = 1, 2, \ldots, N\}$ são tratados como variáveis aleatória independentes, identicamente distribuídas, onde $\boldsymbol{x}_i$ é $1 \times K$ e y_i é escalar. Para cada observação i, temos:

$$y_i = \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta} + u_i. \tag{1.3}$$

onde $\boldsymbol{x}_i$ é um vetor $1 \times K$ de regressores.

1.2 Hipóteses

OLS.1 $y_i = \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta} + u_i\,, \quad i = 1, \ldots, N;$

OLS.2 **X** é **não** estocástica;

OLS.3 $\{u_i\}_{i=1}^{N}$ é *iid* com e para cada $i = 1, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(u_i) &= 0 \\ \mathrm{Var}(u_i) = \mathrm{E}(u_i^2) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

OLS.2' $\mathbf{X}$ é estocástica;

OLS.3'

$$\mathrm{E}(u_i|\mathbf{X}) = 0,$$
$$\mathrm{Var}(u_i|\mathbf{X}) = E\left\{[u_i - \mathrm{E}(u_i|\mathbf{X})]^2 \,|\mathbf{X}\right\} = \mathrm{E}(u_i^2|\mathbf{X}) = \sigma^2.$$

Remark. $\mathrm{E}(u_i|\mathbf{X}) = 0$ implica que u_i é **não correlacionado** com todos os regressores x_k para $k = 1, \dots, K$. Exogeneidade estrita.

1.3 Estimação

Usando **OLS.1:**

$$\begin{aligned} y_i &= \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta} + u_i \\ \boldsymbol{x}_i'y_i &= \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{x}_i'u_i \\ \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'y_i) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'u_i) \end{aligned}$$

Usando $\boxed{\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'u_i) = 0}$ [Qual seria essa hipótese?]

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'y_i) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{\beta} \\ &\boxed{\boldsymbol{\beta} = [\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'y_i)}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Agora, usando o **princípio da analogia** e utilizando **estimadores amostrais**:

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'y_i\right)}. \tag{1.5}$$

Podemos desenvolver essa equação para:

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\beta}} &= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}_i)\right) \\ &= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta}\right) + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{u}_i\right) \\ &\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{u}_i\right)}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.3.1 Notação Matricial

Empilhando as N observações, obtemos a **Notação Matricial**:

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u} \tag{1.7}$$

$\boldsymbol{y}$ é um vetor $N \times 1$;
$\mathbf{X}$ é uma matriz $N \times K$ de regressores, com N vetores, $\boldsymbol{x}_i$, de dimensão $1 \times K$ empilhados;
$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$;
$\boldsymbol{u}$ é um vetor $N \times 1$;

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{NK} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}.$$

As somas de vetores viram simples multiplicações de matrizes e a equação (1.5), vira:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (N^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(N^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{y})$$

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\boldsymbol{y})} \tag{1.8}$$

1.4 Valor Esperado

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathrm{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{y}\right] \\ &= \mathrm{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u})\right] \\ &= \mathrm{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}\right] \\ &= \mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}) + \mathrm{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}] \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}]}$$

1.4.1 Viés

$$\boxed{\mathrm{B}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - \boldsymbol{\beta}}$$

$$\boxed{\mathrm{B}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathrm{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}]}$$

Remark. Sob **OLS.2'** e **OLS.3'**:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}] &= \mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}|\mathbf{X}\right]\right\} \\ &= \mathrm{E}\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\underbrace{\mathrm{E}(\boldsymbol{u}|\mathbf{X})}_{=\mathbf{0}}\right\} = 0 \end{aligned}$$

ou seja, $\mathrm{B}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = 0$, logo $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é **não-viciado**. O que também é equivalente a $\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$.

1.5 Variância

Supondo **OLS.2'** e **OLS.3'**:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X}) &= \mathrm{E}\left\{\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X})\right]^2 |\mathbf{X}\right\} \\ &= \mathrm{E}\left\{\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X})\right]\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X})\right]' |\mathbf{X}\right\} \\ &= \mathrm{E}\left\{\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}\right]\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}\right]' |\mathbf{X}\right\} \\ &= \mathrm{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}|\mathbf{X}\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathrm{E}\left[\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'|\mathbf{X}\right]\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}$$

1.5.1 Homocedasticidade

Supondo **homocedasticidade** e ausência de correlação serial: $\boxed{\mathrm{E}\left[\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'|\mathbf{X}\right] = \sigma^2 I_N}$. Assim,

$\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' I_N \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

$\boxed{\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\mathbf{X}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}$.

2 Ausência de Exogeneidade Estrita

Nem sempre poderemos supor **exogeneidade estrita**. Por exemplo, no modelo com variável defasada mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 x_{1t} + u_t \\ y_{t-1} &= \beta_0 + \beta_1 y_{t-2} + \beta_2 x_{1t-1} + u_{t-1} \\ y_t &= \beta_0(1+\beta_1) + \beta_1^2 y_{t-2} + \beta_1\beta_2 x_{1t-1} + \beta_2 x_{1t} + u_t + \beta_1 u_{t-1}, \end{aligned}$$

o erro é correlacionado com o regressor y_{t-1}. Nesse caso, tentaremos obter apenas **consistência** e **variância assintótica** do estimador. Para tanto, utilizaremos a equação (1.6):

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{u}_i \right).$$

Aqui comeceçaria a seção 15.

2.1 Consistência

Vamos definir a matriz $K \times K$, $\mathbf{A} \equiv \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i)$. Supondo $\mathbf{A}$, finita e positiva definida, posto$(\mathbf{A}) = K$. Usando **LGN matricial** (Definição 15.7 na página 35), temos:
[lembrar que as dimensões dos vetores estão invertidas: $1 \times K$ e **não** $K \times 1$]

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \xrightarrow{p} \mathbf{A} \implies \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \xrightarrow{p} \mathbf{A}^{-1}. \tag{2.1}$$

Além disso, vamos supor $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' u_i) = 0$, o que corresponde a $Cov(\boldsymbol{x}_i, u_i) = 0$, ou seja, o erro u_i **não** é correlacionado com os regressores da própria equação. Isso é bem menos que exogeneidade estrita. Então,

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \xrightarrow{p} \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i' u_i) = \mathbf{0}_K.$$

Logo,

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \right)}_{\xrightarrow{p} 0}}$$

Então, $(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{p} 0$ que é equivalente a $\widehat{\boldsymbol{\beta}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\beta}$ e $\operatorname{plim} \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$, ou seja, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é **consistente** para $\boldsymbol{\beta}$.

2.2 Normalidade Assintótica

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= \boldsymbol{\beta} + \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \right) \\
(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \right) \\
\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \right)
\end{aligned}
$$

Supondo $\mathrm{E}(x_{ik}^2 u_i^2) < +\infty$, $k = 1, \ldots, K$, e definindo $\mathbf{B} = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_i' u_i' u_i \boldsymbol{x}_i] = \mathrm{E}[u_i^2 \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i]$. Temos, pela Definição 15.16 (**TCL**), que

$$
N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{B}) \implies N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i = \mathrm{O}_p(1) \tag{2.2}
$$

Além disso, vamos utilizar a matriz **simétrica** e **não singular** $\mathbf{A}$ da equação (2.1) Assim, temos

$$
\begin{aligned}
\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \right) \\
&= \left[\left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} + \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \right] \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \right) \\
&= \left[\left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \right] \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \right) + \mathbf{A}^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \right),
\end{aligned}
$$

Podemos inverter $\mathbf{A}$ porque ela tem posto completo (não singular). Pelas propriedades de $\mathbf{A}$, temos:

$$
N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \xrightarrow{p} \mathbf{A} \implies \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i \right)^{-1} - \mathbf{A}^{-1} = \mathrm{o}_p(1).
$$

Então,

$$
\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) = \mathrm{o}_p(1)\mathrm{O}_p(1) + \mathbf{A}^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \right),
$$

Usando (2.2) e a Definição 15.13.

$$
\mathbf{A}^{-1} \left(N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i' u_i \right) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}).
$$

Lembrando que $\mathrm{o}_p(1)\mathrm{O}_p(1) = \mathrm{o}_p(1)$, temos:

$$
\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}) \implies \sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})
$$

2.3 Variância

$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$

$\mathbf{V} = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_i'u_i'u_i\boldsymbol{x}_i)]\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}$

$\mathbf{V} = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}\mathrm{E}[(u_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}.$

2.3.1 Homocedasticidade

Sob **Homocedasticidade**, temos $\mathbf{B} = \mathrm{E}(u_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i) = \sigma^2\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)$, logo

$$\boxed{\mathbf{V} = \sigma^2\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i)]^{-1}}.$$

2.3.2 Estimador Amostral

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{V}} &= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}u_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1} \\
&= N\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}u_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\widehat{\mathbf{V}} = N\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}u_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}}.$$

2.3.3 Variância do estimador de OLS

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\sqrt{N}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathbf{V} \\
\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= N^{-1}\mathbf{V} \\
&\boxed{\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}u_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}}.
\end{aligned}$$

A variância **Robusta** é:

$$\boxed{\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\widehat{u}_i^2\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{x}_i\right)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}.$$

A variância sob **Homocedasticidade** é:

$$\boxed{\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \widehat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}.$$

3 System OLS (SOLS)

Wooldridge (2010, C.7 – Estimating Systems of Equations by OLS and GLS, p.143–179)
Wooldridge (2010, Sec.7.3 – System OLS Estimation of a Multivariate Linear System, p.147)

3.1 Preliminares

Wooldridge (2010, Sec.7.3.1)

Assumimos que temos as seguintes observações *cross section iid*: $\{(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{y}_i) : i = 1, \dots, N\}$, onde:

$\mathbf{X}_i$ é uma matriz $G \times K$ e contém as variáveis explicativas que aparecem em qualquer lugar do sistema.

$\boldsymbol{y}_i$ é um vetor $G \times 1$, que contém as variáveis dependentes para todas as equações G (ou períodos de tempo, no caso de dados de painel).

O modelo linear multivariado para uma observação (draw) aleatória da população pode ser expresso como:

$$\boldsymbol{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}_i\,, \quad i = 1, \dots, N, \tag{3.1}$$

onde:

$\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $K \times 1$ de parâmetros de interesse; e

$\boldsymbol{u}_i$ é um vetor $G \times 1$ de não observáveis.

A equação (3.1) explica as G variáveis $y_{i1}, \dots, y_{iG}$ em termos de $\mathbf{X}_i$ e das não observáveis $\boldsymbol{u}_i$. Por causa da hipótese de amostra aleatória podemos escrever tudo em temos de uma observação genérica.

3.2 Propriedades Assintóticas do SOLS

Wooldridge (2010, Sec.7.3.1)

SOLS.1 $\mathrm{E}(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{u}_i) = 0$.

SOLS.2 $A \equiv \mathrm{E}(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)$ é não singular (tem posto pleno, posto igual a K).

A hipótese **SOLS.1** é a mais fraca que podemos impor num aracabouço de regressão para conseguirmos um estimador de $\boldsymbol{\beta}$ consistente. Essa hipótese permite que alguns elementos de $\mathbf{X}_i$ sejam correlacionados com elementos de $\boldsymbol{u}_i$. Uma hipótese mais forte seria:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{u}_i | \mathbf{X}_i) = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

Sob **SOLS.1**, temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\mathbf{X}_i'(\boldsymbol{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})] &= \mathbf{0} \\ \mathrm{E}(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)\boldsymbol{\beta} &= \mathrm{E}(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{y}_i) \end{aligned}$$

Para cada i, $\mathbf{X}_i \boldsymbol{y}_i$ é um vetor aleatório $K \times 1$ e $\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i$ é uma matriz $K \times K$ aleatória simétrica, positiva semidefinida. Então, $\mathrm{E}(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)$ é sempre uma matriz $K \times K$ não aleatória simétrica, positiva semidefinida. Para conseguirmos estimar $\boldsymbol{\beta}$ precisamos assumir que ele é o único vetor $K \times 1$ que satisfaz $\mathrm{E}(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)\boldsymbol{\beta} = \mathrm{E}(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{y}_i)$. Por isso assumimos **SOLS.2** e sob **SOLS.1** e **SOLS.2**, podemos escrever $\boldsymbol{\beta}$ como:

$$\boxed{\boldsymbol{\beta} = \left[\mathrm{E}(\mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i)\right]^{-1} \mathrm{E}(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{y}_i)} \tag{3.3}$$

o que mostra que **SOLS.1** e **SOLS.2** identifica o vetor $\boldsymbol{\beta}$. O**princípio da analogia** sugere que estimemos $\boldsymbol{\beta}$ pelas analogias amostrais de (3.3). Assim, definimos o estimador SOLS de $\boldsymbol{\beta}$ como:

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS} = \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i \right)}. \tag{3.4}$$

Para computar $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ usando linguagem de computação é mais fácil utilizar a notação matricial

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}'\boldsymbol{y})} \tag{3.5}$$

onde
$\mathbf{X} \equiv (\mathbf{X}_1', \dots, \mathbf{X}_N')$ é uma matriz $NG \times K$ dos $\mathbf{X}_i$ empilhados.
$\boldsymbol{y} \equiv (\boldsymbol{y}_1', \dots, \boldsymbol{y}_N')$ é um vetor $NG \times 1$ das observações $\boldsymbol{y}_i$ empilhadas.

SOLS para SUR Estimação SOLS para um modelo SUR é equivalente a OLS equação a equação.

3.2.1 Consistência

Para provarmos a **consistência** do estimador, usamos a equação (3.4):

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS} &= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i \right) \\
&= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i \right)^{-1} \left[N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'(\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}_i) \right] \\
&= \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} \right) + \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i \right) \\
&= \boldsymbol{\beta} + \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i \right)
\end{aligned}$$

Por **SOLS.1**, $N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i \xrightarrow{p} \mathbf{0}$; e por **SOLS.2** $\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i \right)^{-1} \xrightarrow{p} A^{-1}$.
Resumimos esse resultado pelo seguinte Teorema:
[Consistência do SOLS] Sob Hipóteses **SOLS.1** e **SOLS.2**, temos

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\beta}}.$$

3.2.2 Normalidade Assintótica

Para fazermos **Inferência**, precisamos achar a variância assintótica do estimador de OLS sob, essencialmente, as mesmas duas hipóteses. Tecnicamente, a seguinte derivação exige os elementos de $\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i'\mathbf{X}_i$ tenham *finite expected absolute value*. De (3.4) e (3.1), escrevemos:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= \boldsymbol{\beta} + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right)\\
(\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) &= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right)\\
&\boxed{\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) = \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right)}.
\end{aligned}
$$

Uma vez que $\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i)=0$, sob a hipótese **SOLS.1**, o CLT implica que:

$$N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i\boldsymbol{u}_i \xrightarrow{d} N(\mathbf{0},\mathbf{B}),$$

onde

$$\mathbf{B} \equiv \mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i'\mathbf{X}_i) \equiv \mathrm{Var}(\mathbf{X}_i\boldsymbol{u}_i).$$

Em particular,

$$N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i\boldsymbol{u}_i = \mathrm{O}_p(1).$$

Porém,

$$\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1} = (\mathbf{X}'\mathbf{X}/N)^{-1} = A^{-1} + \mathrm{o}_p(1).$$

Sendo Assim,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) &= \left[A^{-1} + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1} - A^{-1}\right]\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right)\\
&= A^{-1}\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right) + [(\mathbf{X}'\mathbf{X}/N)^{-1} - A^{-1}]\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right)\\
&= A^{-1}\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right) + \mathrm{o}_p(1)\mathrm{O}_p(1)\\
&= A^{-1}\left(N^{-1/2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\right) + \mathrm{o}_p(1)
\end{aligned}
$$

Portanto, com apenas *single-equation OLS and 2SLS*, obtemos a representação assintótica para $\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})$ que é uma combinação linear não aleatória de somas parciais que satisfazem o CLT. Usando o lema de equivalência assintótica, temos:

$$\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, A^{-1}\mathbf{B}A^{-1})$$

Resumimos esse resultado com o seguinte Teorema:

[Normalidade Assintótica do SOLS] Sob Hipóteses **SOLS.1** e **SOLS.2**, temos que a seguinte equação vale:

$$\boxed{\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, A^{-1}\mathbf{B}A^{-1})}. \tag{3.6}$$

3.2.3 Variância Assintótica

A variância assintótica de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS}$ é:

$$\text{Avar}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS}) = A^{-1}\mathbf{B}A^{-1}/N. \tag{3.7}$$

Assim, Avar($\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{SOLS}$) tende a zero a uma taxa $1/N$, como esperado. Estimação consistente de A é:

$$\widehat{A} \equiv \mathbf{X}'\mathbf{X}/N = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i$$

Um estimador consistente para B pode ser achado usando o princípio da analogia.

$$B = \mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i'\mathbf{X}_i), \quad N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i'\mathbf{X}_i \xrightarrow{p} B.$$

Uma vez que não podemos observar $\boldsymbol{u}_i$, usamos os resíduos da estimação de SOLS:

$$\widehat{\boldsymbol{u}}_i \equiv \boldsymbol{y}_i - \mathbf{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{u}_i - \mathbf{X}_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}).$$

Assim, definimos $\widehat{B}$ e usando LGN, podemos mostrar que:

$$\widehat{B} \equiv N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i'\mathbf{X}_i \xrightarrow{p} B.$$

onde supomos que certos momentos envolvendo $\mathbf{X}_i$ e $\boldsymbol{u}_i$ são finitos.

Portanto, Avar$[\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})]$ é **consistentemente** estimado por $\widehat{A}^{-1}\widehat{B}\widehat{A}^{-1}$, e Avar($\widehat{\boldsymbol{\beta}}$) é estimado como:

$$\widehat{V} \equiv \left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\widehat{\boldsymbol{u}}_i\widehat{\boldsymbol{u}}_i'\mathbf{X}_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}.$$

Sob as hipóteses **SOLS.1** e **SOLS.2**, nós fazemos inferência em $\boldsymbol{\beta}$ como $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ fosse normalmente distribuído com média $\boldsymbol{\beta}$ e variância $\widehat{V}$.

4 SOLS para Dados de Painel

Wooldridge (2010, Sec.7.8 – The Linar Panel Data Model, Revisited. p.169)

No caso de dados de painel:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{x}_{it}; \quad \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\boldsymbol{y}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{x}_{it}'y_{it}.$$

Portanto, podemos escrever $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ como:

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{POLS} = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{x}_{it}'\boldsymbol{x}_{it}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{x}_{it}'y_{it}\right)}. \tag{4.1}$$

Este estimador é chamado **estimador de Mínimos Quadrados Agrupados (POLS)** porque ele corresponde a rodar uma regressão OLS nas observações agrupadas através de i e t. O estimador da equação (4.1) é o mesmo para unidades de *cross section* amostradas em diferentes pontos do tempo. O Teorema 3.2.1, abaixo, mostraa que o estimador POLS é consistente sob as condições de ortogonalidade na hipótese XX e uma hipótese de posto completo.

$\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_{it})$

$\mathbf{X}_i'\boldsymbol{u}_i = \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{x}_{it}'u_{it}$

5 System GLS (SGLS)

Wooldridge (2010, Sec.7.4 – Consistency and Asymptotic Normality of Generalized Least Squares, p.153)

Hipóteses

Para implementarmos o estimador de **GLS** precisamos das seguintes hipótese:

1. $\mathrm{E}(\mathbf{X}_i \otimes \boldsymbol{u}_i) = 0$.

   Para SGLS ser consistente, precisamos que $\boldsymbol{u}_i$ não seja correlacionada com nenhum elemento de $\mathbf{X}_i$.

2. Ω é positiva definida (para ter inversa). $\mathrm{E}(\mathbf{X}_i'\Omega^{-1}\mathbf{X}_i)$ é **não** singular (para ter invesa).

   Onde, Ω é a seguinte matriz **simétrica**, positiva-definida:

   $$\Omega = \mathrm{E}(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i').$$

Estimação

Agora, transformamos o sistema de equações ao realizarmos a pré-multiplicação do sistema por $\Omega^{-1/2}$:

$$\begin{aligned}
\Omega^{-1/2}\boldsymbol{y}_i &= \Omega^{-1/2}\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \Omega^{-1/2}\boldsymbol{u}_i \\
\boldsymbol{y}_i^* &= \mathbf{X}_i^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}_i^*
\end{aligned}$$

Estimando a equação acima por **SOLS**:

$$\begin{aligned}
\beta^{SOLS} &= \left(\sum_{i=1} \mathbf{X}_i^{*\prime}\mathbf{X}_i^*\right)^{-1} \left(\sum_{i=1} \mathbf{X}_i^{*\prime}\boldsymbol{y}_i^*\right) \\
&= \left(\sum_{i=1} \mathbf{X}_i'\Omega^{-1/2}\Omega^{-1/2}\mathbf{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1} \mathbf{X}_i'\Omega^{-1/2}\Omega^{-1/2}\boldsymbol{y}_i\right) \\
&= \left(\sum_{i=1} \mathbf{X}_i'\Omega^{-1}\mathbf{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1} \mathbf{X}_i'\Omega^{-1}\boldsymbol{y}_i\right)
\end{aligned}$$

6 GLS Factível

Wooldridge (2010, Sec.7.5 – Feasible GLS, p.153)

FSGLS: SGLS Factível

Para obtermos β^{SGLS} precisamos conhecer Ω, o que não ocorre na prática. Então, precisamos estimar Ω com um estimador consistente. Para tanto usamos um procedimento de dois passos:

1. Estimar $\boldsymbol{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}_i$ via **SOLS** e guardar o resíduo estimado $\widehat{\boldsymbol{u}}_i$.
2. Estimar Ω com o seguinte estimador $\widehat{\Omega}$:

$$\widehat{\Omega} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i'$$

Com a estimativa $\widehat{\Omega}$ feita, podemos obter β^{FSGLS} pela fórmula do β^{SGLS}:

$$\beta^{FGLS} = \left[\sum_i \mathbf{X}_i'\widehat{\Omega}^{-1}\mathbf{X}_i\right]^{-1}\left[\sum_i \mathbf{X}_i'\widehat{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}_i\right]$$

Empilhando as N observações:

$$\beta^{FGLS} = \left[\mathbf{X}\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)\boldsymbol{y}\right]$$

Reescrevendo a equação acima:

$$\begin{aligned}\beta^{FGLS} &= \left[\mathbf{X}\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)(\mathbf{X}\beta+u)\right]\\ &= \left[\mathbf{X}\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left\{\left[\mathbf{X}'\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\beta\right] + \left[\mathbf{X}'\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)u\right]\right\}\\ &= \beta + \left[\mathbf{X}\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)u\right]\end{aligned}$$

Valor Esperado

$$\mathrm{E}(\beta^{FGLS}) = \beta + \left[\mathbf{X}\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)u\right]$$

Concluímos que, se $\widehat{\Omega}\xrightarrow{p}\Omega$, então, $\beta^{FSGLS}\xrightarrow{p}\beta$,

Variância

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\beta^{FGLS}) &= \left[\mathbf{X}\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)u\right]\left\{\left[\mathbf{X}\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)u\right]\right\}'\\ &= \left[\mathbf{X}\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)uu'\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]\left[\mathbf{X}\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)\mathbf{X}\right]^{-1}\end{aligned}$$

Tirando o valor Esperado e supondo que:

$\mathrm{E}(\mathbf{X}_i\Omega^{-1}u_iu_i'\mathbf{X}_i) = \mathrm{E}(\mathbf{X}_i\Omega^{-1})$

temos:

$$\mathrm{E}\left[\mathbf{X}'\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)uu'\left(I_N\otimes\widehat{\Omega}^{-1}\right)'\mathbf{X}\right] = \mathrm{E}(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})$$

e temos:

$$\mathrm{Var}(\beta^{FSGLS}) = \left[\mathrm{E}(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X}\right]^{-1}.$$

7 Modelo de Efeitos Não Observados

Wooldridge (2010, C.10 – Basic Linear Unobserved Effects Panel Data Models)

8 Endogeneity and GMM

Modelo

No seguinte modelo *cross-section*:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i \ ; \quad i = 1, \dots, N. \tag{8.1}$$

A variável explicativa x_k é dita **endógena** se ela for correlacionada com erro. Se x_k for não correlacionada com o erro, então x_k é dita **exógena**.

Endogeneidade surge, normalmente, de três maneiras diferentes:

1. Variável Omitida;
2. Simultaneidade;
3. Erro de Medida.

No modelo (8.1) vamos supor:

- x_1 é exógena.
- x_2 é endógena.

Hipóteses

Assim, precisamos encontrar um instrumento z_i para x_2, uma vez que queremos estimar β_0, β_1 e β_2 de maneira consistente. Para z_i ser um bom instrumento precisamos que z tenha:

1. $Cov(z, \varepsilon) = 0 \implies z$ é exógena em (8.1).
2. $Cov(z, x_2) \neq 0 \implies$ correlação com x_2 após controlar para outras vaariáveis.

Estimação

Indo para o problema de dados de painel, temos:

$$\boldsymbol{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}_i \ ; \quad i = 1, \dots, N. \tag{8.2}$$

onde $\boldsymbol{y}_i$ é um vetor $T \times 1$, $\mathbf{X}_i$ é uma matriz $T \times K$, $\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de coeficientes $K \times 1$, $\boldsymbol{u}_i$ é o vetor de erros $T \times 1$.

Se é verdade que há endogeneidade em (8.2), então:

$$\mathrm{E}(\mathbf{X}_i' \boldsymbol{u}_i) \neq 0$$

Definimos Z_i como uma matriz $T \times L$ com $L \geq K$ de variáveis exógenas (incluindo o instrumento). Queremos acabar com a endogeneidade, ou seja:

$$\mathrm{E}(Z_i' \boldsymbol{u}_i) = 0$$

Supondo $L = K$ (apenas substituímos a variável endógena por um instrumento).

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Z_i'(\boldsymbol{y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})] &= 0 \\
\mathrm{E}(Z_i' \boldsymbol{y}_i) - \mathrm{E}(Z_i' \mathbf{X}_i)\boldsymbol{\beta} &= 0 \\
\mathrm{E}(Z_i' \boldsymbol{y}_i) &= \mathrm{E}(Z_i' \mathbf{X}_i)\boldsymbol{\beta} \\
\boxed{\boldsymbol{\beta} = \left[\mathrm{E}(Z_i' \mathbf{X}_i)\right]^{-1} \left[\mathrm{E}(Z_i' \boldsymbol{y}_i)\right]}
\end{aligned}$$

Se Usarmos estimadores amostrais:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N} Z_i'\mathbf{X}_i\right]^{-1}\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N} Z_i'\boldsymbol{y}_i\right]$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}} = (Z'\mathbf{X})^{-1}(Z'\boldsymbol{y})}$$

Se $L > K$, vamos considerar:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}}{\text{Min}}\ \mathrm{E}(Z_i\boldsymbol{u}_i)^2$$

onde:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z_i\boldsymbol{u}_i)^2 &= \mathrm{E}[(Z_i\boldsymbol{u}_i)'(Z_i\boldsymbol{u}_i)] = (Z'\boldsymbol{y} - Z'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(Z'\boldsymbol{y} - Z'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= \boldsymbol{y}'ZZ'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'ZZ'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'ZZ'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'ZZ'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

Derivando em relação em $\boldsymbol{\beta}$ e igualando a zero:

$$\begin{aligned}-2\boldsymbol{y}'ZZ'\mathbf{X} + 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'ZZ'\mathbf{X} &= 0 \\ \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'ZZ'\mathbf{X} &= \boldsymbol{y}'ZZ'\mathbf{X} \\ \boldsymbol{\beta}' &= (\boldsymbol{y}'ZZ'\mathbf{X})(\mathbf{X}'ZZ'\mathbf{X})^{-1} \\ \boxed{\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}'ZZ'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'ZZ'\boldsymbol{y})}\end{aligned}$$

Um estimador mais eficiente pode ser encontrado fazendo:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}}{\text{Min}}\ \mathrm{E}[(Z_i'\boldsymbol{y} - Z'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'W(Z_i'\boldsymbol{y} - Z'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})].$$

Escolhendo $\widehat{W}$, a priori, temos:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}}{\text{Min}}\ \left\{\boldsymbol{y}'Z\widehat{W}Z'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'Z\widehat{W}Z'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right\}$$

Derivando em relação em $\boldsymbol{\beta}$ e igualando a zero:

$$\begin{aligned}-2\boldsymbol{y}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X} + 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X} &= 0 \\ \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X} &= \boldsymbol{y}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X} \\ \boldsymbol{\beta}' &= (\boldsymbol{y}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X})(\mathbf{X}'Z\widehat{W}Z'\mathbf{X})^{-1} \\ \boxed{\boldsymbol{\beta}^{GMM} = (\mathbf{X}'Z\widehat{W}'Z'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'Z\widehat{W}'Z'\boldsymbol{y})}\end{aligned}$$

Valor Esperado

$$\boxed{\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{GMM}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}[(\mathbf{X}'Z\widehat{W}'Z'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'Z\widehat{W}'Z'\boldsymbol{u})]}.$$

Variância

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{GMM}) &= \mathrm{E}\left\{\left[(X'Z\widehat{W}'Z'X)^{-1}(X'Z\widehat{W}'Z'\boldsymbol{u})\right]\left[(X'Z\widehat{W}'Z'X)^{-1}(X'Z\widehat{W}'Z'\boldsymbol{u})\right]'\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{(X'Z\widehat{W}'Z'X)^{-1}X'Z\widehat{W}'Z'\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'Z\widehat{W}Z'X(X'Z\widehat{W}Z'X)^{-1}\right\}.
\end{aligned}
$$

Definindo $\Delta = \mathrm{E}(Z'\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'Z)$ com $\Delta = W^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{GMM}) &= \mathrm{E}\left\{(X'Z\widehat{W}'Z'X)^{-1}X'Z\widehat{W}'W^{-1}\widehat{W}Z'X(X'Z\widehat{W}Z'X)^{-1}\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{(X'Z\widehat{W}'Z'X)^{-1}(X'Z\widehat{W}'Z'X)(X'Z\widehat{W}Z'X)^{-1}\right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{GMM}) = \mathrm{E}\left[(X'Z\widehat{W}Z'X)^{-1}\right]}.
$$

Se tivéssemos definido $W = (Z'Z)^{-1}$, teríamos β^{2SLS}.

9 Random Effects (RE, EA)

Modelo

O modelo linear de **efeitos não observados**:

$$y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \tag{9.1}$$

onde $t = 1, \ldots, T$ e $i = 1, \ldots, N$.

O modelo contém explicitamente um componente não observado que não varia no tempo c_i. Abordamos esse componente como parte do erro, não como parâmetro a ser estimado. Para a análise de **Efeitos Aleatórios, (EA) ou (RE)**, supomos que os regressões $\boldsymbol{x}_{it}$ são **não correlacionados** com c_i, mas fazemos hipóteses mais restritas que o **POLS**; pois assim exploramos a presença de **correlação serial** do erro composto por GLS e garantimos a consitência do estimador de FGLS.

Podemos reescrever (9.1) como:

$$y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + v_{it}, \tag{9.2}$$

onde $t = 1, \ldots, T$, $i = 1, \ldots, N$ e $\boxed{v_{it} = c_i + u_{it}}$ é o erro composto.

Agora, vamos empilhar os t's e reescrever (9.2) como:

$$\boldsymbol{y}_i = X_i\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{v}_i, \tag{9.3}$$

onde $i = 1, \ldots, N$ e $\boxed{\boldsymbol{v}_i = c_i\mathbf{1}_T + \boldsymbol{u}_i}$.

Hipóteses de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{RE}$

As Hipóteses que usamos para $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{RE}$ são:

1. Usamos o modelo correto e c_i não é endógeno.

   a) $\mathrm{E}(u_{it} \,|\, x_{i1}, \ldots, x_{iT}, c_i) = 0$, $i = 1, \ldots, N$.
   b) $\mathrm{E}(c_{it} \,|\, x_{i1}, \ldots, x_{iT}) = \mathrm{E}(c_i) = 0$, $i = 1, \ldots, N$.

2. Posto completo de $\mathrm{E}(X_i'\Omega^{-1}X_i)$.

   Definindo a matriz $T \times T$, $\boxed{\Omega \equiv \mathrm{E}(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i')}$, queremos que $\mathrm{E}(X_i\Omega^{-1}X_i)$ tenha posto completo (posto $= K$).

A matriz Ω é simétrica $\Omega' = \Omega$ e positiva definida $\det(\Omega) > 0$. Assim podemos achar $\Omega^{1/2}$ e $\Omega^{-1/2}$ com $\Omega = \Omega^{1/2}\Omega^{1/2}$ e $\Omega^{-1} = \Omega^{-1/2}\Omega^{-1/2}$.

Estimação

Premultiplicando (9.3) port $\Omega^{-1/2}$ do dois lados, temos:

$$\begin{aligned}\Omega^{-1/2}\boldsymbol{y}_i &= \Omega^{-1/2}X_i\boldsymbol{\beta} + \Omega^{-1/2}\boldsymbol{v}_i \\ \boldsymbol{y}_i^* &= X_i^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{v}_i^*,\end{aligned} \tag{9.4}$$

Estimando o modelo acima por POLS:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^{POLS} &= \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{*\prime} X_i^*\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{*\prime} \boldsymbol{y}_i^*\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{\prime} \Omega^{-1} X_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{\prime} \Omega^{-1} \boldsymbol{y}_i\right) \\ &= \left(X^{\prime}(I_N \otimes \Omega^{-1})X\right)^{-1} \left(X^{\prime}(I_N \otimes \Omega^{-1})\boldsymbol{y}\right). \end{aligned} \tag{9.5}$$

O problema, agora, é estimar Ω. Supondo:

- $\mathrm{E}(u_{it}u_{it}) = \sigma_u^2$;
- $\mathrm{E}(u_{it}u_{is}) = 0$.

Como $\Omega = \mathrm{E}(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^{\prime}) = \mathrm{E}[(c_i\mathbf{1}_T + \boldsymbol{u}_i)(c_i\mathbf{1}_T + \boldsymbol{u}_i)^{\prime}]$, temos que:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(v_{it}v_{it}) = \mathrm{E}(c_i^2 + 2c_iu_{it} + u_{it}^2) = \sigma_c^2 + \sigma_u^2 \\ &\mathrm{E}(v_{it}v_{is}) = \mathrm{E}[(c_i + u_{it})(c_i + u_{is})] = \mathrm{E}(c_i^2 + c_iu_{is} + u_{it}c_i + u_{it}u_{is}) = \sigma_c^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$\Omega = \mathrm{E}(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^{\prime}) = \sigma_u^2 I_T + \sigma_c^2 \mathbf{1}_T\mathbf{1}_T^{\prime}$$

onde $\sigma_u^2 I_T$ é uma matriz diagonal, e $\sigma_c^2\mathbf{1}_T\mathbf{1}_T^{\prime}$ é uma matriz com todos os elementos iguais a σ_c^2.

Agora, rodando POLS em (9.3) e guardando os resíduos, temos:

$$\hat{v}_{it}^{POLS} = \hat{y}_{it}^{POLS} - \boldsymbol{x}_{it}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{POLS}$$

e conseguimos estimar σ_v^2 e σ_c^2 por estimadores amostrais:

- como $\sigma_v^2 = \mathrm{E}(v_{it}^2)$:

  $$\hat{\sigma}_v^2 = (NT - K)^{-1} \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \hat{v}_{it}^2$$

- como $\sigma_c^2 = \mathrm{E}(v_{it}v_{is})$:

  $$\hat{\sigma}_c^2 = \left[N\frac{T(T-1)}{2} - K\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{s=t+1}^{T} \hat{v}_{it}\hat{v}_{is}$$

- N indivíduos;
- T elementos da diagonal principal de Ω
- $\frac{T(T-1)}{2}$ elementos da matriz triangular superior dos elementos fora da diagonal.
- K regressores.

Agora que temos $\hat{\sigma}_v^2$ e $\hat{\sigma}_c^2$ podemos achar $\hat{\sigma}_u^2$ pela equação $\boxed{\hat{\sigma}_u^2 = \hat{\sigma}_v^2 - \hat{\sigma}_c^2}$. Dessa forma, achamos os T^2 elementos de $\widehat{\Omega}$, e podemos escrever:

$$\widehat{\Omega} = \hat{\sigma}_u^2 I_T + \hat{\sigma}_c^2\mathbf{1}_T\mathbf{1}_T^{\prime}$$

Com $\widehat{\Omega}$ estimado, reescrevemos (9.5) como:

$$\boldsymbol{\beta}^{RE} = \left[X^{\prime}(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})X\right]^{-1} \left[X^{\prime}(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})\boldsymbol{y}\right]. \tag{9.6}$$

Valor Esperado

$$\boxed{\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{RE}) = \boldsymbol{\beta} + \left[X'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})X\right]^{-1}\left[X'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})\boldsymbol{v}\right]}.$$

Variância

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{RE}) = E\left\{\left[X'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})X\right]^{-1}\left[X'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})'X\right]\left[X'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})X\right]\right\},$$

como $\mathrm{E}(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i') = \Omega$,

$$\boxed{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{RE}) = E\left[X'(I_N \otimes \widehat{\Omega}^{-1})X\right]}.$$

10 Fixed Effects (EF, FE)

Modelo

O modelo linear de **efeitos não observados**:

$$y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \tag{10.1}$$

onde $t = 1, \ldots, T$ e $i = 1, \ldots, N$.

O modelo contém explicitamente um componente não observado que não varia no tempo c_i. Abordamos esse componente como parte do erro, não como parâmetro a não observado. No caso da análise de **Efeitos Fixos (EF, FE)**, permitimos que esse componente c_i seja correlacionado com $\boldsymbol{x}_{it}$. Assim, se decidíssemos estimar o modelo (10.1) por POLS, ignorando c_i, teríamos problemas de inconsistência devido a **endogeneidade**.

As T equações do modelo (10.1) podem ser reescritas como:

$$\boldsymbol{y}_i = X_i\boldsymbol{\beta} + c_1\mathbf{1}_T + \boldsymbol{u}_i, \tag{10.2}$$

com $\boldsymbol{v}_i = c_i\mathbf{1}_T + \boldsymbol{u}_i$ sendo os erros compostos.

Matriz M^0

Definimos a matriz M^0 como:

$$M^0 = I_T - T^{-1}\mathbf{1}_T\mathbf{1}_T' = I_T - \mathbf{1}_T(\mathbf{1}_T'\mathbf{1}_T)^{-1}\mathbf{1}_T'.$$

A matriz M^0 é idempotente e simétrica.

$$M^0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}\mathbf{1}_T = \ddot{\boldsymbol{x}}.$$

Podemos transformar o modelo (10.3) ao premultiplicarmos todo o modelo por M^0.

$$M^0\boldsymbol{y}_i = M^0X_i\boldsymbol{\beta} + M^0(c_1\mathbf{1}_T) + M^0\boldsymbol{u}_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

$$M^0(c_1\mathbf{1}_T) = (I_T - T^{-1}\mathbf{1}_T\mathbf{1}_T')c_i\mathbf{1}_T = c_i\mathbf{1}_T - T^{-1}c_i\mathbf{1}_T\mathbf{1}_T'\mathbf{1}_T = c_i\mathbf{1}_T - c_i\mathbf{1}_T \implies \boxed{M^0(c_1\mathbf{1}_T) = 0}$$

$$\ddot{\boldsymbol{y}}_i = \ddot{X}_i\boldsymbol{\beta} + \ddot{\boldsymbol{u}}_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{10.3}$$

Estimação POLS

Aplicando POLS no modelo (10.3)

$$\boxed{\boldsymbol{\beta}^{FE} = \left[\sum_{i=1}^{N} \ddot{X}_i'\ddot{X}_i\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N} \ddot{X}_i'\ddot{\boldsymbol{y}}_i\right]} \tag{10.4}$$

Hipóteses

As Hipóteses que usamos para $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FE}$ são:

FE.1: Exogeneidade Estrita: $\mathrm{E}(u_{it} \,|\, \boldsymbol{x}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{iT}, c_i) = 0$, para $t = 1, \ldots, T$ e $i = 1, \ldots, N$.

FE.2: Posto completo de $\mathrm{E}(X_i'\Omega^{-1}X_i)$ (para inverter a matriz). $posto[\mathrm{E}(X_i'\Omega^{-1}X_i)] = K$.

FE.3: Homoscedasticidade: $\mathrm{E}(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i' \,|\, X_i, c_i) = \sigma_u^2 I_T$.

Valor Esperado

Usando **FE.1** e **FE.2**, apenas.

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{X}_i'\ddot{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{X}_i'\ddot{\boldsymbol{u}}_i\right)\right]$$

$$\boxed{\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left[(\ddot{X}'\ddot{X})^{-1}(\ddot{X}'\ddot{\boldsymbol{u}})\right]}$$

Sabendo que $\ddot{X} = (I_N \otimes M^0)X$ e $\ddot{\boldsymbol{u}} = (I_N \otimes M^0)\boldsymbol{u}$, definimos:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\left[X'(I_N \otimes M^0)(I_N \otimes M^0)\boldsymbol{u}\right]\right\}$$

$$\boxed{\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\left[X'(I_N \otimes M^0)\boldsymbol{u}\right]\right\}}$$

Variância

Usamos a variância do estimador para inferência. Usando **FE.1** e **FE.2**, apenas:

$$\boxed{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \mathrm{E}\left[(\ddot{X}'\ddot{X})^{-1}(\ddot{X}'\ddot{\boldsymbol{u}})(\ddot{\boldsymbol{u}}'\ddot{X})(\ddot{X}'\ddot{X})^{-1}\right]}$$

Pão:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[(\ddot{X}'\ddot{X})^{-1}\right] &= \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\}
\end{aligned}$$

Recheio:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[(\ddot{X}'\ddot{\boldsymbol{u}})(\ddot{\boldsymbol{u}}'\ddot{X})\right] &= \mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)(I_N \otimes M^0)\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'(I_N \otimes M^0)(I_N \otimes M^0)X\right] \\
&= \mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'(I_N \otimes M^0)X\right]
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \text{Pão Recheio Pão}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\}\mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'(I_N \otimes M^0)X\right]\mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\}}$$

Variância sob Homocedasticidade

Usando **FE.3**, temos

Recheio':

$$\mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)\right]\sigma_u^2 I_{NT}\mathrm{E}\left[(I_N \otimes M^0)X\right] = \sigma_u^2\mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]$$

$(I_N \otimes M^0)$ é uma matrix de dimensão $NT \times NT$, visto que I_N é $N \times N$ e M^0 é $T \times T$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) &= \text{Pão Recheio' Pão} \\
&= \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\}\sigma_u^2\mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]\mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]^{-1}\right\}\sigma_u^2 I_{NT}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FE}) = \sigma_u^2 \cdot \mathrm{E}\left[X'(I_N \otimes M^0)X\right]}$$

11 First Difference (FD, PD)

Modelo

O modelo linear de **efeitos não observados**:

$$y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \tag{11.1}$$

para $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N$.

O modelo contém explicitamente um componente não observado, c_i, que não varia no tempo. Tratamos o componente não observado como parte do erro, não como parâmetro a ser estimado. Aqui permitimos que c_i seja correlacionado com $\boldsymbol{x}_{it}$. Deste modo, **não** podemos ignorar a sua presença e estimar (11.1) por POLS, visto que isso resultaria num estimador inconsistente devido a **endogeneidade**.

Assim, transformamos o modelo para eliminar c_i e conseguirmos fazer uma estimação consistente de $\boldsymbol{\beta}$. A trasnformação a ser feita é a primeira diferença. Para tanto, seguimos os seguintes passos:

- Reescrevemos (11.1) defasado:

$$y_{it-1} = \boldsymbol{x}_{it-1}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it-1} \tag{11.2}$$

- Tiramos a diferença entre (11.2) e (11.1):

$$\begin{aligned} y_{it} - y_{it-1} &= (\boldsymbol{x}_{it} - \boldsymbol{x}_{it-1})\boldsymbol{\beta} + c_i - c_i + u_{it} - u_{it-1} \\ \Delta y_{it} &= \Delta \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it}. \end{aligned} \tag{11.3}$$

  para $t = 2, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N$.

Reescrevendo (11.3) no formato matricial empilhando T:

$$\Delta \boldsymbol{y}_i = \Delta X_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}_i \tag{11.4}$$

com $\boxed{e_{it} = \Delta u_{it}}$.

- $\Delta \boldsymbol{y}_i$ vetor $(T-1) \times 1$
- ΔX_i matriz $(T-1) \times K$
- $\boldsymbol{\beta}$ vetor $K \times 1$
- $\boldsymbol{e}_i$ vetor $(T-1) \times 1$

Estimação POLS

O estimador $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FD}$ é o POLS da regressão no modelo (11.4), assim:

$$\boxed{\boldsymbol{\beta}^{FD} = \left[\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i' \Delta X_i\right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i' \Delta \boldsymbol{y}_i\right]} \tag{11.5}$$

Hipóteses

As Hipóteses que usamos para $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FD}$ são:

FD.1: Exogeneidade Estrita: $\mathrm{E}(u_{it} \mid \boldsymbol{x}_{i1}, \dots, \boldsymbol{x}_{iT}, c_i) = 0$, para $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N$.

FD.2: Posto completo de $\mathrm{E}(\Delta X_i' \Delta X_i)$ (para inverter a matriz). $posto[\mathrm{E}(\Delta X_i' \Delta X_i)] = K$.

FD.3: Homoscedasticidade: $\mathrm{E}(\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i' \mid X_i, c_i) = \sigma_e^2 I_{T-1}$.

Valor Esperado

Usando apenas **FD.1** e **FD.2**:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FD}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i' \Delta X_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta X_i' \boldsymbol{e}_i\right)\right]$$

$$\boxed{\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FD}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left[(\Delta X' \Delta X)^{-1} (\Delta X' \boldsymbol{e}\right]}$$

Variância

Usando apenas **FD.1** e **FD.2**:

$$\boxed{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FD}) = \mathrm{E}\left[(\Delta X' \Delta X)^{-1} (\Delta X' \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}' \Delta X)(\Delta X' \Delta X)^{-1}\right]}$$

Variância sob Homocedasticidade

Usando **FD.3**, temos

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FD}) = \sigma_e^2 \mathrm{E}\left[(\Delta X' \Delta X)^{-1} (\Delta X' \Delta X)(\Delta X' \Delta X)^{-1}\right]$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FD}) = \sigma_e^2 \mathrm{E}\left[(\Delta X' \Delta X)^{-1}\right]}$$

com

$$\sigma_e^2 = [N(T-1) - K]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \hat{e}_{it}^2\right],$$

que é a média de todos $\hat{e}_{it}^2$ contando K regressores.

12 Exogeneidade Estrita e FDIV

Modelo

No seguinte modelo

$$y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + u_{it},$$

para $t = 1, \ldots, T$ e $i = 1, \ldots, N$.

- y_{it} escalar;
- $\boldsymbol{x}_{it}$ vetor $1 \times K$;
- $\boldsymbol{\beta}$ vetor $K \times 1$;
- u_{it} escalar.

$\{x_{it}\}$ é estritamente **exógeno** se valer:

$$\mathrm{E}(u_{it} \,|\, \boldsymbol{x}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{iT}) = 0 \;, \qquad t = 1, \ldots, T$$

ou seja:

$$\mathrm{E}(y_{it} \,|\, \boldsymbol{x}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{iT}) = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} \;, \qquad t = 1, \ldots, T$$

o que é equivalente a hipótese de que utilizamos o modelo linear correto.

Para o seguinte modelo:

$$y_{it} = \boldsymbol{z}_{it}\boldsymbol{\gamma} + \rho y_{it-1} + c_i + u_{it}. \;, \qquad t = 2, \ldots, T$$

é **impossível** termos exogeneidade estrita. Isso porque, nesse modelo, de efeitos não observados temos:

$$\mathrm{E}(y_{it} \,|\, \boldsymbol{z}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{iT}, y_{it-1}, c_i) \neq 0.$$

Isso ocorre porque, y_{it} é afetado por y_{it-1} que contribui para y_{it} com, pelo menos, ρc_i.

$$\left.\begin{aligned} y_{it} &= \boldsymbol{z}_{it}\boldsymbol{\gamma} + \rho y_{it-1} + c_i + u_{it} \\ y_{it-1} &= \boldsymbol{z}_{it-1}\boldsymbol{\gamma} + \rho y_{it-2} + c_i + u_{it-1} \end{aligned}\right\} \implies y_{it} = \boldsymbol{z}_{it}\boldsymbol{\gamma} + \rho(\boldsymbol{z}_{it-1}\boldsymbol{\gamma} + \rho y_{it-2} + c_i + u_{it-1}) + c_i + u_{it}.$$

Para eliminarmos este efeito, podemos tirar a primeira diferença do modelo:

$$\begin{aligned} y_{it} - y_{it-1} &= (\boldsymbol{z}_{it} - \boldsymbol{z}_{it-1})\boldsymbol{\gamma} + \rho(y_{it-1} - y_{it-2}) + (c_i - c_i) + (u_{it} - u_{it-1}) \\ &\boxed{\Delta y_{it} = \Delta \boldsymbol{z}_{it}\boldsymbol{\gamma} + \rho \Delta y_{it-1} + \Delta u_{it} \,, \qquad t = 3, \ldots, T} \end{aligned} \tag{12.1}$$

Estimação

Não podemos estimar o modelo (12.1) por POLS, uma vez que $Cov(\Delta y_{it-1}, \Delta u_{it}) \neq 0$. Como saída, podemos estimar por P2SLS, usando instrumentos para Δy_{it-1} (alguns intrumentos para Δy_{it-1} são $y_{it-2}, y_{it-3}, \ldots, y_{i1}$).

P2SLS

$y_{it} = \boldsymbol{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + u_{it}$

- $i = 1, \dots, N$
- $t = 1, \dots, T$
- y_{it} escalar;
- $\boldsymbol{x}_{it}$ vetor $K \times 1$;
- $\boldsymbol{\beta}$ vetor $K \times 1$;
- u_{it} escalar.

$\boxed{\boldsymbol{\beta}^{P2SLS} = (X'P_Z X)^{-1}(X'P_Z \boldsymbol{y})}$

com

$\boxed{P_Z = Z'(Z'Z)^{-1}Z}$

onde P_Z é a matriz de projeção em Z.

FDIV

$$\begin{aligned} y_{it} &= \boldsymbol{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it} \ , \quad i = 1, \dots, N \ , \quad t = 1, \dots, T \\ \Delta y_{it} &= \Delta \boldsymbol{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it} \ , \quad i = 1, \dots, N \ , \quad t = 2, \dots, T \end{aligned}$$

Vamos supor $\Delta x'_{it}$ tem variável endógena (y_{it}, no caso). $\boldsymbol{w}_{it}$ é um vetor $1 \times L_t$ de instrumentos, onde $L_t \geq K$. Se os instrumentos forem diferentes:

$W_i = diag(\boldsymbol{w}'_{i2}, \boldsymbol{w}'_{i3}, \dots, \boldsymbol{w}'_{iT})$

onde W_i é uma matriz $(T-1) \times L$

$L = L_2 + L_3 + \cdots + L_T$

Hipóteses

FDIV.1: $\mathrm{E}(\boldsymbol{w}_{it}\Delta u'_{it})$ para $i = 1, \dots, N$, $t = 2, \dots, T$.

FDIV.2: $Posto\,[\mathrm{E}(W'_i W_i)] = L$

FDIV.3: $Posto\,[\mathrm{E}(W'_i \Delta X_i)] = K$

Estimação FDIV

$\boxed{\boldsymbol{\beta}^{FDIV} = \left(\Delta X' P_W \Delta X\right)^{-1}\left(\Delta X' P_W \Delta \boldsymbol{y}\right)}$ $\boxed{P_W = W(W'W)^{-1}W'}$

Valor Esperado

$\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FDIV}) = \beta + \left(\Delta X' P_W \Delta X\right)^{-1}\left(\Delta X' P_W \boldsymbol{e}\right)$

Variância

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}^{FDIV}) &= \mathrm{E}\left\{\left[\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FDIV}) - \beta\right]\left[\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}^{FDIV}) - \beta\right]'\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{\left[\Delta X' P_W \Delta X\right]^{-1}\left[\Delta X' P_W \boldsymbol{e}\right]\left[\Delta X' P_W \boldsymbol{e}\right]'\left[\Delta X' P_W \Delta X\right]^{-1}\right\} \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\Delta X' P_W \Delta X\right)^{-1}\left(\Delta X' P_W \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}' P_W \Delta X\right)\left(\Delta X' P_W \Delta X\right)^{-1}\right]
\end{aligned}$$

$e_i = \Delta u_{it}$.

13 Latent Variables, Probit and Logit

Modelo

Suponha y^* não observável (**latente**) seguindo o seguinte modelo:

$$y_i^* = \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i. \tag{13.1}$$

Defina y como:

$$y_i = \begin{cases} 1\,, & y_i^* \geq 0 \\ 0\,, & y_i^* < 0 \end{cases}$$

temos que:

$$P(y_i = 1|\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})$$
$$P(y_i = 0|\boldsymbol{x}) = 1 - p(\boldsymbol{x}).$$

Além disso, pela definição de y_i, equação (13.1), temos:

$$\begin{aligned} P(y_i = 1|\boldsymbol{x}) &= P(y_i^* \geq 0\,|\boldsymbol{x}) \\ &= P(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \geq 0\,|\boldsymbol{x}) \\ &= P(\varepsilon_i \geq -\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}\,|\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Agora, supondo que ε_i tem FDA, G, tal que $G' = g$ é simétrica ao redor de zero:

$$\begin{aligned} P(y_i = 1|\boldsymbol{x}) &= 1 - P(\varepsilon_i < -\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}\,|\boldsymbol{x}) \\ &= 1 - G(-\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}\,|\boldsymbol{x}) \\ &= G(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}). \end{aligned}$$

Se $G(\cdot)$ for uma distribuição:

Normal Padrão: $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é o estimador **probit**.

Logística: $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é o estimador **logit**.

Supondo $\boldsymbol{y}_i\,|\,\boldsymbol{x} \sim Bernoulli(p(\boldsymbol{x}))$, sua fmp é dada por:

$$f(y_i\,|\,\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\beta}) = \left[G(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})\right]^{y_i}\left[1 - G(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})\right]^{1-y_i}\,, \quad y = 0, 1.$$

Para estimarmos $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ por máxima verossimilhança, temos de encontrar $\boldsymbol{\beta} \in B$, onde B é o espaço paramétrico, tal que $\boldsymbol{\beta}$ maximize o valor da distribuição conjunta de $\boldsymbol{y}$, ou seja:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}\in B}{\text{Max}} \prod_{i=1}^{N} f(y_i\,|\,\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\beta}).$$

Tirando o logaritmo e dividindo tudo por N (podemos fazer isso pois são transformações monotônicas e não alteram o lugar onde $\boldsymbol{\beta}$ ótimo irá parar):

$$\underset{\boldsymbol{\beta}\in B}{\text{Max}} \left\{N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \ln\left[f(y_i\,|\,\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\beta})\right]\right\}.$$

Podemos definir $\ell_i(\boldsymbol{\beta}) = \ln[f(y_i\,|\,\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{\beta})]$ como sendo a verossimilhança condicional da observação i:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}\in B}{\text{Max}} \left\{ N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \ell_i(\boldsymbol{\beta}) \right\}.$$

Dessa forma, podemos ver que o problema acima é a analogia amostral de:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}\in B}{\text{Max}}\ \mathrm{E}\left[\ell_i(\boldsymbol{\beta})\right].$$

Definindo o *vector score* da observação i:

$$s_i(\boldsymbol{\beta}) = [\nabla_{\boldsymbol{\beta}} \ell_i(\boldsymbol{\beta})]' = \left[\frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1}, \ldots, \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_K} \right]$$

Definindo a **Matriz Hessiana** da observação i:

$$H_i(\boldsymbol{\beta}) = \nabla_{\boldsymbol{\beta}} s_i(\boldsymbol{\beta}) = \nabla^2_{\boldsymbol{\beta}} \ell_i(\boldsymbol{\beta})$$

Tendo essas definições, o **Teorema do Valor Médio** (TVM) nos diz que no intervalo $[a, b]$, existe um número, c, tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

FAZER DESENHO

Trocando $f(\cdot)$ por $s_i(\cdot)$, a por $\boldsymbol{\beta}_0$, b por $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ e c por $\bar{\boldsymbol{\beta}}$, temos:

$$H_i(\bar{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{s_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - s_i(\boldsymbol{\beta}_0)}{\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0},$$

tirando médias dos dois lados:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} H_i(\bar{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0} N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left[s_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - s_i(\boldsymbol{\beta}_0) \right]$$

Supondo que $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ maximiza $\ell(\boldsymbol{\beta} \,|\, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, temos que: $N^{-1} \sum_{i=1}^{N} s_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = 0$. E podemos reescrever a equação anterior como:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0 = (-1) \left[N^{-1} \sum_{i=1}^{N} H_i(\bar{\boldsymbol{\beta}}) \right]^{-1} N^{-1} \sum_{i=1}^{N} s_i(\boldsymbol{\beta}_0)$$

$$\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) = \left[-N^{-1} \sum_{i=1}^{N} H_i(\bar{\boldsymbol{\beta}}) \right]^{-1} \sqrt{N} \cdot N^{-1} \sum_{i=1}^{N} s_i(\boldsymbol{\beta}_0)$$

$$\boxed{\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) = \left[-N^{-1} \sum_{i=1}^{N} H_i(\bar{\boldsymbol{\beta}}) \right]^{-1} N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} s_i(\boldsymbol{\beta}_0)}.$$

Onde

$$\left[-N^{-1} \sum_{i=1}^{N} H_i(\bar{\boldsymbol{\beta}}) \right]^{-1} \xrightarrow{p} A_0^{-1}, \qquad N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} s_i(\boldsymbol{\beta}_0) \xrightarrow{d} N(0, B_0).$$

Assim, temos que:

$$\boxed{\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0) \to N(0, A_0^{-1} B_0 A_0^{-1})}.$$

A forma mais simples de achar $\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ é:

$$\boxed{\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = -\mathrm{E}[H_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}})]^{-1}}.$$

14 ATT, ATE, Propensity Score

Modelo

- $y_1 \to$ variável de interesse com tratamento
- $y_0 \to$ variável de interesse sem tratamento

$$w = \begin{cases} 1 & \text{se tratam} \\ 0 & \text{se não tratam} \end{cases}$$

Idealmente, para isolarmos completamente o efeito de $w = 1$, gostaríamos de pode calcular:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} (y_{i1} - y_{i0}) \, .$$

Ou seja, o efeito que o tratamento causa sobre um indivíduo com todo o resto permanecendo constante. Em outras palavras, queríamos que houvesse dois mundos paralelos observáveis onde seria possível observar o que acontece com y_i com e sem tratamento. Infelizmente, para ccada indivíduo i, observamos apenas y_{i1} ou y_{i0}, nunca ambos.

Antes de continuarmos, faremos as seguintes definições:

ATE: $\mathrm{E}(y_1 - y_0)$

ATT: $\mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|\, w = 1)$ (ATE no tratado).

ATE e ATT condicional a variáveis $\boldsymbol{x}$

$$ATE(\boldsymbol{x}) = \mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|\boldsymbol{x})$$
$$ATT(\boldsymbol{x}) = \mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|\boldsymbol{x}, w = 1)$$

<u>OBS:</u>

$$\mathrm{E}(y_1 - y_0) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|w)\right]$$
$$\mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|w) = \mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|w = 0) \cdot P(w = 0) + \mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|w = 1) \cdot P(w = 1).$$

Métodos Assumindo Ignorabilidade do Tratamento

ATE.1: Ignorabilidade.
w e (y_1, y_0) são independentes condicionais a $\boldsymbol{x}$.

ATE.1': Ignorabilidade da Média.
a) $\mathrm{E}(y_0 \,|\, w, \boldsymbol{x}) = \mathrm{E}(y_0 \,|\, \boldsymbol{x})$
b) $\mathrm{E}(y_1 \,|\, w, \boldsymbol{x}) = \mathrm{E}(y_1 \,|\, \boldsymbol{x})$

Vamos definir

$$\mathrm{E}(y_0 \,|\, \boldsymbol{x}) = \mu_0(\boldsymbol{x})$$
$$\mathrm{E}(y_1 \,|\, \boldsymbol{x}) = \mu_1(\boldsymbol{x}).$$

Sob **ATE.1** e **ATE.1'**:

$$ATE(\boldsymbol{x}) = \mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|\boldsymbol{x}) = \mu_1(\boldsymbol{x}) - \mu_0(\boldsymbol{x})$$
$$ATT(\boldsymbol{x}) = \mathrm{E}(y_1 - y_0 \,|\boldsymbol{x}, w = 1) = \mu_1(\boldsymbol{x}) - \mu_0(\boldsymbol{x})$$

ATE.2: *Overlap*
Para todo $\boldsymbol{x}$, $P(w = 1 \mid \boldsymbol{x}) \in (0, 1)$, $p(\boldsymbol{x}) = p(w = 1|\boldsymbol{x})$.

$p(\boldsymbol{x})$ é o *Propensity Score*, ele representa a probabilidade de y_i ser tratado dado o valor das covariáveis $\boldsymbol{x}$. Essa hipótese é importante visto que podemos expressar o ATE em função de $p(\boldsymbol{x})$.

Para o ATT vamos supor:

ATT.1': $\mathrm{E}(y_0 \mid \boldsymbol{x}, w) = \mathrm{E}(y_0 \mid \boldsymbol{x})$

ATT.2: *Overlap:* Para todo $\boldsymbol{x}$, $P(w = 1|\boldsymbol{x}) < 1$.

Propensity Score

Como foi dito anteriormente, apenas observamos ou y_1 ou y_0 para a mesma pessoa, mas não ambos. Mais precisamente, junto com w, o resultado observado é:

$y = wy_1 + (1 - w)y_0$

como w é binário, $w^2 = w$, assim, temos:

$$\begin{aligned} wy &= w^2 y_1 + (w - w^2)y_0 \implies \boxed{wy = wy_1} \\ (1 - w)y &= (w - w^2)y_1 + (w^2 - 2w + 1)y_0 \implies \boxed{(1 - w)y = (1 - w)y_0}. \end{aligned}$$

Fazemos isso para tentar isolar $\mu_0(\boldsymbol{x})$ e $\mu_1(\boldsymbol{x})$:

$\mu_1(\boldsymbol{x})$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(wy|\boldsymbol{x}) &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(wy_1|\boldsymbol{x}, w\right)|\boldsymbol{x}\right] \\ &= \mathrm{E}\left[w\mu_1(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\right] \\ &= \mu_1(\boldsymbol{x})\mathrm{E}(w|\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Como w é binaria: $\mathrm{E}(w|\boldsymbol{x}) = P(w = 1|\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})$. Assim:

$$\mathrm{E}(wy|\boldsymbol{x}) = \mu_1(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})$$

$$\boxed{\mu_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{E}(wy|\boldsymbol{x})}{p(\boldsymbol{x})}}$$

$\mu_0(\boldsymbol{x})$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(1 - w)y|\boldsymbol{x}] &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left((1 - w)y_0|\boldsymbol{x}, w\right)|\boldsymbol{x}\right] \\ &= \mathrm{E}\left[(1 - w)\mu_0(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\right] \\ &= \mu_0(\boldsymbol{x})\mathrm{E}(w|\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{E}[(1 - w)y|\boldsymbol{x}] &= \mu_0(\boldsymbol{x})[1 - p(\boldsymbol{x})] \implies \\ &\boxed{\mu_0(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{E}[(1 - w)y|\boldsymbol{x}]}{1 - p(\boldsymbol{x})}} \end{aligned}$$

ATE:

$$\mu_1(\boldsymbol{x}) - \mu_0(\boldsymbol{x}) = \mathrm{E}\left[\frac{[w - p(\boldsymbol{x})]y}{p(\boldsymbol{x})[1 - p(\boldsymbol{x})]}|\boldsymbol{x}\right]$$

$$\boxed{\widehat{ATE} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{[w_i - p(\boldsymbol{x}_i)]y_i}{p(\boldsymbol{x}_i)[1 - p(\boldsymbol{x}_i)]}}$$

ATT:

$$\mathrm{E}(y_1|\boldsymbol{x}, w = 1) - \mathrm{E}(y_0|\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\hat{P}(w = 1)}\mathrm{E}\left[\frac{[w - \hat{p}(\boldsymbol{x})]y}{[1 - \hat{p}(\boldsymbol{x})]}|\boldsymbol{x}\right]$$

$$\hat{P}(w = 1) = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} w_i$$

$$\widehat{ATT} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} w_i} N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{[w_i - \hat{p}(\boldsymbol{x}_i)]y_i}{[1 - \hat{p}(\boldsymbol{x}_i)]}$$

$$\boxed{\widehat{ATT} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_i}\sum_{i=1}^{N}\frac{[w_i - \hat{p}(\boldsymbol{x}_i)]y_i}{[1 - \hat{p}(\boldsymbol{x}_i)]}}$$

Appêndice

Sums of Values

(Greene, 2012, p. 977, A.2.7)

$$\mathbf{1}'_N\mathbf{1}_N = N \quad ; \qquad \mathbf{1}_N\mathbf{1}'_N = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

Defining $\boldsymbol{x}$ with dimension $1 \times N$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}'\mathbf{1}_N = \mathbf{1}'_N\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}'\mathbf{1}_N)' = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\mathbf{1}_N\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & \dots & x_N \end{bmatrix}_{N\times N} \quad ; \qquad \boldsymbol{x}\mathbf{1}'_N = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & \dots & x_N \end{bmatrix}_{N\times N}$$

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{x}} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} x_i = N^{-1}\boldsymbol{x}'\mathbf{1}_N$$

Important Idempotent Matrices

(Greene, 2012, p. 978, A.28)
Centering Matrix

$$M^0 = I_N - \mathbf{1}_N(\mathbf{1}'_N\mathbf{1}_N)^{-1}\mathbf{1}'_N = I_N - N^{-1}\mathbf{1}_N\mathbf{1}'_N$$

A Matriz M^0 é **idempotente** e **simétrica**.

Idempotência: $AA = A$
Simetria: $A' = A$

$$M^0\boldsymbol{x} = (I_N - N^{-1}\mathbf{1}_N\mathbf{1}'_N)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - N^{-1}\mathbf{1}_N(\mathbf{1}'_N\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}_N\overline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{x}} \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix}$$

$$M^0\mathbf{1} = (I_N - N^{-1}\mathbf{1}_N\mathbf{1}'_N)\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N - N^{-1}\mathbf{1}_N(\mathbf{1}'_N\mathbf{1}_N) = \mathbf{0}_N$$

15 Conceitos Básicos de Convergência Estatística

Definition 15.1 (**Estimador Consistente**)**.** Um estimador $\hat{\theta}$ é **consistente** para um parâmetro θ se

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta.$$

Definition 15.2 (**Convergência em Probabilidade**)**.** Uma sequência de variáveis aleatórias: $\{X_n\}_{n\geq 1}$ **converge em probabilidade** para uma variável aleatória X se, dado $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0,$$

quando $n \to +\infty$. E denotamos

$$X_n \xrightarrow{p} X.$$

Definition 15.3 (**Desigualdade de Markov**)**.** Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $E|X_n|^K < +\infty$, $K > 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n| > \varepsilon) \leq \frac{E|X_n|^K}{\varepsilon^K}$$

Definition 15.4.

$$0 \leq P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) \leq \frac{E|X_n|^2}{\varepsilon^2}$$

Definition 15.5 (**Erro Quadrático Médio**)**.**

$$EQM(\hat{\theta}) = \mathrm{E}\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right] = \left[Bias(\hat{\theta})^2 + \mathrm{Var}(\hat{\theta})\right]$$

Então, se $Bias(\hat{\theta}) \to 0$ e $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \to 0$, temos que $EQM(\hat{\theta}) \to 0$. Pelo **Teorema do Sanduíche**, $P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) \to 0$; logo, $\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$.

Definition 15.6 (**LGN – Lei dos Grandes Números**)**.** Seja $\{X_i\}_{i\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias *iid* com $\mathrm{E}(X_i) = \mu$. Então,

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow{p} \mu.$$

Definition 15.7 (**LGN – Caso Matricial**)**.** Seja $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^{N}$, uma sequência *iid* de vetores aleatórios $K \times 1$ com $\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i') = Q_{K\times K}$ finita. Então,

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i' \xrightarrow{p} Q.$$

Se Q for positiva definida, Q terá inversa.

Multiplicação de Matriz

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$[AB]_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \implies AB = \sum_{i=1}^{2} a_i b_i$$

onde a_i é a i-ésima **coluna** da matriz A. b_i é a i-ésima **linha** da matriz B.

Definition 15.8.

$$\begin{aligned} P(|X_n - X| > \varepsilon) &\to 0 \\ X_n - X &\xrightarrow{p} 0 \\ X_n &\xrightarrow{p} X \end{aligned}$$

Definition 15.9 (o_p)**.**

$$\begin{aligned} X_n = \mathrm{o}_p(1) &\implies X_n \xrightarrow{p} 0 \\ X_n = \mathrm{o}_p(Y_n) &\implies \frac{X_n}{Y_n} = \mathrm{o}_p(1) \implies \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{p} 0 \\ X_n = W_n + \mathrm{o}_p(1) &\implies (X_n - W_n) = \mathrm{o}_p(1) \implies (X_n - W_n) \xrightarrow{p} 0 \end{aligned}$$

Definition 15.10 (Limitação em Probabilidade: O_p)**.** Dizemos que X_n é **limitado em probabilidade** e denotado por $X_n = \mathrm{O}_p(1)$, se existe M maior que zero, tal que para todo ε maior que zero, $P(|X_n| > 0) < \varepsilon$.

$$X_n = \mathrm{O}_p(1) \implies \exists M > 0\,;\ \forall \varepsilon > 0\,,\ P(|X_n| > 0) < \varepsilon.$$

Definition 15.11. Dizemos que $X_n = \mathrm{O}_p(Y_n)$ se existe M maior que zero, tal que para todo ε maior que zero, $P(|X_n/Y_n| > 0) < \varepsilon$.

$$X_n = \mathrm{O}_p(Y_n) \implies \exists M > 0\,;\ \forall \varepsilon > 0\,,\ P(|X_n/Y_n| > 0) < \varepsilon.$$

Definition 15.12. Se $X_n = \mathrm{O}_p(1)$ e $Y_n = \mathrm{o}_p(1)$, então

$$X_n Y_n = \mathrm{O}_p(1)\mathrm{o}_p(1) = \mathrm{o}_p(1).$$

Definition 15.13 (Equivalência Assintótica)**.** Seja $\{\boldsymbol{x}_n\}$ e $\{\boldsymbol{z}_n\}$ sequências de vetores aleatórios $K \times 1$. Se $\boldsymbol{z}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{z}_n \xrightarrow{p} \mathbf{0}_K$. Então,

$$\boldsymbol{x}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{z}.$$

Definition 15.14 (Convergência em Distribuição)**.** Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória com F_n e F suas respectivas FDAs, então

$$X_n \xrightarrow{d} X, \text{ se } F_n(X) \to F(X)$$

para todo X onde F é contínuo.

Definition 15.15 (Convergência em Distribuição e Limitação em Probabilidade)**.** Se $X_n \xrightarrow{d} X$, X um variável aleatória qualquer; então $X_n = \mathrm{O}_p(1)$.

Definition 15.16 (TCL – Teorema Central do Limite)**.** Seja $\{X_n\}_{n=1}^N$ *iid* com $\mathrm{E}(X_n) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 < +\infty$. Então, para $S_N = \sum_{n=1}^N X_n$:

$$\frac{S_N - N\mu}{\sqrt{N}\sigma} = \frac{N(\overline{X} - \mu)}{\sqrt{N}\sigma} = \frac{N(\overline{X} - \mu)}{\sqrt{N}\sigma} = \boxed{\frac{\sqrt{N}(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)}.$$

Definition 15.17 (TCL – Caso Vetorial)**.** Seja $\{\boldsymbol{w}_i\}_{i=1}^n$ uma sequência *iid* de vetores aleatórios $K \times 1$ com $\mathrm{E}(w_{ik}^2) < +\infty$, $k = 1, \ldots K$ e $\mathrm{E}(\boldsymbol{w}_i) = \mathbf{0}_K$. Então,

$$N^{-1/2} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{w}_i \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, B),$$

onde, $B = \mathrm{Var}(\boldsymbol{w}_i) = \mathrm{E}(\boldsymbol{w}_i \boldsymbol{w}_i')$.

Definition 15.18. Seja $\{\boldsymbol{z}_n\}$ uma sequência de vetores $K \times 1$ aleatórios com

$$\boldsymbol{z}_n \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, V).$$

Então, para qualquer matriz A de dimensão $K \times M$ **não** estocástica,

$$A'\boldsymbol{z}_n \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, A'VA).$$

TODO

1. Acabar Aula 2
2. Revisar Aula 1 com C.4
3. Revisar Conceitos Estatísticos com C.3
4. Fazer POLS com Sec 7.8

References

Greene, William H. 2012. *Econometric Analysis*. 7 edn. Boston: Prentice Hall.

Wooldridge, Jeffrey M. 2010. *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*. 2 edn. Boston, Massachussetts: MIT Press.