

# Appunti di Ottica geometrica

Pisa – Anno Accademico 1973/74



---

## Premessa

Questi Appunti sono la trascrizione dei fogli ciclostilati degli appunti di ottica geometrica del corso di Esperimentazioni di fisica I (soprannominato dagli studenti con il nomignolo di "Fisichetta 1") – Pisa – A.A. 1973–74.



---

## Indice

<b>CAPITOLO I – Leggi fondamentali</b>	1
Specchi piani	2
Specchi sferici	3
Punti coniugati rispetto a uno specchio sferico	4
Fuoco di uno specchio sferico	7
Costruzione grafica del raggio riflesso e dell'immagine di un punto	8
Immagine di un oggetto e verifiche sperimentali	9
Posizione e grandezza dell'immagine per diverse distanze dell'oggetto	10
Caustica di riflessione	11
Fatti fondamentali e leggi della rifrazione	11
Riflessione totale	12
 <b>CAPITOLO II – Sistemi diottrici centrati</b>	15
Generalità sui sistemi diottrici centrati	15
Diottro. Costruzione di Weierstrass	17
Formula fondamentale del diottro	18
Punti e figure coniugate	20
Fuochi e piani focali di un diottro	22
Rapporto di convergenza	24
Lenti sottili	26
Costruzione grafica dell'immagine di un punto data da una lente sottile	29
Potere diottrico di una lente. Diottria	30
Sistemi diottrici centrati generici	31
Punti e piani principali. Distanze focali	33
Costruzione grafica dell'immagine di un punto data da un sistema diottrico centrato	34
Formule fondamentali relative a un sistema diottrico centrato	35



---

## CAPITOLO I – Leggi fondamentali

Nell'approssimazione dell'ottica geometrica si ammette che la luce segua le tre leggi fondamentali della propagazione rettilinea, della riflessione e della rifrazione. Si rinuncia ad indagare tutti quei fenomeni che possono far pensare ad un comportamento ondulatorio della luce (interferenza, diffrazione, polarizzazione) e a che tipo di onde si tratti (elastiche, elettromagnetiche o altro).

In generale le tre leggi dell'ottica geometrica sono largamente sufficienti a spiegare il funzionamento degli strumenti ottici ma non sono in grado di valutarne i limiti (potere risolutivo) e di spiegare i fenomeni che avvengono ogni volta che entrano in gioco distanze dell'ordine delle lunghezze d'onda. Enunciamo dunque queste leggi fondamentali.

In un mezzo omogeneo la luce viaggia lungo cammini rettilinei.

Questa legge ha la sua base sperimentale nell'esperienza quotidiana nelal formazione di ombre e penombre; su scala astronomica nel fenomeno delle eclissi, ecc.

È inoltre quella che permette di dare un significato al concetto di raggio luminoso e di fascio di raggi.

Supponiamo ora che un fascio di raggi propagantisi nell'aria (o nel vuoto) incontri la superficie ben levigata di un corpo trasparente (esempio una lastra di vetro). In tal caso il fascio di luce si divide in due parti, che proseguono il loro cammino in due direzioni ben distinte. Una prima parte non penetra nel corpo trasparente ma viene rinviata indietro (in generale non nella stessa direzione da cui proveniva) costituendo il cosiddetto fascio riflesso; una seconda parte invece penetra nel mezzo trasparente e continua a propagarsi in esso anche questa volta secondo una direzione in generale diversa da quella del fascio incidente: questa seconda parte costituisce il fascio rifratto.

Si definisce piano d'incidenza il piano identificato dal raggio incidente e dalla normale alla superficie del corpo nel punto d'incidenza,

Le leggi che governano la riflessione e la rifrazione sono le seguenti:

1) il raggio incidente, il raggio riflesso e il raggio rifratto giacciono in uno stesso piano, che è il piano d'incidenza

- 2) l'angolo di riflessione (cioè l'angolo tra il raggio riflesso e la normale) è uguale all'angolo d'incidenza (angolo tra il raggio incidente e la normale)
- 3) l'angolo  $r$  tra il raggio rifratto e la normale (angolo di rifrazione) è legato all'angolo d'incidenza  $i$  dalla relazione:

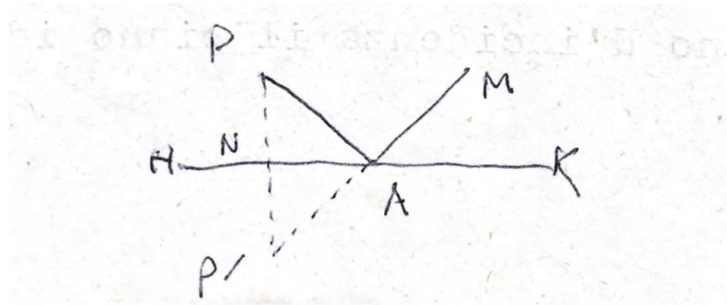
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \text{cost}$$

La costante, che di solito si indica con  $n$ , si chiama indice di rifrazione di quel corpo (rispetto all'aria).

Studieremo come si applicano queste leggi al caso degli strumenti ottici più semplici: specchi, lenti e sistemi di lenti.

## Specchi piani

Sia  $P$  un punto luminoso o illuminato di fronte a uno specchio piano  $HK$ : per costruire il raggio riflesso corrispondente a uno qualunque, per es.,  $PA$  degli infiniti raggi che emanano da  $P$ , basta considerare il punto  $P'$  simmetrico di  $P$  rispetto allo specchio (vale a dire basta abbassare da  $P$  la perpendicolare allo specchio, e prolungarla di un tratto  $NP'=PN$ ) e congiungerlo con  $A$ : il prolungamento  $AM$  è il raggio riflesso. Infatti, esso evidentemente giace nel piano normale allo specchio e contenente  $PA$ , e inoltre, essendo i triangoli rettangoli  $PNA$  e  $P'NA$  uguali per avere  $NA$  in comune e  $PN=P'N$  per costruzione, saranno uguali gli angoli  $PAN$  e  $P'AN$ , il quale ultimo è uguale ad  $MAK$ ; quindi  $PAN=MAK$ : dunque  $AM$  soddisfa anche la seconda legge della riflessione. Da questa costruzione si vede che qualunque altro raggio uscente



da  $P$ , dopo la riflessione ha la direzione che avrebbe se provenisse direttamente da  $P'$ ; perciò un fascio divergente da  $P$  viene mutato dallo specchio in un fascio divergente da  $P'$ : se questo fascio è ricevuto nell'occhio, vi genererà dunque la stessa sensazione che genererebbe un punto luminoso o illuminato in  $P'$ . Si dice perciò che  $P'$  è l'immagine di  $P$ . Trattasi di immagine virtuale perché non sono i raggi ma i loro prolungamenti che si intersecano in  $P'$ . Se



dinanzi allo specchio si trova un oggetto illuminato, di forma qualunque (per es. la freccia AB) poiché, come sappiamo, da ogni punto di questa parte per diffusione un fascio di raggi divergenti, si potrà ripetere per ogni punto il ragionamento di dianzi, e si concluderà che l'occhio riceverà la stessa sensazione che proverebbe se al di là dello specchio vi fosse un oggetto  $A'B'$ , di cui ogni punto è simmetrico di un punto dell'oggetto vero, rispetto al piano HK:  $A'B'$  dicesi l'immagine speculare di AB.

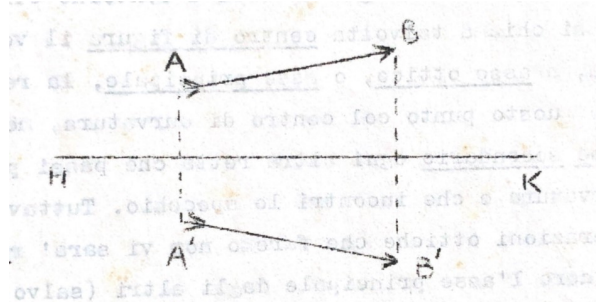


fig. 1.

È noto dalla geometria (e si verifica del resto facilmente) che l'immagine speculare di un oggetto non è in genere uguale, cioè sovrapponibile all'oggetto stesso, così come non sono uguali tra loro, per es. la mano destra e la sinistra, sebbene formate di parti corrispondenti e aventi le medesime dimensioni. Basta del resto pensare alla scrittura vista in uno specchio, per persuadersene.

## Specchi sferici

Tali specchi hanno generalmente la forma di una calotta sferica, cioè il loro contorno è un cerchio; noi non ci occuperemo però, in generale, del contorno, e quindi le considerazioni che faremo si applicano, salvo indicazione contraria, al caso di un contorno qualsiasi, purché la superficie dello specchio sia una sfera o una parte di sfera. Gli specchi sferici si chiamano concavi se la superficie riflettente è quella interna alla sfera, convessi nel caso contrario. Prendendo, sulla superficie dello specchio, i due punti più lontani, e congiungendoli col centro, si ha un angolo che dicesi apertura dello specchio. Nel caso dello specchio a contorno circolare, tale angolo coincide naturalmente con l'apertura della calotta, nel senso geometrico, cioè col suo angolo al centro.

Aggiungeremo che nel caso degli specchi a contorno circolare (calotte) si chiama talvolta centro di figura il vertice della calotta, e asse ottico, o asse principale, la retta che congiunge questo punto col centro di curvatura, mentre si chiama asse secondario ogni altra retta che passi per il centro di curvatura e che incon-

tri lo specchio. Tuttavia, nelle considerazioni ottiche che faremo non vi sarà ragione di distinguere l'asse principale dagli altri (salvo indicazione contraria).

### Punti coniugati rispetto a uno specchio sferico

Dimostreremo ora il seguente teorema fondamentale. Se dei raggi formanti un fascio concentrico incontrano uno specchio sferico, essi, dopo la riflessione, formano ancora un fascio concentrico (approssimativamente). Vale a dire

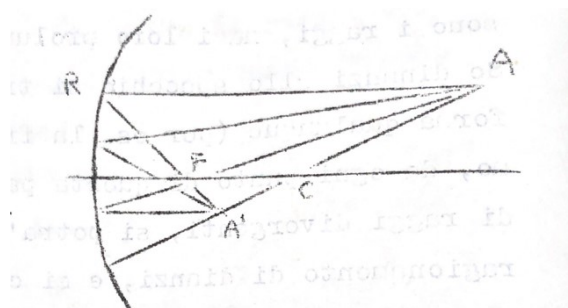


fig. 2.

(fig. 2) tutti i raggi uscenti da un punto luminoso A e cadenti su uno specchio sferico, si riflettono in modo da passare tutti approssimativamente (prolungati se occorre) per uno stesso punto A' (in generale diverso da A) e quindi si formerà in A' un'immagine di A. I punti A e A' diconsi coniugati. Questo teorema dal quale dipende l'esistenza delle immagini fornite dagli specchi sferici, è verificato con tanta maggiore approssimazione, quanto più piccola è l'apertura dello specchio.

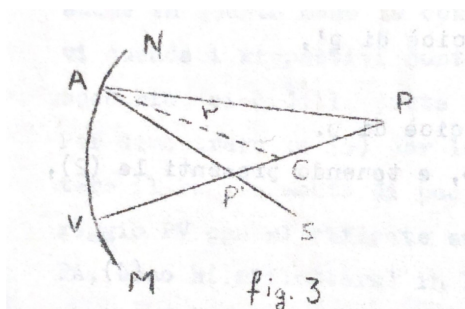


fig. 3.

Per dimostrarlo, consideriamo un punto P, di fronte a uno specchio sferico

MN, La fig. 3 si riferisce al caso di uno specchio concavo al quale per ora ci riferiremo. Vogliamo dimostrare che i raggi uscenti da P vanno a passare, dopo la riflessione, tutti per un medesimo punto. Sia C il centro di curvatura dello specchio, ed  $r=CV$  il raggio di curvatura. Dei raggi che escono da P, quello passante per C incontra lo specchio normalmente, e quindi si riflette su se stesso: il punto di incontro dei raggi riflessi, se esiste, dovrà trovarsi perciò su questa retta. Consideriamo un altro qualunque dei raggi uscenti da P, p. es., PA, e seguiamolo nella riflessione: esso si rifletterà nella direzione AS, tale da formare con la normale (che in questo caso è il raggio della sfera) un angolo uguale a quello formato da PA.

Inoltre, il raggio riflesso giacerà nel piano di CA e di PA, e quindi della retta PV: incontrerà quindi questa retta in un punto P'; vogliamo dimostrare che questo punto è lo stesso, comunque si sia scelto il raggio incidente PA. Infatti calcoliamo la distanza  $p'$  di P' da V. Intanto, tra le distanze di P e di P' dal centro C è facile stabilire una relazione, poiché per un noto teorema di geometria, le due parti in cui una bisettrice di un triangolo divide il lato opposto sono proporzionali agli altri due lati. Notando dunque che CA è la bisettrice dell'angolo PAP', in virtù della seconda legge della riflessione, avremo

$$\frac{CP'}{CP} = \frac{AP'}{AP} \quad (1)$$

Ora, chiamando  $p$  la distanza di P da V, si ha

$$CP' = r - p' \quad CP = p - r \quad (2)$$

Quanto al secondo membro, è evidente dalla figura che, quando l'angolo  $\alpha$  è piccolo, si ha all'incirca

$$AP' = VP' = p' \quad AP = VP = p \quad (3)$$

Per stabilire però entro quali limiti valga questa approssimazione, scriviamo le espressioni rigorose di AP' e AP, servendoci dei triangoli AP'C e APC. Avremo

$$\begin{aligned} \overline{AP'}^2 &= \overline{CP'}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{CP'} \cdot \overline{AC} \cos \alpha = (r - p')^2 + r^2 - 2(r - p')r \cos \alpha \\ \overline{AP}^2 &= \overline{CP}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{CP} \cdot \overline{AC} \cos \alpha = (p - r)^2 + r^2 - 2(p - r)r \cos \alpha \end{aligned}$$

Ma  $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$  e se  $\alpha$  è tale da poterne trascurare il quadrato di fronte all'unità come avverrà certamente se l'apertura dello specchio è abbastanza piccola, potremo ritenere  $\cos \alpha = 1$ ; allora i secondi membri delle relazioni ora scritte divengono quadrati perfetti, e precisamente, il primo di

$$r - p' - r \quad \text{cioè di } p',$$

e il secondo di

$$p - r + r \quad \text{cioè di } p.$$

Ritenendo dunque  $AP'=p'$ ,  $AP=p$ , e tenendo presenti le (2), la (1) diventa

$$\frac{r - p'}{p - r} = \frac{p'}{p} \quad (4)$$

la quale determina  $p'$ , cioè il punto  $P'$ : poiché essa non contiene  $\alpha$ , ne segue che il punto  $P'$  è lo stesso qualunque sia il raggio  $PA$  uscente da  $P$ .

La (4) si può mettere sotto una forma più simmetrica e facile da ricordare, con i seguenti facili passaggi:

$$\frac{r - p'}{p'} = \frac{p - r}{p}$$

ossia

$$\frac{r}{p'} - 1 = 1 - \frac{r}{p}$$

da cui la forma definitiva

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{r} \quad (5)$$

Questa formula fondamentale, detta formula degli specchi sferici, esprime la relazione fra le distanze dallo specchio di due punti coniugati: in essa,  $p$  e  $p'$  figurano in modo perfettamente simmetrico, come è naturale, perché, dato il principio di invertibilità dei raggi luminosi, se  $P'$  è la immagine di  $P$  anche  $P$  è la immagine di  $P'$ .

Se  $p'$ , (o  $p$ ), risulta negativo, ciò significa evidentemente che il punto  $P'$ , (o  $P$ ), si trova dietro lo specchio: esso sarà in tal caso determinato dall'intersezione dei prolungamenti dei raggi, anziché da quella dei raggi stessi: sarà quindi un'immagine virtuale.

Nel caso di uno specchio convesso, come ora dimostreremo, la (5) vale ancora, purché si convenga di considerare il raggio di curvatura come negativo: per  $p$  e  $p'$  si conserverà anche in questo caso la convenzione di considerarli negativi quando i rispettivi punti  $P$  o  $P'$  si trovano dietro lo specchio, cioè dalla parte non riflettente.

Per dimostrare la (5) per lo specchio convesso, basta ripetere il ragionamento di poc'anzi. Condotta da  $P$ , oltre al raggio  $PV$  che si riflette su se stesso, un raggio qualsiasi  $PA$ , esso si rifletterà in  $PS$ , e il prolungamento di questo raggio incontrerà  $CV$  in  $P'$ ; la distanza  $P'V$ , presa col segno -, sarà indicata con  $p'$ . Anche  $r$  è un numero negativo, cosicché  $CV=-r$ . Quindi avremo, in luogo di (2)

$$CP' = CV - P'V = -r + p'$$

$$CP = CV + VP = -r + p$$

e in luogo di (3), con la stessa approssimazione

$$\begin{aligned} AP' &= -p' \\ AP &= p \end{aligned}$$

La (1) vale anche, come è noto, per la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo (in questo caso, del triangolo PAP'); sostituendo le espressioni trovate esso ora potrà scriversi

$$\frac{-r + p'}{p - r} = -\frac{p'}{p}$$

che non differisce dalla (4). Da questa si ricava, come si è visto, la (5).

È evidente che nel caso di uno specchio convesso  $p$  e  $p'$  non possono mai essere entrambi positivi: cioè l'immagine di un punto posto davanti allo specchio si trova sempre dietro a questo, ed è quindi virtuale.

### Fuoco di uno specchio sferico

Se immaginiamo che il punto P sia lontanissimo dallo specchio, cioè che la distanza  $p$  sia grandissima in confronto al raggio di curvatura, nella (5)  $1/p$  sarà trascurabile di fronte a  $2/r$ , e avremo quindi  $1/p' = 2/r$  cioè:

$$p' = \frac{r}{2}$$

in tal caso dunque l'immagine P' di P si formerà a una distanza dallo specchio uguale alla metà del raggio e sarà davanti allo specchio se questo è concavo ( $p' > 0$ ), dietro ( $p' < 0$ ) se convesso. Naturalmente, P' si troverà ancora sull'asse determinato da C e dal punto lontanissimo P.

Un tal punto P', immagine di un punto lontanissimo (o, come si dice, di un punto all'infinito) si chiama fuoco e sarà reale se lo specchio è concavo, virtuale se convesso.

Poiché i raggi provenienti da un punto all'infinito sono paralleli (il che vuol dire, che più lontano è il punto P, più i raggi sono vicini al parallelismo), si può anche dire che un fuoco è il punto dove vengono a intersecarsi, dopo la riflessione, i raggi di un fascio parallelo che investe lo specchio. Poiché il fascio parallelo può venire da infinite direzioni, vi saranno infiniti fuochi: tutti si troveranno su una superficie sferica concentrica allo specchio, e di raggio metà. Naturalmente tutto questo vale soltanto entro i limiti di approssimazione, entro i quali vale la formula (5): non è quindi valido se l'apertura dello specchio è troppo grande, o i raggi vi cadono su troppo obliquamente.

Che il fuoco si trovi a metà del raggio si può anche vedere direttamente col seguente ragionamento elementare che è un caso particolare di quello del § precedente.

Siano (fig. 4), MA e NV due raggi paralleli incidenti sullo specchio, AF, VC i

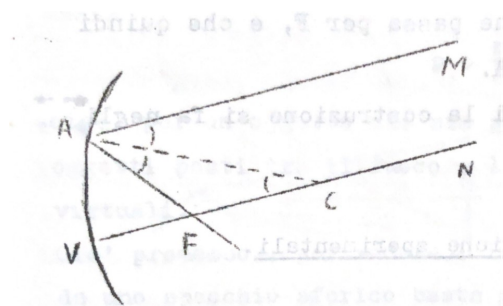


fig. 4.

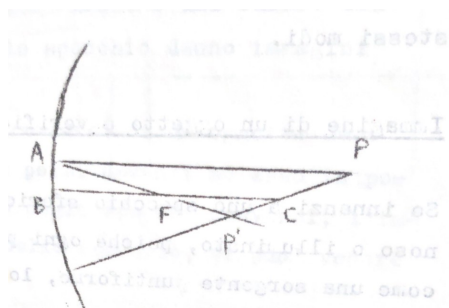


fig. 5.

raggi riflessi: per la legge della riflessione  $\widehat{FAC} = \widehat{CAM}$ , ma  $\widehat{CAM} = \widehat{ACV}$  perché alterni interni, quindi  $\widehat{FAC} = \widehat{ACV}$ , il triangolo ACF è isoscele, e  $FC=AF$ . Ma essendo per ipotesi AF poco inclinata su VF, si ha approssimativamente  $AF=VF$ . Ne segue  $FC=VF$ , ossia che F è il punto di mezzo di VC. Analogamente si ragionerebbe per uno specchio convesso.

### Costruzione grafica del raggio riflesso e dell'immagine di un punto

Per trovare il raggio riflesso corrispondente a un qualsiasi raggio incidente MA (v. fig. 4) basta condurre dal centro di curvatura C la parallela a questo, CV, prendere il punto di mezzo F del segmento CV e congiungerlo con A: è questo il raggio riflesso. Infatti se da C partisse un raggio di luce CV parallelo a MA, sappiamo che i due raggi riflessi si incontrerebbero nel fuoco F, a ugual distanza da V e da C. (Nel caso che la parallela condotta per C non incontrasse lo specchio, basterebbe prolungare questo sufficientemente). Se ora si vuol trovare l'immagine di un punto dato P, basterà ripetere questa costruzione per due qualunque diversi raggi uscenti da P e trovare l'intersezione dei due raggi riflessi. Conviene però, data questa arbitrarietà, scegliere uno dei due raggi in modo da rendere più semplice la costruzione. Ciò si può fare in due

modi.

O, (fig. 5) condotto da P ad arbitrio il raggio PA e trovato, nel modo detto dianzi, il raggio riflesso AF, si conduca poi da P quel raggio che passa per il centro di curvatura C: esso si riflette su se stesso e quindi la sua intersezione con AF determina il punto cercato P'.

Oppure trovato nel modo solito il primo raggio riflesso AP' si conduca da P quel raggio, che passa per F, e che quindi si riflette parallelamente a PA.

Nel caso degli specchi convessi la costruzione si fa negli stessi modi.

## Immagine di un oggetto e verifiche sperimentali

Se innanzi a uno specchio sferico si trova un oggetto luminoso o illuminato, poiché ogni punto di esso si comporta come una sorgente puntiforme, lo specchio formerà un'immagine dell'oggetto composta dall'insieme di tutti i punti coniugati dei punti dell'oggetto stesso. Tale immagine si potrà costruire graficamente punto per punto, nel modo indicato nel § prec. Se l'oggetto è una figura piana perpendicolare a un asse dello specchio, e non è molto esteso, si potrà ritenere che tutti i suoi punti si trovino alla stessa distanza  $p$  dal punto O dello specchio (v. fig. 6); quindi tutti i punti dell'immagine A'B' si troveranno alla stessa distanza  $p'$  da O, ossia l'immagine giacerà su una sfera di centro O, o, entro la nostra approssimazione, su un piano perpendicolare all'asse CO. In generale: ad oggetti piani corrispondono immagini piane (in piano dell'oggetto e quello dell'immagine diconsi coniugati). Le distanze di essi dallo specchio sono legate tra loro dalla formula (5); quindi, data la distanza  $p$  dell'oggetto, quella  $p'$  dell'immagine è data da

$$\frac{1}{p'} = \frac{2}{r} - \frac{1}{p} \quad (5')$$

Le immagini sono reali, e si trovano davanti allo specchio, quando risulta  $p' > 0$ , il che, come si vede dalla (5') non può mai avvenire negli specchi convessi (nei quali  $r$  è negativo). Negli specchi concavi, l'immagine è reale solo quando

$$\frac{2}{r} > \frac{1}{p}$$

ossia

$$p > \frac{r}{2}$$

cioè, per un oggetto che sia più lontano del fuoco. Gli oggetti posti tra il fuoco e lo specchio danno immagini virtuali.

Ciò premesso, per vedere l'immagine di un oggetto data da uno specchio sferico basta porsi davanti ad esso in posizione conveniente. Nel caso degli specchi

convessi, l'immagine trovandosi al di là dello specchio, si può vedere qualunque sia la distanza dell'occhio dallo specchio; per gli specchi concavi invece, quando l'immagine è reale, è necessario collocarsi più lontano dell'immagine stessa, onde ricevere nell'occhio i raggi che divergono dopo essersi incrociati nei punti dell'immagine.

### Posizione e grandezza dell'immagine per diverse distanze dell'oggetto

Conveniamo di rappresentare, come si usa, l'oggetto con una freccia AB. Se l'oggetto è quasi a contatto con lo specchio (cioè si trova a una distanza trascurabile rispetto al raggio di curvatura) lo specchio, sia concavo, sia convesso, si comporta presso a poco come piano, e dà un'immagine virtuale, uguale in grandezza all'oggetto stesso, e diritta (v. fig. 6). Supponiamo ora di allontanare gradatamente l'oggetto, muovendolo parallelamente all'asse OC. Si noti che il raggio BD si riflette sempre in modo da passare per F, qualunque sia la distanza di B dallo specchio: perciò, quando B descrive la retta BD, la sua immagine B' percorre la retta DF. Se lo specchio è convesso (fig. 6) il punto B' cade dietro lo specchio, e quindi, quando l'oggetto si allontana, la sua immagine si allontana pure dallo specchio, avvicinandosi al fuoco F e impiccolendosi sempre più; quando l'oggetto è all'infinito, l'immagine è nel fuoco. Essa non

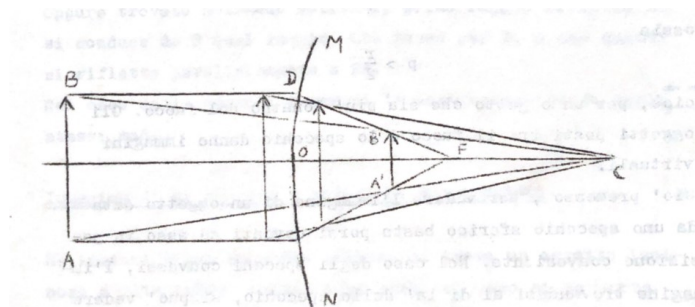


fig. 6.

va mai al di là del fuoco, ed è per questo che gli oggetti che si vedono riflessi, per es. sopra una sfera argentata sembrano tutti concentrati in un piccolo spazio.

Se lo specchio è concavo finché l'oggetto è compreso tra lo specchio e il fuoco la sua immagine è virtuale, diritta, e man mano che l'oggetto si allontana, si allontana anch'essa ingrandendosi sempre più: quando l'oggetto raggiunge il fuoco l'immagine è all'infinito. Proseguendo l'allontanamento al di là del fuoco, la sua immagine diviene reale (quindi passa davanti allo specchio) e capovolta. Essa è ingrandita, se l'oggetto si trova tra il fuoco e il centro di



curvatura, uguale all'oggetto, quando questo si trova a una distanza uguale al raggio, e impiccolita, se l'oggetto è più lontano del centro di curvatura.

### Caustica di riflessione

Se lo specchio sferico non ha piccola apertura, non è capace di fornire immagini nette, perché, come abbiamo detto, i raggi provenienti da un punto non vengono più concentrati tutti in un altro punto. Possiamo pensare lo specchio suddiviso in tante parti ciascuna di piccola apertura: ognuna di esse darà una immagine del punto, ma tutte queste immagini non si sovrappongono (aberrazione di sfericità).

L'insieme di tutte queste immagini puntiformi costituisce una superficie, che si chiama caustica (di riflessione).

### Fatti fondamentali e leggi della rifrazione

La rifrazione è la deviazione che subisce generalmente un raggio di luce quando passa da un mezzo ad un altro. Perché essa avvenga con regolarità, è necessario, come nel caso della riflessione, che la superficie di separazione dei due mezzi sia levigata; in questo caso però sono tollerabili asperità un po' maggiori che non per la riflessione.

Ricordiamo che le leggi della rifrazione sono le seguenti:

- a) il raggio rifratto si trova nel piano determinato dal raggio incidente e dalla normale alla superficie nel punto di incidenza;
- b) l'angolo di rifrazione  $r$  è legato all'angolo di incidenza  $i$  dalla formula di Cartesio

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

dove  $n$  è costante cioè non dipende da  $i$ , ma solo dalla natura dei due mezzi (indice di rifrazione relativo dei due mezzi).

L'esistenza della rifrazione è provata da numerosi fenomeni di osservazione comune, come, per es. l'apparente sollevamento del fondo di un recipiente d'acqua, per cui questo guardandovi dentro attraverso il liquido sembra meno profondo di quello che è, nonché la celebre esperienza del bastone che, immerso nell'acqua obliquamente, sembra spezzato.

Tutti questi fenomeni sono spiegati dalla fig. 7. Se  $A$  è un punto (del bastone  $MN$ , o del fondo del recipiente) i raggi diffusi che escono in tutte le direzioni da  $A$  vengono rifratti alla superficie del liquido, cosicché il fascetto che riceve l'occhio diverge non da  $A$ , ma da un altro punto  $A'$ , spostato rispetto ad  $A$  e sollevato: perciò l'occhio vede in  $A'$  l'immagine di  $A$ . Lo stesso si può ripetere per tutti i punti del tratto  $TN$  del bastone, il quale perciò si vedrà in  $TN'$ . Non occorre dire che l'angolo apparentemente formato dalle due parti del

bastone (cioè  $N'TM$ ) non è da confondersi con l'angolo di cui vengono deviati i raggi nella rifrazione. È da notare poi che la posizione di  $A'$ , e quindi di  $TN'$ , dipende dal punto dove è collocato l'occhio cosicché non si può parlare di una vera e propria immagine virtuale come quella data da uno specchio piano.

Tale fenomeno consiste nella mancanza del raggio rifratto, cosicché la totalità della luce viene riflessa; esso si produce quando il mezzo da cui proviene la luce è più rifrangente dell'altro, e l'angolo d'incidenza è maggiore di un certo valore detto angolo limite. Per rendersi conto di questo fenomeno si pensi (v. fig. 8) che la superficie di separazione sia  $SS'$  e che, per fissare le idee, il mezzo più rifrangente sia quello al di sotto di  $SS'$  (si può pensare, per es. che  $SS'$  sia la superficie libera di un liquido): sia  $n$  l'indice di rifrazione di questo mezzo relativo al secondo (se al di sopra vi è il vuoto o l'aria, sarà  $n$  l'indice assoluto). Si consideri un raggio incidente  $AO$ : esso darà luogo in generale a un raggio riflesso  $OC$  e a un raggio rifratto  $OB$ . Il raggio riflesso sarà meno intenso di quello incidente, e precisamente, la sua intensità sarà uguale a quella del raggio incidente diminuita di quella del raggio rifratto (trascurando la perdita per diffusione). Poiché l'indice del secondo mezzo rispetto al primo è  $1/n$ , l'angolo di rifrazione  $r$  sarà dato da:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n}$$

cioè

$$\sin r = n \sin i \quad (1)$$

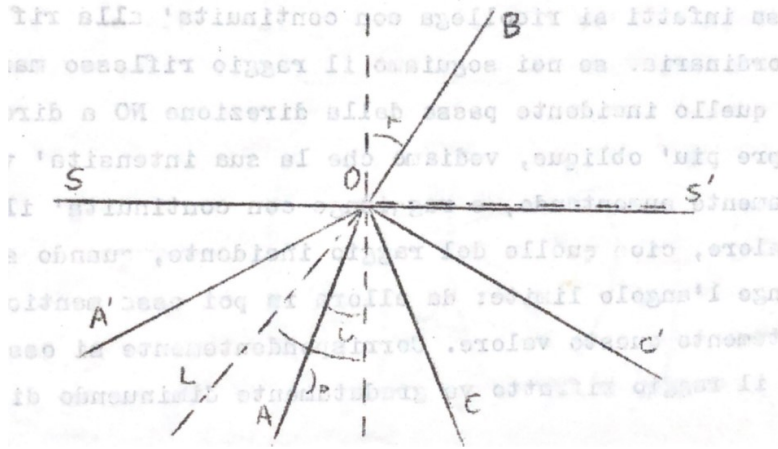


fig. 8.

il raggio rifratto quindi, come del resto sapevamo, è più lontano dalla normale di quello incidente. Inoltre, se si fa ruotare il raggio incidente in modo da aumentare  $i$ , l'ultima formula mostra che anche  $r$  aumenta. Giungerà quindi un momento in cui  $r = 90^\circ$ , cioè il raggio emergerà radendo la superficie  $SS'$ : ciò avverrà per quel valore di  $i$  per cui:

$$n \sin i = 1$$

Questo valore, che chiameremo  $i_0$ , è quello che si chiama angolo limite, ed è definito da

$$\sin i_0 = \frac{1}{n}$$

Se ora si continua a far aumentare  $i$  cioè si seguita a far ruotare il raggio incidente, portandolo p. es. in  $A'O$ , non potendo più esser soddisfatta la (1) (che darebbe per  $\sin r$  un valore  $> 1$ ) mancherà il raggio rifratto: perciò tutta la luce si troverà nel raggio riflesso  $OC'$ . Per tutti i raggi incidenti compresi nell'angolo  $LOS$  si avrà dunque riflessione senza perdita di luce (salvo la piccola quantità diffusa). Naturalmente tale riflessione segue le solite leggi. Essa infatti si ricollega con continuità alla riflessione ordinaria: se noi seguiamo il raggio riflesso man mano che quello incidente passa dalla direzione  $NO$  a direzioni sempre più oblique, vediamo che la sua intensità va gradatamente aumentando, e raggiunge con continuità il massimo valore, cioè quello del raggio incidente, quando si raggiunge l'angolo limite: da allora in poi essa mantiene costantemente questo valore. Corrispondentemente si osserva che il raggio rifratto va gradatamente diminuendo di intensità coll'aumentare di  $r$ , anzi tale intensità tende a zero col tendere di  $r$  a  $90^\circ$ , cosicché il raggio rifratto non scompare bruscamente ma svanisce, per così dire, gradatamente, e la sua

sparizione completa coincide col raggiungimento della emergenza radente. Per il vetro ordinario, avente per indice di rifrazione all'incirca 1,50 si trova come valore dell'angolo limite  $i_0 = 42^\circ$  circa. Naturalmente, questo si riferisce alla superficie vetro-aria. Se invece si vuole l'angolo limite per la superficie vetro-acqua bisogna porre per  $n$  l'indice di rifrazione del vetro rispetto all'acqua, cioè il rapporto dei loro indici assoluti, che sono 1,50 e 1,33. Si ha allora  $n = 1,12$  e quindi  $i_0 = 63^\circ$ .

---

## CAPITOLO II – Sistemi diottrici centrati

### Generalità sui sistemi diottrici centrati

Quasi tutti gli strumenti ottici sono costituiti dall'insieme di varie lenti, cioè di mezzi diversamente rifrangenti limitati da superfici sferiche. È quindi di grande interesse pratico lo studio delle proprietà ottiche di sistemi siffatti, studi che si può condurre con grande generalità.

Chiamasi sistema diottrico centrato un sistema di vari mezzi rifrangenti separati l'uno dall'altro da superficie di rotazione intorno a una retta che dicesi asse ottico del sistema. In pratica queste superficie sono di solito calotte sferiche aventi il centro di curvatura e il vertice sull'asse ottico. In tale definizione rientrano, come si vede, non solo le lenti e le loro combinazioni, ma anche sistemi più complessi come ad es. l'occhio.

Sia p. es. (fig. 9) il sistema diottrico costituito da cinque mezzi differenti  $M, M_1, M_2, M_3, M_4, M'$  separati dalle superficie  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  di rivoluzione intorno all'asse  $XX'$ . Consideriamo un raggio che attraversi il sistema p. es. da sinistra verso destra: esso, rifrangendosi a ciascuna delle superficie di separazione, percorrerà una spezzata  $PA_1A_2A_3A_4A_5P'$ . Chiameremo raggio incidente il tratto  $PA_1$  percorso dalla luce nel primo mezzo, raggio emergente il tratto  $A_5P'$  percorso nell'ultimo mezzo e raggi rifratti i tratti intermedi. (Noi converremo, per uniformità di linguaggio, che il verso di propagazione della luce sia sempre da sinistra a destra, ma è chiaro, per il principio di invertibilità dei raggi luminosi, che  $P'A_5$  si potrebbe considerare come raggio incidente, e  $A_1P$  come raggio emergente). Quando poi occorra considerare i detti raggi come prolungati indefinitamente, useremo le locuzioni: retta di incidenza (per la retta illimitata determinata da  $PA_1$ ), rette di rifrazione (per le rette illimitate  $A_1A_2$  ecc.) e retta di emergenza per la retta illimitata  $A_5P'$ .

Il problema fondamentale dello studio dei sistemi diottrici centrati, è il seguente: dato un qualsiasi raggio incidente, determinare il corrispondente raggio emergente, senza che occorra considerare i singoli raggi rifratti, cioè senza preoccuparsi dell'andamento dei raggi nell'interno del sistema. Noi risolveremo

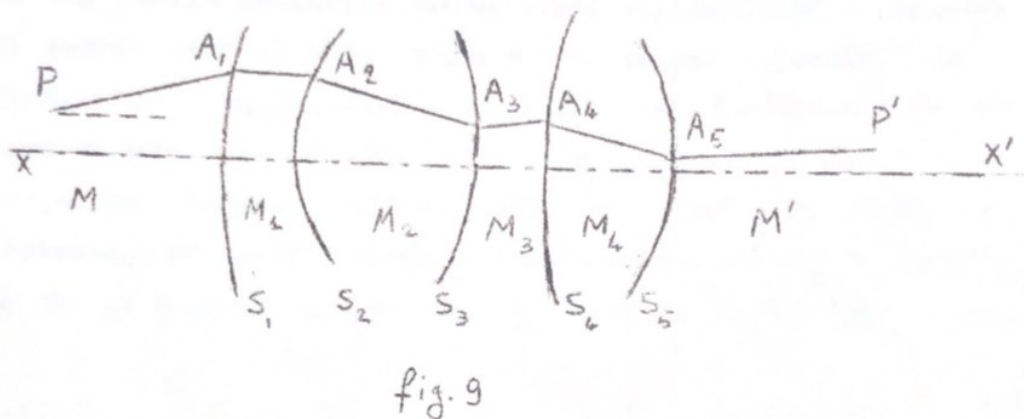


fig. 9.

questo problema supponendo, come è per lo più nella pratica, che le superficie rifrangenti siano sferiche. Quindi il sistema è determinato dando le posizioni, sull'asse ottico, dei punti  $V_1, V_2, V_3$  ecc. (vertici delle calotte sferiche  $s_1, s_2, s_3$  ecc.), e dei centri delle rispettive sfere, e inoltre gli indici di rifrazione dei singoli mezzi. Inoltre in una prima approssimazione, supporremo che nel sistema vengano ammessi solo quei raggi che soddisfano le condizioni seguenti:

- 1) La congiungente il punto di incidenza  $A_1$  di uno qualunque dei raggi incidenti sulla prima superficie, col centro di curvatura di questa, forma coll'asse un angolo assai piccolo;
- 2) Tutti i raggi che considereremo sono molto prossimi all'asse ottico, cosicché non solo l'angolo formato dalla retta di incidenza PQ con l'asse ottico, ma tutti gli angoli di incidenza e di rifrazione sono assai piccoli.

Per precisare, intendiamo per angolo assai piccolo un angolo  $\alpha$  tale che sia trascurabile  $\alpha^2$  (espresso in radianti) rispetto a 1, cosicché negli sviluppi in serie

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots \\ \cos \alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots\end{aligned}$$

si possa conservare solo il primo termine, e ritenere

$$\cos \alpha = 1 \qquad \sin \alpha = \alpha.$$

I raggi che soddisfano queste condizioni si chiamano raggi centrali, e le proprietà del sistema diottrico valevoli sotto questa ipotesi si chiamano proprietà centrali.

Naturalmente, i risultati che troveremo saranno validi soltanto in prima approssimazione: l'andamento dei raggi reali si discosterà alquanto da quello

da noi determinato, tanto più quanto più essi sono lontani dalle condizioni dei raggi centrali e queste divergenze, che si possono studiare in una seconda approssimazione, e che hanno notevole importanza negli strumenti ottici, si dicono aberrazioni e distorsioni.

Noi cominceremo il nostro studio da alcuni sistemi diottrici più semplici, per estenderlo poi a quelli più generali.

### Diottro. Costruzione di Weierstrass.

Il sistema più semplice, che costituisce anzi l'elemento fondamentale di cui sono formati tutti i sistemi diottrici centrati, è quello di due soli mezzi, separati da una calotta sferica MN, di centro di curvatura C. Un tale sistema chiamasi diottro.

Sia  $n_1$  l'indice di rifrazione del primo mezzo (cioè di quello di sinistra) ed  $n_2$  l'indice del secondo mezzo. Daremo ora una costruzione geometrica assai semplice, dovuta al Weierstrass, per costruire il raggio emergente corrispondente a un raggio incidente qualsiasi.

Sia (fig. 10) MN la calotta, C il suo centro di curvatura,  $r = \overline{CA}$  il suo raggio. Si descrivano, con centro in C, due sfere 1 e 2 aventi per raggi rispettivamente:

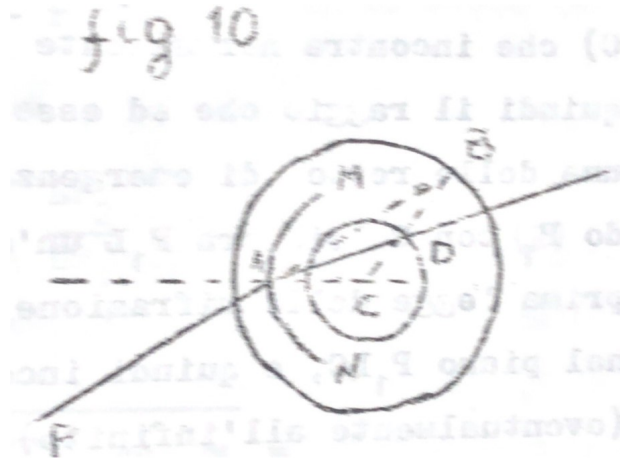


fig. 10.

$$r_1 = r \frac{n_1}{n_2} \qquad r_2 = r \frac{n_2}{n_1} \qquad (1)$$

Dato ora un raggio incidente qualunque PA, sia B l'intersezione della retta d'incidenza con la sfera 2; si unisca B con C e si congiunga A con l'intersezione

D della BC con la sfera 1. La retta AD è la retta di emergenza.

Infatti, i triangoli ACD e ACB sono simili, perché hanno l'angolo in C uguale compreso fra lati proporzionali (perché in virtù delle (1)  $r_1/r = r/r_2$ ; perciò l'angolo ADC è uguale all'angolo CAB, cioè all'angolo di incidenza  $i$ . D'altra parte il triangolo DAC fornisce la relazione:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sin \widehat{ADC}}{\sin \widehat{CAD}}$$

perciò chiamando  $i'$  l'angolo di rifrazione  $\widehat{CAD}$  avremo

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sin i}{\sin i'}$$

Ma essendo  $AC = r$ ,  $CD = r_1 = r \frac{n_1}{n_2}$ , il primo membro risulta uguale a  $n_2/n_1$ ; quindi si ha:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i}{\sin i'}$$

e quindi è soddisfatta la seconda legge della rifrazione.

È poi evidente che è soddisfatta anche la prima, cioè che AD agisce nel piano della retta d'incidenza e del centro C. Dunque AD è il raggio rifratto. È manifesto che se si considerano parecchi raggi incidenti, le cui rette passano tutte per il punto B, applicando la costruzione precedente si troveranno tante rette d'emergenza tutte passanti per D. Si dirà allora, analogamente a quanto si è fatto nel caso degli specchi, che i punti B e D sono coniugati, ossia che l'uno è l'immagine dell'altro. Ma se le rette d'incidenza convergessero in un altro punto che non fosse sulla sfera 2, si troverebbe che le rette d'emergenza non passerebbero più tutte per uno stesso punto (vale a dire che non costituirebbero più un fascio omocentrico), e on vi sarebbe più una vera immagine, ma un insieme di infinite immagini costituenti una caustica che in questo caso si dirà "di rifrazione". Dunque le sole coppie di punti rigorosamente coniugati sono quelle, come B e D, giacenti sulle due sfere 1 e 2 e allineate con C. Due punti siffatti si chiamano aplanatici (rispetto al diottro).

Tuttavia limitando le considerazioni precedenti ai soli raggi centrali, si può sempre ritenere (entro l'approssimazione convenuta), che ad un fascio omocentrico di rette d'incidenza corrisponda un fascio pure omocentrico di rette d'emergenza, e che quindi ogni punto abbia il suo coniugato che ne costituisce l'immagine.

### **Formula fondamentale del diottro**

Consideriamo ora (fig. 11) un fascio di rette d'incidenza passanti tutte per un punto  $P_1$  (come avverrebbe per es. nel caso che  $P_1$  fosse una sorgente luminosa): vogliamo determinare il fascio delle corrispondenti rette d'emergenza.



Fra tutte le rette passanti per  $P_1$  ve ne è una (quella passante per  $C$ ) che incontra normalmente la superficie rifrangente, e quindi il raggio che ad essa corrisponde non viene deviato: una delle rette di emergenza è dunque ottenuta congiungendo  $P_1$  con  $C$ . Sia ora  $P_1L$  un'altra retta d'incidenza: per la prima legge della rifrazione, la retta d'emergenza giacerà nel piano  $P_1LC$ , e quindi incontrerà la  $P_1C$  in un punto  $P_2$  (eventualmente all'infinito); vogliamo determinare questo punto  $P_2$ , limitando le nostre considerazioni a raggi centrali. A questo scopo, chiamiamo  $\rho_1, \rho_2$  rispettivamente le distanze di  $P_1$  e  $P_2$  da

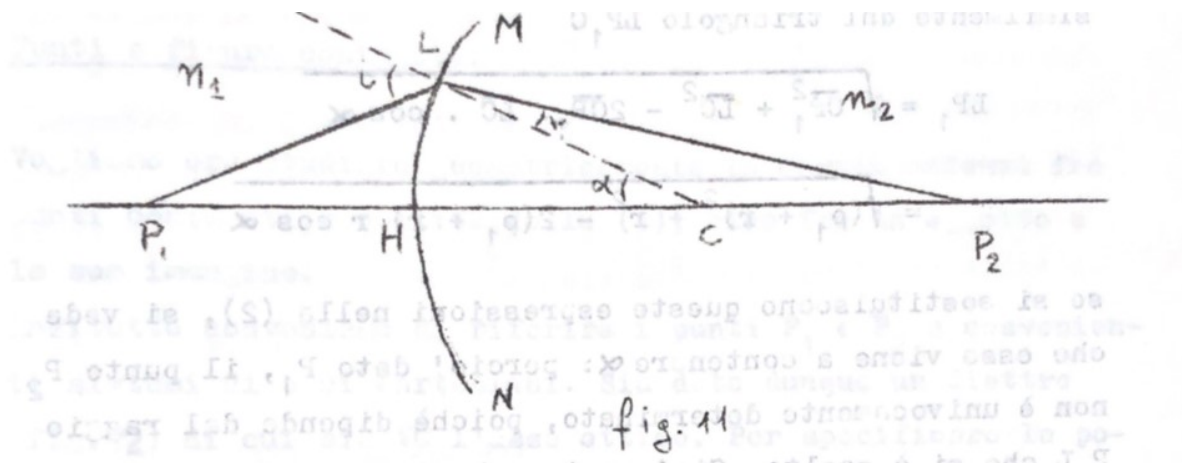


fig. 11.

$H$ , e consideriamo come positiva la prima se  $P_1$  è a sinistra di  $H$ , e la seconda se  $P_2$  è a destra di  $H$  (nel caso della fig. sono entrambe positive), chiameremo poi sempre  $r$  il raggio di curvatura  $CH$ , ma converremo di considerarlo negativo se  $C$  è a sinistra di  $H$ . Con queste convenzioni, le nostre considerazioni si adattano a tutti i casi possibili.

Dal triangolo  $P_1LC$  si ha

$$\frac{\sin i}{\sin \alpha} = \frac{CP_1}{LP_1} = \frac{\rho_1 + r}{LP_1}$$

e similmente dal triangolo  $P_2LC$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin r} = \frac{LP_2}{CP_2} = \frac{LP_2}{\rho_2 - r}$$

da cui moltiplicando,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\rho_1 + r}{\rho_2 - r} \frac{LP_2}{LP_1}$$

e applicando la legge di Cartesio

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\rho_1 + r}{\rho_2 - r} \frac{LP_2}{LP_1} \quad (2)$$

Ora, dal triangolo  $LP_2C$  risulta

$$LP_2 = \sqrt{\overline{CP_2}^2 + \overline{LC}^2 + 2\overline{CP_2} \cdot \overline{LC} \cdot \cos \alpha} = \sqrt{(\rho_2 - r)^2 + r^2 + 2(\rho_2 - r)r \cos \alpha}$$

similmente dal triangolo  $LP_1C$

$$LP_1 = \sqrt{\overline{CP_1}^2 + \overline{LC}^2 - 2\overline{CP_1} \cdot \overline{LC} \cdot \cos \alpha} = \sqrt{(\rho_1 + r)^2 + r^2 - 2(\rho_1 + r)r \cos \alpha}$$

se si sostituiscono queste espressioni nella (2), si vede che essa viene a contenere  $\alpha$ ; perciò dato  $P_1$ , il punto  $P_2$  non è univocamente determinato, poiché dipende dal raggio  $P_1L$  che si è scelto. Ciò mostra che i raggi uscenti da  $P_1$  non vengono in generale a passare tutti per uno stesso punto. Però, se si tratta di raggi centrali, cosicché  $\alpha$  è assai piccolo, si può, nelle espressioni di  $LP_2$  e  $LP_1$ , sostituire  $\cos \alpha$  con 1; con ciò le espressioni sotto i radicali, semplificate, divengono  $\rho_2^2$  e  $\rho_1^2$ , quindi

$$\overline{LP_2} = \rho_2 \quad \overline{LP_1} = \rho_1 \quad .$$

La (2) allora si può scrivere

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\rho_1 + r}{\rho_2 - r} \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (3)$$

e, come si vede, stabilisce tra  $\rho_1$  e  $\rho_2$  una relazione indipendente da  $\alpha$ . Vale a dire i raggi centrali uscenti da  $P_1$  danno luogo a raggi passanti sensibilmente tutti per un medesimo punto  $P_2$  (più esattamente si dovrebbe parlare di rette anziché di raggi). La relazione (3) si suole scrivere sotto la forma equivalente

$$\frac{n_1}{\rho_1} + \frac{n_2}{\rho_2} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (4)$$

Questa formula stabilisce la relazione tra punti coniugati: essi debbono essere allineati con  $C$ , e le loro distanze da  $H$  (prese col segno convenuto) debbono soddisfare la (4), cosicché dato un punto qualsiasi la (4) permette di determinare immediatamente il punto coniugato.

## Punti e figure coniugate

Vogliamo ora studiare geometricamente la corrispondenza fra punti coniugati stabilita dalla (4), cioè fra un oggetto e la sua immagine.

Anzitutto conveniamo di riferire i punti  $P_1$  e  $P_2$  a convenienti sistemi di assi

cartesiani. Sia dato dunque un diottro (fig. 12) di cui sia VC l'asse ottico. Per specificare la posizione del punto  $P_1$  (che chiameremo oggetto, e potremo supporre che sia una sorgente luminosa puntiforme) assumeremo come asse delle ascisse  $x_1$  l'asse ottico, prendendo l'origine nel vertice V della calotta e il verso positivo da destra a sinistra, cosicché porremo  $P_1V = x_1$  considerando  $x_1$  positivo per i punti che si trovano nel primo mezzo, e negativo per gli altri. L'asse delle coordinate  $y_1$  sarà perpendicolare al primo in V, cioè tangente alla superficie rifrangente, e si supporrà generalmente che il punto  $P_1$  (e quindi anche il suo coniugato  $P_2$ ) sia nel piano  $x_1y_1$ , cioè nel piano del disegno. Il punto  $P_2$  invece che chiameremo immagine, sarà riferito a un sistema di assi  $x_2y_2$  avente pure l'origine in V e l'asse delle ascisse coincidente con l'asse ottico, ma il verso positivo di questo sarà da sinistra verso destra, cosicché si porrà  $P_2V = x_2$ , e  $x_2$  sarà positivo se il punto  $P_2$  si trova nel secondo mezzo. L'asse delle ordinate  $y_2$  sarà invece coincidente con l'asse delle  $y_1$ . Il

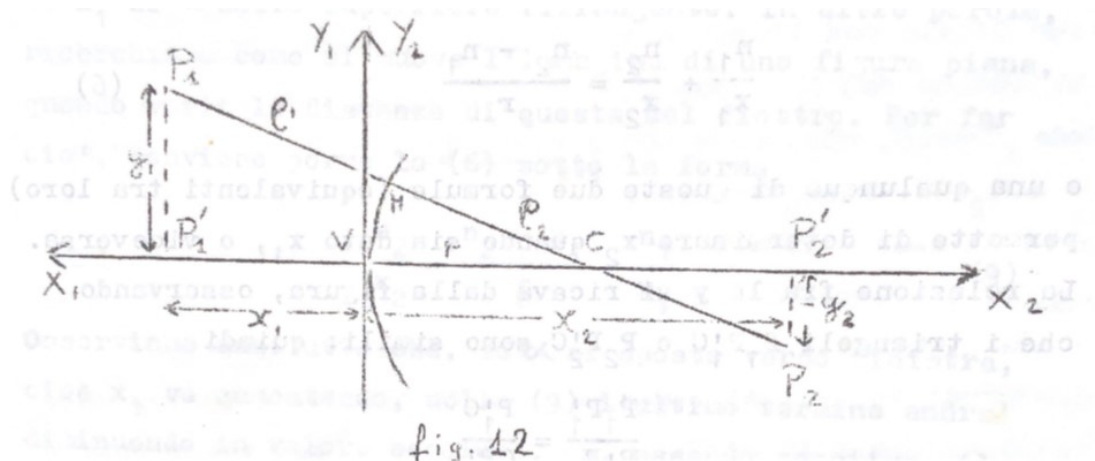


fig. 12.

raggio di curvatura  $r$  sarà al solito considerato positivo se C è nel secondo mezzo (come in fig.) e negativo nel caso contrario. Non occorre ripetere che è per pura convenzione che riguardiamo  $P_1$  come oggetto e  $P_2$  come immagine, poiché si potrebbe benissimo fare il contrario.

Ora si pone la questione: date le coordinate  $x_1, y_1$  di un oggetto  $P_1$ , trovare le coordinate  $x_2, y_2$  della sua immagine  $P_2$ . La risposta si ricava assai facilmente dalla fig. 12, tenendo presente la relazione fra  $\rho_1$  e  $\rho_2$  stabilita dalla (4). Infatti trattandosi di raggi centrali, si può identificare la superficie rifrangente con il suo piano tangente in V, e quindi considerare il punto H come appartenente a questo piano. Inoltre potendosi ritenere  $\cos \theta = 1$  il coseno dell'angolo della retta  $P_1P_2$  con l'asse ottico, si possono considerare i segmenti  $P_1H$  e  $HP_2$  come uguali alle loro proiezioni  $P_1'V$  e  $VP_2'$ , cioè porre

$$\rho_1 = x_1 \qquad \rho_2 = x_2$$

(poiché le convenzioni fatte per i segni di  $\rho_1$  e  $\rho_2$  sono le stesse che per  $x_1$  e  $x_2$ ). Quindi la (3) e (4) si possono scrivere

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{x_1 + r}{x_2 - r} \frac{x_2}{x_1} \quad (5)$$

$$\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (6)$$

e una qualunque di queste due formule (equivalenti tra loro) permette di determinare  $x_2$  quando sia dato  $x_1$ , o viceversa. La relazione fra le  $y$  si ricava dalla figura, osservando che i triangoli  $P_1P'_1C$  e  $P_2P'_2C$  sono simili; quindi

$$\frac{P_1P'_1}{P'_2P_2} = \frac{P'_1C}{CP'_2}$$

ossia

$$\frac{y_1}{-y_2} = \frac{x_1 + r}{x_2 - r}$$

e ricavando  $(x_1 + r)/(x_2 - r)$  dalla (5)

$$\frac{y_1}{y_2} = -\frac{n_2}{n_1} \frac{x_1}{x_2} \quad (7)$$

similmente si vedrebbe che se si fosse preso il punto  $P_1$  fuori del piano  $x_1y_1$ , si sarebbe avuta fra le coordinate  $z$ , la relazione analoga

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{n_2}{n_1} \frac{x_1}{x_2} \quad (7')$$

Ora, è molto importante la seguente proprietà della corrispondenza tra i punti e i punti immagine: a punti allineati corrispondono punti allineati, e a punti giacenti in un piano corrispondono pure punti giacenti in un piano. In altre parole l'immagine di una retta è una retta e quella di un piano è un piano.

## **Fuochi e piani focali di un diottro**

Consideriamo un piano  $\alpha$  perpendicolare all'asse ottico, e situato nel primo mezzo, e ricerchiamo come varia, in base alla (6), il piano coniugato  $\alpha'$  quando varia la distanza  $x_1$  di  $\alpha$  dalla superficie rifrangente. In altre parole, ricerchiamo come si muove l'immagine di una figura piana, quando varia la distanza di questa dal diottro. Per far ciò, conviene porre la (6) sotto la forma

$$\frac{n_2}{x_2} = \frac{n_2 - n_1}{r} - \frac{n_1}{x_1} \quad (9)$$

Osserviamo anzitutto che, se  $\alpha$  si sposta verso sinistra, cioè  $x_1$  va aumentando, nella (9) l'ultimo termine andrà diminuendo in valore assoluto, ma, essendo negativo, il secondo membro andrà aumentando. Perché aumenti anche il primo, bisogna che  $x_2$  diminuisca, cioè che l'immagine si sposti verso sinistra. Dunque quando l'oggetto percorre l'asse ottico in un verso anche l'immagine lo percorre nello stesso verso. Cominciamo ora col supporre che il piano  $\alpha$  (il piano dell'oggetto) sia a distanza grandissima dalla superficie rifrangente, cioè che  $x_1$  sia infinito. Allora nella (9) l'ultimo termine è nullo, e se ne ricava

$$x_2 = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}$$

Il piano dove si forma l'immagine di un oggetto all'infinito si chiama secondo piano focale e la sua distanza dalla superficie rifrangente (contata positivamente se esso giace nel secondo mezzo) si chiama seconda distanza focale e si indica con  $f_2$ : essa quindi è data dalla espressione precedente. Porremo cioè

$$f_2 = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1} \quad (10)$$

Poiché i raggi provenienti dall'oggetto all'infinito sono paralleli si può anche dire che a un fascio di rette di incidenza parallela, corrisponde un fascio di rette di emergenza passanti per un punto del secondo piano focale. In particolare, se le rette di incidenza sono parallele all'asse ottico, questo punto, come è evidente, è l'intersezione del piano focale con l'asse ottico: esso chiamasi secondo fuoco, e si indica con  $F_2$ . Esso può essere reale (se giace nel secondo mezzo, cioè se  $f_2 > 0$  o virtuale (se giace nel primo mezzo  $f_2 < 0$ ). Nel primo caso un fascio parallelo viene mutato in un fascio convergente e perciò il diottro dicesi convergente, nel secondo caso un fascio parallelo è trasformato in uno divergente quindi il diottro dicesi divergente.

Osservando la (10) si riconosce che il diottro è convergente ( $f_2 > 0$ ) quando  $r$  ed  $n_2 - n_1$  hanno lo stesso segno, divergente nel caso contrario; e poiché si è convenuto di considerare  $r$  come positivo se il centro di curvatura del diottro giace nel secondo mezzo, e negativo se nel primo, si può concludere che: il diottro è convergente se il centro di curvatura si trova nel mezzo più rifrangente, è divergente nel caso contrario,

Vediamo ora per quale posizione dell'oggetto l'immagine si forma a distanza infinita. Se nella (9) si fa  $x_2$  infinita, cioè il primo membro uguale a zero, si ricava:

$$x_1 = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1}$$

Il piano così individuato si chiama primo piano focale: la sua intersezione con l'asse si chiama primo fuoco  $F_1$ , e la sua ascissa si chiama prima distanza focale, e si indica con  $f_1$ : porremo cioè

$$f_1 = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1} \quad (11)$$

Confrontando questa con l'espressione della seconda distanza focale, si riconosce che ne differisce solo per avere al numeratore  $n_1$  anziché  $n_2$ ; la seconda distanza focale è quindi dello stesso segno della prima, cioè positiva per diottri convergenti (e in tal caso  $F_1$  è nel primo mezzo) e negativa per quelli divergenti ( $F_1$  nel secondo mezzo). In conclusione, i due fuochi sono sempre da parti opposte della superficie rifrangente (si ricordi che le ascisse degli oggetti e quelle delle immagini si contano in verso opposto, perciò, quando  $f_1$  e  $f_2$  sono dello stesso segno,  $F_1$  e  $F_2$  sono da parti opposte), e sono reali se il diottro è convergente, virtuali nel caso contrario.

Se il diottro è convergente, e su di esso arrivano dei raggi provenienti da un punto del primo piano focale, essi vengono trasformati in un fascio di raggi paralleli: in particolare se provengono dal primo fuoco  $F_1$ , il fascio emergente sarà parallelo all'asse ottico. Se invece il diottro è divergente, per avere un fascio emergente parallelo occorre che i raggi incidenti convergano verso un punto del primo piano focale; se tale punto è  $F_1$ , il fascio emergente è parallelo all'asse ottico. Notiamo infine che la relazione (6) fra  $x_1$  e  $x_2$  si può ora mettere sotto altra forma, introducendovi le distanze focali; basta moltiplicarla per:  $r/(n_2 - n_1)$  e tener conto delle espressioni di  $f_1$  ed  $f_2$  e si ha:

$$\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} = 1 \quad (12)$$

o anche

$$(x_1 - f_1)(x_2 - f_2) = f_1 f_2 \quad (13)$$

relazione che sviluppandola si verifica subito essere equivalente alla precedente ridotta a forma intera.

Quest'ultima relazione dovuta al Gauss è assai notevole, perché le differenze

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 - f_1 \\ X_2 &= x_2 - f_2 \end{aligned}$$

hanno un significato ovvio: esse sono le ascisse del punto  $P_1$  e del suo coniugato  $P_2$ , contate a partire rispettivamente dal primo e dal secondo fuoco. Se quindi si assumono i due fuochi (anziché il vertice) come origini degli assi coordinati rispettivamente per gli oggetti e per le immagini, la (13) è sostituita dalla relazione semplicissima:

$$X_1 X_2 = f_1 f_2 \quad (13')$$

## Rapporto di convergenza

Siano (fig. 13)  $P_1$  e  $P_2$  due punti congiunti e si considerino due qualunque rette di incidenza,  $P_1 A$  e  $P_1 B$  uscenti da  $P_1$  e le corrispondenti rette d'emergenza  $P_2 A$ ,  $P_2 B$ . Sia  $\omega_1$  l'angolo formato dalle prime e  $\omega_2$  quello formato dalle seconde: Il rapporto  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  si dice rapporto di convergenza (o anche

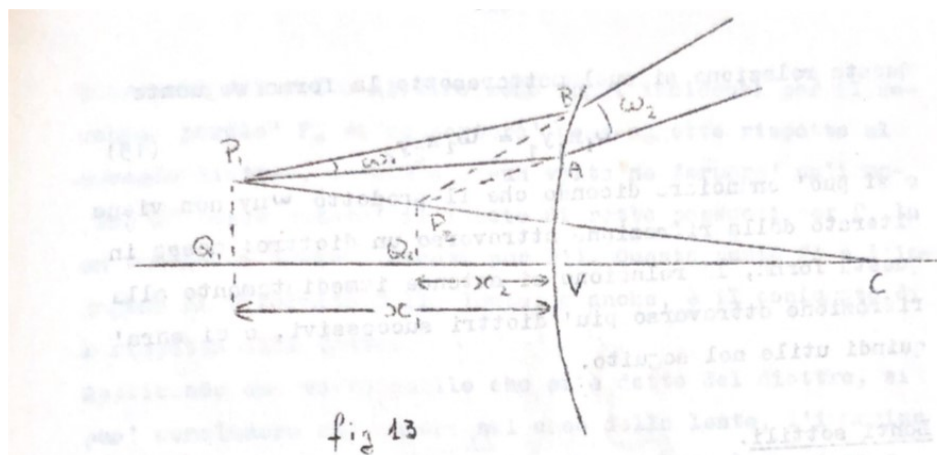


fig. 13.

ingrandimento angolare) relativo ai punti  $P_1$  e  $P_2$ . Lo considereremo positivo se (come nel caso della fig.)  $P_1$  e  $P_2$  sono dalla stessa parte della superficie rifrangente (e quindi i due raggi divergenti da  $P_1$  divergono anche dopo la rifrazione); nel caso contrario (quando cioè i due raggi divergenti da  $P_1$  sono mutati dal diottro in raggi convergenti) considereremo il rapporto di convergenza come negativo.

Per calcolare il rapporto di convergenza, si osservi che dal triangolo  $P_1AB$  si ha

$$\frac{\sin \widehat{AP_1B}}{\sin \widehat{P_1BA}} = \frac{AB}{P_1A}$$

e, poiché si tratta di raggi centrali, l'angolo  $\widehat{P_1BA}$  è così vicino a  $90^\circ$  che il suo seno si può ritenere uguale a 1; inoltre il raggio  $P_1A$  è così poco inclinato rispetto all'asse che la lunghezza  $P_1A$  si può confondere con  $Q_1V$  ossia con  $x_1$  quindi

$$\omega_1 = \frac{AB}{x_1}$$

Similmente dal triangolo  $P_2AB$  si ha

$$\omega_2 = \frac{AB}{-x_2}$$

e dividendo membro a membro<sup>1</sup>

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_1 y_1}{n_2 y_2}$$

<sup>1</sup> Dalla (7) [n.d.c.].

Questa relazione si suol mettere sotto la forma seguente

$$\omega_1 n_1 y_1 = \omega_2 n_2 y_2 \quad (15)$$

e si può enunciare dicendo che il prodotto  $\omega n y$  non viene alterato dalla rifrazione attraverso un diottro: messa in questa forma, la relazione si estende immediatamente alla rifrazione attraverso più diottri successivi, e ci sarà quindi utile nel seguito.

### Lenti sottili

Si chiama lente un mezzo trasparente limitato da due superficie a forma di calotta sferica: la lente è quindi un particolare sistema diottrico centrato, e si può considerare formata da due diottri. In generale dalle due parti della lente vi è lo stesso mezzo (comunemente l'aria) e noi, salvo esplicita dichiarazione in contrario, ci riferiremo a questo caso.

Vi sono sei diversi tipi di lenti, che differiscono per il senso della curvatura delle due calotte:

lente	biconvessa
''	biconcava
menisco	piano-convesso
''	piano-concavo
''	concavo-convesso convergente
''	concavo-convesso divergente

Una lente si chiama sottile quando il suo spessore è trascurabile rispetto ai raggi di curvatura delle sue facce.

Se sulla lente arrivano dei raggi incidenti, le cui rette passano tutte per un punto  $P$  (oggetto), essi, nell'attraversare la prima superficie, vengono trasformati in raggi le cui rette passano tutte per un punto  $P_0$ , che costituisce l'immagine  $P$  fornita dal primo diottro. Ma questi raggi emergenti dal primo diottro sono raggi incidenti per il secondo diottro, e questo a sua volta ne formerà un'immagine  $P'$  (cioè muterà il fascio di rette passanti per  $P_0$  in un fascio di rette passanti per  $P'$ ). Questo punto  $P'$  è l'immagine di  $P$  fornita dalla lente, o anche, è il coniugato di  $P$  rispetto alla lente.

Applicando due volte quello che si è detto del diottro, si può concludere che, anche nel caso della lente, l'immagine di una retta è una retta, quella di un piano è un piano e in particolare, quella di una figura piana normale all'asse ottico è un'altra figura piana pure normale all'asse ottico e simile a quella.

Tutto ciò vale, naturalmente, solo in quanto ci si limita a considerare raggi centrali.

Vogliamo ora trovare le relazioni tra due punti coniugati rispetto a una lente sottile.

Siano  $r_1$  ed  $r_2$  rispettivamente i raggi di curvatura della prima e della seconda superficie, contati positivamente, come al solito, se la concavità della



superficie è rivolta a destra. Sia  $n_1$  l'indice di rifrazione (assoluto) del mezzo in cui è immersa la lente, ed  $n_2$  l'indice assoluto di questa. Chiamiamo  $x, y$  le coordinate del punto  $P$  (oggetto) e  $x', y'$  quelle del punto  $P'$  (immagine), contando come positive le  $x$  verso sinistra e le  $x'$  verso destra: le  $x$  e le  $x'$  sono contate a partire dalla lente, e non occorre specificare da quale punto di essa, essendosi convenuto di trascurarne lo spessore. Per trovare le relazioni fra  $x, y$  e  $x', y'$  cominciamo col considerare la rifrazione attraverso la prima superficie, la quale darà una immagine  $P_0$  le cui coordinate  $x_0, y_0$  ( $x_0$  contata positivamente verso destra), sono legate a  $x, y$  dalle formule del diottro che in questo caso si scrivono

$$\frac{n_1}{x} + \frac{n_2}{x_0} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} \quad (16)$$

$$\frac{y}{y_0} = -\frac{n_2}{n_1} \frac{x}{x_0} \quad (17)$$

Ora consideriamo  $P_0$  come oggetto rispetto al secondo diottro dovremo applicare ancora le formule del diottro, ponendovi  $-x_0, y_0$  in luogo di  $x_1, y_1$  (la  $x_0$  va ora cambiata di segno perché da ascissa di immagine diviene ascissa di oggetto)  $x', y'$  in luogo di  $x_2, y_2$ ,  $n_1, n_2$  in luogo di  $n_2, n_1$  e  $r_2$  in luogo di  $r$ . Avremo cioè

$$-\frac{n_2}{x_0} + \frac{n_1}{x'} = \frac{n_1 - n_2}{r_2} \quad (18)$$

$$\frac{y_0}{y'} = +\frac{n_1}{n_2} \frac{x_0}{x'} \quad (19)$$

La (16) e la (18) sommate membro a membro (per eliminare  $x_0$ ) danno

$$\frac{n_1}{x} + \frac{n_1}{x'} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

o anche dividendo per  $n_1$  e ponendo

$$\frac{n_2}{n_1} = n$$

(indice di rifrazione della lente relativo al mezzo in cui è immerso)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (20)$$

Similmente eliminando  $y_0$  fra la (17) e la (19) si trova

$$\frac{y}{y'} = -\frac{x}{x'} \quad (21)$$

Quest'ultima ci dice che le grandezze dell'oggetto e dell'immagine sono proporzionali alle rispettive distanze dalla lente, e che l'immagine è dritta se dalla stessa parte dell'oggetto, capovolta se dalla parte opposta. Vale a dire per un oggetto reale l'immagine è dritta se virtuale, e capovolta se reale; per un oggetto virtuale succede il contrario. La (20) ci dà la distanza dell'immagine nota quella dell'oggetto e viceversa. Se l'oggetto è a distanza infinita ( $1/x = 0$ ) l'immagine si forma a una distanza  $f$  data da

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (22)$$

e viceversa, se l'oggetto si trova a questa distanza ( $x = f$ ), l'immagine si trova a distanza infinita. Perciò la  $f$  dicesi distanza focale, e i due punti dell'asse che distano di  $f$  dalla lente dalle due parti diconsi fuochi, e i piani perpendicolari all'asse passanti per essi diconsi piani focali. I due fuochi (al contrario di quanto si trovò per il diottro) sono equidistanti dalla lente.

Introducendo la (22), la (20) si scrive

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} \quad (23)$$

e prende il nome di formula delle lenti sottili.

Si vede così che, agli effetti della relazione fra punti coniugati, la lente è completamente individuata dalla sua distanza focale, vale a dire due lenti sottili, anche di indice e raggi di curvatura diversi sono equivalenti se hanno la stessa distanza focale (entro la nostra approssimazione, cioè prescindendo dalle aberrazioni e distorsioni).

Per calcolare la distanza focale di una lente sottile dato l'indice di rifrazione e i raggi di curvatura, serve a (22). Da essa risulta che se, come d'ordinario,  $n > 1$  (cioè la lente è più rifrangente del mezzo in cui è immersa) si ha

per le lenti biconvesse	$(r_1 > 0, r_2 < 0)$	$f > 0$
'' '' '' biconcave	$(r_1 < 0, r_2 > 0)$	$f < 0$
'' '' '' piano-convesse	$(1/r_1 = 0, r_2 < 0)$	oppure
	$r_1 > 0, 1/r_2 = 0)$	$f > 0$
'' '' '' piano-concave	$(1/r_1 = 0, r_2 > 0)$	oppure
	$r_1 < 0, 1/r_2 = 0)$	$f < 0$
per le lenti concavo-convesse:		
se la faccia convessa ha raggio di curvatura		
maggiore dell'altra ( $r_1 < r_2$ )		$f > 0$
se la faccia convessa ha raggio di curvatura		
maggiore dell'altra ( $r_1 > r_2$ )		$f < 0$

Si chiama convergente la lente se  $f > 0$ , cioè se i fuochi sono reali: in tal caso un fascio di raggi incidenti paralleli viene mutato in un fascio di raggi convergenti verso un punto del secondo piano focale (o verso il secondo fuoco, se i raggi incidenti sono paralleli all'asse).

Si chiama invece divergente la lente se  $f < 0$ , cioè se i fuochi sono virtuali: in tal caso un fascio di raggi paralleli viene mutato in un fascio divergente da un punto del primo piano focale, e, in particolare, dal primo fuoco, se i raggi incidenti sono paralleli all'asse (e se i raggi provengono da destra, il fascio divergerà da un punto del secondo piano focale).

Da quanto si è detto risulta che le lenti sottili, biconvesse e piano-convexe sono sempre convergenti, quelle biconcave e piano-concave sempre divergenti, e quelle concavo-convexe sono convergenti se la faccia convessa è più incurvata di quella concava, e divergenti nel caso contrario. Tutto ciò vale, naturalmente, nell'ipotesi di  $n > 1$ : se la lente fosse meno rifrangente del mezzo circostante, le cose sarebbero invertite.

### Costruzione grafica dell'immagine di un punto data da una lente sottile

Sia data una lente sottile, di cui  $F$ ,  $F'$  siano rispettivamente il primo e il secondo fuoco (se la lente è convergente,  $F$  si trova dalla parte da cui si suppone provenire la luce, cioè a sinistra della lente, ed  $F'$  a destra, come nella fig. 14 se è divergente  $F'$  si trova a sinistra ed  $F$  a destra).

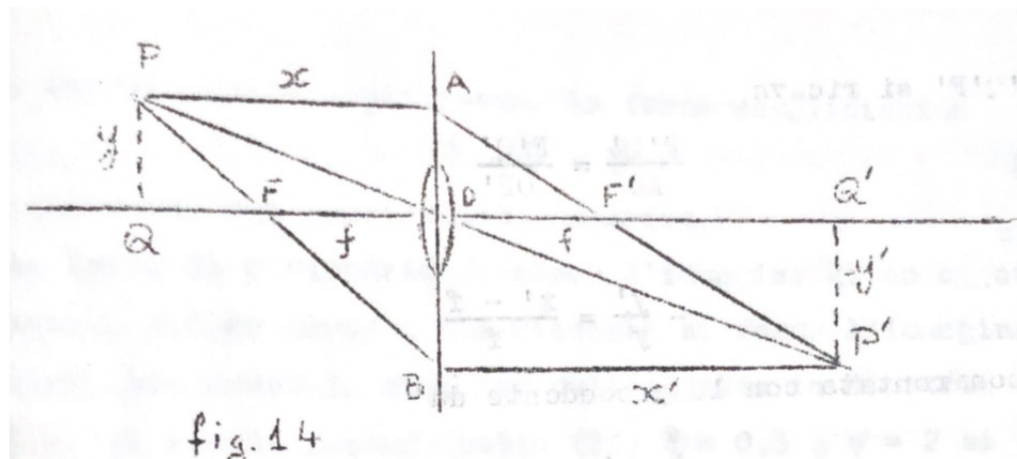


fig. 14.

Dato un punto  $P$ , per trovarne il coniugato  $P'$  basterà considerare due qualsiasi rette di incidenza uscenti da  $P$  e trovare l'intersezione  $P'$  delle loro rette di emergenza: è noto poi che tutte le altre rette di emergenza passeranno per lo stesso punto  $P'$ . Fra le infinite rette di incidenza uscenti da  $P$ , conviene sceglierne due particolari, di cui si possano facilmente determinare le rette di emergenza; si potranno cioè scegliere due fra le tre seguenti:

1° la retta PA parallela all'asse ottico: la retta di emergenza passerà per il secondo fuoco  $F'$ , e si costruirà quindi congiungendo  $F'$  con A (intersezione della parallela condotta da P all'asse ottico, col piano della lente).

2° la retta PO passante per il centro O della lente: la retta di emergenza coincide con essa. Infatti in vicinanza del centro la lente si può considerare come una lastra a facce piane e parallele e, data la sottigliezza, si può trascurare lo spostamento laterale del raggio;

3° la retta PF passante per il primo fuoco: essa dà luogo a una retta di emergenza  $BP'$  parallela all'asse ottico. Due qualunque di queste rette di emergenza determinano  $P'$ . Dalla fig. 14 si possono anche ricavare assai facilmente le formule (21) e (23). Infatti dalla similitudine dei triangoli PQO e  $P'Q'O$  si ha

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{OQ'}{OQ}$$

ossia

$$-\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}$$

che è la (21). Inoltre dalla similitudine dei triangoli AOF' e  $P'Q'F'$  si ricava

$$\frac{P'Q'}{AO} = \frac{F'Q'}{OF'}$$

ossia

$$-\frac{y'}{y} = \frac{x' - f}{f}$$

che confrontata con la precedente dà

$$\frac{x'}{x} = \frac{x' - f}{f}$$

ossia (dividendo per  $x'$ )

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x'}$$

che è la (23).

Questo metodo però non permette di trovare la distanza focale in funzione degli elementi della lente  $n_1$   $r_1$   $r_2$ .

### **Potere diottrico di una lente. Diottria.**

Si chiama potere diottrico (o potenza) di una lente l'inverso della sua distanza focale espressa in metri: il potere diottrico si esprime in diottrie. Così una lente

di 3 diottrie è una lente convergente la cui distanza focale è m.  $1/3$ , cioè cm. 33,3; una lente di -2 diottrie è divergente ed ha la distanza focale di m.  $1/2$ , cioè cm. 50. In generale, se la distanza focale è  $f$  metri, il potere diottrico è  $\varphi = 1/f$  diottrie. L'opportunità di introdurre questa nozione risulta dal fatto che nella formula (23) interviene direttamente  $1/f$ . Anzi, è talvolta opportuno introdurre anche le grandezze  $\xi = 1/x$  e  $\xi' = 1/x'$  (dove  $x$  e  $x'$  sono espresse in metri) che si dicono distanza dell'oggetto e rispettivamente della immagine espresse in diottrie (taluno ha proposto di chiamare  $\xi$  vicinanza dell'oggetto, e  $\xi'$  dell'immagine, anziché "distanza", per mettere in evidenza il fatto che più  $\xi$  è grande, più l'oggetto è vicino alla lente:  $\xi = 0$  significa oggetto a distanza infinita). Con queste convenzioni la formula delle lenti assume la forma semplicissima

$$\xi + \xi' = \varphi \quad (24)$$

Mostriamone una applicazione numerica.

Una lente di 2 diottrie fornisce l'immagine di un oggetto posto a m. 2 da essa: a che distanza si forma l'immagine?

Esprimendo anche la distanza dell'oggetto in diottrie si ha  $\xi = 1/2 = 0,5$ . Ponendo nella (24)  $\xi = 0,5$  e  $\varphi = 2$  si ricava  $\xi' = 2 - 0,5 = 1,5$ . La distanza in diottrie dell'immagine è dunque 1,5 perciò la sua distanza in metri è  $x' = 1/1,5 = 2/3 = 0,66$ . L'immagine si trova dalla parte opposta dell'oggetto (perché  $x'$  è risultato positivo) ed è quindi reale.

### Sistemi diottrici centrati generici

Dopo aver studiato i sistemi più semplici (diottro, e lente sottile) passiamo ora a studiare (sempre limitandoci per ora alle proprietà cardinali) i sistemi diottrici centrati del tipo più generale, cioè formati da più di due mezzi. Essi sono costituiti dalla successione di più diottri, e quindi dovremo, come abbiamo già fatto per le lenti, applicare successivamente a ciascuna delle superficie rifrangenti le proprietà già dimostrate per il diottro.

È manifesto anzitutto che se i raggi incidenti formano un fascio omocentrico, anche i raggi emergenti dal sistema formano un fascio omocentrico: vale a dire, il sistema fornisce effettive immagini. Infatti se i raggi incidenti provengono tutti da un punto P (oggetto) (o più in generale se le rette d'incidenza passano tutte per uno stesso punto P, che è l'oggetto, e può essere reale o virtuale), il primo diottro trasforma questo fascio omocentrico in un altro fascio omocentrico di raggi, le cui rette passano tutte per un punto  $P_1$ , che costituisce l'immagine di P rispetto al primo diottro. Questo punto  $P_1$  fungerà da oggetto (reale o virtuale) rispetto al secondo diottro, che ne darà un'immagine  $P_2$ , e così via, finché l'ultimo diottro darà una immagine  $P'$ , che chiameremo l'immagine di P rispetto tutto il sistema. Risulta immediatamente, da quanto si è visto per il diottro, che l'immagine di una retta è una retta, e quella di

un piano è un piano; che un punto qualsiasi e la sua immagine sono contenuti nello stesso piano passante per l'asse ottico; inoltre l'immagine di una figura piana perpendicolare all'asse è pure una figura piana perpendicolare all'asse, e simile a quella: i loro piani diconsi "coniugati"; il rapporto delle loro dimensioni lineari dicesi ingrandimento (trasversale). Esso dipende, oltretutto dalle caratteristiche del sistema ottico, anche dalla coppia di piani coniugati che si considera.

Si consideri un punto  $P$  dell'asse ottico: la sua immagine  $P'$  sarà pure sull'asse ottico. Se si fa scorrere  $P$  lungo l'asse in modo da allontanarlo infinitamente (nel primo mezzo, cioè verso la parte da cui proviene la luce) avviene in generale che  $P'$  tenda verso un punto  $F'$  dell'asse a distanza finita: questo punto dicesi secondo fuoco. Esso è dunque il centro del fascio di rette di emergenza, corrispondenti a un fascio di raggi incidenti paralleli all'asse ottico.

Similmente (poiché ad ogni posizione dell'immagine corrisponde una posizione dell'oggetto) è possibile far scorrere il punto  $P$  sull'asse fino a portarlo in una posizione  $F$ , per la quale l'immagine di  $P'$  si formi all'infinito: questo punto  $F$  dicesi primo fuoco. Esso è dunque il punto tale, che ad un fascio di rette d'incidenza passanti per esso corrisponde un fascio di raggi emergenti paralleli all'asse ottico.

Può avvenire in particolare che i fuochi  $F$  ed  $F'$  siano (entrambi) all'infinito: cioè che un fascio di raggi incidenti paralleli all'asse venga mutato in un fascio di raggi emergenti pure paralleli all'asse; il sistema si chiama allora *telescopico*. Un es. ne è fornito da due lenti sottili disposte in modo che il secondo fuoco della prima coincida col primo fuoco della seconda.

Tornando a considerare sistemi non telescopici, diremo che si chiamano primo e secondo piano focale i due piani perpendicolari all'asse condotti rispettivamente nel primo e nel secondo fuoco. Da quanto si è detto risulta che essi hanno i loro piani coniugati all'infinito e precisamente, il secondo piano focale è il luogo dei punti in cui si formano le immagini degli oggetti posti all'infinito, mentre il primo piano focale è il luogo dei punti, le cui immagini si formano all'infinito. In altre parole: un fascio di raggi incidenti paralleli tra loro viene mutato in un fascio concentrico di raggi emergenti avente per centro un punto del secondo piano focale; un fascio di raggi incidenti, avente per centro un punto del primo piano focale, viene mutato in un fascio di raggi emergenti paralleli tra loro.

Non occorre dire che la distinzione tra primo e secondo fuoco (e relativo piano focale) è legata al verso scelto per la propagazione della luce; se il sistema si fa attraversare dalla luce in senso inverso, in modo da scambiare gli oggetti con le immagini e viceversa, il primo fuoco diviene il secondo e il secondo primo. (Non si creda però che la denominazione di primo e secondo dipenda dal fatto che percorrendo l'asse ottico nel verso di propagazione della luce, si incontri prima il primo fuoco e poi il secondo: anzi può benissimo accadere l'inverso).



trova semplicemente conducendo da P la parallela all'asse ottico, fino a intersecare l'altro piano principale.

Nel caso del diottro si trova subito applicando questa costruzione, che i due piani principali coincidono entrambi col piano tangente alla superficie rifrangente condotto per il vertice: i due punti principali coincidono entrambi col vertice. Similmente, per una lente sottile, i due piani principali coincidono col piano della lente stessa.

I fuochi ed i punti principali si chiamano, con un solo nome, i punti cardinali del sistema: vedremo che bastano questi quattro punti a caratterizzare completamente le proprietà ottiche del sistema (finché ci si limita alle proprietà cardinali). Perciò nelle figure rappresenteremo il sistema mediante i suoi punti cardinali, ed i piani corrispondenti come nella fig. 15, senza disegnare le superficie rifrangenti. Si chiamano distanze focali le distanze dei fuochi dai rispettivi punti principali, e precisamente: prima distanza focale  $f$  è la distanza FH contata positivamente se F è a sinistra di H, seconda distanza focale è la distanza  $H'F'$  contata positivamente se  $F'$  è a destra di  $H'$  (le indicazioni di destra e sinistra si riferiscono alla convenzione che la luce attraversi il sistema da sinistra a destra).

È evidente che nel caso del diottro e della lente sottile questa definizione delle distanze focali coincide con quella già data. Mostriamo poi che  $f$  ed  $f'$  hanno sempre lo stesso segno, e che ogniquale volta il primo e l'ultimo mezzo sono uguali (come nel caso delle lenti, e della maggior parte degli strumenti ottici) si ha  $f = f'$ .

### Costruzione grafica dell'immagine di un punto data da un sistema diottrico centrato

Dati i fuochi F,  $F'$  e i piani principali  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}'$  di un qualsiasi sistema ottico centrato, si voglia trovare il punto coniugato di un punto dato P (fig. 16). Basterà al solito, considerare due rette d'incidenza passanti per P, e procurarsi le corrispondenti rette d'emergenza.

Si consideri dapprima la retta d'incidenza condotta da P parallelamente all'asse ottico: sia A il punto dove essa incontra il primo piano principale e  $A'$  quello dove incontra il secondo. Sappiamo che  $A'$  è coniugato di A, quindi la retta di emergenza corrispondente a PA dovrà passare per  $A'$ . Inoltre ad una retta di incidenza parallela all'asse corrisponde una retta d'emergenza passante per  $F'$ : perciò la retta di emergenza richiesta è quella individuata dai punti  $A'$  ed  $F'$ . Si consideri ora la retta d'incidenza condotta da P per F, e sia B la sua intersezione col primo piano principale. Il coniugato di B è  $B'$  trovato conducendo da B la parallela all'asse fino ad incontrare il piano  $\mathcal{H}'$ :  $B'$  è dunque un punto della retta di emergenza. E poiché ad una retta d'incidenza passante per il primo fuoco corrisponde una retta d'emergenza parallela all'asse, la retta d'emergenza richiesta sarà la parallela all'asse condotta per



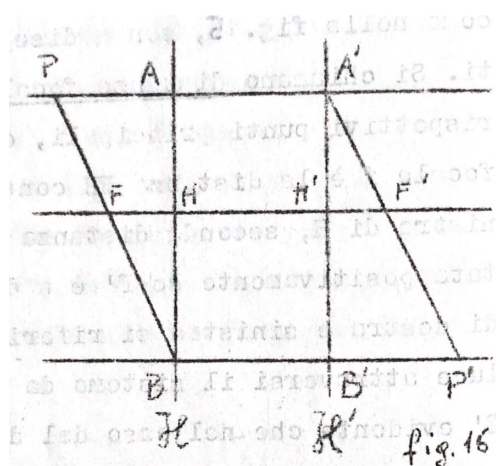


fig. 16.

B. E il punto  $P'$  intersezione delle due rette d'emergenza trovate sarà il coniugato di  $P$ . È chiaro che nel caso di una lente sottile, in cui i due piani  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}'$  coincidono col piano della lente stessa, questa costruzione si riduce a quella già vista per le lenti sottili.

Se il punto dato  $P$  si trovasse sull'asse ottico la costruzione indicata non sarebbe applicabile; ma in tal caso basterebbe considerare un punto ausiliario  $Q$  posto sulla normale all'asse ottico condotta per  $P$ , e trovarne il coniugato  $Q'$  nel modo indicato: il punto  $P'$  della perpendicolare condotta da  $Q'$  all'asse ottico è manifestamente il coniugato di  $P$ . Si osservi che la costruzione indicata non utilizza che i due fuochi e i due piani principali del sistema: non occorre affatto conoscere le singole superficie rifrangenti e gli indici di rifrazione dei vari mezzi. Da ciò la grande importanza dei punti cardinali, i quali riassumono, agli effetti della costruzione dell'immagine, tutte le proprietà del sistema. È da tener presente però che con questo metodo non si ha nessuna notizia sul cammino seguito effettivamente dai raggi nell'interno del sistema: la costruzione dà soltanto il raggio emergente corrispondente a un dato raggio incidente.

### Formule fondamentali relative a un sistema diottrico centrato

Vogliamo ora trovare la relazione analitica che lega le coordinate di un punto a quelle della sua immagine, fornita da un generico sistema ottico centrato: basterà perciò stabilire un opportuno sistema di riferimento e tradurre analiticamente la costruzione del § precedente.

Riferiremo (v. fig. 17) i punti-oggetto a un sistema  $x, y, z$ , avente l'origine nel primo punto principale  $H$ , l'asse  $x$  coincidente con l'asse ottico e diretto verso sinistra (e quindi il piano  $yz$  coincidente col primo piano principale  $\mathcal{H}$ ). I

punti-immagine saranno invece riferiti a un sistema  $x', y', z'$ , avente l'origine nel secondo punto principale  $H'$ , l'asse coincidente con l'asse ottico e diretto verso destra, e gli assi  $y', z'$  paralleli agli assi  $y, z$  (ma giacenti nel secondo piano principale  $\mathcal{H}'$ ). Al solito considereremo generalmente punti giacenti nel piano dell'figura (che contiene gli assi  $x, y, x', y'$ ) quindi non interverrà di solito né  $z$  né  $z'$ ; ad ogni modo, resta inteso che queste coordinate si possono trattare alla stessa stregua di  $y, y'$ .

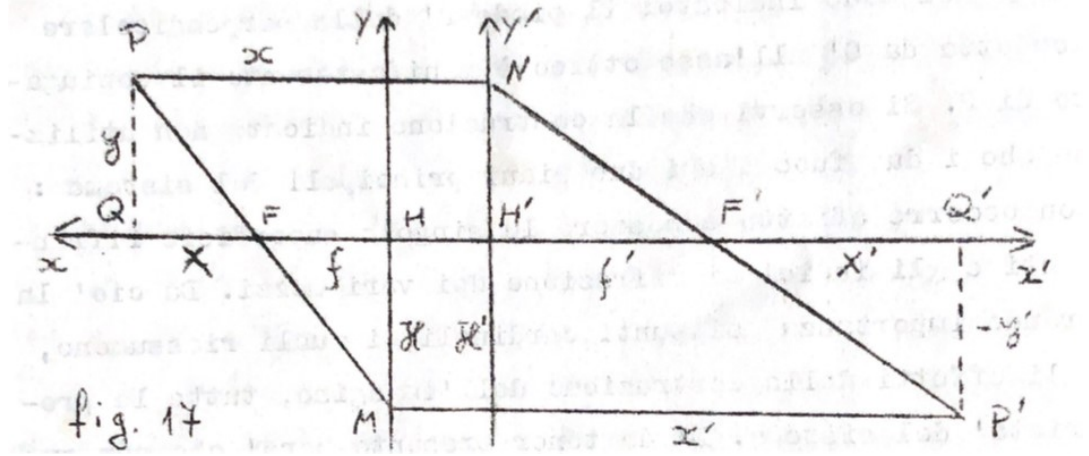


fig. 17.

Ci serviremo anche qui in linea ausiliaria delle coordinate  $X, X'$ , contate a partire dai fuochi  $F, F'$  anziché dai punti principali: tra queste e le  $x, x'$  passano evidentemente le relazioni

$$X = x - f \quad (25)$$

$$X' = x' - f'$$

Ciò premesso osserviamo che dalla fig. 17 per la similitudine dei triangoli  $PQF$  e  $FHM$  risulta

$$\frac{X}{y} = \frac{f}{-y'} \quad (26)$$

Analogamente dai triangoli simili  $P'Q'F'$  e  $F'H'N$ , si ha

$$\frac{X'}{-y'} = \frac{f'}{y} \quad (27)$$

Moltiplicando membro a membro queste due relazioni si ha subito

$$XX' = ff' \quad (28)$$

relazione del tutto analoga alla (13') di cui è la generalizzazione. Sostituendovi per  $X, X'$  le espressioni (25) si ha la relazione fra  $x$  e  $x'$

$$(x - f)(x' - f') = ff'$$

ossia sviluppando e semplificando

$$xx' - f'x - fx' = 0$$

che si può anche scrivere (dividendola per  $xx'$ )

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1 \quad (29)$$

Questa formula fondamentale (che è la generalizzazione della (12) per il diottro e della (23) per la lente sottile) dà la relazione tra le ascisse di due punti coniugati (contate a partire dai piani principali). La relazione tra le  $y$  (e quindi l'ingrandimento trasversale) è data subito dalle (26) e (27), ed è

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{X} = -\frac{X'}{f'}$$

o anche in virtù delle (25)

$$\frac{y'}{y} = \frac{f}{f - x} = \frac{f' - x'}{f'} \quad (30)$$

Anche per le  $z$  naturalmente si ha lo stesso rapporto

$$\frac{z'}{z} = \frac{f}{f - x} = \frac{f' - x'}{f'} \quad (30')$$

Si osservi che vi è una coppia di piani coniugati per i quali l'ingrandimento è -1, cioè l'immagine è di ugual grandezza dell'oggetto, ma capovolta. Essi si trovano ponendo nella (30)  $y'/y = -1$ , da cui

$$x = 2f \quad x' = 2f'.$$