

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE
FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Fisica

Appunti di Istituzioni di Fisica Teorica

Prof. P. Quarati
Prof. G. Mezzorani

Anno Accademico 1975/76

Premessa

Questi Appunti sono intesi come una guida allo studio dei problemi trattati nel corso di Istituzioni di Fisica Teorica.

Si intende che il loro uso va integrato con la frequenza delle lezioni e con la consultazione di uno dei trattati classici, come, per la Meccanica Quantistica:

A. Messiah: Mecanique Quantique, Dunod, Paris

L. Landau, E. Lifshitz: Meccanica Quantistica, Boringhieri, Torino

P. Dirac: Principi di Meccanica Quantistica, Boringhieri, Torino

e per la Relatività:

C. Moller: The Theory of Relativity, Clarendon, Oxford

W. Rosser: The Theory of Relativity, Butterworths, London

L'accento della trattazione è stato posto essenzialmente sull'aspetto fisico degli argomenti svolti in conseguenza del carattere istituzionale del corso.

Indice

Parte A Introduzione alla Meccanica Quantistica

I Inadeguatezza della fisica classica

1	Introduzione	0
2	Spettro del corpo nero	0
3	Effetto Compton	6
4	Effetto fotoelettrico	9
5	Esperienza di Franck ed Hertz	12
6	Esperienza di Stern e Gerlach	14
7	Difrazione di elettroni	16

II Onde e corpuscoli

1	Onda monocromatica	0
2	Pacchetto d'onde	2
3	Esperimenti ideali sul dualismo onda-corpuscolo	3
4	Principio di indeterminazione	5
5	Esperimenti fondamentali ideali per il principio di indeterminazione	7

III Equazione di Schrödinger

1	Introduzione	0
2	Trattazione matematica	0
3	Interpretazione probabilistica della funzione d'onda	2
4	Equazione di Schrödinger indipendente dal tempo	4
5	Equazione stazionaria in una dimensione	5
6	Ortogonalità delle funzioni d'onda	6
7	Corrente di probabilità	8
8	Trasformate di Fourier	10
9	Operatori e valori medi di grandezze fisiche	11

VIII Indice

IV Applicazioni della equazione di Schrödinger

1	Introduzione	0
2	Problemi unidimensionali con potenziale. Modelli.	0
3	Potenziale discontinuo in due punti	5
4	Effetto Tunnel	6
5	Decadimento radioattivo α	9
6	Stati stazionari	12
7	Problema dell'oscillatore armonico lineare	14
8	Oscillatore armonico lineare. Metodo algebrico.....	17

V Momento angolare

1	Introduzione	0
2	Algebra del momento angolare	1
3	Autovalori	3
4	Autofunzioni	6
5	Cenni sullo spin	7
6	Cenno sulla composizione di momenti angolari	8

VI Rappresentazioni matriciali

1	Introduzione	0
2	Spazi vettoriali: proprietà generali	0
3	Sistemi di riferimento	2
4	Operatori	3
5	Autovalori ed autovettori	4
6	Algebra delle matrici.....	6
7	Rappresentazioni matriciali degli operatori di momento angolare.....	8

VII Formulazione generale della meccanica quantistica

VII Forze centrali

1	Il problema dei due corpi	0
2	Forze centrali	1
3	Atomo di idrogeno.....	2
4	Parità	6

IX Particelle identiche

1	Introduzione	0
2	Sistema di n particelle identiche	1

Appendici

A Trasformate di Fourier

1	Oscillazioni libere	0
2	Oscillazioni forzate	1
3	La funzione δ di Dirac	3
4	Trasformata di Fourier	4
5	Potenza assorbita da un oscillatore [<i>aggiunta del curatore</i>]	6
6	Calcolo di valori medi per la gaussiana [<i>aggiunta del curatore</i>] .	8

Parte B Introduzione alla teoria della Relatività Speciale**X Cinematica relativistica**

1	Introduzione	0
2	I postulati di Einstein e la formulazione operazionistica del concetto di simultaneità	3
3	Trasformazioni di Lorentz	4
4	Generalizzazione delle trasformazioni di Lorentz	8
5	Significato fisico delle trasformazioni di Lorentz	11
6	Invariante relativistico. Divario spaziotemporale	14
7	Legge di addizione delle velocità	19

XI Dinamica relativistica

1	L'impulso	0
2	La Forza e la potenza	3
3	Il quadrivettore energia-impulso	4
4	Scrittura covariante delle leggi fisiche - tempo proprio - quadrivelocità - quadriaccelerazione	7
5	Equivalenza di massa ed energia	10
6	Urti fra particelle	15
7	Quadriforza; termodinamica relativistica	17

XII Fluidodinamica relativistica

1	Conservazione della massa propria - Quadridivergenza	0
2	Algebra delle trasformazioni di Lorentz - Gruppo delle matrici di Lorentz - Un po' di calcolo tensoriale	4
3	Equazione invariante a vista del moto dei mezzi continui soggetti a forze puramente meccaniche	10
4	Il tensore energia impulso	12

XIII Formulazione covariante della Elettrodinamica

1	Equazione di continuità - Carattere quadrivettoriale della corrente - conservazione della carica	0
2	Formulazione covariante delle Equazioni di Maxwell	4
3	Un ragionamento curioso	9
4	La forza di Lorentz	10

X Indice

5 Il Tensore Energia Impulso per il campo e.m. 12

Appendici

**B Covarianza della equazione delle onde sotto trasformazione
di Lorentz**

Parte A

Introduzione alla Meccanica Quantistica

I

Inadeguatezza della fisica classica

1 Introduzione

Esaminiamo alcuni esperimenti di fisica atomica che non sono correttamente interpretati con la meccanica classica (meccanica di Newton e formalismo classico hamiltoniano) ed il modello classico di assorbimento ed emissione della radiazione elettromagnetica da parte di cariche. Sono: spettro del corpo nero, effetto Compton, effetto fotoelettrico, esperimento di Franck ed Hertz, di Stern e Gerlach, diffrazione degli elettroni. Ci interessa porre in evidenza il contrasto tra l'interpretazione classica di tali fenomeni ed i nuovi concetti che è necessario introdurre per la loro spiegazione.

2 Spettro del corpo nero

Un corpo nero è per definizione un corpo avente coefficiente di assorbimento uguale all'unità, cioè un corpo che assorbe tutta l'energia raggiante che lo colpisce. Esso viene in pratica realizzato, con buona approssimazione, mediante una cavità a pareti opache, munita di un piccolo foro: il foro funge da corpo nero.

Se le pareti della cavità vengono portate e mantenute ad una temperatura T , all'interno della cavità si genera una radiazione elettromagnetica non monocromatica. Poiché la cavità è munita di un piccolo foro e le pareti sono riflettenti la radiazione difficilmente esce fuori, per cui la radiazione viene assorbita ed anche emessa dalle pareti. Si arriva perciò ad uno stato di regime stazionario quando le pareti assorbono nell'unità di tempo una quantità di energia raggiante uguale a quella che emettono. Lo stato di questa radiazione è rappresentato dalla densità di energia elettromagnetica:

$$U \approx (E^2 + H^2)$$

dove \vec{E} ed \vec{H} sono rispettivamente il campo elettrico e magnetico. Si ha anche una distribuzione spettrale della radiazione:

$$U \approx \int_0^\infty u_\nu d\nu$$

dove $u_\nu d\nu$ rappresenta la densità di energia con frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$: questa eq. dice che la densità di energia elettromagnetica è la somma delle singole densità di energia delle radiazioni elettromagnetiche monocromatiche. Ad una data temperatura T , u_ν non dipende dalla sostanza che racchiude la cavità, u_ν dipende solo da T , $u_\nu(\nu, T)$ è una funzione universale. Ciò può essere dimostrato termodinamicamente, perché, se non fosse così, si andrebbe contro il secondo principio della termodinamica.¹ Il problema consiste nel determinare u_ν . Ricordiamo che come conseguenza del secondo principio della termodinamica e del fatto che siamo in presenza di una radiazione elettromagnetica si ha

- (a) teorema di Stefan-Boltzmann: $U = \text{cost}T^4$
- (b) teorema di Wien: $u_\nu(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$

Questo teorema riconduce il problema di Kirchoff, cioè la ricerca della funzione universale u_ν , alla ricerca della funzione $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$.

Nell'interno della cavità c'è un campo elettromagnetico che noi scomponiamo sotto forma di onde piane stazionarie. Se l'energia media portata da ciascuna onda è nota, e se il numero $N(\nu)$ di onde stazionarie con frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ può essere calcolato, si può ottenere facilmente la densità di energia della radiazione che è proporzionale al potere emissivo definito per ogni lunghezza d'onda e per ogni temperatura. Ora, poiché ognuna di tali onde può pensarsi costituita da un oscillatore armonico equivalente di frequenza ν e l'energia media \bar{E} di ogni oscillatore è (secondo la meccanica classica) uguale a:

$$\bar{E} = kT$$

per il potere emissivo si trova²

$$u_\nu = \bar{E} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} = kT \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Questa è la legge di Rayleigh-Jeans; u_ν è indipendente dalla natura delle pareti e da corpi presenti nella cavità.

Si può, in sintesi, dedurla ragionando così:

¹ Per una dimostrazione v. ad es. B. Ferretti, *Le radici classiche della meccanica quantica*, Boringhieri, Torino, pp. 231 sg. [ndc].

² V. ad es. B. Ferretti, cit., p. 242 [ndc].

In un campo di radiazioni con densità di energia $u_\nu d\nu$, un oscillatore lineare di frequenza ν propria, carica e , massa m , assorbe nel tempo dt l'energia:³

$$\frac{\pi e^2}{3m} u_\nu dt$$

Se esso d'altra parte possiede l'energia di oscillazione \bar{E} , l'energia da esso irradiata nel tempo dt è:⁴

$$\bar{E} \frac{2e^2(2\pi\nu)^2}{3mc^3} dt$$

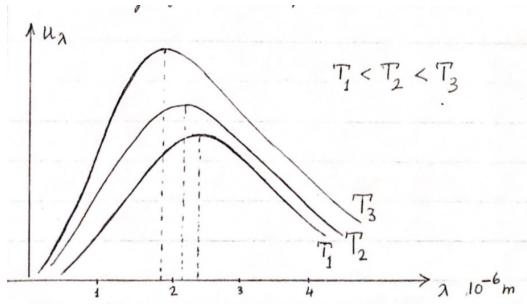
Le due grandezze non sono in media uguali se non quando

$$\frac{\pi e^2}{3m} u_\nu dt = \bar{E} \frac{2e^2(2\pi\nu)^2}{3mc^3} dt$$

Cioè

$$u_\nu = \bar{E} \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Studiamo ora la situazione sperimentale. Dentro la cavità una misura di u_ν fornisce per ogni temperatura T la serie di grafici che riportiamo.



Per ogni curva, cioè ad ogni valore di T , u_ν possiede un massimo in corrispondenza ad un certo λ_{max} in modo che è soddisfatta la relazione

$$\lambda_{max} T = \text{costante}$$

Sperimentalmente si ha anche che

$$U = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \text{quantità finita}$$

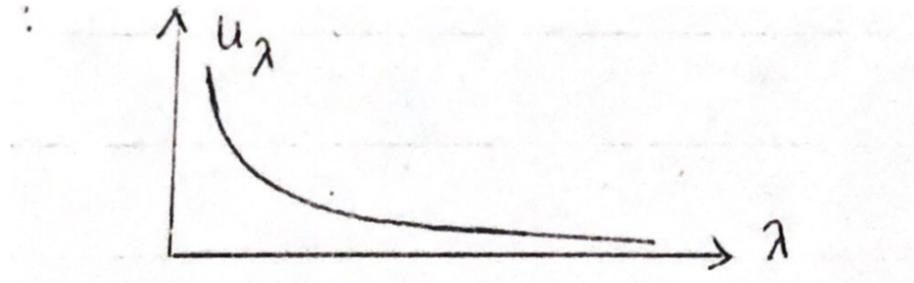
³ V. sez. 5 dell'appendice A [sez. aggiunta dal curatore].

⁴ V. ad es. B. Ferretti, cit., p. 96 [ndc].

mentre l'interpretazione classica di Rayleigh-Jeans dà

$$U = \int_0^\infty \bar{E} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu = \infty$$

Infatti l'andamento della u_λ di Rayleigh-Jeans è il seguente:



Questa curva dimostra che la densità di energia per una λ molto piccola è infinita. La curva calcolata da Rayleigh-Jeans è in evidente contrasto con la curva sperimentale. La corretta interpretazione fu data da Planck. Visto che le due relazioni

$$\bar{E} = kT \quad (\text{meccanica statistica classica})$$

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{E} \quad (\text{elettrodinamica classica})$$

portano ad un risultato assurdo, Planck allora sostituì la \bar{E} con un'altra espressione. Suppose che l'energia dell'oscillatore ad una temperatura T fosse sempre proporzionale alla sua frequenza ν .

Scriviamo l'energia di un oscillatore lineare:

$$E = 1/2 m \dot{x}^2 + 1/2 m(2\pi\nu)^2 x^2$$

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

Se ho una carica e , la probabilità che alla temperatura T l'impulso e l'ascissa siano compresi tra p_x e $p_x + dp_x$, x e $x + dx$ è

$$dW = \text{cost } e^{-\frac{E(p_x, x)}{kT}} dp_x dx$$

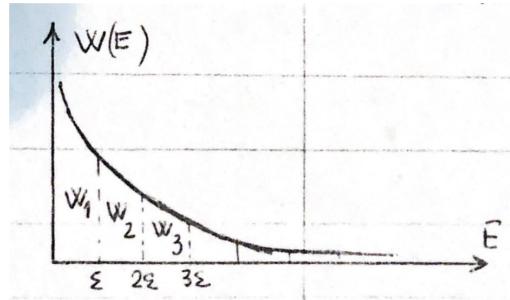
La probabilità che l'energia sia compresa tra E ed $E + dE$ è

$$W(E)dE = \text{cost } e^{-\frac{E}{kT}} dE$$

Possiamo allora ricavare il valor medio di E :

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E W(E) dE}{\int_0^\infty W(E) dE} = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/kT} dE}{\int_0^\infty e^{-E/kT} dE}$$

Sostituiamo agli integrali delle sommatorie dividendo in intervalli di ampiezza ε arbitraria, per ora; per $\varepsilon \rightarrow 0$ si deve ottenere $\bar{E} = kT$. In ogni intervallo il valore E è compreso tra $n\varepsilon$ e $(n+1)\varepsilon$. Se $E = (n+\alpha)\varepsilon$ allora:



$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)\varepsilon e^{-\frac{(n+\alpha)\varepsilon}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(n+\alpha)\varepsilon}{kT}}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)\varepsilon e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}} e^{-\frac{\alpha\varepsilon}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}} e^{-\frac{\alpha\varepsilon}{kT}}} = \\ \bar{E} &= \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}} \right) + \alpha\varepsilon\end{aligned}$$

Se pongo: $e^{-\varepsilon/kT} = z$

e ricordiamo che

$$\varepsilon z \frac{1 + 2z + 3z^2 + \dots}{1 + z + z^2 + \dots} = \varepsilon z \frac{d}{dz} \ln(1 + z + z^2 + \dots) = \frac{\varepsilon z}{1 - z}$$

abbiamo

$$\bar{E} = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} + \alpha\varepsilon$$

Se poniamo $\alpha = 0$, al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha $\bar{E} = kT$. Sostituendo il valore si \bar{E} così trovato nella espressione di u_ν , che formalmente deve essere $u_\nu = \nu^3 f(\frac{\nu}{T})$ si ottiene

$$u_\nu = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \cdot \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Questo risultato si ha solo se ε è proporzionale alla frequenza ν , cioè $\varepsilon = h\nu$. La costante h deve essere una costante universale che non deve dipendere dal particolare oscillatore considerato.

Quindi

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3(e^{h\nu/kT} - 1)} \quad (\text{formula di Planck})$$

Questa eq. per un dato valore di h riproduce esattamente la curva sperimentale. Per definire l'espressione della densità di energia in funzione di λ , scriviamo: $u(\lambda)d\lambda = -u(\nu)d\nu$, poiché gli incrementi $d\lambda$ e $d\nu$ hanno segni opposti. Si ha:

$$\nu = c/\lambda; \quad d\nu/d\lambda = -c/\lambda^2$$

$$u(\lambda) = -u(\nu)\frac{d\nu}{d\lambda} = u(\nu) \cdot c/\lambda^2$$

$$u(\lambda) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

In fisica atomica, soprattutto nella fisica del laser, ha molto interesse la dimostrazione di Einstein della formula di Planck. Secondo Planck: $\varepsilon = h\nu$ e l'energia assume i valori discreti $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots$. C'è uno scambio continuo di energia fra campo di radiazione ed oscillatore.

Secondo Einstein nell'interazione con la materia, la radiazione si comporta come se la sua energia fosse suddivisa in quanti di luce indivisibili $h\nu$. Gli atomi posseggono livelli energetici $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ che differiscono di $h\nu = |\varepsilon_k - \varepsilon_i|$ possono assorbire od emettere solo quanti di energia.

Sia data una cavità, in essa ci sono atomi uguali in equilibrio a temperature T . Supponiamo ci siano solo due livelli: ε_1 ed ε_2 ; nel livello ε_1 ci siano N_1 atomi, in ε_2 ci siano N_2 atomi.

Dati N_1, N_2, u_ν ci proponiamo di calcolare quanti processi di emissione e di assorbimento ci sono nel tempo dt .

All'equilibrio i due processi sono ugualmente probabili. Dalla meccanica statistica si ha che ad una temperatura T

$$N_1 = g_1 e^{-\varepsilon_1/kT}, \quad N_2 = g_2 e^{-\varepsilon_2/kT}, \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{kT}}$$

dove g_1 e g_2 sono i pesi statistici.

Facciamo l'ipotesi: nel passaggio dal livello ε_1 al livello ε_2 ci saranno Z_1 processi di assorbimento:

$$Z_1 = B_{12} N_1 u_\nu dt$$

dove $B_{12} N_1 u_\nu$ è la probabilità che nell'unità di tempo un atomo esegua una transizione.

Mentre Z_2 sono i processi di emissione:

$$Z_2 = N_2 (A_{21} + B_{21} u_\nu) dt,$$

dove $A_{21} dt$ è la probabilità che un atomo che si trovi in ε_2 emetta spontaneamente un fotone $h\nu$ nel tempo dt . Accanto ai processi di emissione spontanea

ne avvengono altri provocati dalla radiazione u_ν già presente: emissione stimolata. La probabilità che questi processi avvengano è $B_{21}u_\nu N_2 dt$.

Quando tutti i quanti (fotoni) emessi sono assorbiti e viceversa, cioè quando il sistema è in equilibrio si ha $Z_1 = Z_2$:

$$\frac{N_1}{N_2} B_{12} u_\nu = A_{21} + B_{12} u_\nu$$

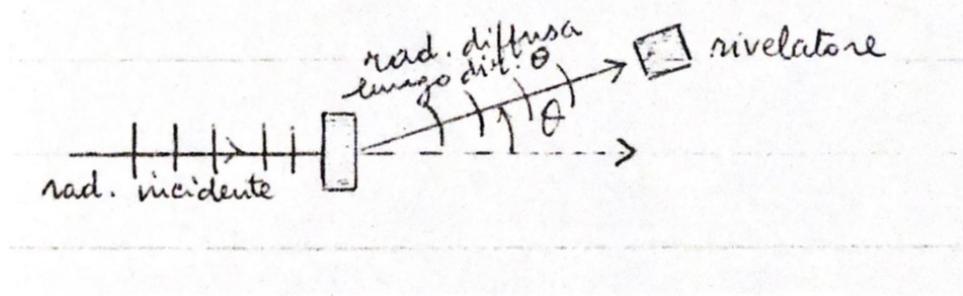
~~$B_{12} = B_{21}$ perché la probabilità che la particella del livello ε_1 assorba un quanto è uguale alla probabilità che lo emetta.~~⁵ Allora si ha:

$$u_\nu = \frac{A_{21}}{B_{12} \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{kT}} - B_{21}}; \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = h\nu$$

per $T \rightarrow \infty$, $u_\nu \rightarrow 0$, e $\frac{g_1}{g_2} B_{12} = B_{21}$

3 Effetto Compton

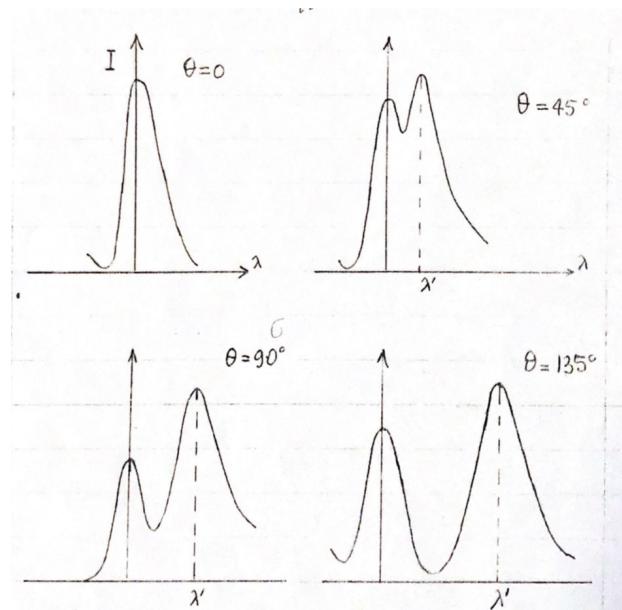
Secondo la teoria classica, l'intensità della luce diffusa da particelle è una funzione dell'angolo di diffusione e la lunghezza d'onda λ della luce diffusa rimane uguale a quella incidente. Usando radiazioni di lunghezza d'onda molto piccola, cioè raggi X, Compton misurò che, accanto ad una riga di lunghezza d'onda uguale a quella incidente, la radiazione diffusa mostrava anche una riga di lunghezza d'onda λ' maggiore di quella incidente. Descriviamo brevemente l'esperienza.



Prendiamo un cristallo di tungsteno e facciamo incidere su di esso una radiazione di raggi X di frequenza ν . La radiazione interagisce col reticolo del cristallo e viene in parte assorbita e in parte diffusa. Se questa radiazione è monocromatica di frequenza ν , lo spettro della radiazione diffusa presenta, lungo una certa direzione θ , rispetto alla direzione incidente, oltre alla riga di

⁵ Testo cancellato dal curatore [ndc].

frequenza ν una riga di frequenza ν' leggermente inferiore. Si osserva che la lunghezza d'onda λ' corrispondente è funzione dell'angolo θ ; $(\lambda' - \lambda)$ è nullo nella direzione $\theta = 0$, cresce con θ e raggiunge il valore massimo per $\theta = \pi$, cioè quando si osserva la radiazione diffusa all'indietro.



Sperimentalmente si ha

$$(\lambda' - \lambda) = \text{cost} (1 - \cos \theta), \quad \begin{cases} \lambda' = \lambda + \lambda_C (1 - \cos \theta) \\ \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda_C}{c} (1 - \cos \theta) \end{cases}$$

$$\lambda_C = 2,4262 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Le teorie classiche non spiegano l'effetto Compton. Secondo tali teorie gli elettroni del cristallo compiono delle oscillazioni forzate sotto l'azione del campo elettrico della radiazione incidente. Divengono quindi emettitori di onde aventi la stessa frequenza della radiazione incidente, con cui pure vibrano.

Pensiamo invece che la radiazione elettromagnetica sia un insieme di quanti di energia (fotoni). Allora la diffusione è conseguenza dell'urto tra i fotoni e gli elettroni del cristallo diffusore. In seguito all'urto i fotoni vengono deviati rispetto alla direzione primitiva. Questo urto è governato dalle due leggi della conservazione dell'energia e dell'impulso. L'elettrone acquista nell'urto una certa velocità. Sottrae perciò una certa energia al fotone incidente il quale viene diffuso con energia minore di quella che possedeva originariamente. L'energia dei fotoni è proporzionale alla frequenza della radiazione

$$E_f = h\nu \quad (h \text{ costante di proporzionalità di Planck})$$

Perciò il fotone diffuso possiede dopo l'urto energia minore, e quindi frequenza minore di quella iniziale.

Per la conservazione dell'energia si ha

$$h\nu' = h\nu - E$$

Sperimentalmente infatti si osserva una riga con $\lambda' > \lambda$, si osserva però anche una riga di lunghezza d'onda λ . Ora λ_C può essere espressa in funzione della massa del corpo urtato (massa a riposo): $\lambda_C = \frac{h}{mc}$ per cui

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$$

da cui non è prevista la riga λ . Nella deduzione della eq. di sopra si suppone che l'elettrone urtato è un elettrone libero. La riga con $\lambda' = \lambda$ è la radiazione diffusa dagli elettroni che sono strettamente legati all'atomo o al nucleo cristallino che costituisce il bersaglio. In questo caso l'eq. è ancora valida, ma la massa m a denominatore va sostituita con la massa efficace che l'elettrone possiede, cioè in pratica la massa dell'atomo o del reticolo a cui l'elettrone è legato. Questa massa efficace è alcune migliaia di volte superiore alla massa dell'elettrone. Perciò in questo caso $\lambda' - \lambda$ si annulla.

Se v è la velocità dell'elettrone urtato la sua energia cinetica relativistica è

$$E = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

dove m è la massa a riposo dell'elettrone, mentre l'energia del quanto incidente è $h\nu$ e quella del quanto diffuso è $h\nu'$. Conservazione dell'energia:

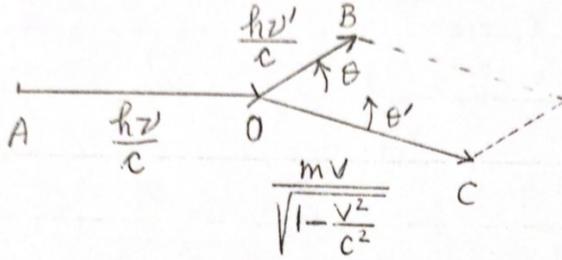
$$h\nu = h\nu' + mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Se ora rappresentiamo con tre vettori l'impulso del fotone incidente (vettore AO, di lunghezza $\frac{h\nu}{c}$), quello del fotone diffuso (vettore OB, di lunghezza $\frac{h\nu'}{c}$) e quello acquistato dall'elettrone (vettore OD, di lunghezza $\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$). Il primo vettore è la risultante degli altri due. Dal triangolo OBC, per il teorema di Carnot si ha

$$\frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{h^2 \nu^2}{c^2} + \frac{h^2 \nu'^2}{c^2} - 2 \frac{h\nu}{c} \frac{h\nu'}{c} \cos \theta$$

Eliminando v si trova:⁶

⁶ Dalla conservazione dell'energia $h\nu + mc^2 = h\nu' + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, quadrando, raccogliendo, semplificando e confrontando [ndc].



$$\nu - \nu' = \frac{h\nu\nu'}{mc^2} (1 - \cos \theta)$$

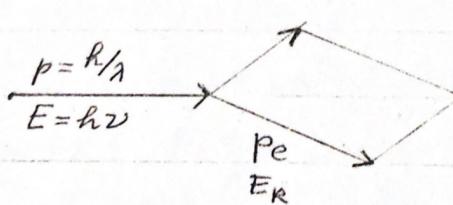
Con $\nu = c/\lambda$ e $\nu' = c/\lambda'$ si ha

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$$

Il fotone ha impulso $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$.

Non-relativisticamente l'energia dell'elettrone diffuso è $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ e p_e il suo impulso. Si ha

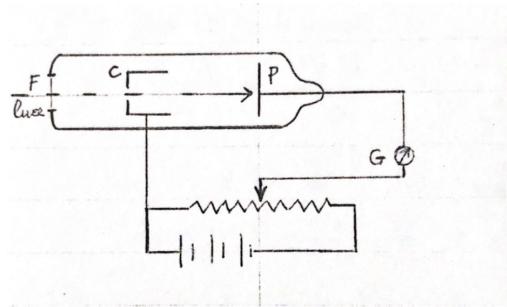
$$\begin{aligned} p' &= \frac{h}{\lambda'} \\ E' &= h\nu' = E - \frac{1}{2}mv^2 \\ \begin{cases} \vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e \\ E = E' + E_k \end{cases} \end{aligned}$$



4 Effetto fotoelettrico

Nella prima osservazione sperimentale del fenomeno si osservò che quando una radiazione ultravioletta colpisce una lastra di zinco carico negativamente,

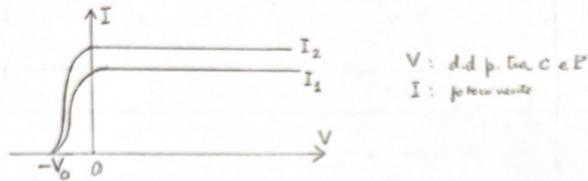
ne diminuisce la carica. Se la lastra è carica positivamente la carica aumenta e se invece è neutra si carica positivamente. Il dispositivo sperimentale per lo studio dell'effetto photoelettrico può essere costituito da un tubo di vetro nel quale è stato fatto il vuoto.



La radiazione ultravioletta entra tramite la finestra F di quarzo. P è la superficie in studio, C un cilindro cavo che serve a raccogliere gli elettroni che giungono da P. Quando la luce ultravioletta che produciamo con una opportuna lampada incide su P, gli elettroni emessi dalla superficie vengono raccolti da C. Viene mantenuta tra C e P una differenza di potenziale con un circuito potenziometrico. Il galvanometro G permette di conoscere la fotocorrente. L'intensità della fotocorrente dipende:

- 1) dall'intensità della luce incidente
- 2) dalla lunghezza d'onda del fascio di luce

Si adopera perciò luce monocromatica di λ nota. Se C è positivo rispetto a P gli elettroni emessi da P sono accelerati. Se C è negativo, rallentati. Si ha il seguente grafico delle misure sperimentali Per $V_C > V_P$ la I è costante.



Per $V_C < V_P$ decresce annullandosi per un certo $-V_0$. Aumentando l'intensità della luce incidente il grafico è ancora formalmente lo stesso, pur essendo $I_2 > I_1$. $-V_0$ si chiama potenziale di arresto per quella particolare λ . Si ha:

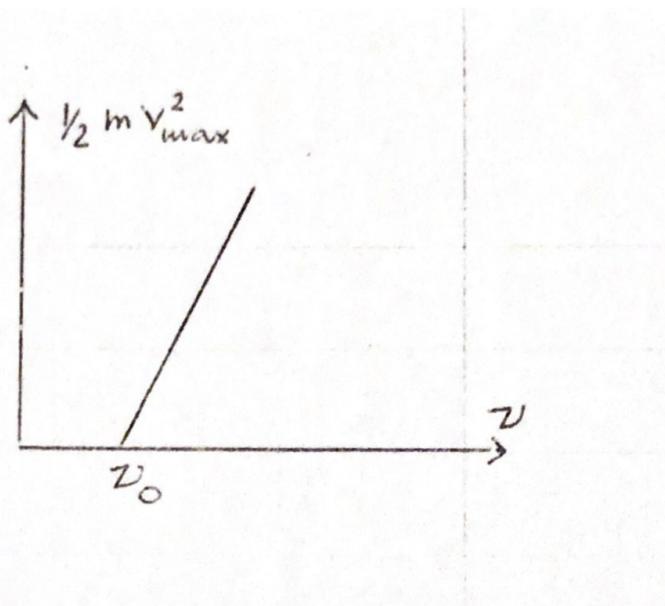
- a) la proporzionalità diretta tra massimo di I e intensità luminosa mostra che il numero di elettroni per secondo emessi da P è direttamente proporzionale alla intensità della luce incidente,
- b) il fatto che $-V_0$ è indipendente dalla intensità di luce è spiegabile solo se si assume che l'energia cinetica degli elettroni emessi non supera una certa quantità data da

$$V_0 e = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

Gli elettroni emessi con energia cinetica inferiore vengono fermati da valori più piccoli della d.d.p.. Questo spiega la diminuzione di corrente quando $V_C < V_P$. La determinazione del potenziale di arresto può essere ottenuta da

$$V_0 e = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = h(\nu - \nu_0)$$

ν è la frequenza adoperata e ν_0 è un parametro caratteristico della lastra P. Quella di sopra è l'equazione di una retta:



La costante h (costante di Planck) è il coefficiente angolare e ν_0 è la più bassa frequenza che genera emissione di elettroni da P; ν_0 è detta frequenza di soglia e dipende dalla natura della superficie emittente. Mediante esperimenti fotoelettrici è possibile misurare h ($h=6,624 \cdot 10^{-27}$ erg·sec.).

Secondo la teoria classica dovrebbe esserci una correlazione tra l'intensità

della luce incidente e l'energia del fotoelettrone. Classicamente: l'onda elettromagnetica colpisce l'elettrone considerato come un oscillatore classico; lo sottopone ad una oscillazione forzata che porta l'elettrone ad oscillazioni aventi ampiezze sempre più grandi, finché per un fenomeno di risonanza l'elettrone viene strappato dal metallo. Questo significa che per un dato metallo, anche per frequenze minori di quella di soglia ci dovrebbe essere lo stesso effetto fotoelettrico purché la radiazione incidente agisca per un tempo sufficientemente lungo. Per spiegare l'effetto Einstein utilizzò il concetto di quanto di energia. Nella teoria di Einstein l'energia di un quanto è trasferita ad un singolo elettrone nel metallo.

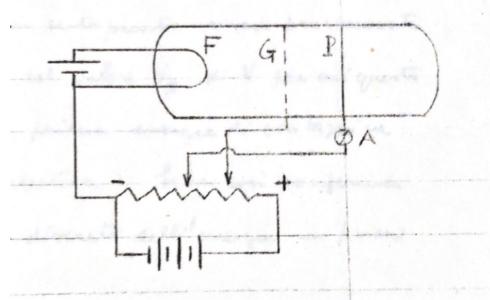
Quando l'elettrone è emesso dalla superficie ha una energia

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W$$

dove W è il lavoro richiesto per estrarre l'elettrone dal metallo. L'effetto fotoelettrico si ha tanto nei solidi quanto nei liquidi e gas ed è generato da tutto lo spettro elettromagnetico.

5 Esperienza di Franck ed Hertz

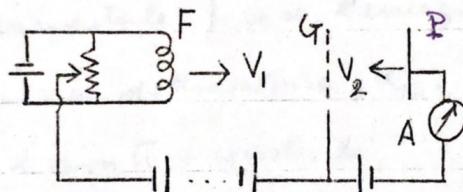
Il fatto che un atomo possa trovarsi in diversi stati con differenze finite di energia tra l'uno e l'altro fu proposta da Franck ed Hertz. Descriviamo il loro esperimento. Si fa attraversare un gas da elettroni di velocità nota e regolabile. Alcuni di questi urtano gli atomi del gas, ne provocano l'eccitazione per urto, cioè cedono parte della loro energia, facendoli passare dallo stato fondamentale allo stato eccitato. Si controlla la perdita di energia subita da ogni elettrone nell'urto, si ricava l'energia acquistata dall'atomo urtato e si constata che questo ha solo certi valori discreti che coincidono (entro i limiti dell'errore sperimentale) con l'energia di eccitazione, già nota per via spettroscopica, W_{12} . Il dispositivo consta di un tubo di vetro con tre elettrodi, contenente a bassa pressione il gas su cui si sperimenta.



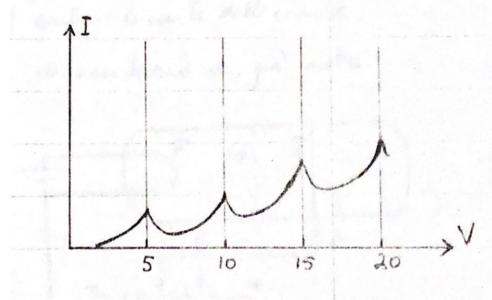
Il filamento incandescente F emette elettroni. Tra F e la griglia G è mantenuta

una d.d.p. V dell'ordine di alcuni volts, diretta in senso tale da accelerare gli elettroni verso la griglia, dove essi giungono con energia cinetica eV . Tra la griglia e la placca P è mantenuta una d.d.p. fissa, dell'ordine di un volt, diretta in senso opposto all'altra, così che gli elettroni passati attraverso la griglia sono un poco rallentati prima di giungere a P. Oltre la placca proseguono chiudendo così il circuito, tornando in F attraverso il galvanometro A. Ora, se eV è minore di W_{12} gli elettroni non raggiungeranno mai l'energia necessaria per eccitare un atomo e quindi ogni volta che urtano un atomo di gas, rimbalzano con la stessa velocità (urto elastico). Giungono quindi alla placca come se il gas non ci fosse. Ma se $eV > W_{12}$, gli elettroni arrivano in vicinanza della griglia con energia sufficiente ad eccitare gli atomi con cui urtano: molti di essi compiono urti anelastici, vale a dire, eccitano l'atomo cedendogli energia W_{12} e quindi rimbalzano con energia cinetica quasi nulla se eV è di poco maggiore di W_{12} . Essi così non hanno energia sufficiente a risalire il campo tra G e P e non arrivano alla placca. Facendo crescere gradualmente V , seguendo le indicazioni di A, ad un certo punto si vede bruscamente diminuire la corrente e dal valore V_2 di V per cui questo avviene, si può ricavare la prima energia di eccitazione $W_2 = eV_2$ e così W_3 etcetera. Si ha così conferma della esistenza di livelli discreti dell'energia in fisica atomica.

Gli elettroni, con urti anelastici, cedono parte della loro energia e questa non ricompare come energia cinetica degli atomi urtati, ma viene emessa sotto forma di radiazione. Tali processi anelastici hanno luogo solo quando l'energia dell'elettrone supera un certo valore critico, il quale dipende dal gas che gli elettroni stanno attraversando.



L'apparecchio contiene allo stato di gas rarefatto il gas in studio. Gli elettroni, generati da un filamento incandescente F sono accelerati verso la griglia G da un potenziale V_1 . Un potenziale molto più piccolo di segno contrario V_2 è applicato tra G e P. La pressione del gas e le dimensioni sono tali che la distanza GP è molto minore del libero cammino medio degli elettroni mentre la distanza FG è poco più grande del cammino libero medio. Aumentando ora, partendo da zero, il potenziale V_1 la corrente che perviene in P aumenta seguendo la curva in figura: Il primo massimo significa che un certo numero di



elettroni di energia $eV = 1/2mv^2$, comincia, al potenziale V , a perdere quasi tutta l'energia negli urti anelastici, prima di raggiungere G. Perciò vengono respinti da P per effetto del piccolo potenziale ritardante V_2 ; di conseguenza ne risulta che il numero registrato di tali elettroni diminuisce oltre il potenziale V , invece di aumentare con continuità. Dapprima gli elettroni acquistano una velocità sufficiente solo quando sono vicini a G, ma quando si aumenta V_1 , il punto in cui si raggiunge la velocità critica si sposta verso F in modo che un sempre maggior numero di elettroni subisce urti anelastici e la corrente diminuisce finché V_1 diventa uguale a $V + V_2$. Oltre si verifica un nuovo aumento. Un altro massimo compare al doppio potenziale critico. Ora gli elettroni subiscono due urti anelastici prima di raggiungere G. Questo effetto si ripete se il potenziale V_1 aumenta ancora. Infatti si è trovato che i massimi si trovano tutti alla medesima distanza data dal potenziale V , potenziale di eccitazione. Ogni atomo possiede uno o più potenziali di eccitazione caratteristici. Questo dimostra che l'energia può essere assorbita solo per quanti discreti. La quantità di energia assorbita è quella richiesta per portare un elettrone dallo stato fondamentale ad un'orbita più elevata. Questo fatto è perciò una prova della esistenza di livelli di energia discreti nell'atomo.

6 Esperienza di Stern e Gerlach

Abbiamo trovato che grandezze fisiche come l'energia dei livelli atomici sono quantizzati. Anche il momento angolare è quantizzato. Ci interesseremo qui di un particolare momento angolare, quello intrinseco o spin. Il metodo più diretto per ricavare le proprietà magnetiche degli atomi è quello di Stern e Gerlach. I raggi atomici sono costituiti da atomi nel livello fondamentale. Quando un elettrone possiede un momento orbitale $m\vec{v} \wedge \vec{r} = \vec{L}$, possiede un momento magnetico di valore $\vec{\mu}_L = \frac{e}{2m}\vec{L}$. Esistono stati elettronici in cui il momento orbitale è nullo nonostante il momento magnetico non lo sia. È necessario postulare che l'elettrone possiede un momento di spin \vec{S} . Il momento magnetico associato $\vec{\mu}_S$ è legato a \vec{S} da: $\vec{\mu}_S = \frac{e}{m}\vec{S}$, come mostrato da Stern e Gerlach. Gli atomi possiedono un momento magnetico μ se non c'è compensazione tra i momenti magnetici delle orbite elettroniche e degli spin. Per effetto

del disordine molecolare il momento magnetico medio può essere nullo. Distinguiamo in paramagnetici e diamagnetici gli atomi dotati o no di momento magnetico proprio. I metalli alcalino-terrosi sono diamagnetici. Infatti i loro stati elettronici sono completi e danno un momento totale (orbitale + spin) nullo. Gli atomi di Zn, Cd, Hg sono diamagnetici. Gli atomi alcalini e quelli di H, Cu, Ag, Au sono paramagnetici. Se l'unico elettrone non accoppiato è in uno stato s ($l = 0$) il momento orbitale è nullo e si ha solo momento di spin. Il momento totale è $\bar{J} = \bar{L} + \bar{S}$. Per valori dati di \bar{L} e \bar{S} , \bar{J} dipende in valore dalla orientazione relativa di \bar{L} ed \bar{S} . Poiché l'elettrone è carico il suo spin dovrebbe manifestarsi in un momento intrinseco $\bar{\mu}_S$. Se l'elettrone potesse essere descritto come un corpo rigido, carico e ruotante la relazione tra $\bar{\mu}_S$ ed \bar{S} potrebbe essere la stessa che tra $\bar{\mu}_L$ ed \bar{L} . Sperimentalmente si ha:

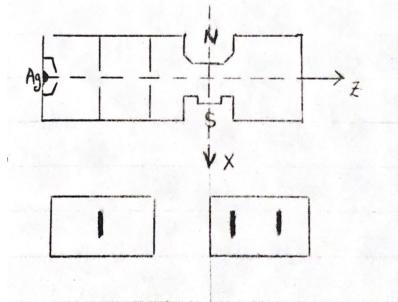
$$\bar{\mu}_S = -g_S \frac{e}{2m} \bar{S} \quad (g_S = 2,0024)$$

g_S è il rapporto giromagnetico dell'elettrone che prendiamo di valore 2. Allora si ha

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_L + \bar{\mu}_S = \frac{-e}{2m} (\bar{L} + g_S \bar{S})$$

μ dipende dai moduli e orientazione di \bar{L} ed \bar{S} .

Riscaldando Ag in un fornetto si possono produrre getti atomici nel vuoto costituiti da atomi nello stato fondamentale.



Facciamo passare il fascio attraverso due diaframmi e quindi tra i poli di un elettromagnete fatto in modo da creare un campo non omogeneo con elevato gradiente $\frac{\partial H}{\partial x}$ nella direzione del campo. Rileviamo la traccia in P per mezzo di qualche strumento. In assenza di campo osserviamo una traccia allungata secondo una direzione normale al piano della figura. Una volta applicato il campo, gli atomi corrono con velocità diverse e tutte le direzioni dei loro momenti magnetici sono ugualmente rappresentate malgrado la presenza del campo magnetico, perché gli elettroni subiscono la precessione di Larmor (ossia la rotazione degli assi attorno alla direzione del campo) ma la distribuzione

media dei loro assi non viene alterata. L'effetto di tale campo è di esercitare una forza

$$F_x = \mu_x \frac{\partial H}{\partial x}$$

sul dipolo magnetico la cui direzione e grandezza dipende dall'orientazione relativa del campo e di $\bar{\mu}$. Per esempio se il dipolo magnetico è orientato parallelamente al campo \bar{H} , esso tende a muoversi nella direzione in cui cresce e viceversa. Gli atomi idrogenoidi possiedono un momento orbitale nullo per cui il momento magnetico è di solo spin. Il fascio atomico è deviato con l'orientazione dipendente da $\bar{\mu}_S$ e quindi da \bar{S} . Se $\bar{\mu}$ potesse formare con \bar{H} un qualsiasi angolo θ , la forza proporzionale a $|\bar{\mu}_x| = |\bar{\mu}| \cos \theta$ varierebbe con continuità. La previsione classica è che si debba ottenere sulla lastra una macchia allungata nella direzione del campo con un massimo di intensità al posto del raggio non deviato. Invece, secondo la teoria quantistica, il raggio deve separarsi in due parti contenenti gli atomi con $\bar{\mu}$ orientato nel senso del campo od in senso contrario: nessun atomo percorrerà il tragitto rettilineo del raggio non deviato.

L'esperienza conferma la seconda ipotesi: si ottengono due macchie, si constata l'assenza di deposito dove il raggio non deviato incontra la lastra. Le due strisce, disposte simmetricamente rispetto alla striscia primitiva significano che $\bar{\mu}$ può assumere solo due orientamenti determinati: quelli paralleli al campo.

Per altri atomi si trova un numero finito di strisce. Il numero di orientazioni del vettore \bar{J} relativamente all'asse z è $g = 2s + 1$. Se $s = 1/2$.

Chiamato m_s il numero quantico magnetico corrispondente alla componente S_z si trova:

$$\begin{aligned} S^2 &= s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \quad (\hbar = \frac{h}{2\pi}) \\ S_z &= m_s \hbar \quad \text{ed} \quad m_s = \pm 1/2 \end{aligned}$$

7 Diffrazione di elettroni

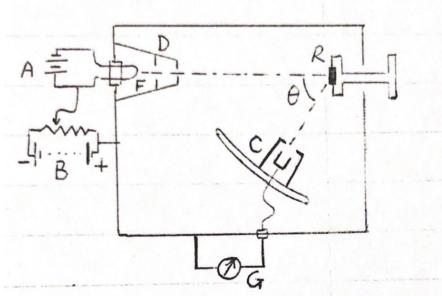
Il comportamento di un fascio di elettroni, atomi o molecole è governato da leggi simili a quelle che governano la propagazione di un fascio di onde elettromagnetiche. Queste onde, rappresentanti il fascio di elettroni, dette onde di De Broglie, hanno una lunghezza d'onda λ , dipendente dal momento p delle particelle, dato da:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

dove h è la costante di Planck. Per velocità alquanto inferiori rispetto alla velocità c della luce si ha:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

dove m è la massa a riposo della particella. Si può dedurre che, se la particella incontra un reticolo, deve essere rifratta come un fascio luminoso. Se per elettroni poco energetici si ha $\lambda \approx 1 \text{ \AA}$, la loro lunghezza d'onda è paragonabile a quella dei raggi X. Perciò l'ostacolo diffrangente deve essere un cristallo, proprio come per l'esperienza di Bragg. Vediamo ora l'esperimento di Davisson e Germer per determinare la lunghezza d'onda degli elettroni.

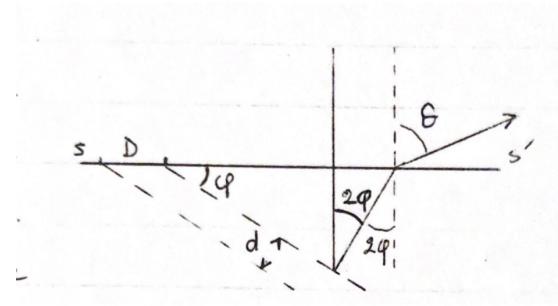


Gli elettroni emessi dal filamento incandescente F, sono accelerati da un campo stabilito tra F e il diaframma D da una batteria B. La velocità di tali elettroni è funzione del potenziale stabilito. Il diaframma serve a generare un fascio stretto di elettroni che incidono normalmente su R, un cristallo di nickel tagliato parallelamente alle facce dell'ottaedro. Gli elettroni vengono riflessi dal cristallo in tutte le direzioni e la loro distribuzione angolare viene studiata per mezzo di un pozzo di Faraday C, munito di una stretta apertura in modo da raccogliere solo elettroni provenienti da una determinata direzione. Esso è collegato a un galvanometro G. Per poter studiare la distribuzione a diversi azimuth è possibile ruotare il dispositivo che contiene il cristallo. Tutto è sottovuoto. Bisogna tener conto, a differenza dei raggi X, che l'elettrone all'interno del cristallo ha una lunghezza d'onda $\lambda' \neq \lambda$ (λ è il valore all'estero) a causa delle differenti velocità di propagazione (per i raggi X l'indice di rifrazione è 1, in pratica, per tutte le sostanze).

L'esperienza di Davisson e Germer permette la misura dell'indice di rifrazione per gli elettroni. μ è > 1 e tende ad uno con l'aumentare della velocità v . All'interno del cristallo si ha:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\mu}$$

Consideriamo un fascio di elettroni incidenti normalmente alla superficie SS' del cristallo. Scegliamo un piano attraverso il cristallo, formante un angolo φ con la superficie.



Esso e tutti i piani paralleli si comporta come una superficie riflettente in parte. Generalmente le onde piane interferiscono distruttivamente eccetto nel caso in cui λ assume un valore tale da soddisfare la relazione di Bragg:

$$n\lambda' = 2d \cos \varphi$$

dove d è la distanza tra i due piani adiacenti e n un intero, o se

$$n\lambda = 2d\mu \cos \varphi$$

in questo caso abbiamo riflessione selettiva.

Supponiamo che λ abbia uno di quei valori per i quali si ha riflessione, e guardiamo la direzione in cui le onde riflesse viaggiano nel cristallo. Lasciandolo, il fascio subisce una rifrazione ed il raggio emergente forma un angolo θ con la normale alla superficie dato da:

$$\sin \theta / \sin 2\varphi = \mu$$

Poiché 2φ è l'angolo di incidenza con la superficie, otteniamo

$$\sin \theta = 2\mu \sin \varphi \cos \varphi$$

Ma

$$\cos \varphi = \frac{n\lambda}{2d\mu}$$

e

$$\sin \theta = 2\mu \sin \varphi \frac{n\lambda}{2d\mu} = \frac{n\lambda}{d} \sin \varphi$$

Perciò

$$n\lambda = d \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}$$

Chiamando D la distanza tra le intersezioni dei due piani sulla superficie SS' si ha

$$d = D \sin \varphi$$

$$n\lambda = D \sin \theta$$

Misurando θ , se D è noto, possiamo conoscere λ .

Sebbene in un cristallo ci siano parecchi piani differenti, sono efficaci nella diffrazione solo quelli in cui gli atomi sono sufficientemente vicini. Quindi dirigendo il fascio normalmente alla superficie nel modo descritto, non avremo in generale un raggio diffratto se non nel caso in cui λ' ha un valore tale che, se moltiplicato per un intero n , sia coincidente con la costante caratteristica di un piano cristallino effettivo. Sperimentalmente si procede nel modo seguente. Fissato un valore del potenziale acceleratore e quindi la velocità delle particelle e la loro λ' , studiamo la distribuzione angolare del raggio riflesso per mezzo del collettore C posto in diverse posizioni. Variamo quindi il potenziale e ripetiamo tutto ciò fino a trovare un potenziale per cui vi è un massimo in una certa direzione, o anche finché la diffrazione non è sovrapposta alla diffusione. Dalla $n\lambda = D \sin \theta$ abbiamo la lunghezza d'onda λ corrispondente ad una sola velocità. da λ possiamo anche calcolare μ .

Sperimentalmente abbiamo che λ dipende dalla velocità v degli elettroni secondo la legge

$$\lambda = \frac{a}{mv}$$

dove a è una costante. la velocità v è legata al potenziale V attraverso la relazione

$$eV = \frac{1}{2}mv^2$$

Perciò

$$\lambda = \frac{a}{\sqrt{2em}} \frac{1}{\sqrt{V}}$$

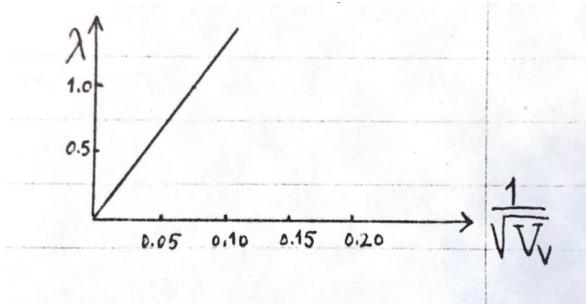
Se indichiamo con λ_A la lunghezza d'onda in Ångstrom e V_V il potenziale in Volts⁷

$$\lambda_A = 10^8 \sqrt{\frac{300}{2em}} \frac{a}{\sqrt{V_V}}$$

Misurando λ_A in funzione di V_V si ha

$$\lambda_A = \frac{12.25}{\sqrt{V_V}}$$

Sperimentalmente si ha con esperimenti di questo tipo e altri il seguente grafico:



La costante a ha perciò il valore

$$a = \sqrt{\frac{2em}{300}} 12.25 \cdot 10^{-8}$$

introducendo i valori di e ed m si ha

$$a = 6,624 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}$$

che è il valore della costante di Planck. Abbiamo perciò conferma sperimentale della relazione di De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Quale grandezza descrivente il fascio di elettroni con velocità v , dotata di lunghezza d'onda λ e quale significato fisico le si debba attribuire sarà oggetto di studio nei prossimi capitoli.

⁷ 300 è il fattore di conversione tra unità gaussiane e internazionali [ndc].

II

Onde e corpuscoli

1 Onda monocromatica

L'esperimento di Davisson e Germer ha messo in evidenza le caratteristiche ondulatorie degli elettroni. Con essi si possono realizzare fenomeni, ad esempio, di interferenza. Abbiamo visto che un fascio di elettroni diffondendo su un cristallo danno luogo a fenomeni diffrattivi interpretabili se si attribuisce all'elettrone di momento p una lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

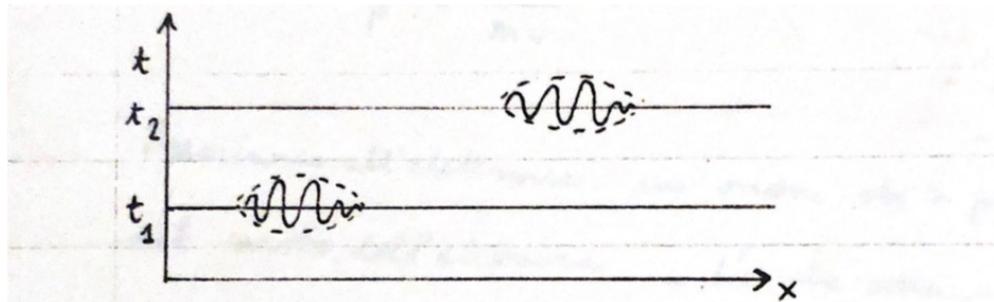
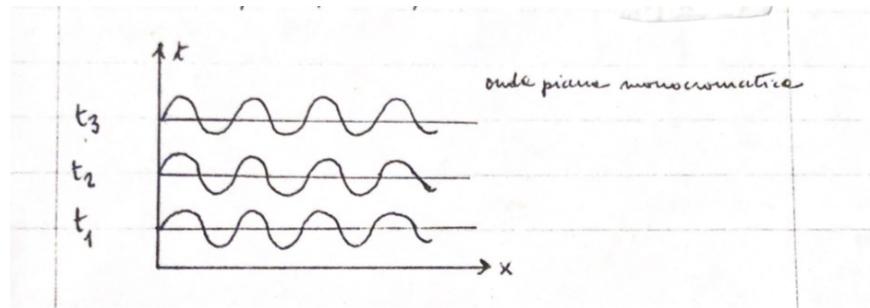
Associamo all'elettrone un'onda che si propaga nella direzione del moto dell'elettrone. L'onda associata all'elettrone di momento p sia un'onda piana di lunghezza d'onda λ , perciò monocromatica. Essa descrive lo stato di un sistema dinamico. Dovremo in seguito decidere quale significato fisico attribuire ad essa. L'onda ha questa espressione:

$$\begin{aligned}\Psi &= Ae^{i(kx-\omega t)} = Ae^{i2\pi(x/\lambda-t/T)} = Ae^{i\omega(\frac{kx}{\omega}-t)} \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}\end{aligned}$$

L'onda monocromatica ha una estensione spaziale infinita. Cioè ci vuole un tempo infinito per emetterla. L'onda monocromatica al tempo t_1 ha una estensione spaziale infinita, così al tempo t_2 e al tempo t_3 . La velocità di propagazione del fronte d'onda è la velocità di fase

$$u = \omega/k = \lambda\nu$$

Se invece lo stato della particella fosse descritto da un pacchetto d'onde, cioè una sovrapposizione di onde monocromatiche, potremmo osservare l'inviluppo che viaggia nello spazio, essendo il pacchetto di dimensioni finite:



Supponiamo che il pacchetto sia la sovrapposizione di due onde che differiscono di poco in frequenza l'una dall'altra, ma con ampiezza e fasi uguali:

$$\Psi_1 = A \sin(kx - \omega t)$$

$$\Psi_2 = A \sin((k + dk)x - (\omega + d\omega)t)$$

Componiamo le due onde ricordando che

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cos \frac{d\omega}{2} \left\{ \frac{x}{\frac{d\omega}{dk}} - t \right\} \sin \omega' \left\{ \frac{x}{\frac{\omega'}{k'}} - t \right\}$$

$$k' = k + \frac{dk}{2} \sim k \quad dk \ll k$$

$$\omega' = \omega + \frac{d\omega}{2} \sim \omega \quad d\omega \ll \omega$$

Il coseno modula l'ampiezza dell'onda portante. L'inviluppo della modulazione si muove con velocità di gruppo $v = \frac{d\omega}{dk}$. L'onda portante ha velocità di fase $u = \frac{\omega'}{k'} \sim \frac{\omega}{k}$. La trasmissione di energia avviene con la velocità di gruppo. Un treno d'onde infinitamente lungo, monocromatico perciò, non può essere usato per trasmettere informazioni alla sua velocità di fase.

2 Pacchetto d'onde

Supponiamo ora di avere un gruppo d'onde, cioè un insieme di onde monocromatiche di frequenza compresa tra $\nu_0 - \frac{1}{2}\Delta\nu$ e $\nu_0 + \frac{1}{2}\Delta\nu$. Avremo

$$\Psi(x, t) = \int_{\nu_0 - \frac{1}{2}\Delta\nu}^{\nu_0 + \frac{1}{2}\Delta\nu} a_\nu e^{2\pi i(kx - \nu t)} d\nu$$

Se $\Delta\nu$ è piccolo allora $a_\nu = a = \text{costante}$ e

$$\frac{1}{cT} = \frac{1}{\lambda} = k(\nu) = k = k_0 + \left(\frac{dk}{d\nu}\right)_0 (\nu - \nu_0)$$

Indico $(\nu - \nu_0) = \xi$:

$$\Psi(x, t) = ae^{2\pi i(k_0 x - \nu_0 t)} \int_{-\frac{1}{2}\Delta\nu}^{+\frac{1}{2}\Delta\nu} e^{2\pi i \left(\left(\frac{dk}{d\nu}\right)_0 \xi \right)} d\xi$$

che integrata dà:

$$\Psi(x, t) = \frac{a}{\pi} \frac{\sin \left\{ \pi \Delta\nu \left[\left(\frac{dk}{d\nu}\right)_0 x - t \right] \right\}}{\left(\frac{dk}{d\nu}\right)_0 x - t} e^{2\pi i(k_0 x - \nu_0 t)}$$

che è un treno d'onde monocromatico di frequenza ν_0 con ampiezza variabile e massima per

$$x = t \left(\frac{d\nu}{dk}\right)_0$$

Il massimo si sposta con velocità $v_g = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\nu}{dk}\right)_0 = v_{gruppo}$. La velocità di fase è:

$$\begin{aligned} v &= \lambda\nu, \quad \nu = v(k)k \\ \frac{v(k)k}{dk} &= \frac{d\nu}{dk} = v_g = v(k) + k \frac{dv(k)}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \end{aligned}$$

$\frac{dv}{d\lambda}$ determina la dispersione delle onde.

Se non c'è dispersione: $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ e $v = v_g$.

Per la luce $v = c$, $\frac{dc}{d\lambda} = 0$, $v = v_g$.

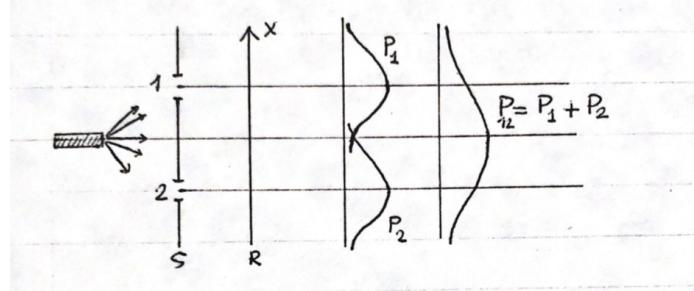
Per un'onda di De Broglie $\frac{dv}{d\lambda} \neq 0$, $p = \frac{h}{\lambda}$ e $v_g = v_{particella}$ Un gruppo d'onde si sposta con velocità di gruppo eguale alla velocità della particella.

Un pacchetto d'onde non costituisce una particella, ma la rappresenta poiché la probabilità di trovarla nella zona assegnata dal pacchetto è grande mentre è piccola o nulla al di fuori di esso. La velocità del pacchetto coincide con quella della particella.

3 Esperimenti ideali sul dualismo onda-corpuscolo

L'interpretazione probabilistica permette di unificare i concetti onda e corpuscolo. Vediamo un esperimento ideale su come questo avviene.

Supponiamo di avere un fucile che spari in tutte le direzioni e uno schermo avente due fenditure. Oltre lo schermo S c'è uno schermo rivelatore R che conta una pallottola alla volta. Cioè al rivelatore arriva soltanto un numero intero di pallottole. Si veda la figura seguente:



Se chiudiamo il foro 2 tenendo aperto il foro 1, ci sarà una probabilità massima di trovare la pallottola sul rivelatore nel punto da cui si congiunge perpendicolarmente il foro al rivelatore. La probabilità decresce in modo più o meno rapido a seconda della larghezza della fenditura 1. Chiamiamo P_1 la probabilità che venga raccolta una pallottola in x quando il foro 2 è chiuso. P_2 è la probabilità che venga raccolta una pallottola sul rivelatore quando è chiuso il foro 1. Se teniamo aperti entrambi i fori, la probabilità di trovare la pallottola in x sarà data dalla somma delle due probabilità:

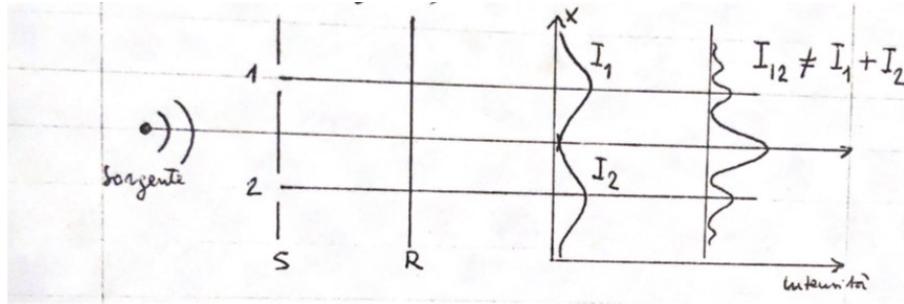
$$P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x)$$

Ripetiamo lo stesso esperimento con onde sferiche sonore. La larghezza delle fenditure sia dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda delle onde sferiche, oppure, per semplicità, anche maggiore. Allora abbiamo che se l'onda sferica ha equazione

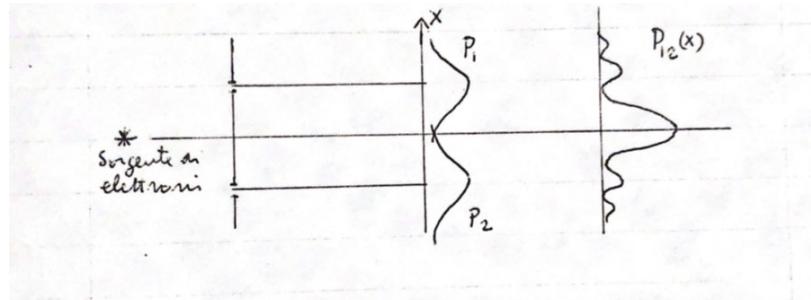
$$\begin{aligned} &ae^{i\omega t} \\ &I_1 = |a_1|^2 \quad \text{e} \quad I_2 = |a_2|^2 \\ &I_{12} = |a_1 + a_2|^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \end{aligned}$$

dove δ è la differenza di fase. Tenendo entrambi i fori aperti le due onde interferiscono (abbiamo trascurato fenomeni di diffrazione).

Esperimento analogo si può compiere con un fascio di elettroni provenienti da sinistra verso lo schermo S. Si ha che le particelle vengono rivelate come



corpuscoli, ma le loro distribuzioni obbediscono a leggi di tipo ondulatorio. Se $P(x)$ è la probabilità di trovare l'elettrone in x si ha che $P_{12}(x) \neq P_1 + P_2$. La figura di interferenza trovata, trascurando fenomeni di diffrazione, sugge-



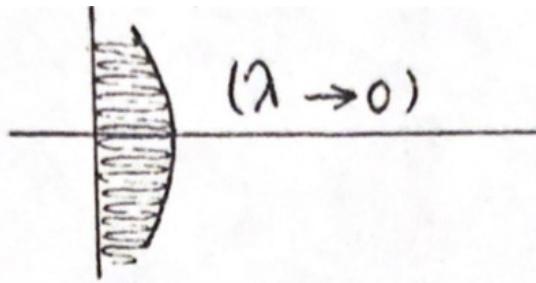
riscono di interpretare il fenomeno per mezzo di due numeri complessi $\Psi_1(\bar{r})$ e $\Psi_2(\bar{r})$. Poiché si è presentato un fenomeno di tipo ondulatorio associamo all'elettrone per descrivere il suo stato una funzione d'onda:

$$\Psi = \Psi_0 e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)}$$

Interpreto $|\Psi|^2$ come densità di probabilità cioè è la probabilità di trovare l'elettrone nel punto di coordinata \bar{r} . Perciò, così come per le onde sferiche l'intensità è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza dell'onda così avremo per P_1 , P_2 e P_{12} :

$$P_1 = |\Psi_1|^2, \quad P_2 = |\Psi_2|^2, \quad P_{12} = |\Psi_1 + \Psi_2|^2$$

Per quanto riguarda il primo esperimento con le pallottole, non si osservano figure di interferenza perché esse rappresentano sistemi macroscopici con λ molto piccole: $\lambda \rightarrow 0$. La distribuzione d'intensità è in questo caso mostrata nella figura:



4 Principio di indeterminazione

Se l'indeterminazione della particella è limitata ad una più piccola o più grande regione dello spazio, ciò avverrà a scapito della determinazione della velocità. Un pacchetto è infatti costituito da più onde e poiché la velocità della particella è legata alla lunghezza d'onda delle onde componenti dalla relazione:

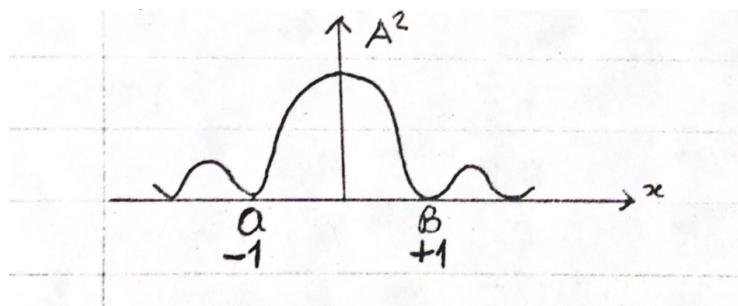
$$mv = p = \frac{h}{\lambda} = hk, \quad \text{si ha} \quad \Delta v = \frac{h}{m} \Delta k.$$

Quindi la velocità della particella è più o meno determinata a seconda del valore della larghezza Δk .

Si può far vedere che l'indeterminazione della velocità aumenta quando le dimensioni del pacchetto diminuiscono, cioè quanto più precisa è la posizione della particella.

Consideriamo un gruppo d'onde a una dimensione. L'ampiezza vale

$$A = \frac{a}{\pi} \frac{\sin \pi(\Delta k \cdot x - \Delta \nu \cdot t)}{\left(\frac{dk}{d\nu} \right)_0 x - t}$$



Per $t = 0$ A^2 è massimo per $x = 0$

Per $t = 0$ $A^2 = 0$ per $\Delta k \cdot x = \pm 1$

I punti a e b corrispondono, nella figura alle condizioni $\Delta k \cdot x = \pm 1$

Posto $ab = \Delta x$, che è la lunghezza effettiva del gruppo d'onde che determina l'indeterminazione spaziale, si ha $ab = \Delta x = x_1 - x_2$, perciò $\Delta kx_1 - \Delta kx_2 = 2$

Quindi: $\Delta k \Delta x \sim 1$

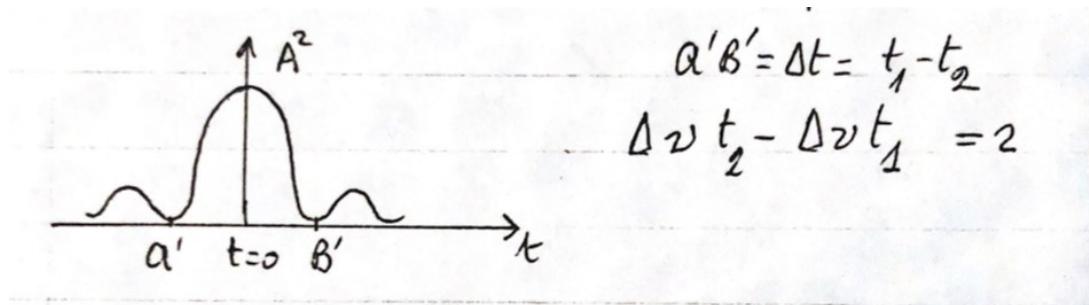
Ma $hk = p$ quindi $\Delta x \Delta p \sim h$, $\Delta x \Delta v \sim \frac{h}{m}$

Una seconda relazione viene dalla seguente considerazione.

Per $x = 0$ si ha A^2 massimo quando $t = 0$

In a' e in b' si ha $A^2 = 0$ per $\Delta v \cdot t = \pm 1$

$a'b' = t$ è una estensione temporale.



Quindi $\Delta v \Delta t \sim 1$. Ma $E = h\nu$

Perciò $\Delta E \Delta t \approx h$

In conclusione possiamo scrivere questa tabella:

Quando la velocità è esattamente determinata	l'onda associata è monocromatica	l'Aampiezza è costante la Posizione è completamente indeterminata
Quando la particella è esattamente localizzata	l'onda associata è un pacchetto di infinite onde piane con lunghezza d'onda compresa in un intervallo più o meno lungo	la velocità è indeterminata

La posizione di una particella è definita con precisione in un dato istante mediante un pacchetto d'onde, poiché la sua velocità è completamente indeterminata la sua posizione non sarà più così esattamente determinata in un istante successivo e le posizioni susseguenti risulteranno affette da una imprecisione sempre maggiore. Perciò non ha senso in meccanica quantistica il concetto classico di traiettoria.

Per una indeterminazione di $10^{-7} \text{ gr} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ per il momento, si ha una indeterminazione nella coordinata di 10^{-20} cm , grandezza certamente non misurabile macroscopicamente.

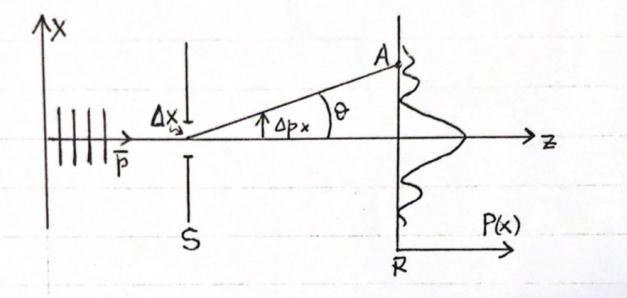
L'indeterminazione è insita nella natura stessa della teoria ondulatoria.

La luce irradiata dagli atomi durante le transizioni elettroniche è rappresentata da un treno d'onde finite che corrisponde alla vita media dello stato. Piuttosto che una singola frequenza emessa c'è un certo intervallo continuo di frequenze emesse. Le vite medie sono dell'ordine, in questo caso di 10^{-8} secondi. Più lunga è la vita media dell'atomo più poche sono le frequenze che compaiono nella linea spettrale.

5 Esperimenti fondamentali ideali per il principio di indeterminazione

Supponiamo di avere uno schermo S munito di un foro di ampiezza Δx . Un fascio di particelle (elettroni) arriva a S da sinistra lungo l'asse z.

Prima dello schermo non conosciamo né posizione, né impulso degli elettroni. Essi sono rilevati sullo schermo R. Nel punto A arriva l'elettrone. La sua posizione è determinata dalla distribuzione di probabilità $P(x)$. Nota l'ampiezza della funzione d'onda dell'elettrone si può conoscere $P(x)dx$ cioè la probabilità che la particella si trovi in A con indeterminazione Δx .



Quando l'elettrone attraversa il foro subisce una variazione del suo impulso. Assume una componente lungo x

$$\Delta p_x = p \sin \theta$$

mentre prima era zero. Cioè è come se il foro avesse impresso alla particella un impulso trasversale Δp_x . Per la legge di Bragg si ha:

$$\Delta x \sin \theta = n \frac{\lambda}{2\pi}, \quad \text{con } n \text{ intero.}$$

Al variare di n si hanno i valori di θ per i quali si hanno i massimi di $P(x)$. Sostituendo nella relazione di Bragg $\lambda = \hbar/p$ e $\Delta p_x = p \sin \theta$, si ha:

$$\Delta x \Delta p \frac{1}{p} = n \frac{\hbar}{2\pi p}, \quad \Delta x \Delta p_x = n\hbar$$

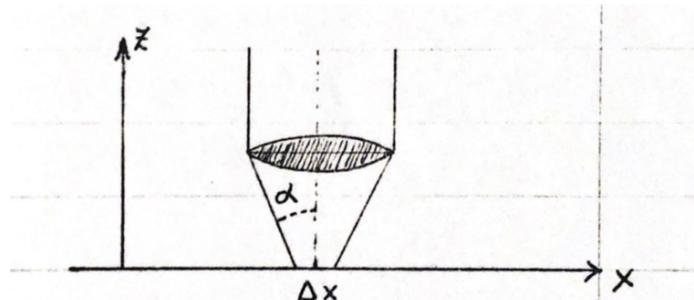
La determinazione della posizione della particella con una incertezza Δx è ottenuta al prezzo di imprimerle un impulso trasversale Δp_x dell'ordine di $\hbar/\Delta x$.

Come secondo esperimento ideale consideriamo, dopo la diffrazione di elettroni, il microscopio.

Supponiamo di avere un elettrone che giace sull'asse x. Il modo con cui possiamo osservarlo è quello di illuminarlo con della luce ed osservare la diffusione attraverso un microscopio. Cioè osserviamo la diffusione di un fotone da parte di un elettrone. La posizione dell'elettrone osservato al microscopio attraverso la diffusione del fotone è determinata con un errore dell'ordine del potere risolutivo del microscopio:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \alpha}$$

Δx è piccolo se λ è piccolo. Conviene usare luce con lunghezza d'onda piccola,



quindi con impulso grande: $p = \hbar/\lambda$. Se p è grande il rinculo dell'elettrone è grande. Il suo impulso subisce una variazione Δp . Se il fotone ha impulso $\hbar\nu/c$ lungo l'asse x, l'impulso dovrà subire una variazione

$$\Delta p_x = \frac{\hbar\nu}{c} \sin \alpha \quad \text{e quindi} \quad \Delta x \Delta p_x \approx \hbar$$

III

Equazione di Schrödinger

1 Introduzione

Nel 1926 Schrödinger formulò una equazione generale per sistemi di particelle in meccanica ondulatoria. Questa equazione, applicata all'atomo di idrogeno, fornisce i possibili valori dei livelli energetici dell'elettrone.

L'insieme di questi livelli energetici formano una successione discreta. Si ritrovano così gli stati stazionari di Bohr. Ad ogni "autovalore" dell'energia corrisponde in questa teoria una "autofunzione" la quale definisce la distribuzione dell'elettrone nello spazio. Si trova così che l'orbita più probabile è l'orbita di Bohr, che è un'orbita circolare. Ma essa è solo la distribuzione più probabile, poiché l'elettrone può anche trovarsi al di fuori di questa orbita.

2 Trattazione matematica

Sia data la funzione $\Psi(x, t)$, funzione d'onda descrivente lo stato di una partecella libera. Noi determiniamo ora l'equazione a cui la $\Psi(x, t)$ deve soddisfare. Supponiamo che la $\Psi(x, t)$ sia una onda monocromatica. Stiamo trattando il caso unidimensionale, Abbiamo allora:

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 e^{2\pi i(kx - \nu t)} \quad (\Psi_0 \text{ ampiezza dell'onda})$$

Possiamo avvalerci delle relazioni:

$$\begin{aligned} E &= h\nu && \text{(relazione di Einstein)} \\ \lambda &= h/p && \text{(lunghezza d'onda di De Broglie)} \end{aligned}$$

Abbiamo definito

$$k = 1/\lambda, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Se deriviamo $\Psi(x, t)$ rispetto a x si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) = 2\pi i k \Psi(x, t)$$

Abbiamo anche

$$k = p_x/h = 1/\lambda \quad (p_x \text{ impulso unidimensionale})$$

Moltiplichiamo $\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t)$ per $h/(2\pi i)$, si ha allora

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) = p_x \Psi(x, t)$$

Questa è una equazione agli autovalori perché abbiamo un operatore $(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x})$ che agendo sulla $\Psi(x, t)$, riproduce la $\Psi(x, t)$ a meno di una costante moltiplicativa (p_x impulso lungo x della particella). Data dunque l'eq. di sopra possiamo determinare gli autovalori dell'impulso lungo x , p_x definendo come operatore impulso \hat{P}_x (corrispondente ad una grandezza fisica misurabile)

$$\hat{P}_x = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \right)$$

\hat{P}_x è un operatore hermitiano.

Abbiamo infine:

$$\hat{P}_x \Psi(x, t) = p_x \Psi(x, t)$$

Deriviamo ora $\Psi(x, t)$ rispetto al tempo, t . Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -2\pi i \nu \Psi(x, t)$$

Moltiplicando per $-\frac{h}{2\pi i}$ abbiamo

$$\begin{aligned} -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) &= h\nu \Psi(x, t) = E\Psi(x, t) \\ -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) &= E\Psi(x, t) \end{aligned}$$

Ponendo $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ (operatore energia), si ha:

$$\hat{E}\Psi(x, t) = E\Psi(x, t)$$

L'operatore $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ agisce sulla $\Psi(x, t)$ e la riproduce a meno di una costante E che è l'energia della particella. Se l'energia della particella è solo energia cinetica perché la particella è libera cioè si muove in un campo in cui il potenziale è nullo ($V = 0$), abbiamo

$$E = \frac{p_x^2}{2m}$$

$$\hat{p}_x^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \hat{E} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Perciò:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

L'equazione descrive il moto rettilineo di una particella libera; è una equazione del secondo ordine in x e t la cui soluzione è $\Psi(x, t)$.

Il fatto che la particella abbia solo energia cinetica, cioè il suo moto è quello di una particella libera, è strettamente connesso con la monocromaticità della funzione d'onda descrivente lo stato della particella. Particella libera significa che nel suo moto essa non incontra nessun ostacolo perché viaggia in un campo privo di forze. Rappresenta perciò un sistema "ideale".

Se la particella si muove in un campo di forze $F(x, t)$ derivabile da un potenziale V : $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$, l'operatore corrispondente all'energia totale del sistema è quello corrispondente all'hamiltoniana H . Si ha:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}_x^2}{2m} + \hat{V}(x, t)$$

$$\hat{H}\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{V}(x, t) \right) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

Questa è l'equazione dipendente dal tempo dello stato dinamico unidimensionale di una particella sottoposta ad un campo di forze.

L'eq. di sopra non è una equazione agli autovalori. Si chiama equazione di Schrödinger dipendente dal tempo. Nel caso tridimensionale l'equazione di Schrödinger diventa

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, y, z, t) + \hat{V}(x, y, z, t) \Psi(x, y, z, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, y, z, t)$$

Poiché la $\Psi(x, t)$ deve avere un certo significato fisico, essa deve avere un "buon comportamento". Di tutte le possibili soluzioni dell'eq. di Schrödinger sono accettate solo quelle che hanno significato fisico, che tratteremo tra breve. Noi intanto diciamo che siamo interessati a soluzioni tali che $\Psi(x, y, z, t)$ assieme a $\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z}$, siano finite, continue e ad un sol valore.

3 Interpretazione probabilistica della funzione d'onda

Consideriamo un'onda elettromagnetica di data lunghezza d'onda λ . Se incontra un ostacolo confrontabile con la sua lunghezza d'onda otteniamo uno

spettro di diffrazione la cui intensità I è proporzionale al quadrato del modulo dell'ampiezza dell'onda incidente:

$$\text{se } a \text{ è l'ampiezza : } I = |a|^2$$

Per analogia: se consideriamo l'onda elettromagnetica come flusso di fotoni, allora I è proporzionale al numero di fotoni che arrivano sullo schermo; un numero variabile a seconda dell'angolo θ rispetto alla direzione incidente, a cui vengono osservati.

Ora la $\Psi(x, t)$ descrive il moto di una particella ed è caratterizzata da una data lunghezza d'onda, nello stesso modo in cui l'onda elettromagnetica descrive il moto dei fotoni. Perciò se $\Psi_0(x)$ è l'ampiezza della funzione d'onda che descrive la particella essendo

$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x) e^{2\pi i(kx - \nu t)}$$

allora $|\Psi_0(x)|^2$ è la probabilità che la particella considerata si trovi nel punto di coordinata x .

Consideriamo la funzione coniugata di Ψ :

$$\Psi^*(x, t) = \Psi_0 e^{-2\pi i(kx - \nu t)}$$

Allora $\Psi\Psi^* = |\Psi_0|^2 = |\Psi|^2$ è la probabilità che la particella, in un certo istante t si trovi in un punto di coordinata x .

La funzione $\Psi(x, y, z, t)$ non ha un significato fisico diretto mentre:

$|\Psi|^2 dV$ rappresenta la probabilità che l'elettrone si trovi nell'elemento di volume $dV = dx dy dz$, e

$|\Psi|^2$ è la densità di probabilità, cioè la probabilità per unità di volume.

Poiché la particella si trova comunque, sempre in qualche parte dello spazio, la probabilità totale, cioè la probabilità estesa a tutto lo spazio è la certezza, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, t) \Psi^*(x, t) dx = 1$$

e nel caso tridimensionale

$$\int_{\text{tutto lo spazio}} \Psi \Psi^* dV = 1$$

Le relazioni scritte sopra si chiamano anche condizioni di normalizzazione.

Conoscere la funzione d'onda Ψ di un elettrone in meccanica quantistica equivale alla conoscenza dell'orbita in meccanica classica. In meccanica classica l'equazione dell'orbita si ottiene risolvendo le equazioni del moto, così in meccanica quantistica la funzione d'onda si ottiene risolvendo l'equazione di Schrödinger.

4 Equazione di Schrödinger indipendente dal tempo

Supponiamo di avere un potenziale che non dipende dal tempo:

$$V = V(x, y, z)$$

Allora la $\Psi(\bar{r}, t)$ (\bar{r} è la coordinata della particella) soluzione dell'equazione del moto può essere scritta come prodotto di una funzione puramente spaziale per una puramente temporale (metodo di separazione delle variabili):

$$\Psi(\bar{r}, t) = u(\bar{r})f(t)$$

L'equazione di Schrödinger diventa:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\bar{\nabla}^2\Psi(\bar{r}, t) + V(x, y, z, t)\Psi(\bar{r}, t) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\bar{r}, t) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}f(t)\bar{\nabla}^2u(\bar{r}) + Vf(t)u(\bar{r}) &= i\hbar u(\bar{r})\frac{\partial f(t)}{\partial t} \end{aligned}$$

dividendo per $u(\bar{r})f(t)$ si ottiene:

$$\frac{1}{u}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\bar{\nabla}^2u + Vu\right) = i\frac{\hbar}{f}\frac{\partial f(t)}{\partial t}$$

Il primo membro dell'ultima eq. dipende solo dalle coordinate x, y, z ; mentre il secondo membro dipende solo dal tempo. Essi sono uguali fra loro solo se entrambi sono eguali ad una costante che chiamiamo E . Si ha

$$i\frac{\hbar}{f}\frac{\partial f(t)}{\partial t} = E \quad (E \text{ è una costante che deve avere le dimensioni di una energia})$$

da cui

$$f(t) = Ce^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

Il primo membro sempre della stessa eq. dà invece che

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\bar{\nabla}^2u(\bar{r}) + V(x, y, z)u(\bar{r}) = Eu(\bar{r})$$

Questa è una equazione stazionaria. È l'equazione di Schrödinger, indipendente dal tempo.

Possiamo scrivere

$$\Psi(\bar{r}, t) = Cu(\bar{r})e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$$

La quale eq. può anche scriversi come

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\bar{\nabla}^2 + V\right]u = Eu.$$

L'operatore $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]$ è un operatore che agendo sulla $u(\bar{r})$ riproduce la $u(\bar{r})$ a meno di una costante E . L'operatore $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]$ corrisponde all'operatore hamiltoniano H . Perciò l'equazione stazionaria

$$Hu = Eu$$

è un'equazione agli autovalori e autofunzioni.

Se $V(x, y, z)$ è indipendente dal tempo anche $\Psi\Psi^*$ è indipendente dal tempo perché:

$$\begin{aligned} \Psi\Psi^* &= u(\bar{r})u(\bar{r})^*CC^*e^{-i\frac{Et}{\hbar}}e^{i\frac{Et}{\hbar}} = u(\bar{r})u(\bar{r})^* \\ &\quad (C \text{ ha modulo } 1) \end{aligned}$$

Perciò la probabilità di osservare la particella nel punto di coordinata \bar{r} è indipendente dal tempo.

5 Equazione stazionaria in una dimensione

Consideriamo un'equazione di questo tipo (a questo stesso tipo appartiene l'equazione di Schrödinger stazionaria)

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + [\lambda + \alpha(x)]u(x) = 0$$

o anche

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \alpha(x)\right]u(x) = \lambda u(x)$$

Se $u_1(x)$ ed $u_2(x)$ sono due integrali particolari linearmente indipendenti, l'integrale generale è dato da

$$u(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie.

Per determinare il valore di c_1 e di c_2 devono esistere delle condizioni al contorno. Supponiamo che la particella sia obbligata a stare dentro un intervallo $a - b$ (dentro una scatola nel caso tridimensionale), allora:

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx = 1$$

La condizione di normalizzazione impone, affinché l'integrale sia finito, che

$$u \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad x \rightarrow a \quad \text{e} \quad x \rightarrow b$$

Cioè: $u(a) = 0, \quad u(b) = 0$

Questo significa che in a e in b la $u(x)$ deve assumere gli stessi valori e così pure la derivata prima:

$$u'(a) = u'(b)$$

Le condizioni al contorno sono espresse così

$$\begin{cases} u(a) = u(b) \\ u'(a) = u'(b) \end{cases} . \quad \text{Si ha :} \begin{cases} c_1 u_1(a) + c_2 u_2(a) = 0 \\ c_1 u_1(b) + c_2 u_2(b) = 0 \end{cases}$$

Questo ultimo è un sistema omogeneo in due equazioni e due incognite c_1 e c_2 .

Quindi

$$D(\lambda) = \det \lambda = \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix} = 0$$

$D(\lambda) = 0$ è un'equazione di 2° grado in u_1 ed u_2 . Da questa si possono ottenere i possibili valori di λ cioè gli autovalori dell'equazione di partenza. Questo metodo lo si applica per l'eq. di Schrödinger.

6 Ortogonalità delle funzioni d'onda

Consideriamo l'equazione di Schrödinger stazionaria in una dimensione:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_n}{dx^2} + V u_n = E_n u_n$$

dove u_1, \dots, u_n, \dots sono le autofunzioni ed E_1, \dots, E_n, \dots i possibili autovalori.

L'eq. di Schrödinger relativa all'autofunzione u_m^* sia

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_m^*}{dx^2} + V u_m^* = E_m u_m^*$$

Moltiplichiamo la 1^a eq. per u_m^* e la 2^a eq. per u_n

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_n}{dx^2} u_m^* + V u_n u_m^* &= E_n u_n u_m^* \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_m^*}{dx^2} u_n + V u_m^* u_n &= E_m u_m^* u_n \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene:

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_n}{dx^2} u_m^* + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_m^*}{dx^2} u_n &= E_n u_n u_m^* - E_m u_m^* u_n \\
\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2 u_m^*}{dx^2} u_n - \frac{d^2 u_n}{dx^2} u_m^* \right) &= (E_n - E_m) u_m^* u_n \\
\frac{d^2 u_n}{dx^2} u_m^* - \frac{d^2 u_m^*}{dx^2} u_n &= \frac{2m}{\hbar^2} (E_m - E_n) u_m^* u_n
\end{aligned}$$

Integrando da $-\infty$ a $+\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(u_m^* \frac{du_n}{dx} - u_n \frac{du_m^*}{dx} \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2m}{\hbar^2} (E_m - E_n) u_m^* u_n dx$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\left[u_m^* \frac{du_n}{dx} - u_n \frac{du_m^*}{dx} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

poiché $u_m^* \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pm\infty$, $u_n \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pm\infty$ per le condizioni di normalizzazione. Perciò si ha

$$\begin{aligned}
\frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (E_m - E_n) u_m^* u_n dx &= 0 \\
\frac{2m}{\hbar^2} (E_m - E_n) \int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* u_n dx &= 0
\end{aligned}$$

Le funzioni u_m ed u_n sono due autofunzioni qualunque che corrispondono a due autovalori distinti per cui se $m \neq n$, $E_m \neq E_n$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} u_m^* u_n dx = 0$. Autofunzioni, corrispondenti ad autovalori distinti, di una equazione di Schrödinger sono tra loro ortogonali. Esse formano un insieme di funzioni ortonormali. Esse formano un insieme completo. Se lo stato dinamico di un sistema è una funzione u qualunque essa può sempre essere scritta come combinazione lineare di autofunzioni u_n formanti un set completo.

$$u = \sum_n c_n u_n$$

dove c_n sono dei coefficienti opportuni.

Riassumiamo: data l'eq. di Schrödinger stazionaria

$$\nabla^2 \Psi(\bar{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \Psi(\bar{r}) = 0$$

dove E deve avere un valore costante e definita

$$\Psi(\bar{r}, t) = \Psi(\bar{r}) e^{-i \frac{Et}{\hbar}}$$

essa soddisfa all'eq. dipendente dal tempo.

A ciascun autovalore E_n corrisponde una autofunzione $\Psi_n(\bar{r})$ che formano un

insieme ortonormale e completo. Allora una generica funzione $\Psi(\bar{r}, t)$ si può scrivere così:

$$\Psi(\bar{r}, t) = \sum_n c_n \Psi_n e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}}$$

dove $c_n = \int \Psi(\bar{r}, t) \Psi_n^* e^{i \frac{E_n t}{\hbar}} d\bar{r}$

Si ha pure

$$\int |\Psi|^2 d\bar{r} = \sum_n |c_n|^2$$

Per le condizioni di normalizzazione abbiamo

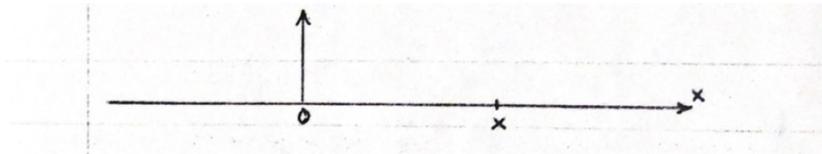
$$\sum_n |c_n|^2 = 1$$

che è anche la relazione di completezza.

7 Corrente di probabilità

Essendo $P = |\Psi|^2$ la densità di probabilità si ha che $\frac{dP}{dt} = f(\Psi)$ è il flusso di probabilità espresso mediante le autofunzioni.

Consideriamo una particella che si muove parallelamente all'asse x nel verso che va da $-\infty$ a $+\infty$



Se fissiamo un certo valore x , la probabilità di trovare la particella a sinistra di x in un certo istante t è

$$P_s = \int_{-\infty}^x \Psi^* \Psi dx$$

Ricordiamo che Ψ è normalizzata ad 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi dx = 1$$

Una diminuzione di P_s significa un aumento di probabilità di trovare la particella a destra. Si può perciò parlare di flusso di probabilità. Flusso di probabilità è collegato alla variazione temporale della probabilità.

L'incremento di probabilità di trovare la particella a destra di x è dato da:

$$\frac{dP_d}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^x \Psi^* \Psi dx = -\int_{-\infty}^x \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) dx$$

Ricordiamo che l'eq. di Schrödinger temporale è

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

e quella per Ψ^* è invece

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + V\Psi^*$$

Moltiplicando la prima eq. per Ψ^* e la seconda per Ψ e poi sottraendo:

$$\begin{aligned} i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi \right) \Psi^* &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Psi^* + V\Psi \Psi^* \\ -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right) \Psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi + V\Psi^* \Psi \\ i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi \right) \Psi^* + i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right) \Psi &= i\hbar \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Psi^* - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi \right) \end{aligned}$$

Perciò

$$\frac{dP_d}{dt} = -\frac{\hbar}{2im} \int_{-\infty}^x \left(\Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} - \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) dx$$

Integrando per parti

$$\frac{dP_d}{dt} = -\frac{\hbar}{2im} \left\{ \left[\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right]_{-\infty}^x - \left[\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]_{-\infty}^x - \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} dx \right\}$$

Poiché $\Psi \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \infty$ i due integrali definiti tendono a zero; perciò in conclusione si ha

$$\frac{dP_d}{dt} = -\frac{\hbar}{2im} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

Posto perciò

$$P = \Psi \Psi^* \quad \text{e} \quad \vec{j} = -\frac{\hbar}{2im} \left(\Psi \vec{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \vec{\nabla} \Psi \right)$$

avremo¹

$$\frac{\partial}{\partial t} P = -\operatorname{div} \vec{j}$$

che è una equazione di continuità analoga a quella del moto dei fluidi (\vec{j} si può interpretare come densità di corrente di probabilità).

¹ Precisamente consegue dal teorema di Green: $\nabla \cdot (f \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g$ [ndc].

8 Trasformate di Fourier

Riportiamo, qui nel testo, i risultati principali relativi alla tecnica matematica che va sotto il nome di tecniche di Fourier. Rimandiamo all'appendice per i dettagli. Queste tecniche saranno utilizzate nel prossimo paragrafo.

a) Qualunque funzione $f(x)$ di x reale o complessa definita in $(-\pi \leq x \leq \pi)$ può essere sviluppata in serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin nx$$

Usando la relazione: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, si ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{inx}$$

Moltiplicando per e^{-imx} ed integrando tra $-\pi$ e $+\pi$ ²

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} A_n e^{i(n-m)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A_m 2\pi$$

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx$$

Cambio dominio $-\pi a \leq x \leq \pi a$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{i\frac{n}{a}x}$$

$$aA_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi a}^{\pi a} f(x) e^{-i\frac{n}{a}x} dx$$

Introduciamo la nuova variabile $k \equiv \frac{n}{a}$ e la funzione $F(k) \equiv aA_n$ così somme su n diventano integrali su k . Si ha:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

che sono le trasformate di Fourier. Esse esistono solo per funzioni a quadrato integrabili: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$.

In tre dimensioni abbiamo

² ...e sfruttando la relazione $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = 2\pi\delta_{0k}$ per k intero [ndc].

$$f(\bar{r}) = (1/2\pi)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\bar{k}) e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} d\bar{k}$$

$$F(\bar{k}) = (1/2\pi)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{r}) e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}} d\bar{r}$$

b) Sempre in appendice si trova in dettaglio trattata la funzione delta di Dirac:

$$\delta(k) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx \quad \begin{cases} \delta(k) = 0 & k \neq 0 \\ \delta(k) = \infty & k = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k) dk = 1 \end{cases}$$

Altre proprietà sono:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \delta(-x) \\ \int f(x) \delta(x-a) dx &= f(a) \\ \delta(ax) &= \frac{1}{a} \delta(x) \quad a > 0 \\ \int \delta(x-x') \delta(x'-x_0) dx &= \delta(x-x_0) \\ f(x) \delta(x-a) &= f(a) \delta(x-a) \end{aligned}$$

9 Operatori e valori medi di grandezze fisiche

a) Nel discutere dell'equazione di Schrödinger, abbiamo visto che data la funzione d'onda

$$\Psi = \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar} \bar{P} \cdot \bar{r} - \frac{iEt}{\hbar}}$$

l'operatore di Laplace, applicato ad essa, la riproduce a meno del fattore $-p^2/\hbar^2$, cioè:

$$-\hbar^2 \nabla^2 \Psi = -\hbar^2 \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \Psi = p^2 \Psi$$

L'operatore $-\hbar^2 \nabla^2$ ha il quadrato del momento di una particella come autovalore e Ψ come autofunzione. Diciamo allora che associamo al momento di una particella l'operatore \bar{P} proporzionale a $\bar{\nabla}$.

Precisamente:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= -i\hbar \bar{\nabla} = -i\hbar \text{grad} \\ P_x &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

e

$$-i\hbar\bar{\nabla}\Psi = \bar{P}\Psi$$

Per la grandezza fisica coordinata di una particella abbiamo che l'operatore posizione è il vettore \vec{r} stesso, la componente lungo x è x , il quadrato della componente è x^2 . Si ha l'equazione agli autovalori:

$$\bar{r}\Psi = \bar{r}_0\Psi$$

\bar{r}_0 è l'autovalore che è perciò un vettore costante mentre l'operatore \bar{r} è una variabile. L'autofunzione non è altro che $\Psi = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

L'autofunzione di \bar{P} e l'autofunzione di \bar{r} sono una la trasformata di Fourier dell'altra.

Dall'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo abbiamo visto che l'operatore energia è

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

b) Supponiamo di avere molti sistemi fisici perfettamente identici cioè descritti da funzioni d'onda identiche. Consideriamone uno e misuriamo se una certa particella si trova in un certo elemento di volume dV o no. La risposta è sì o no. Ripetiamo la stessa misura per tutti gli altri sistemi considerati. Le risposte saranno ancora sì o no. Il numero di volte che è stata trovata la particella nell'elemento di volume dV è la probabilità che la particella si trovi in quell'elemento di volume. Noi abbiamo dato a $|\Psi|^2 dV$ il significato di probabilità che la particella si trovi nell'elemento di volume dV . La funzione Ψ è normalizzata, cioè:

$$\int |\Psi|^2 dV = 1$$

La particella ha una certa probabilità di trovarsi in x_1 , un'altra probabilità di trovarsi ad esempio in x_2 , e così via. I valori x_1, x_2 eccetera possono essere distribuiti in modo continuo. Se devo allora definire il valore medio della coordinata x della particella ho:

$$\text{valore medio di } x = \langle x \rangle = \int x \cdot (\text{probabilità che la particella si trovi in }) dV$$

$$\langle x \rangle = \int x |\Psi|^2 dV$$

Questa è la media di un numero di misure molto grande della coordinata x fatta su un insieme molto grande di sistemi perfettamente identici. Scriveremo $\langle x \rangle$ nella forma

$$\langle x \rangle = \int \Psi^* x \Psi d\bar{r}$$

Calcoliamo ora il valor medio della componente lungo x del momento della particella. Sviluppiamo la funzione d'onda in onde piane utilizzando le tecniche di Fourier (integrale di Fourier):

$$\Psi = (1/2\pi)^{3/2} \int \Psi(\bar{k}) e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} d\bar{k}, \quad \bar{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$$

Questa equazione è valida ad un dato tempo t . Poiché Ψ è normalizzata ad uno si ha

$$\int |\Psi(\bar{k})|^2 d\bar{k} = 1$$

$|\Psi(\bar{k})|^2$ è la probabilità per unità di volume nello spazio delle \bar{k} , che una particella abbia un dato momento. Perciò il valor medio di una data componente del momento è:

$$\langle p_x \rangle = \int |\Psi(\bar{k})| p_x d\bar{k}$$

Questo valor medio è calcolato nello spazio \bar{k} . Può essere trasformato in un integrale sullo spazio ordinario delle coordinate partendo dall'equazione agli autovalori del momento:

$$\begin{aligned} \hat{P}\Psi &= -i\hbar\bar{\nabla}\Psi = \bar{p}\Psi \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \Psi(\bar{k}) p_x e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} d\bar{k} \end{aligned}$$

Moltiplico per Ψ^* ed integro su tutto lo spazio, ricordando che

$$\begin{aligned} \Psi^* &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \Psi^*(\bar{k}') e^{-i\bar{k}'\cdot\bar{r}} d\bar{k}' \\ \int \Psi^* \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi d\bar{r} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \Psi^*(\bar{k}') \Psi(\bar{k}) p_x e^{-i(\bar{k}-\bar{k}')\cdot\bar{r}} d\bar{k} d\bar{k}' d\bar{r} \\ &= \int \Psi^*(\bar{k}') \Psi(\bar{k}) \delta(\bar{k} - \bar{k}') p_x d\bar{k} d\bar{k}' \\ &= \int |\Psi(\bar{k})|^2 p_x d\bar{k} \end{aligned}$$

In conclusione

$$\int |\Psi(\bar{k})|^2 p_x d\bar{k} = \langle p_x \rangle = \int \Psi^* \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi d\bar{r}$$

Il valor medio di p_x può essere calcolato nello spazio delle p (o delle k) con funzioni d'onda dello spazio p , oppure può essere calcolato nello spazio delle x assegnandogli l'espressione operatoriale $(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})$, con funzioni d'onda dello

spazio- x . Analogamente il valor medio di x può essere calcolato con le Ψ nello spazio - x , oppure gli si può assegnare l'espressione $(-i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x})$ e calcolarlo nello spazio k con le funzioni d'onda $\Psi(k)$, trasformate di Fourier delle Ψ .

Poiché la funzione d'onda è una soluzione dell'equazione di Schrödinger e perciò è funzione dello spazio e del tempo, anche i valori medi sono funzioni del tempo. Ad un dato tempo t una misura o di x o di p_x è fatta su un insieme di particelle descritte da una funzione d'onda comune. La media delle misure è data da $\langle x \rangle$ e $\langle p_x \rangle$. Dopo che la misura è stata eseguita l'insieme è risultato disturbato e perciò per una successiva misura sul sistema bisognerà adoperare un'altra funzione d'onda.

Supponiamo di avere come funzione d'onda nello spazio delle x la seguente

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{\gamma}{\pi\epsilon} \right)^{1/4} e^{-\gamma \frac{x^2}{2\epsilon}} \quad (\epsilon = \hbar\omega)$$

$\Psi_0(x)$ è una funzione gaussiana. Calcoliamo facilmente che:³

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int \Psi_0^*(x) x \Psi_0(x) = 0 \\ \langle x^2 \rangle &= \int \Psi_0^*(x) x^2 \Psi_0(x) = \frac{\epsilon}{2\gamma} \\ \langle p_x \rangle &= \int \Psi_0^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi_0(x) = 0 \\ \langle p_x^2 \rangle &= \int \Psi_0^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Psi_0(x) = \frac{m\epsilon}{2} \\ \langle H \rangle &= \langle \frac{p_x^2}{2m} + V(x) \rangle = \langle \frac{p_x^2}{2m} + \frac{\gamma}{2} x^2 \rangle = \frac{\epsilon}{2} \quad (\text{nel caso di potenziale armonico}) \end{aligned}$$

La Trasformata di Fourier di una gaussiana è ancora una gaussiana, di larghezza inversamente proporzionale alla larghezza della prima. Perciò è facilmente calcolabile $\Psi_0(k)$ con cui si possono calcolare ancora tutti i valori medi di sopra ottenendo gli stessi risultati prendendo però:

$$\begin{aligned} x &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}, & x^2 &= \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} \right)^2, & p_x &= p_x, \\ p_x^2 &= p_x^2, & H &= \left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{\gamma}{2} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

³ V. sez. 6 dell'appendice A [sez. aggiunta dal curatore].

IV

Applicazioni della equazione di Schrödinger

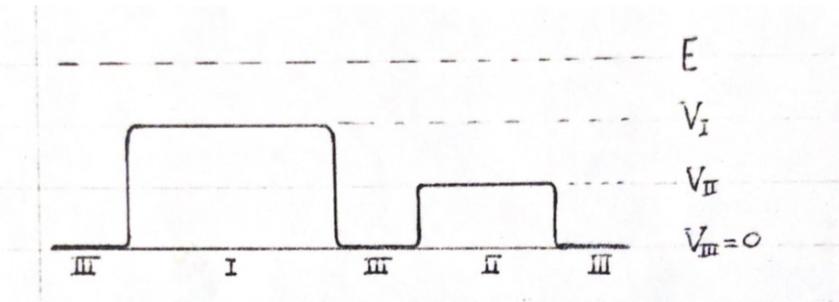
1 Introduzione

La formulazione della meccanica ondulatoria di Schrödinger viene applicata in questi limiti di validità:

- (I) particelle materiali non vengono create né distrutte. Solo i fotoni, quanti del campo elettromagnetico possono essere emessi ed assorbiti
- (II) tutte le particelle materiali si muovono con velocità molto piccole rispetto alla velocità della luce. Cioè si muovono non-relativisticamente. I fotoni che non possono essere descritti non-relativisticamente hanno un trattamento speciale.

2 Problemi unidimensionali con potenziale. Modelli.

Consideriamo il moto di una particella di massa m in una regione di forze con un potenziale V indipendente dal tempo e descritto in figura:



E è l'energia totale della particella. Perciò abbiamo

$$\begin{aligned} E_{cinetica} &= E \quad \text{in III} & = \frac{p^2}{2m} \\ &= E - V_I \quad \text{in I} \\ &= E - V_{II} \quad \text{in II} \end{aligned}$$

La parte temporale della funzione d'onda in questo caso può essere fattorizzata. Perciò data l'eq.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = E\Psi(x, t)$$

si ha

$$f(t) \sim e^{-iEt/\hbar} \quad \text{e} \quad \varphi(x) = e^{i\frac{p}{\hbar} \cdot \vec{x}} \quad \left(\lambda = \frac{\hbar}{p} \right)$$

In III si ha:

$$V_0 = 0, \quad E = \frac{p^2}{2m}, \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, t) = E\Psi(x, t)$$

In I:

$$\frac{p^2}{2m} = E_{cin.} = (E - V_I), \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, t) = (E - V_I)\Psi(x, t)$$

In II:

$$E_{cin.} = (E - V_{II}), \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, t) = (E - V_{II})\Psi(x, t)$$

In totale si può scrivere (in tre dimensioni)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, t) = [E - V(x)]\Psi(x, t)$$

Consideriamo ora regioni spaziali in cui

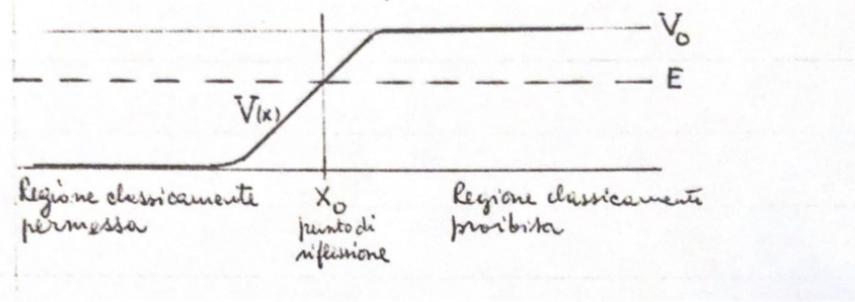
$$V(x) > E, \quad E > 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = [E - V(x)]\varphi(x)$$

$$\Psi(x, t) = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar}$$

(siamo in un caso unidimensionale perciò: $\partial \rightarrow d$)

Sia $V(x)$ come in figura

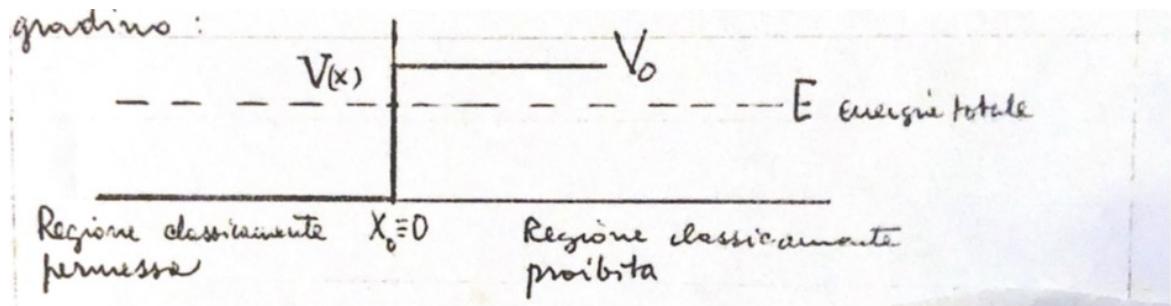


Classicamente si ha che una particella incidente da sinistra, in x_0 si ferma e torna indietro.

La soluzione quantistica $\varphi(x)$ deve essere continua con la derivata prima. Se noi supponiamo che $\varphi(x)$ non s'annulla a destra di x_0 avremo che

$$|\varphi(x)|^2_{x>x_0} \approx \text{Probabilità di trovare la particella a destra di } x_0 \neq 0$$

Modifichiamo il potenziale in modo da avere un potenziale a gradino:



Per $x > 0$ l'eq. di Schrödinger è:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = (E - V_0) \varphi(x) \quad (E - V_0) < 0$$

Si hanno due soluzioni linearmente indipendenti:

$$e^{-xq}, \quad e^{+xq}, \quad q = \left(\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \right)^{1/2}$$

La soluzione e^{+xq} per $x > 0$ cresce esponenzialmente per x crescenti e così e^{+xq} non è fisicamente accettabile, $\varphi_\alpha(x) = e^{-xq}$ è la sola soluzione fisicamente possibile.

Per $x < 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = E\varphi(x)$$

Si hanno due soluzioni linearmente indipendenti e fisicamente accettabili:

$$e^{ikx}, \quad e^{-ikx}, \quad k = \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{1/2}$$

$x < 0$:

$\varphi_\beta(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$; con A e B costanti da determinare mediante le condizioni che si stabiliscono richiedendo che le funzioni d'onda siano continue ed abbiano derivate prime continue. Cioè:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(0) &= \varphi_\beta(0) & \varphi'_\alpha(0) &= \varphi'_\beta(0) & (\text{in } x_0 = 0) \\ A + B &= 1 & A &= 1/2 \left(1 + iq/k \right) \\ ik(A - B) &= q & B &= 1/2 \left(1 - iq/k \right) \end{aligned}$$

Poiché l'equazione di Schrödinger è lineare possiamo moltiplicare φ per $\frac{1}{A}$ così otteniamo:

$$\varphi(x) = e^{ikx} + \frac{1 - i\sqrt{V_0/E - 1}}{1 + i\sqrt{V_0/E - 1}} e^{-ikx} \quad \text{per } x < 0$$

e¹

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 2e^{-qx} \left/ \left(1 + i\sqrt{\frac{V_0}{E} - 1} \right) \right. & \text{per } x > 0 \\ k &= \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \end{aligned}$$

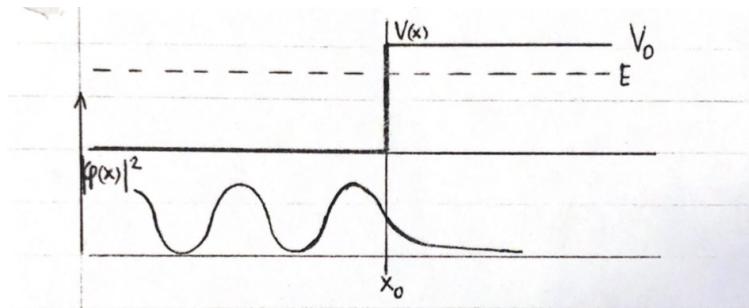
$\varphi(x)$ per $x < 0$ è una sovrapposizione di due onde: e^{ikx} (onda che viaggia verso destra), e^{-ikx} (onda che viaggia verso sinistra). L'ampiezza di e^{-ikx} ha modulo uno:²

$$\left| \frac{1 - i\sqrt{V_0/E - 1}}{1 + i\sqrt{V_0/E - 1}} \right| = 1$$

¹ Da $\varphi_\alpha(0) = \varphi_\beta(0) = 2 \left/ \left(1 + i\sqrt{\frac{V_0}{E} - 1} \right) \right.$ [ndc].

² Dall'identità $\left| \frac{a - ib}{a + ib} \right| = 1$ [ndc].

Le due onde hanno ampiezza dello stesso valore. L'ampiezza deve essere proporzionale al flusso delle particelle. La funzione $\varphi(x)$ descrive una particella incidente da sinistra e riflessa verso sinistra. Per $x > 0$ la funzione d'onda descrive la penetrazione della barriera nella regione che è classicamente proibita. L'ampiezza dell'onda penetrante decresce esponenzialmente. A sinistra abbiamo una frangia stazionaria di interferenza (un'onda stazionaria). L'onda riflessa interferisce con l'onda incidente.

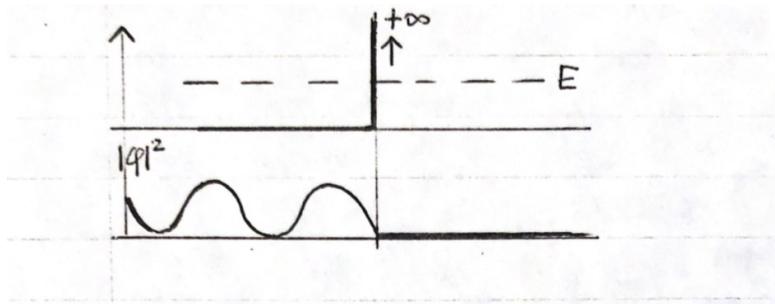


Si ha un caso limite quando $V_0 \rightarrow \infty$, cioè l'altezza della barriera tende all'infinito ed E resta costante. In questo caso $q \rightarrow \infty$. L'ampiezza dell'onda penetrante tende a zero. Cioè la penetrazione tende a zero.

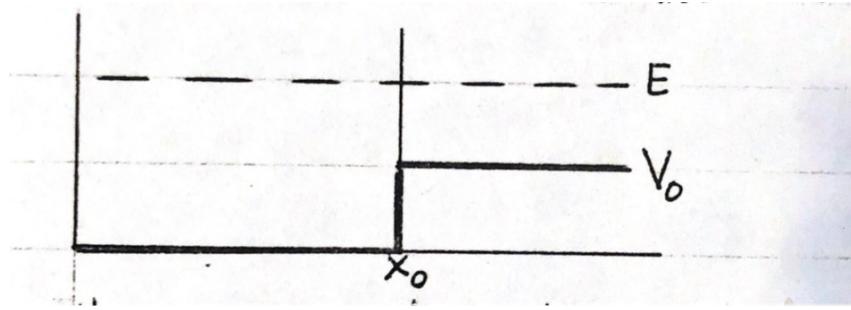
Quando la barriera di potenziale tende all' ∞ si ha:

$$\begin{aligned} x < 0 \quad \varphi &= e^{ikx} - e^{-ikx} \\ x > 0 \quad \varphi &= 0 \end{aligned}$$

La densità di probabilità mostra un andamento oscillante a sinistra della barriera. Questo è un effetto quantistico che non si verifica classicamente.



Passiamo ora ad esaminare il caso in cui $E > V_0$



L'eq. di Schrödinger è

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = (E - V(x)) \varphi(x)$$

Possiamo trovare due soluzioni fisicamente accettabili a sinistra e due a destra di x_0 . Se vogliamo studiare il moto di una particella incidente da sinistra allora l'onda che arriva da sinistra sarà in parte riflessa ed in parte viaggerà a destra di x_0 .

Quindi avremo:

a sinistra: $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$
 a destra: $e^{ik'x}$

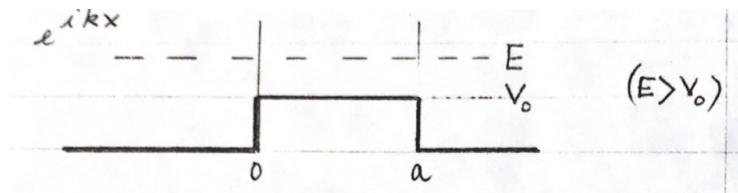
Se invece le particelle arrivano da destra avremo:

a sinistra: e^{-ikx}
 a destra: $A'e^{ik'x} + B'e^{-ik'x}$

A e B si determinano imponendo che le soluzioni a destra e sinistra di x_0 assieme alle loro derivate prime si devono raccordare in $x = x_0$.

3 Potenziale discontinuo in due punti

Si abbiano due punti di discontinuità in $x = 0$ e $x = a$. In 0 e in a si ha riflessione e trasmissione. Il problema consiste nel trovare quella soluzione della equazione di Schrödinger che è continua ovunque ed ha derivata prima continua e che per $x > a$ è della forma e^{ikx}



Per $a > x > 0$

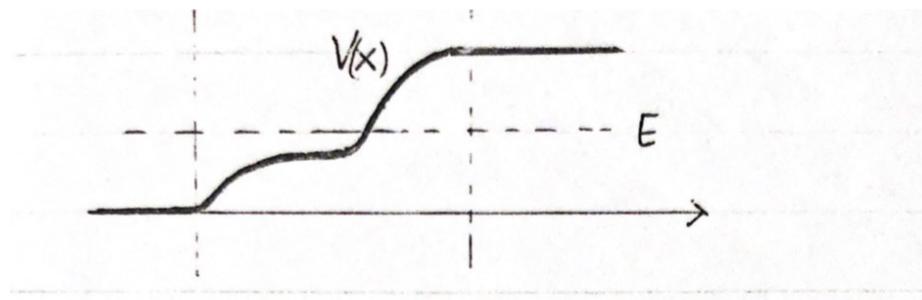
$$Ae^{ik'x} + Be^{-ik'x}$$

Per $x < 0$

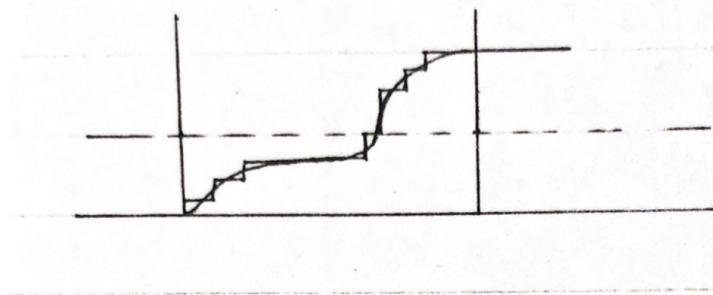
$$A'e^{ikx} + B'e^{-ikx}$$

Si stabiliscono quindi le condizioni di continuità della funzione d'onda e della derivata prima.

Nel caso generico in cui invece il potenziale è di questo tipo

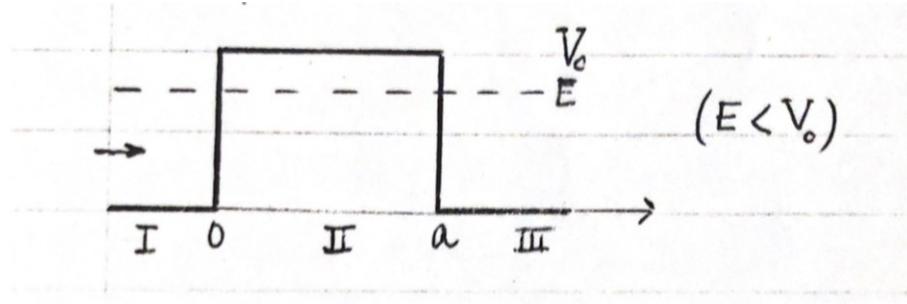


la riflessione avviene in tutta quanta la regione in cui il potenziale varia. Si può eseguire la seguente approssimazione per il potenziale V (vedi figura).



4 Effetto Tunnel

Svolgiamo ora le linee principali per la comprensione dell'effetto tunnel. Abbiamo il problema di potenziale mostrato in figura. Distinguiamo tre regioni



Troviamo la soluzione generale nelle tre regioni I, II, III. Poi imponiamo la condizione di continuità in $x = 0$ e $x = a$. Se si ha un fascio di particelle incidenti da sinistra esse saranno in parte riflesse, mentre in parte penetrano. Siamo interessati ad una soluzione nella regione III del tipo:

$$(III) \quad e^{ik'x}$$

Nella regione I abbiamo un'onda incidente ed una riflessa di ampiezza A

$$(I) \quad \varphi(x) = e^{ikx} + Ae^{-ikx}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Dentro la barriera $\varphi(x)$ è di tipo esponenziale

$$(II) \quad \varphi(x) \sim Be^{-xq}, \quad q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

Se³ $aq > 1$: $\varphi(a)/\varphi(0) \sim e^{-qa}$

L'onda incidente è di ampiezza uno. L'onda che penetra in III è di ampiezza minore e di ordine di grandezza e^{-qa} . Consideriamo la quantità T così definita:

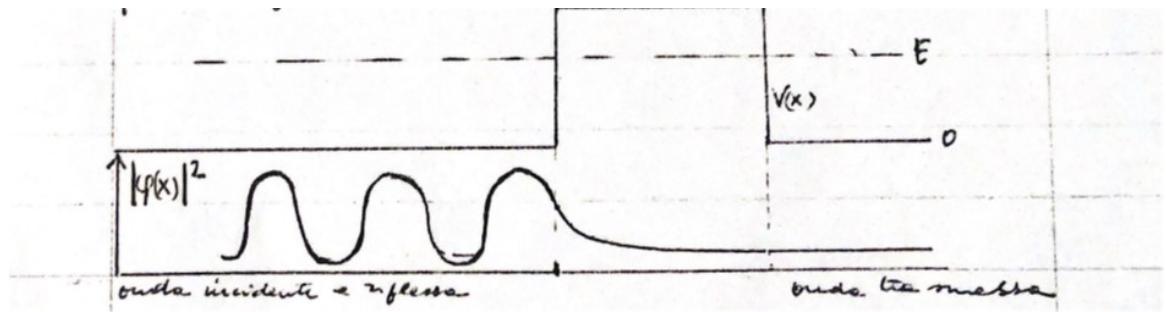
$$T = |\varphi(a)|^2$$

Ha il seguente significato fisico: probabilità che una particella che colpisca la barriera la oltrepassi.

$$\begin{aligned} T &= |\varphi(a)|^2 \sim e^{-2qa} \\ T &= e^{-2a\sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}} \end{aligned}$$

T si chiama coefficiente di trasmissione. Se aq è una quantità grande, T è piccolo.

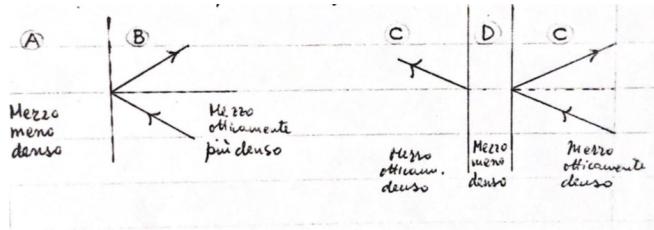
³ Perché non $aq > 0$? [ndc].



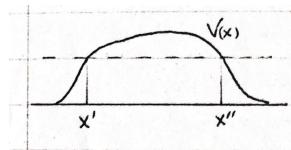
L'onda trasmessa ha modulo costante.

Da notare che la frangia interferenziale nella regione I ha un andamento particolare: l'ampiezza riflessa è minore di quella incidente, perciò la combinazione non è mai zero. In conclusione: pur essendo l'energia del fascio incidente minore della energia della barriera di potenziale ho la possibilità di avere una certa percentuale di particelle che passano al di là della barriera. Notare che è molto importante la larghezza della barriera a per questo effetto; essa non dev'essere più grande dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda delle particelle incidenti.

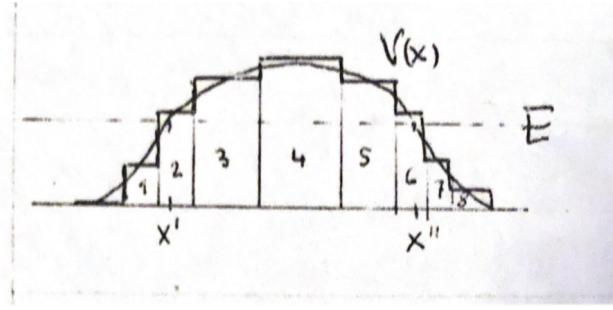
Questo effetto ha una analogia nell'elettromagnetismo classico e precisamente nella riflessione di un'onda piana all'interfaccia di due regioni con indici di rifrazione diversi. Si veda e si interpreti la figura:



Si ha effetto tunnel anche nel caso di potenziali del tipo



che può essere approssimato in questo modo:



Il coefficiente di trasmissione T è allora il prodotto dei singoli coefficienti di trasmissione T_i ($i = 1, 2, \dots, 8$).

Perciò

$$\begin{aligned} T &= T_1 T_2 T_3 \dots T_7 T_8 \\ \ln T &= \ln T_1 + \ln T_2 + \dots + \ln T_8 \\ \ln T_i &= -2 \sqrt{\frac{2m(V(x_i) - E)}{\hbar^2}} dx_i \\ \ln T &\simeq -2 \int_{x'}^{x''} dx \sqrt{\frac{2m(V(x) - E)}{\hbar^2}} \end{aligned}$$

T cresce quando la larghezza della barriera decresce. Si ha una applicazione dell'effetto tunnel nella teoria del decadimento α dei nuclei. Descriviamo sommariamente tale decadimento.

5 Decadimento radioattivo α .

Si abbiano al tempo t_0 N_0 nuclei. Dopo un tempo t un certo numero di nuclei ha subito il processo di decadimento ed il numero presente è $N(t)$

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda \cdot N(t) ; \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$\frac{1}{\lambda}$ si chiama anche vita media (τ_m).

Definiamo anche un tempo $\tau_{1/2}$ (vita mezza) tale che

$$\text{per } t = \tau_{1/2} \quad N(t) = \frac{1}{2} N_0$$

Si hanno le relazioni

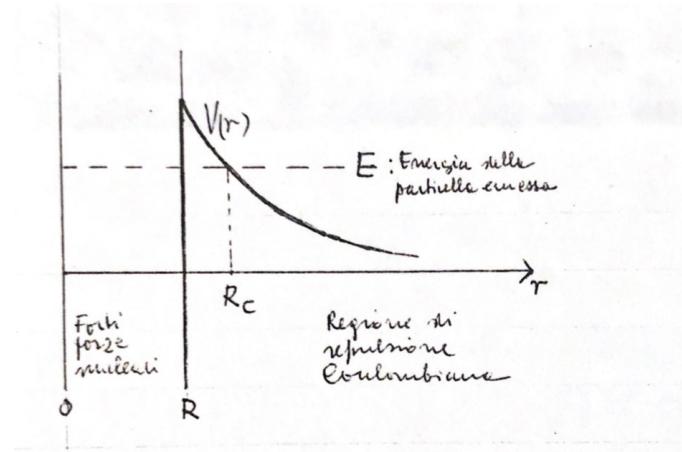
$$\left(e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \right)_{t=\tau_{1/2}} ; \quad \frac{1}{\lambda \tau_{1/2}} = \frac{1}{\ln 2} ; \quad \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \tau_{1/2} = \tau_m \ln 2$$

Alcuni esempi

$$\begin{array}{ll}
 {}_{88}\text{Ra}^{226} & \text{ha} \quad \tau_{1/2} = 5 \cdot 10^{10} \text{ sec} = 1700 \text{ anni} \\
 {}_{84}\text{Po}^{212} & \tau_{1/2} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ sec} \\
 {}_{92}\text{U}^{239} & \tau_{1/2} = 4.5 \cdot 10^9 \text{ anni}
 \end{array}$$

Si può avere un'idea della lunghezza di questi tempi facendo un confronto con il tempo che la luce impiega ad attraversare i nucleo atomico che è di 10^{-23} secondi.

Le particelle α vengono emesse dal nucleo radioattivo con una energia di $4 \div 10$ MeV. Più grande è l'energia delle particelle α emesse e più breve è la vita media del nucleo. Nel processo si deve tener conto delle forze nucleari, molto intense e a breve range ($\sim 10^{-13}$ cm) e della repulsione coulombiana tra la particella α ed il nucleo residuo. Questa repulsione coulombiana può essere rappresentata da un potenziale del tipo $V(r) = 2e^2 Z'/r$. Si osservi nella seguente figura come avviene il tunnel delle particelle α attraverso la barriera coulombiana:



$$\left. \begin{array}{ll}
 r > R & : \quad V(r) = 2e^2 Z'/r \\
 r = R \\
 r < R
 \end{array} \right\} : \quad \begin{array}{l}
 \text{le forze di attrazione nucleari diventano attive} \\
 \text{le forze di attrazione nucleari diventano attive}
 \end{array}$$

Per un nucleo tipo Uranio si hanno questi valori:

$$\begin{array}{lll} R_c > R & R_c \approx 50 \text{ f.} & 1 \text{ f.} = 10^{-13} \text{ cm} \\ R_c = 2e^2 Z'/E & R \approx 7 \text{ f.} & \end{array}$$

La particella α che si è formata all'interno del nucleo, cioè sta dentro la buca di potenziale nucleare colpisce le pareti. Tra un urto e l'altro l'intervallo di tempo è τ_0 . In ogni urto la particella α ha una certa probabilità di penetrare la barriera. La probabilità è data da T . Deve fare $\frac{1}{T}$ urti prima di passare. Quindi τ è dato da $\tau = \tau_0/T$.

Se è dato il $\ln T$:

$$\begin{aligned} \ln T &\approx -\frac{148}{\sqrt{E/\text{MeV}}} + 32.5 \quad (\text{vedi sotto il calcolo di } \ln T) \\ \ln \tau &= \ln \tau_0 + \frac{148}{\sqrt{E/\text{MeV}}} - 32.5 \\ \tau_0 &= \frac{2R}{v} \quad v = \sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}} \end{aligned}$$

Perciò per il $^{88}\text{Ra}^{226}$ si ha un $\tau_0 = 10^{-21}$ secondi.⁴

Riportiamo ora qui in breve il calcolo di $\ln T$

$$\ln T \simeq -2 \int_R^{R_c} dr \sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2} \left(\frac{2e^2 Z'}{r} - E \right)}; \quad R_c = \frac{2e^2 Z'}{E}$$

L'integrando è uguale a zero al limite superiore.

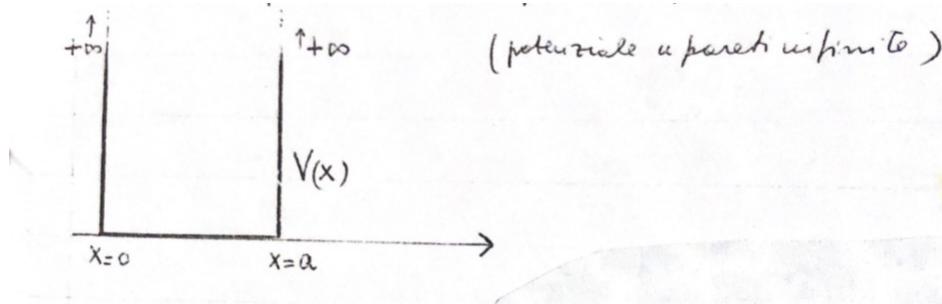
Poniamo ora

$$\begin{aligned} x &= r/R_c \quad x_c = R/R_c \\ \ln T &\simeq -\frac{4e^2 Z'}{\hbar} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}} \int_{x_c}^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \\ \int_{x_c}^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} &= \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} - \int_0^{x_c} dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \\ &\simeq \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} - \int_0^{x_c} dx \sqrt{\frac{1}{x}} = \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} - 2\sqrt{x_c} \\ \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1}{x} - 1} &= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta = \left[\int_0^{\pi/2} d\theta (1 + \cos 2\theta) \right] = \frac{\pi}{2} \quad (x = \sin^2 \theta) \\ \int_{x_c}^1 &\simeq \frac{\pi}{2} - 2 \frac{R}{R_c} \\ \ln T &\simeq -\frac{2\pi e^2 Z'}{\hbar} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}} + \frac{8}{\hbar} \sqrt{e^2 Z' R m_\alpha} \end{aligned}$$

⁴ $R = 7 \cdot 10^{-13} \text{ cm}; R_c = 5 \cdot 10^{-12} \text{ cm}; e = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ e.s.u.}; Z' = 88; m_\alpha = 6.6 \cdot 10^{-24} \text{ g}$
[ndc].

6 Stati stazionari

Si abbia un potenziale della forma seguente:



$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) \\ \Psi(x, t) &= \varphi(x) e^{-iEt/\hbar} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) &= (E - V(x)) \varphi(x) \end{aligned}$$

Dentro la buca si ha

$$\varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}, \quad k = \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{1/2}$$

Si ha $\varphi(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = a$.

Dalla condizione

$$(\varphi(x))_{x=0} = 0 \quad : \quad \text{si ha come soluzione fisicamente accettabile } \varphi(x) = C \sin(kx)$$

e dalla condizione:

$$\begin{aligned} (\varphi(x))_{x=a} = 0 \quad : \quad C \sin(ka) &= 0 \\ ka = n\pi \quad ; \quad a \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{1/2} &= n\pi \\ E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2 / a^2}{2m} &\quad (n \text{ positivo}) \end{aligned}$$

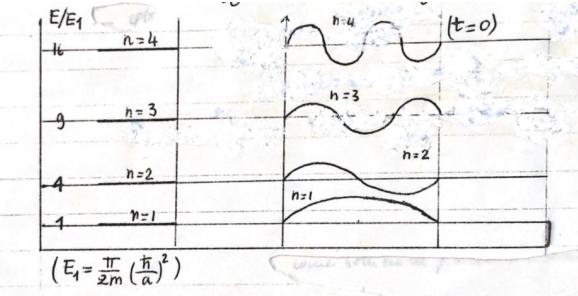
l'energia di una particella di massa m nella buca di potenziale può solo assumere i valori E_n discreti che abbiamo ricavato. Le autofunzioni corrispondenti agli autovalori E_n si chiamano soluzioni stazionarie. La dipendenza temporale è data semplicemente da

$$e^{-iEt/\hbar}$$

La autofunzione normalizzata corrispondente all'autovalore E_n è

$$\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-iE_n t/\hbar} \quad 0 < x < a$$

Normalizzazione: $\int_0^a \left| \Psi_n(x, t) \right|^2 dx = \int_0^a \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = 1$



Mettiamo ora in evidenza la differenza tra una soluzione stazionaria ed una non stazionaria. Per una soluzione stazionaria la densità di probabilità non dipende dal tempo. Infatti per lo stato stazionario $\Psi_n(x, t)$ la densità di probabilità è:

$$P_n(x) = \left| \Psi_n(x, t) \right|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \quad 0 < x < a$$

$$P_n(x) = 0 \quad a < 0 < x$$

Nel caso di soluzioni non stazionarie: possiamo sempre scrivere una soluzione non-stazionaria come combinazione lineare di due soluzioni stazionarie:

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \Psi_{n'}(x, t) + \Psi_{n''}(x, t) \right\} \quad n' \neq n''$$

Ricordiamo che $\Psi_{0,a} = 0$ e deve essere normalizzata ad uno per tutti i tempi t

$$P(x, t) = \left| \Psi(x, t) \right|^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sin^2 \frac{n'\pi x}{a} + \sin^2 \frac{n''\pi x}{a} + 2 \sin \frac{n'\pi x}{a} \sin \frac{n''\pi x}{a} \cos \frac{t(E_{n'} - E_{n''})}{\hbar} \right\}$$

$$\int_0^a P(x, t) dx = 1$$

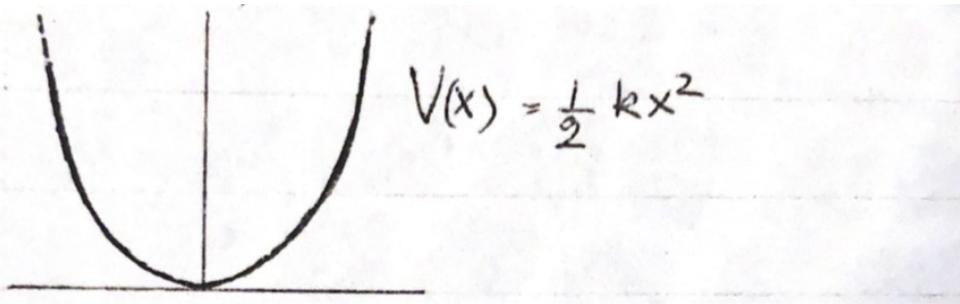
$P(x, t)$ non è, in questo caso, indipendente dal tempo, ha un andamento oscillante con frequenza

$$\omega_{n'n''} = \frac{1}{\hbar} (E_{n'} - E_{n''})$$

Ogni soluzione fisicamente accettabile dell'equazione di Schrödinger per una particella dentro una buca può essere scritta come uno sviluppo in termini delle soluzioni stazionarie. Sono soluzioni stazionarie solo quelle per cui la densità di probabilità P è indipendente dal tempo.

7 Problema dell'oscillatore armonico lineare

Prendiamo un potenziale tipo oscillatore armonico, a pareti infinite, lineare.



$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi_n}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \varphi_n = E_n \varphi_n$$

Cambiamo variabili in modo da avere variabili adimensionali:

$$y = \left(\frac{mk}{\hbar^2}\right)^{1/4}, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}, \quad \omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

L'eq. di Schrödinger diventa:

$$\frac{d^2\varphi_n}{dy^2} + (\lambda - y^2)\varphi_n = 0$$

Per $y \rightarrow \infty$, λ è trascurabile rispetto a y^2 .

Si ha allora:

$\varphi \sim e^{\pm(1/2)y^2}$. Solo $e^{-(1/2)y^2}$ è fisicamente accettabile. Ma anche $y^n e^{-(1/2)y^2}$ soddisfa asintoticamente alla equazione dell'oscillatore.⁵ La funzione avrà la

⁵ $\varphi'' \sim y^{n+2} e^{-(1/2)y^2}$, trascurando i termini $\sim y^n e^{-(1/2)y^2}$ e $\sim y^{n-2} e^{-(1/2)y^2}$ [n.d.c.].

stessa dipendenza asintotica se moltiplicata per un polinomio finito in y . Chiamiamo u la soluzione asintotica

$$u = \mathcal{H}(y)e^{-(1/2)y^2}$$

$\mathcal{H}(y)$ è un polinomio in y . Ricerchiamo l'espressione esatta della u . Sostituiamo nella eq. differenziale

$$\frac{d^2\mathcal{H}(y)}{dy^2} - 2y\frac{d\mathcal{H}(y)}{dy} + (\lambda - 1)\mathcal{H}(y) = 0$$

Troviamo una soluzione per \mathcal{H} della forma

$$\mathcal{H}(y) = (a_0 + a_1y + \dots)y^s$$

Quando sostituiamo l'espressione di $\mathcal{H}(y)$ nell'eq. differenziale i coefficienti di ciascuna potenza di y devono essere egualati a zero:

$$\begin{aligned} s(s-1)a_0 &= 0 \\ (s+1)s a_1 &= 0 \\ (s+2)(s+1)a_2 - (2s+1-\lambda)a_0 &= 0 \\ (s+3)(s+2)a_3 - (2s+3-\lambda)a_1 &= 0 \\ \dots \\ (s+\nu+2)(s+\nu+1)a_{\nu+2} - (2s+2\nu+1-\lambda)a_{\nu} &= 0 \quad (\nu \text{ intero}) \end{aligned}$$

Dalla prima relazione si ha che a_0 non può essere zero, altrimenti si avrebbe $s = 0$ o $s = 1$; dalla seconda si avrebbe $s = 0$ oppure $a_1 = 0$ o entrambi;⁶ la presenza nella serie di un numero infinito o finito di termini dipende dalla scelta di s , a_1 e λ .

Se la serie non termina si può capire il suo andamento asintotico dominante dai coefficienti dei suoi termini:

$$\frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \frac{2}{\nu}$$

Consideriamo lo sviluppo

$$e^{y^2} = 1 + y^2 + \frac{y^4}{2!} + \frac{y^6}{3!} + \dots + \frac{y^\nu}{\left(\frac{\nu}{2}\right)!} + \frac{y^\nu}{\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)!} + \dots$$

Se chiamo con b_ν i coefficienti di questo sviluppo, si ha:

$$b_{\nu+2}/b_\nu = \frac{2}{\nu}$$

⁶ a_0 e a_1 non possono essere entrambi zero; $a_0 \neq 0$ come primo termine della serie [ndc].

Se $\frac{a_\nu}{b_\nu} = c = \text{costante}$ anche $\frac{a_{\nu+2}}{b_{\nu+2}}$.

$\mathcal{H}(y)$ va come⁷ e^{y^2} . Allora però $e^{-\frac{y^2}{2}} \mathcal{H}(y)$ va come $e^{+\frac{y^2}{2}}$ che è una funzione d'onda fisicamente non accettabile.⁸

La serie deve terminare dando luogo ad un polinomio.

Cioè si deve avere che

$$2s + 2\nu + 1 = \lambda$$

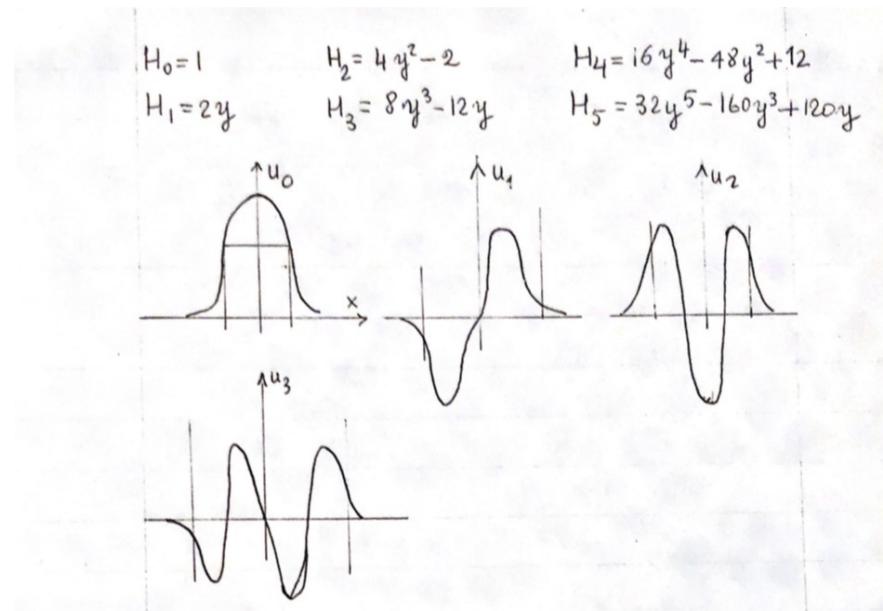
ν deve essere intero pari poiché $a_0 \neq 0$; altrimenti i termini pari formerebbero una serie infinita. Poiché i termini dispari non possono terminare dobbiamo scegliere $a_1 = 0$. L'indice s può essere 0 oppure 1, corrispondentemente si ha:

$$\lambda = 2\nu + 1 \quad \text{oppure} \quad \lambda = 2\nu + 3$$

Di conseguenza si ottiene $\lambda = 2n + 1$ e perciò

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

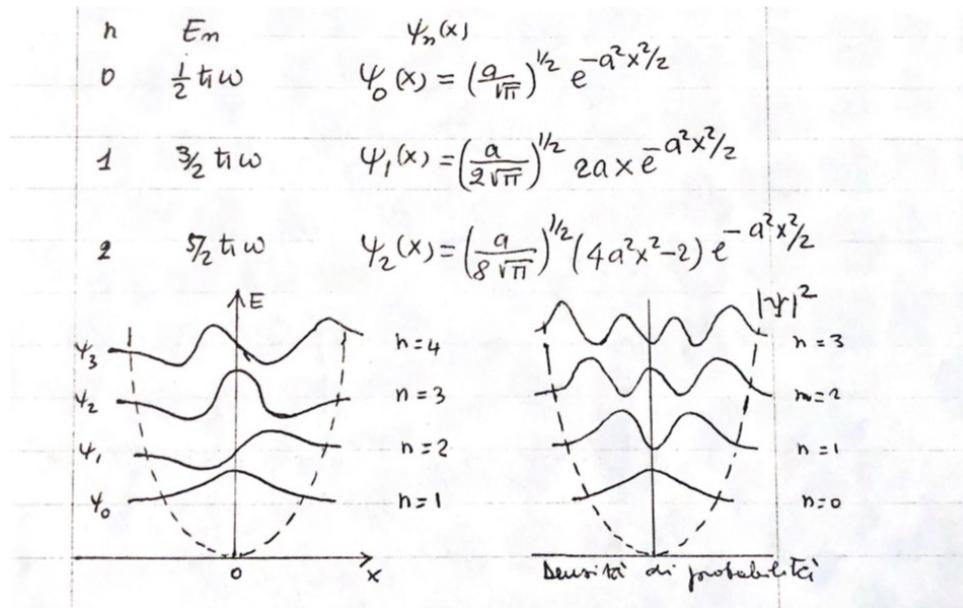
I polinomi \mathcal{H} , che sono i polinomi di Hermite, vanno normalizzati. Essi assumono l'espressione:



In conclusione abbiamo i seguenti livelli energetici e funzioni d'onda

⁷ Da un certo punto in poi a_ν va come b_ν [ndc].

⁸ Non è normalizzabile [ndc].



Si ha questa particolare caratteristica nell'oscillatore armonico:
l'energia del punto zero è $1/2\hbar\omega$ e non zero come accade per l'oscillatore classico. Il motivo di questo è collegato con il principio di indeterminazione.
L'energia totale è dell'ordine di:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \geq \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$$

ma $\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar/2$

$$E \geq \frac{1}{2m} \frac{\hbar^2}{4(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$$

Il minimo valore dell'energia è quello che minimizza l'espressione di E . Si ha il minimo per

$$(\Delta x)^2 = \hbar/2m\omega \quad \text{ossia} \quad E \geq \frac{1}{2}\hbar\omega$$

8 Oscillatore armonico lineare. Metodo algebrico.

Studiamo un altro metodo per risolvere il problema dell'oscillatore armonico lineare.

Ricordiamo che l'hamiltoniana del sistema è:

$$H = P_x^2/2m + \frac{1}{2}kx^2$$

L'eq. agli autovalori dell'energia è

$$H\varphi_n = E_n\varphi_n$$

mentre l'equazione dipendente dal tempo è

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

la cui soluzione generale può scriversi come

$$\Psi = \sum_n c_n \varphi_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

Dobbiamo trovare E_n e φ_n .

Ricordiamo, prima di iniziare la soluzione del problema, che se A è un operatore tale che: $|\bar{a}\rangle = A|a\rangle$, l'operatore A^+ tale che $\langle \bar{a}| = \langle a|A^+$ è l'aggiunto di A .

Allora si ha:

$$\begin{aligned} \langle b|A|a\rangle &= \langle b|\bar{a}\rangle = \langle \bar{a}|b\rangle^* = (\langle a|A^+|b\rangle)^* \\ (\langle b|A|a\rangle)^* &= \langle a|A^+|b\rangle \end{aligned}$$

Se $A = A^+$ e perciò $\langle b|A|a\rangle^* = \langle a|A|b\rangle$ l'operatore A è hermitiano.

Introduciamo due operatori non-hermitiani, aggiunti

$$R_{\pm} = \frac{P_x}{\sqrt{2m}} \pm i\sqrt{\frac{k}{2}}x$$

Date due funzioni u e v si ha

$$\int u^* R_+ v dr = \int (R_- u)^* v dr$$

Stabiliamo le regole di commutazione seguenti⁹

$$R_+ R_- + \frac{1}{2}\hbar\omega = R_- R_+ - \frac{1}{2}\hbar\omega = H$$

$$[P_x, x] = -i\hbar$$

$$[R_+, R_-] = -\hbar\omega$$

$$[H, R_{\pm}] = \pm\hbar\omega R_{\pm} ; [H, R_-] = HR_- - R_- H = -\hbar\omega R_-$$

$$[[H, R_+]] = HR_+ - R_+ H = (R_+ R_-)R_+ + \frac{1}{2}\hbar\omega R_+ - R_+(R_- R_+) + \frac{1}{2}\hbar\omega R_+ = +\hbar\omega R_+$$

⁹ $R_+ R_- = H + i\frac{\omega}{2}[x, P_x] = H + i\frac{\omega}{2} \cdot i\hbar = H - \frac{1}{2}\hbar\omega$
 $R_- R_+ = H - i\frac{\omega}{2}[x, P_x] = H - i\frac{\omega}{2} \cdot i\hbar = H + \frac{1}{2}\hbar\omega$ [ndc].

Ci aspettiamo che i valori dell'energia dell'oscillatore siano positivi: \mathbf{x} è hermitiano perciò ha solo valori reali, \mathbf{x}^2 ha autovalori reali e positivi, così si può dire per P_x . Perciò i valori medi dell'energia potenziale e cinetica, cioè dell'hamiltoniana sono positivi.

Poiché l'oscillatore ha solo stati ad energia positivi, che eventualmente includono lo zero, ci deve essere un limite inferiore. Supponiamo che E_0 sia questo limite inferiore:

$$H\varphi_0 = E_0\varphi_0$$

Applichiamo R_- ad ambo i membri

$$R_- H\varphi_0 = E_0 R_- \varphi_0$$

Usando le relazioni di commutazione stabilite

$$(HR_- + \hbar\omega R_-)\varphi_0 = E_0 R_- \varphi_0 ; \quad H(R_- \varphi_0) = (E_0 - \hbar\omega)(R_- \varphi_0)$$

Ma E_0 è il livello più basso, perciò l'autofunzione $(R_- \varphi_0)$ corrispondente al livello $(E_0 - \hbar\omega)$ deve essere identicamente nulla

$$R_- \varphi_0 = 0$$

Applichiamo l'operatore R_+ a sinistra

$$\begin{aligned} R_+ R_- \varphi_0 &= 0 & ; \quad \text{poiché} \quad R_+ R_- &= H - \frac{1}{2}\hbar\omega \\ \left(H - \frac{1}{2}\hbar\omega\right)\varphi_0 &= 0 & \text{cioè} \quad H\varphi_0 &= \frac{1}{2}\hbar\omega\varphi_0 \end{aligned}$$

L'autovalore più basso corrispondente alla autofunzione φ_0 è $(1/2\hbar\omega)$. Ripartiamo dalla equazione $H\varphi_0 = E_0\varphi_0$ ed applichiamo R_+ :

$$\begin{aligned} R_+ H\varphi_0 &= E_0 R_+ \varphi_0 \\ H(R_+ \varphi_0) &= (E_0 + \hbar\omega)R_+ \varphi_0 \end{aligned}$$

Operando n volte con R_+ si ha:

$$H(R_+^n \varphi_0) = (E_0 + n\hbar\omega)R_+^n \varphi_0$$

Definiamo allora $\varphi_n = c_n R_+^n \varphi_0$ corrispondenti agli autovalori $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. I c_n sono scelti in modo da normalizzare le φ_n . (Vedere al termine del paragrafo il loro calcolo esplicito)

Dalla equazione $R_- \varphi_0$ possiamo ricavare l'espressione analitica di φ_0

$$\begin{aligned} R_- \varphi_0 &= 0 \\ \left(\frac{d}{dx} + \frac{k}{\hbar\omega}x\right)\varphi_0 &= 0 \quad \varphi_0 = \left(\frac{k}{\pi\hbar\omega}\right)^{1/4} e^{-\frac{kx^2}{2\hbar\omega}} \end{aligned}$$

Questa soluzione è unica. C'è una unica autofunzione φ_0 per E_0 .

Ricordiamo per il calcolo della norma che $\int e^{-Ax^2} dx = (\pi/A)^{1/2}$.

Valutiamo ora i valori medi:

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2m} P_x^2 = \frac{1}{4} (R_+^2 + R_-^2) + \frac{1}{2} H \\ \langle \frac{P_x^2}{2m} \rangle_n &= \int \varphi_n^* \left[\frac{1}{4} (R_+^2 + R_-^2) + \frac{1}{2} H \right] \varphi_n dx = \left(\varphi_n, \left[\frac{1}{4} (R_+^2 + R_-^2) + \frac{1}{2} H \right] \varphi_n \right) \\ \left(\varphi_n, \frac{1}{4} R_+^2 \varphi_n \right) &= \left[\left(\varphi_n, \frac{1}{4} c_n R_+^{n+2} \varphi_0 \right) = \left(\varphi_n, \frac{1}{4} \frac{c_n}{c_{n+2}} \varphi_{n+2} \right) \right] = \frac{1}{4} \frac{c_n}{c_{n+2}} \left(\varphi_n, \varphi_{n+2} \right) = 0 \end{aligned}$$

(le φ_n sono ortogonali)

$$\begin{aligned} \left(\varphi_n, \frac{1}{4} R_-^2 \varphi_n \right) &= 0 \\ \langle \frac{P_x^2}{2m} \rangle_n &= \langle \frac{1}{2} H \rangle_n = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \end{aligned}$$

Classicamente si ha che l'energia cinetica media è metà dell'energia totale.

Calcoliamo il valor medio dell'energia cinetica quando l'oscillatore si trova in uno stato che non è uno stato di energia definita.

$$\begin{aligned} \langle \frac{P_x^2}{2m} \rangle &= (\Psi, \frac{P_x^2}{2m} \Psi) \quad \Psi = \sum_n a_n e^{-i(n+1/2)\hbar\omega t} \varphi_n \\ \langle \frac{P_x^2}{2m} \rangle &= \sum_{n,n'} \bar{a}_n a_{n'} e^{i(n-n')\hbar\omega t} \left(\varphi_n, \frac{P_x^2}{2m} \varphi_{n'} \right) \\ \langle \frac{P_x^2}{2m} \rangle &= \sum_n |a_n|^2 \left(\varphi_n, \frac{P_x^2}{2m} \varphi_n \right) = \frac{1}{2} \sum_n |a_n|^2 \left(\varphi_n, H \varphi_n \right) \\ \langle \frac{1}{2} H \rangle_n &= \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \\ \langle \frac{P_x^2}{2m} \rangle &= \langle \frac{1}{2} H \rangle = \frac{1}{2} \langle H \rangle \end{aligned}$$

Il risultato è identico al risultato classico. La media temporale dell'energia cinetica è uguale a metà dell'energia totale dell'oscillatore.

Così pure si ha¹⁰

$$P_x = \sqrt{\frac{m}{2}} (R_+ + R_-) \quad , \quad \langle P_x \rangle_n = 0$$

Desideriamo ancora ricordare che il livello fondamentale ha energia $\frac{1}{2}\hbar\omega$ e non zero. Se fosse zero significherebbe che $E_{totale} = E_{cinet.} + E_{potenz.} = 0$ e separatamente essendo entrambe positive $E_{cinet.} = 0$ ed $E_{potenz.} = 0$. Cioè

¹⁰ $\overline{(\varphi_n, R_+ \varphi_n)} = \frac{c_n}{c_{n+1}} (\varphi_n, \varphi_{n+1}) = 0$
 $R_- \varphi_n = \frac{c_n}{c_{n-1}} R_- R_+ \varphi_{n-1} \dots \rightarrow (\varphi_n, R_- \varphi_{n-1}) = 0$ [ndc].

posizione e momento dovrebbero essere entrambi noti contemporaneamente. Infatti si avrebbe:

Se $E_{potenz.} = 0$, x è noto nel punto di equilibrio con $\Delta x = 0$.

Ma $\Delta p = \infty$ e $E_{cinet.} = \infty$. Se $E_{cinet.} = 0$, allora si avrebbe una energia potenziale infinita.

Possiamo anche ricavare il valore dell'energia del livello fondamentale dal principio di indeterminazione.

Per un oscillatore armonico il valor medio dell' $E_{potenz.}$ coincide con il valor medio dell'energ. cinetica

$$\begin{aligned}\langle \frac{1}{2}kx^2 \rangle &= \langle \frac{P_x^2}{2m} \rangle = \frac{E_0}{2} \quad (E_0 \text{ energia totale}) \\ \langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle &\geq \frac{\hbar^2}{4} \\ \overline{\langle x^2 \rangle} &= \langle (\Delta x)^2 \rangle \quad \overline{\langle P_x^2 \rangle} = \langle (\Delta p_x)^2 \rangle \\ \overline{(x - \langle x \rangle)^2} &= \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2 \\ \sqrt{\frac{\overline{\langle P_x^2 \rangle}}{2m} \frac{1}{2} k \overline{\langle x^2 \rangle}} &= \frac{E_0}{2} \geq \frac{\hbar\omega}{4} \quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\end{aligned}$$

Al termine del paragrafo riportiamo ancora il calcolo esplicito delle costanti di normalizzazione c_n delle funzioni d'onda φ_n :

poiché le φ_n sono normalizzate ad 1, abbiamo:¹¹

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n|^2 dx = 1 = \frac{|c_n|^2}{|c_{n-1}|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-1}^* R_- R_+ \varphi_{n-1} dx = n\hbar\omega \frac{|c_n|^2}{|c_{n-1}|^2}$$

Perciò possiamo scrivere che:

$$|c_n|^2 = |c_{n-1}|^2 \frac{1}{n\hbar\omega}$$

ed allora¹²

$$c_n = \sqrt{\frac{1}{n!}} \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right)^{n/2}$$

¹¹ $R_- R_+ = H + \frac{1}{2}\hbar\omega$, $H\varphi_{n-1} = (n - \frac{1}{2})\hbar\omega\varphi_{n-1}$, ... [ndc].

¹² Per ricorrenza [ndc].

V

Momento angolare

1 Introduzione

Poiché lo spazio è isotropo, cioè non ha direzioni privilegiate, l'hamiltoniana di un sistema fisico non deve cambiare per rotazioni qualsiasi attorno a qualsiasi asse. Per imporre questa condizione basta che ciò accada per una rotazione infinitesima $\delta\vec{\varphi}$, di modulo $\delta\varphi$ diretta come l'asse di rotazione. In questo caso i vettori posizione delle particelle subiscono una variazione $\delta\vec{r}_i$:

$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{\varphi} \wedge \vec{r}_i$$

Una funzione $\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i, \dots)$ per una rotazione $\delta\varphi$ viene ruotata in $\Psi(\bar{r}_1 + \delta\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_i + \delta\bar{r}_i, \dots)$. Considerato che $f(\bar{r} + \delta\bar{r}) = f(\bar{r}) + \delta\bar{r} \cdot \frac{\partial f(\bar{r})}{\partial |\bar{r}|}$, si ha

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{r}_1 + \delta\bar{r}_1, \dots) &= \Psi(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_i, \dots) + \sum_i \delta\bar{r}_i \cdot \bar{\nabla}_i \Psi = \\ &\quad (1 + \sum_i \delta\bar{\varphi} \wedge \bar{r}_i \cdot \bar{\nabla}_i) \Psi(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_i, \dots). \end{aligned}$$

L'espressione $(1 + \sum_i \delta\bar{\varphi} \wedge \bar{r}_i \cdot \bar{\nabla}_i) = (1 + \delta\bar{\varphi} \cdot \sum_i \bar{r}_i \wedge \bar{\nabla}_i)$ può essere considerata come l'operatore di rotazione infinitesima. Una rotazione deve lasciare invariata l'hamiltoniana, cioè l'operatore rotazione deve commutare con H . Essendo $\delta\bar{\varphi}$ costante la condizione è:

$$\sum_i (\bar{r}_i \wedge \bar{\nabla}_i) H - H (\sum_i \bar{r}_i \wedge \bar{\nabla}_i) = 0$$

Classicamente si conservano le grandezze fisiche che non dipendono esplicitamente dal tempo, hanno con l'hamiltoniana una parentesi di Poisson nulla. Quantisticamente la derivata totale di un operatore Q è:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + [Q, H]$$

Perciò un operatore che non dipende esplicitamente dal tempo e che commuta con H si conserva.

La quantità che si conserva in un sistema isolato in seguito alla isotropia dello spazio è il momento angolare. A parte un fattore costante moltiplicativo $\sum_i \bar{r}_i \wedge \bar{\nabla}_i$ deve essere il momento angolare totale e $\bar{r}_i \wedge \bar{\nabla}_i$ il momento angolare di una singola particella. La costante moltiplicativa è $-i\hbar$. Così $-i\hbar \bar{r}_i \wedge \bar{\nabla}_i = \bar{r}_i \wedge (-i\hbar \bar{\nabla}_i) = \bar{r}_i \wedge \bar{p}_i$ che è l'operatore momento angolare L_i .

2 Algebra del momento angolare

Classicamente si ha:

$$\bar{L} = \bar{r} \wedge \bar{p} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} \quad \begin{cases} L_x = yp_z - zp_y \\ L_y = zp_x - xp_z \\ L_z = xp_y - yp_x \end{cases}$$

quantisticamente

$$\bar{L} = \bar{r} \wedge \bar{p} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} & -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} & -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(L, \bar{r}, \bar{p} sono operatori)

$$\begin{aligned} L_x &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = yp_z - zp_y \\ L_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) = zp_x - xp_z \\ L_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = xp_y - yp_x \end{aligned}$$

Calcoliamo l'algebra di questi operatori cioè le parentesi di commutazione con gli operatori coordinate e impulso.

$$[L_x, x] = L_x x - x L_x = (yp_z - zp_y)x - x(yp_z - zp_y) = y[p_z, x] - z[p_y, x] = 0$$

$$\text{perché } [p_z, x] = 0 \text{ e } [p_y, x] = 0 \quad [L_y, y] = 0 \quad [L_z, z] = 0$$

Cioè componente del momento angolare e coordinata su uno stesso asse possono essere misurate contemporaneamente con precisione grande quanto si vuole. Adesso calcoliamo

$$\begin{aligned} [L_x, y] &= (yp_z - zp_y)y - y(yp_z - zp_y) = y[p_z, y] - z[p_y, y] = i\hbar z \\ [L_y, z] &= i\hbar x \quad , \quad [L_z, x] = i\hbar y \\ [L_x, z] &= (yp_z - zp_y)z - z(yp_z - zp_y) = y[p_z, z] - z[p_y, z] = -i\hbar y \end{aligned}$$

analogamente $[L_z, y] = -i\hbar x$, $[L_y, x] = -i\hbar z$. Perciò non è possibile misurare con precisione grande quanto si vuole componenti di \vec{L} e coordinate su assi diversi.

Col simbolo di Levi-Civita δ_{ikl}

$$\delta_{ikl} \begin{cases} = 1 & \text{per permutazioni } ikl \text{ pari} \\ = -1 & \text{per permutazioni } ikl \text{ dispari} \end{cases} = 0 \text{ negli altri casi}$$

$$[L_i, x_k] = i\hbar\delta_{ikl}x_l$$

Analogamente si ha $[L_i, p_k] = i\hbar\delta_{ikl}p_l$.

Classicamente il momento angolare e l'impulso sono determinati eseguendo tre misurazioni contemporanee sui tre assi delle loro tre distinte componenti e ciò è sempre possibile. Quantisticamente poiché $[p_i, p_k] = 0$ ($i \neq k$) anche le tre componenti di p possono essere note contemporaneamente.

Per vedere se anche le componenti del momento angolare si comportano come quelle dell'impulso calcoliamo le parentesi di commutazione seguenti:

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= L_x L_y - L_y L_x = L_x(zp_x - xp_z) - (zp_x - xp_z)L_x = \\ &= L_x z p_x - L_x x p_z - z p_x L_x + x p_z L_x = [L_x, z]p_x - x[L_x, p_z] = \\ &= -i\hbar y p_x + i\hbar x p_y = i\hbar L_z \end{aligned}$$

avendo utilizzato i valori già dedotti di $[z, p_x]$ e di $[L_x, x]$. In generale

$$[L_i, L_k] = i\hbar\delta_{ikl}L_l$$

Ciò significa che non è possibile determinare contemporaneamente, con precisione grande quanto si vuole le tre componenti del momento angolare.

Consideriamo l'operatore $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, quadrato del momento angolare. Calcoliamo utilizzando l'algebra già dedotta:

$$\begin{aligned} [L^2, L_z] &= [L_x^2, L_z] + [L_y^2, L_z] + [L_z^2, L_z], \quad \text{si ha :} \\ [L_x^2, L_z] &= L_x [L_x, L_z] - [L_x, L_z] L_x = \\ &= -i\hbar(L_x L_y + L_y L_x) \\ [L_y^2, L_z] &= +i\hbar(L_x L_y + L_y L_x) \\ [L_z^2, L_z] &= 0 \end{aligned}$$

Abbiamo utilizzato le proprietà: $Q^2\Psi = Q(Q\Psi)$ e

$$[AB, C] = A[B, C] - [C, A]B$$

Perciò

$$[L^2, L_z] = 0$$

Analogamente $[L^2, L_x] = 0$, $[L^2, L_y] = 0$.

È sempre possibile misurare contemporaneamente, con precisione grande quanto si vuole il modulo del momento angolare e la sua proiezione lungo un asse qualsiasi.

3 Autovalori

Impostiamo l'equazione agli autovalori per L^2 e L_z

$$L^2\Psi = a\Psi \quad , \quad L_z\Psi = b\Psi$$

Essendo $L^2 - L_z^2 = L_x^2 + L_y^2$, per un dato valore di L^2 tutti gli autovalori b di L_z dovranno essere tali che $b^2 \leq a$ (il quadrato di un vettore è sempre maggiore, al più uguale, al quadrato di una componente).

Introduciamo gli operatori (di creazione e distruzione):

$$\begin{aligned} L_+ &= L_x + iL_y \quad , \quad L_- = L_x - iL_y \quad . \quad \text{Si ha :} \\ L_+L_- &= (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) = L_x^2 + L_y^2 - i[L_x, L_y] = \\ &= L^2 - L_z^2 + \hbar L_z \\ L_-L_+ &= L^2 - L_z^2 - \hbar L_z \\ [L_z, L_+] &= L_z L_+ - L_+ L_z = L_z L_x + iL_z L_y - L_x L_z - iL_y L_z = \\ &= [L_z, L_x] + i[L_z, L_y] = i\hbar L_y + \hbar L_x = \hbar L_+ \\ [L_z, L_-] &= -\hbar L_- \end{aligned}$$

Applichiamo L_+ alle equazioni agli autovalori:

$$\begin{cases} L_+L^2\Psi = aL_+\Psi \\ L_+L_z\Psi = bL_+\Psi \end{cases}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} L_+L_z &= L_z L_+ - \hbar L_+ \\ [L^2, L_+] &= [L^2, L_-] = 0 \end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere le equazioni di sopra così:

$$\begin{cases} L^2(L_+\Psi) = a(L_+\Psi) \\ L_z(L_+\Psi) = (b + \hbar)L_+\Psi \end{cases}$$

L'operatore L_+ , operando su autofunzioni Ψ di L_z e L^2 genera nuove autofunzioni $L_+\Psi$ di questi operatori.

Nel caso di L^2 genera autofunzioni appartenenti allo stesso autovalore a ; nel caso di L_z nuove autofunzioni appartenenti all'autovalore $(b + \hbar)$, cioè all'autovalore precedente aumentato di \hbar . Potrebbe sembrare che operando indefinitamente con L_+ si ottengano autofunzioni di L_z appartenenti ad autovalori sempre più grandi. Ciò non è vero, perché $b^2 \leq a$. Perciò se b è l'autovalore massimo compatibile e Ψ_b è l'autofunzione corrispondente a questo autovalore non esistono autofunzioni corrispondenti ad autovalori maggiori. Quindi l'azione di L_+ su Ψ_b dà

$$L_+ \Psi_b = 0$$

Applichiamo a questa relazione L_- ricordando la loro algebra:

$$\begin{aligned} L_- L_+ \Psi_b &= (L^2 - L_z^2 - \hbar L_z) \Psi_b = 0 \\ a \Psi_b - b^2 \Psi_b - \hbar b \Psi_b &= 0 \end{aligned}$$

Ψ_b non può essere identicamente nulla.

Perciò $a - b^2 - \hbar b = 0$

cioè $a = b(b + \hbar)$.

Analogamente operiamo ora con L_- :

$$\begin{cases} L^2 L_- \Psi = a L_- \Psi \\ L_- L_z \Psi = L_- b \Psi \quad L_z (L_- \Psi) = (b - \hbar) L_- \Psi \end{cases}$$

L_- produce nuove autofunzioni ($L_- \Psi$) relative sempre all'autovalore a di L^2 , ma all'autovalore $(b - \hbar)$ di L_z . Applicando L_- n volte, giungiamo all'autovalore $(b - n\hbar)$. Il quadrato di $(b - n\hbar)$ non può crescere indefinitamente. Deve valere $b^2 < a$.

Se n è il maggiore numero intero compatibile con la diseguaglianza $b^2 \leq a$ e Ψ_n è l'autofunzione corrispondente, l'applicazione di L_- a Ψ_n deve dare zero:

$$L_- \Psi_n = 0$$

Si ha allora:

$$(L_+ L_-) \Psi_n = (L^2 - L_z^2 + \hbar L_z) \Psi_n = [a - (b - n\hbar)^2 + (b - n\hbar)\hbar] \Psi_n = 0$$

il che implica

$$(b - n\hbar)\hbar + a - (b - n\hbar)^2 = 0$$

Avendo già ricavato $a = b(b + \hbar)$, si ottiene:

$$b = \frac{1}{2}n\hbar = l\hbar \quad \text{con } l = \frac{n}{2}$$

e per a : $a = l(l + 1)\hbar^2$.

Per il momento angolare orbitale si ha che b non può assumere valori semi-interi. Infatti, passando a coordinate sferiche si ha:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

L_z assume la forma: $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$.
L'equazione agli autovalori è

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi = l_z \Psi$$

La soluzione è

$$\Psi = e^{il_z\varphi/\hbar} f(r, \theta),$$

dove $f(r, \theta)$ è una funzione arbitraria di r e θ per cui $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$. Come verifica si ha

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = f(r, \theta) il_z e^{il_z\varphi/\hbar} \left[= i \frac{l_z}{\hbar} \Psi \right].$$

Moltiplicando per $-i\hbar$ si ottiene l'equazione agli autovalori

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = l_z f(r, \theta) e^{il_z\varphi/\hbar} = l_z \Psi.$$

Poiché $|\Psi|^2$ deve rappresentare una probabilità essa deve essere ad un sol valore. Ciò impone che Ψ debba essere periodica, di periodo 2π in φ , in modo che dopo un giro di 2π riprenda il suo valore. Se ciò non accadesse nello stesso punto dello spazio delle configurazioni si potrebbero avere densità di probabilità diverse. Questo impone che $l_z = m_l$ assuma solo valori interi.¹

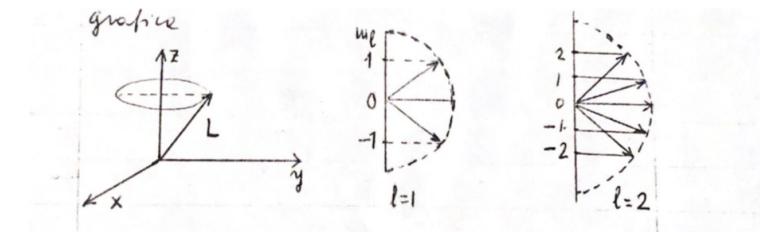
Ricapitolando si ha:

$$\begin{aligned} L^2 \Psi_{lm_l} &= l(l+1)\hbar^2 \Psi_{lm_l} \\ L_z \Psi_{lm_l} &= m_l \hbar \Psi_{lm_l} \end{aligned}$$

dove l assume tutti i valori interi positivi; m_l assume valori interi tali che² $|m_l| \leq l$

cioè $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Fissato l gli autovalori m_l di L_z non possono essere altri che $-l, (-l+1), \dots, 0, \dots, (l-1), l$ (in unità \hbar). Possiamo dare la seguente rappresentazione grafica



¹ $e^{i2\pi l_z} = 1 \rightarrow 2\pi l_z = 2\pi m_l$ [ndc].

² Da $a \geq b^2$ [ndc].

4 Autofunzioni

Le autofunzioni contemporanee di L^2 e L_z si ricavano lavorando in coordinate sferiche. In termini di r, θ, φ abbiamo:

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{e} \quad \Psi_{lm_l} = e^{im_l \varphi} f(r, \theta)$$

In coordinate sferiche abbiamo pure (in questo paragrafo riporteremo i risultati più importanti, senza svolgere in dettaglio i calcoli):

$$\begin{aligned} L_{\pm} &= \hbar e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) , \\ L^2 &= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] , \\ \Delta \equiv \nabla^2 &\equiv \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \end{aligned}$$

Perciò

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Tabella Funzioni Armoniche Sferiche		
l	m_l	Funzioni angolari
0	0	$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
	0	$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
1	± 1	$Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$
	0	$Y_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (3 \sin^2 \theta - 1)$
	± 1	$Y_{2\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}$
	± 2	$Y_{2\pm 2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm i\varphi}$

$$P_r = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r} r \quad (\text{non è la componente lungo } r \text{ del momento della particella})$$

Posto $\Psi_{lm_l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il\varphi} \Theta_{lm}(\theta) f(r)$
utilizzando l'equazione³

$$L_+ \Psi_{ll} = 0 \quad (m_l = l)$$

si ha⁴

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_{ll}}{d\theta} &= l \cot \theta \Theta_{ll} \\ \Theta_{ll} &= (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}} \frac{1}{2^l l!} \sin^l \theta \end{aligned}$$

che sono funzioni ortonormali. Si ha così che la parte angolare di Ψ è una funzione armonica sferica $Y_{ll}(\theta, \varphi)$. Rimandiamo al corso di Metodi Matematici per un approfondimento matematico di questo paragrafo.

In sintesi diciamo che la parte angolare delle autofunzioni di L^2 e L_z è una funzione armonica sferica $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ (l intero, $-l \leq m \leq l$).

Le funzioni armoniche sferiche (vedi tabella pagina precedente) formano un riferimento od insieme completo per tutte le funzioni a quadrato integrabili sulla sfera di raggio uno.

Formano un insieme ortonormale:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{l'm'}^* Y_{lm} \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Per $m = 0$ le $Y_{l,0}$ sono proporzionali ai polinomi di Legendre.

5 Cenni sullo spin

Nella trattazione del momento angolare orbitale, per la necessità di avere funzioni d'onda ad un sol valore, ci siamo ristretti a considerare solo valori interi di l . Considerando nuove coordinate che rappresentano gradi di libertà interni della particella è possibile considerare anche valori seminteri per un momento angolare intrinseco che chiamiamo momento angolare di spin.

Misure sperimentali hanno confermato l'esistenza di valori seminteri per il momento angolare di una particella. Il momento angolare totale è perciò la somma del momento angolare orbitale e del momento angolare intrinseco. Per lo spin dunque noi possiamo avere autovalori interi o seminteri. Indicando con S l'operatore corrispondente allo spin o momento angolare intrinseco e S^2 ed S_z il quadrato e la terza componente di S abbiamo:

³ Essendo $m_l = l$ l'autovalore max [ndc].

⁴ Si può verificare per sostituzione [ndc].

$$\begin{aligned} S^2 \chi_{sm_s} &= s(s+1)\hbar^2 \chi_{sm_s} \\ S_z \chi_{sm_s} &= m_s \hbar \chi_{sm_s} \end{aligned}$$

dove s e m_s possono essere interi o seminteri, dipendendo il valore dalla natura dello spin della particella che si considera. Il numero s è il numero quantico di spin. Per $s = \frac{1}{2}$ ho $2s + 1 = 2$ valori di m_s , cioè $+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Elettroni, protoni, neutroni, ad esempio hanno spin semintero. Fotoni hanno spin intero.

6 Cenno sulla composizione di momenti angolari

Consideriamo un elettrone di momento angolare orbitale \vec{L} e di momento angolare intrinseco \vec{S} . Il momento angolare totale dell'elettrone è

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Gli autovalori e le autofunzioni di \vec{J} lo sono contemporaneamente di J_z .⁵ Le conclusioni che otterremo valgono nel caso di due momenti angolari qualunque operanti su differenti variabili. Si ha:

$$\begin{aligned} J^2 \Psi_{jm_j} &= \hbar^2 j(j+1) \Psi_{jm_j} \\ J_z \Psi_{jm_j} &= m_j \hbar \Psi_{jm_j} \end{aligned}$$

Vogliamo determinare i possibili valori di j e di m_j . Ora si ha:⁶

$$\begin{aligned} J^2 &= L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S} \\ [L^2, \vec{L} \cdot \vec{S}] &= 0 \\ [L^2, J^2] &= 0 \quad , \quad [S^2, J^2] = 0 \end{aligned}$$

Perciò

J^2, L^2, S^2, J_z commutano tra loro. Le corrispondenti osservabili sono misurabili contemporaneamente. Un altro set di operatori che commutano tra loro è L^2, L_z, S^2, S_z : se sono fissati e sono noti ℓ ed s ci sono $(2\ell+1)(2s+1)$ possibili orientazioni di m_ℓ e m_s . Il valore più grande di m_j è: $(m_j)_{massimo} = \ell + s$. Il massimo valore di $J_z = L_z + S_z$ si ha per $(j)_{massimo} = \ell + s$. $m_j = j$ è non-degenere perché capita una sola volta.

Il successivo più basso valore di J_z si ha per m_j dato da

$$m_j = \ell + s - 1$$

Questo valore si può ottenere in due modi: o con $m_\ell - 1$ o con $m_s - 1$. Uno stato con il valore di $m_j = \ell + s - 1$ è associato col numero quantico $j = \ell + s$.

⁵ Si procede sempre allo stesso modo: si parte dall'equazione $J_+ \Psi_{jj} = 0$ e si prende l'autofunzione Ψ_{jj} che è anche autofunzione di J_z con autovalore $j = m_j$ [ndc].

⁶ Dall'algebra al paragrafo 2 [ndc].

Dato j ci sono $2j+1$ possibili orientazioni (quindi valori) per m_j . L'altro stato è associato al valore $j = \ell + s - 1$.

In totale j può assumere tutti i valori dati da

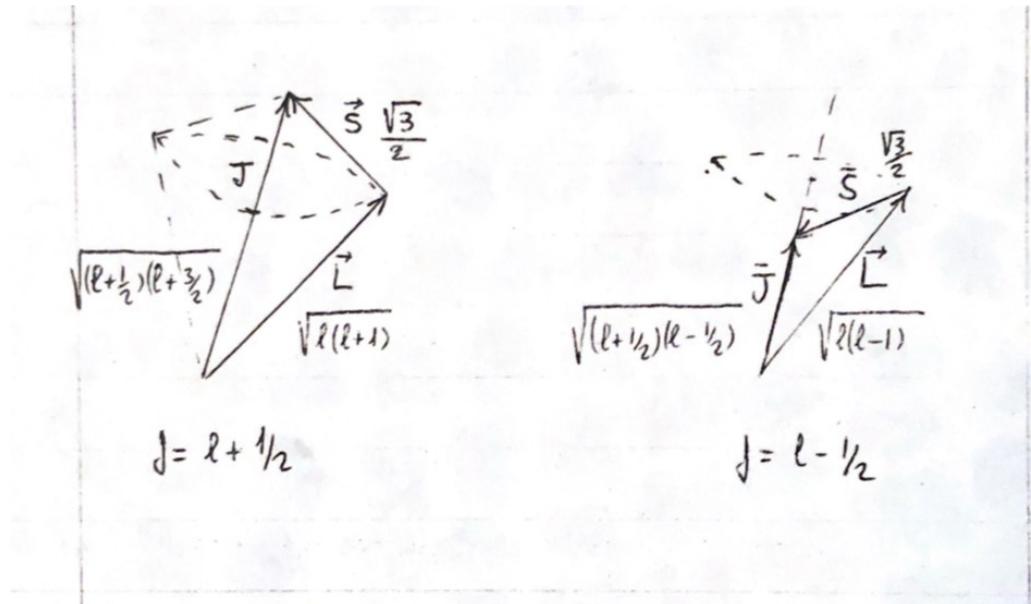
$$(\ell + s) \geq j \geq |\ell - s|$$

Ci sono $(2j+1)$ stati non-degeneri per ciascun valore di j . Corrispondono a $2j+1$ possibili orientazioni del momento angolare rispetto a z .

Per il caso di spin $s = 1/2$ i possibili valori di j sono:

$$j = \ell + 1/2 \quad , \quad j = \ell - 1/2 \quad (\ell \neq 0)$$

Si può avere la seguente rappresentazione grafica:



VI

Rappresentazioni matriciali

1 Introduzione

Dapprima, in questo capitolo, diamo un breve resoconto delle proprietà degli spazi vettoriali per potere, poi, sempre sinteticamente, dimostrare come funzioni d'onda ed operatori siano descrivibili mediante rappresentazioni matriciali. Questo conduce a forme alternative della meccanica quantistica. Storicamente la formulazione matriciale fu sviluppata un poco prima della meccanica ondulatoria che noi abbiamo adoperato fino ad ora. Mentre la rappresentazione matriciale è dovuta ad Heisenberg, la dimostrazione della equivalenza tra il formalismo ondulatorio e quello matriciale è dovuta a Schrödinger.

2 Spazi vettoriali: proprietà generali

Un vettore in uno spazio ad n dimensioni è caratterizzato da n numeri (le sue n componenti rispetto ad un sistema di riferimento). Nel caso più generale le n componenti sono complesse. Ricordiamo le principali proprietà dei vettori a componenti reali in uno spazio a tre dimensioni:

- a) Il prodotto di un vettore \vec{a} per un numero α è ancora un vettore che si ottiene moltiplicando le singole componenti per α
- b) La somma di un vettore $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ con un vettore $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ è ancora un vettore con componenti uguali alla somma delle componenti:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

- c) Il prodotto scalare di due vettori \vec{a} e \vec{b} è un numero definito da $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- d) Il prodotto scalare di un vettore per sé stesso è un numero sempre positivo, che è nullo solo se tutte le componenti sono nulle.

Il prodotto scalare può scriversi come prodotto tra matrici (righe per colonne)

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

oppure

$$\vec{b} \times \vec{a} = (b_1 \ b_2 \ b_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$$

Nel caso si abbiano componenti complesse, mantenendo la definizione c) di prodotto scalare, la proprietà d) viene meno.

Infatti se a_1, a_2, a_3 sono complesse

$$(a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

non sarà in generale positivo. Potrà annullarsi senza che sia $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Una quantità positiva è invece

$$(a_1^* \ a_2^* \ a_3^*) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2$$

Se vogliamo conservare la proprietà d) definiamo il prodotto scalare nel campo complesso così:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1^* \ a_2^* \ a_3^*) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 a_i^* b_i$$

La proprietà commutativa non vale più:

$$\vec{b} \times \vec{a} = (b_1^* \ b_2^* \ b_3^*) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i^* = (\vec{a} \times \vec{b})$$

Un vettore \vec{b} si può presentare sotto due forme: come vettore colonna $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, quando compare a destra dei prodotti scalari, oppure come vettore riga, con le componenti complesse coniugate, $(b_1^* \ b_2^* \ b_3^*)$, quando è a sinistra nei prodotti scalari.

Indichiamo simbolicamente nel caso di n dimensioni

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = |a\rangle \quad \text{vettore ket}$$

$$(a_1^* a_2^* \cdots a_n^*) = \langle a| \quad \text{vettore bra}$$

Per il prodotto scalare si ha così:

$$\langle a|b\rangle = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i \quad , \quad \langle b|a\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i^*$$

con la proprietà

$$\langle a|b\rangle = (\langle b|a\rangle)^*$$

Il vettore corrispondente a $c|a\rangle$ è $c^*\langle a|$.

I vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$ sono ortogonali se

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle = 0$$

3 Sistemi di riferimento

Un sistema di vettori forma un riferimento completo in uno spazio vettoriale dato, quando ogni vettore dello spazio può essere scritto come combinazione lineare dei vettori di riferimento che vengono detti vettori base.

Se $|v\rangle$ è un vettore qualsiasi e

$$|1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle \quad \text{è la base}$$

$$|v\rangle = \sum_i v_i |i\rangle$$

dove v_i sono le componenti di $|v\rangle$ rispetto al nostro sistema di riferimento.

È sempre possibile trovare un riferimento in cui i vettori base sono ortonormali,¹ cioè tali che

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$$

Moltiplichiamo $|v\rangle$ a sinistra per $\langle j|$:

$$\langle j|v\rangle = \sum_i v_i \langle j|i\rangle = \sum_i v_i \delta_{ij}$$

$$|v\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i|v\rangle$$

¹ Si può ottenere dalla base di partenza applicando il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt [ndc].

Perciò

$\sum_i |i\rangle\langle i|$ è l'operatore identità perché applicato ad un vettore ridà esattamente lo stesso vettore:

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$$

Abbiamo pure:

$$\langle v|u \rangle = \sum_i \langle v|i \rangle \langle i|u \rangle$$

Poiché $\langle v|i \rangle = v_i^*$ e $\langle i|u \rangle = u_i$ si ha:

$$\langle v|u \rangle = \sum_i v_i^* u_i$$

4 Operatori

Operatore è un ente matematico che trasforma un vettore $|a\rangle$ in un vettore $|b\rangle$

$$|b\rangle = A|a\rangle$$

Una volta fissati i vettori base, ogni operatore può essere rappresentato da una matrice, come i vettori possono essere rappresentati dalle loro componenti.

Poniamoci in uno spazio a tre dimensioni. Applichiamo A ai vettori base ed esprimiamo i vettori così ottenuti come combinazione lineare dei vettori base

$$\begin{aligned} A|1\rangle &= |\bar{1}\rangle = A_{11}|1\rangle + A_{21}|2\rangle + A_{31}|3\rangle \\ A|2\rangle &= |\bar{2}\rangle = A_{12}|1\rangle + A_{22}|2\rangle + A_{32}|3\rangle \\ A|3\rangle &= |\bar{3}\rangle = A_{13}|1\rangle + A_{23}|2\rangle + A_{33}|3\rangle \end{aligned}$$

I numeri A_{ik} possono essere considerati come elementi di una matrice che caratterizza l'operatore A.

Se consideriamo $A|2\rangle$ e moltiplichiamo scalarmente per $\langle 1|$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle 1|A|2\rangle &= A_{12}\langle 1|1\rangle + 0 + 0 \\ A_{12} &= \langle 1|A|2\rangle \end{aligned}$$

I vettori base si possono esprimere come matrici

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora si ha

$$|\bar{1}\rangle = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A_{11}, A_{21}, A_{31})$$

Perciò anche

$$|\bar{v}\rangle = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora gli operatori che trasformano bra in bra.

Chiamiamo A^+ (operatore aggiunto) l'operatore che trasforma il bra $\langle a|$ nel bra $\langle \bar{a}|$:

$$\langle \bar{a}| = \langle a|A^+$$

Calcoliamo gli elementi di matrice di A^+ :

$$\begin{aligned} \langle b|A|a\rangle &= \langle b|\bar{a}\rangle = (\langle \bar{a}|b\rangle)^* = (\langle a|A^+|b\rangle)^* \\ \langle b|A|a\rangle &= (\langle a|A^+|b\rangle)^* \\ (\langle b|A|a\rangle)^* &= \langle a|A^+|b\rangle \end{aligned}$$

Se al posto di $|a\rangle$ e $|b\rangle$ consideriamo due vettori base $|i\rangle$ e $|j\rangle$

$$(A_{ji})^* = A_{ij}^+$$

Se $A = A^+$ l'operatore A si dice reale o hermitiano.

In questo caso si ha

$$(\langle b|A|a\rangle)^* = \langle a|A|b\rangle$$

cioè: nella matrice di un operatore hermitiano gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono complessi coniugati. Gli elementi della diagonale principale sono reali perché coincidono con i loro complessi coniugati.

5 Autovalori ed autovettori

Studiamo l'equazione

$$A|a\rangle = \lambda|a\rangle$$

I valori di λ per cui l'equazione è risolubile si chiamano autovalori di A. I vettori $|a\rangle$ soluzioni dell'equazione sono autovettori. Se introduciamo un sistema di riferimento, cioè una base possiamo scrivere, utilizzando l'operatore identità:

$$\sum_j A|j\rangle\langle j|a\rangle = \lambda|a\rangle$$

e moltiplichiamo ambo i membri per $\langle i|$ si ha:

$$\sum_j \langle i | A | j \rangle \langle j | a \rangle = \lambda \langle i | a \rangle$$

cioè

$$\sum_j \langle i | A | j \rangle a_j = \sum_j A_{ij} a_j = \lambda a_i$$

Questo è un sistema di equazioni lineari ed omogenee nelle incognite a_i . Perché il sistema abbia soluzioni proprie bisogna che sia nullo il determinante dei coefficienti (il numero di equazioni è uguale al numero di dimensioni n dello spazio). Cioè si ha la seguente equazione secolare:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & \dots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Questa è una equazione di grado n in λ le cui soluzioni sono gli autovalori del problema.

Nel caso di operatori hermitiani gli autovalori sono reali e gli autovettori appartenenti ad autovalori differenti sono ortogonali tra di loro.

Infatti:

$$A|a\rangle = \lambda|a\rangle \quad \langle A|a\rangle = \lambda\langle a|a\rangle$$

e poiché $|a\rangle \neq 0$

$$\lambda = \frac{\langle a|A|a\rangle}{\langle a|a\rangle}$$

Il denominatore è reale e positivo; se A è reale il numeratore è reale perciò λ è reale.

Siano $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ due autovettori appartenenti agli autovalori distinti λ_1 e λ_2 .

$$A|a_1\rangle = \lambda_1|a_1\rangle \quad , \quad A|a_2\rangle = \lambda_2|a_2\rangle$$

Poiché A è hermitiano ($A = A^+$)

$$\langle a_2|A = \lambda_2\langle a_2|$$

e

$$\begin{aligned}\langle a_2 | A | a_1 \rangle &= \lambda_1 \langle a_2 | a_1 \rangle \\ \langle a_2 | A | a_1 \rangle &= \lambda_2 \langle a_2 | a_1 \rangle\end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \langle a_2 | a_1 \rangle$$

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora $\langle a_2 | a_1 \rangle = 0$.

Autovettori appartenenti ad autovalori distinti sono ortogonali.

Se $(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$ i due autovettori non saranno più in generale ortogonali.

Se $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ appartengono allo stesso autovalore λ anche $(c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle)$ appartiene ancora a λ .

Poiché gli autovettori sono determinati a meno di una costante possiamo normalizzarli. Gli autovettori così determinati soddisfano a

$$A|a_j\rangle = \lambda_j|a_j\rangle \quad , \quad \langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$$

Fissata una base ad ogni operatore corrisponde una matrice.

Esiste un particolare sistema di riferimento in cui gli unici elementi diversi da zero sono quelli della diagonale principale. Questo riferimento è quello in cui i vettori base coincidono con gli autovettori del nostro operatore. Diagonalizzando una matrice si possono fare sparire i termini misti di una forma quadratica.

Applichiamo a $\langle a | M | a \rangle$ due volte la relazione di completezza:

$$\langle a | M | a \rangle = \sum_{ij} \langle a | i \rangle \langle i | M | j \rangle \langle j | a \rangle = \sum_{ij} M_{ij} a_i^* a_j$$

Se la base è costituita dagli autovettori normalizzati di M si ha:²

$$\langle a | M | a \rangle = \sum_i \lambda_i a_i^* a_i$$

6 Algebra delle matrici

Dati due operatori A_1 e A_2 l'operatore prodotto B è definito così:

$$B|a\rangle = A_2 A_1 |a\rangle$$

dove $A_2 A_1$ significa che prima A_1 agisce su $|a\rangle$, poi sul ket così ottenuto agisce l'operatore A_2 .

In linguaggio matriciale si ha:

$$\begin{aligned}\langle i | B | j \rangle &= \langle i | A_2 A_1 | j \rangle = \sum_m \langle i | A_2 | m \rangle \langle m | A_1 | j \rangle \\ B_{ij} &= A_{2im} A_{1mj}\end{aligned}$$

² $\langle i | M | j \rangle a_j = \lambda_j \langle i | j \rangle a_j = \lambda_j \delta_{ij} a_j = \lambda_i a_i$ [ndc].

Il prodotto di due matrici non gode della proprietà commutativa

$$A_2 A_1 \neq A_1 A_2$$

Facciamo il seguente esempio. Siano A e B due operatori rappresentati da:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad . \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \quad , \quad AB = C$$

B è diagonale : $B|j\rangle = b_j|j\rangle$

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \langle i | C | j \rangle = \langle i | AB | j \rangle \\ C_{ij} &= \langle i | A | j \rangle b_j = a_{ij} b_j \\ C &= AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 & a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 & a_{22}b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'elemento di matrice di D=BA

$$D_{ij} = \langle i | D | j \rangle = \langle i | BA | j \rangle$$

Supponendo A e B hermitiane

$$\begin{aligned} D_{ij} &= b_i \langle i | A | j \rangle = b_i a_{ij} \\ D = BA &= \begin{pmatrix} a_{11}b_1 & a_{12}b_1 \\ a_{21}b_2 & a_{22}b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Perciò il commutatore

$$AB - BA = [A, B] = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}(b_2 - b_1) \\ -a_{21}(b_2 - b_1) & 0 \end{pmatrix}$$

non è nullo.

Se anche A fosse diagonale, cioè se $a_{21} = a_{12} = 0$ allora il commutatore sarebbe nullo. Due matrici diagonali nella stessa base commutano sempre.

Viceversa se due matrici hermitiane A e B commutano, cioè se $AB - BA = 0$, allora esiste una base in cui le due matrici sono contemporaneamente diagonali.

Supponiamo che A abbia un sistema completo di autovettori $|a_i\rangle$ corrispondenti agli autovalori λ_i tutti distinti:

$$A|a_i\rangle = \lambda_i|a_i\rangle$$

Dimostriamo che gli $|a_i\rangle$ sono anche autovettori di B. Applichiamo l'operatore B alla equazione $A|a_i\rangle = \lambda_i|a_i\rangle$:

$$\begin{aligned} BA|a_i\rangle &= \lambda_i B|a_i\rangle \quad \text{ma} \quad AB = BA \\ AB|a_i\rangle &= \lambda_i B|a_i\rangle \quad , \quad A(B|a_i\rangle) = \lambda_i(B|a_i\rangle) \end{aligned}$$

B è un autovettore di A corrispondente all'autovalore λ_i . Non c'è degenerazione quindi $B|a_i\rangle$ e $|a_i\rangle$ sono proporzionali: $B|a_i\rangle = b_i|a_i\rangle$.

7 Rappresentazioni matriciali degli operatori di momento angolare

Le funzioni armoniche sferiche formano un set ortonormale di funzioni:

$$(Y_{lm}, Y_{l'm'}) = \int Y_{lm}^* Y_{l'm'} d\varphi \sin \theta d\theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Una qualunque funzione d'onda può essere sviluppata in termini del set

$$\Psi = \sum_{lm} a_{lm}(r, t) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

dove

$$a_{lm} = (Y_{lm}, \Psi)$$

In questa rappresentazione gli elementi di matrice di L_z sono³

$$(L_z)_{lm, l'm'} = (Y_{lm}, L_z Y_{l'm'}) = m' \hbar \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

e gli elementi di matrice del quadrato del momento angolare:

$$(L^2)_{lm, l'm'} = (Y_{lm}, L^2 Y_{l'm'}) = l(l+1) \hbar^2 \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

La matrice che rappresenta L_z è perciò

$$L_z = \hbar \begin{pmatrix} & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & -1 & 0 & 0 & + & 0 & - & - \\ & 0 & 0 & 0 & | & 0 & | & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & | & 2 & - & - \\ & & & & | & 1 & 0 & -1 \\ & 0 & 0 & & | & & -2 & \\ & & & & | & & & \end{pmatrix}$$

³ Vedi alla fine del paragrafo 3 [ndc].

$$\hat{L}^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

È facile costruire le matrici rappresentative di L_{\pm} noto che⁴

$$\begin{aligned} L_- Y_{lm} &= ((l+m)(l-m+1))^{1/2} \hbar Y_{l,m-1} \\ (L_-)_{lm,l'm'} &= (Y_{lm}, L_- Y_{l'm'}) = \\ &= ((l'+m')(l'-m'+1))^{1/2} \hbar \delta_{ll'} \delta_{m,m'-1} \end{aligned}$$

Sistemi con spin 1/2 come elettroni, protoni, neutroni, eccetera hanno la

$$\hat{L}_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⁴ Da L_- in coordinate sferiche (vedi paragrafo 4) e dalla definizione delle armoniche sferiche: $Y_{lm} = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \left\{ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{l-|m|!}{l+|m|!} \right\}^{\frac{1}{2}} P_{l,|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}$ [ndc].

funzione d'onda data da

$$\Psi = \begin{pmatrix} a_{1/2}(\rho, t) \\ a_{-1/2}(\rho, t) \end{pmatrix}$$

Per gli operatori di spin possiamo avere la seguente rappresentazione matriciale

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_x & S_y &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_y \\ S_z &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_z \end{aligned}$$

Gli operatori σ si chiamano operatori di spin di Pauli.

VII

Formulazione generale della meccanica quantistica

È possibile formulare la meccanica quantistica in modo assiomatico, cioè mediante un insieme di postulati. Senza entrare nel dettaglio della formulazione assiomatica mostriamo in questo capitolo come tutte le caratteristiche concettuali essenziali della meccanica quantistica viste finora attraverso un metodo fenomenologico siano sintetizzabili con pochi postulati.

Postulato 1

Per ogni sistema composto da una particella che si muove in un potenziale o in un campo di forze conservativo è associata una funzione Ψ , detta funzione d'onda.

la Ψ determina tutto quello che si può sapere del sistema. È in generale complessa e dipende dalle coordinate della particella e dal tempo. È una funzione ad un sol valore. Può essere moltiplicata per un numero complesso qualunque senza che la fisica cambi.

La Ψ ha significato fisico attraverso il suo modulo quadro: $|\Psi|^2$. Significato fisico di $|\Psi(x, t)|^2 dx$: probabilità di trovare la particella nell'intervallo di coordinata $x - (x + dx)$.

Postulato 2

Ad ogni osservabile fisica (cioè ad ogni grandezza misurabile) è associato un operatore. Intendiamo come osservabile, ad esempio, l'energia, la coordinata della particella, il suo momento angolare, etc.

Se Q è l'operatore associato all'osservabile q , una misura di q dà come risultato uno degli autovalori di Q in base all'equazione

$$Q\Psi_n = q_n \Psi_n$$

Prima della misura il sistema si trovava nello stato Ψ_n autofunzione di Q . q_n è uno degli autovalori di Q . Se lo stato del sistema non è un autostato non si può sapere con certezza quale sarà il risultato della misura; sarà uno dei possibili autovalori.

Gli operatori corrispondenti all'impulso e alla coordinata di una particella sono x e P_x dove:

$$x = x \quad e \quad P_x = -i\hbar\partial/\partial x.$$

Di fondamentale importanza sono gli operatori hermitiani già definiti precedentemente. Si ha il seguente:

Teorema

Gli autovalori di un operatore hermitiano sono tutti reali.

Postulato 3

L'operatore associato ad una grandezza fisica misurabile è hermitiano.

Circa le autofunzioni dobbiamo elencare le seguenti definizioni e teoremi:

a) Due autofunzioni Ψ_m e Ψ_n sono ortogonali se

$$\int_{\text{tutto lo spazio}} \Psi_m^* \Psi_n d\tau = 0$$

b) Si ha un insieme di autofunzioni linearmente indipendenti se l'equazione

$$\sum_i c_i \Psi_i = 0 \quad \text{solo se tutte le } c_i \text{ sono nulle.}$$

c) Degenerazione: se ci sono n autofunzioni linearmente indipendenti, tutte corrispondenti all'autovalore q_n , allora l'autovalore q_n è degenero n volte.

d) Autofunzioni corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali. Cioè se

$$Q\Psi_n = q_n \Psi_n \quad e \quad Q\Psi_m = q_m \Psi_m \quad (q_n \neq q_m) \quad \text{allora}$$

$$\int \Psi_m^* \Psi_n d\tau = 0$$

e) Se q è degenero una combinazione lineare delle autofunzioni linearmente indipendenti è ancora autofunzione

$$Q\left(\sum_i c_i \Psi_i\right) = q\left(\sum_i c_i \Psi_i\right)$$

f) Un insieme di autofunzioni linearmente indipendenti è completo se qualunque altra autofunzione è linearmente dipendente.

g) Quando q è un autovalore degenero m volte, allora se le $\Psi_i (i = 1, \dots, m)$ formano un set completo ogni altra autofunzione di questo operatore può essere espressa mediante il set (insieme) completo. Combinazioni lineari delle Ψ_i possono formare un insieme di m funzioni ortogonali.

Postulato 4

Data l'equazione agli autovalori $Q\Psi_n = q_n \Psi_n$ le autofunzioni Ψ_n un set infinito di funzioni linearmente indipendenti. Se Ψ è una certa funzione d'onda con un

buon comportamento, cioè fisicamente accettabile allora può essere sviluppata in termini delle autofunzioni di una qualunque osservabile del sistema. Si ha cioè

$$\Psi = \sum_i c_i \Psi_i$$

Il set di cui sopra è in genere anche ortogonale ed ogni Ψ_n è normalizzata ad uno. Cioè il set è ortonormale e completo.

Due osservabili si dicono compatibili se hanno lo stesso set di autofunzioni. Se due osservabili sono compatibili i loro operatori commutano. Cioè se

$$\begin{aligned} Q\Psi_n &= q_n \Psi_n & \text{e} & R\Psi_n = r_n \Psi_n & \text{allora} \\ [Q, R] &= QR - RQ = 0 & (\text{il commutatore è nullo}) \end{aligned}$$

Se Q ed R sono due operatori che commutano cioè se $QR - RQ = 0 = [Q, R]$ allora hanno una base comune. Cioè esiste un insieme completo di autofunzioni che sono simultaneamente autofunzioni di Q e di R.

Postulato 5

Si abbia un operatore Q corrispondente alla osservabile fisica q e sia il sistema descritto da una funzione d'onda Ψ che non è un autostato di Q. Il valor medio di q è dato da

$$\langle q \rangle = \int \Psi^* Q \Psi d\tau$$

essendo Ψ normalizzata ad uno.

Cerchiamo di capire il significato fisico di questo postulato:

$$\text{possiamo scrivere} \quad \Psi = \sum_n c_n \Psi_n$$

Si ha pure: $Q\Psi_n = q_n \Psi_n$

Le Ψ_n formano un insieme ortonormale e completo.

Si ha allora:

$$\int \Psi^* \Psi d\tau = \sum_{n,m} c_n^* c_m \int \Psi_n^* \Psi_m d\tau = \sum_{n,m} c_n^* c_m \delta_{n,m} = 1$$

Perciò $\sum_{n,m} |c_n|^2 = 1$ e

$$\begin{aligned} \langle q \rangle &= \int \Psi^* Q \Psi d\tau = \int \sum_n c_n^* \Psi_n^* Q \sum_m c_m \Psi_m d\tau \\ &= \sum_n \sum_m c_n^* c_m \int \Psi_n^* q_m \Psi_m d\tau = \sum_{n,m} c_n^* c_m q_m \int \Psi_n^* \Psi_m d\tau \\ &= \sum_{n,m} c_n^* c_m q_m \delta_{n,m} = \sum_n |c_n|^2 q_n \end{aligned}$$

$|c_n|^2$ è la probabilità che una misura di q dia come risultato q_n : $P_n = |c_n|^2$.
Perciò

$$c_n = \int \Psi_n^* \Psi d\tau$$

$$P_n = |c_n|^2 = \left| \int \Psi_n^* \Psi \right|^2$$

Postulato 6

Un sistema descritto da una funzione d'onda Ψ , lasciato indisturbato dopo un certo istante a cui Ψ è nota, si evolve nel tempo secondo l'equazione

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

dove H è l'operatore hamiltoniano. H come operatore lo si può ottenere sostituendo nella sua espressione classica a $P_x \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ ed a $x \rightarrow x$.

Postulato 7

Tra i commutatori della meccanica quantistica e le parentesi di Poisson classiche esiste la seguente corrispondenza

$$[Q, R] = (QR - RQ) \rightarrow i\hbar \{q, r\}$$

VIII

Forze centrali

1 Il problema dei due corpi

Poiché molti problemi dinamici di moti in campi di forze possono essere ri-condotti al problema dei due corpi, vediamo in primo luogo questo problema. Abbiamo due corpi uno di massa m_1 e l'altro di massa m_2 . Il corpo 1 ha coordinata x_1 e impulso p_{x_1} , il corpo 2 ha x_2 e p_{x_2} . Consideriamo, come al solito, casi unidimensionali. In realtà i due corpi possono essere il neutrone ed il protone nel nucleo del deuterio, oppure l'elettrone e il protone dell'atomo di idrogeno. L'hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{p_{x_1}}{2m_1} + \frac{p_{x_2}}{2m_2} + V(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$$

Introduciamo la coordinata del baricentro e quella relativa:

$$x_B = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad x_R = x_2 - x_1$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial x_B}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_B} + \frac{\partial x_R}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial x_B} - \frac{\partial}{\partial x_R} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_B^2} - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_B \partial x_R} + \frac{\partial^2}{\partial x_R^2} \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + V = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \frac{\partial^2}{\partial x_B^2} - \frac{\hbar^2}{2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}} \frac{\partial^2}{\partial x_R^2} + V \\ &= H_B + (H_R + V) \end{aligned}$$

Introduciamo la massa totale $M = m_1 + m_2$
e la massa ridotta $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1}$.
L'equazione temporale di Schrödinger è

$$H\Psi(x_1, x_2, t) = [H_0 + (H_1 + V)]\Psi(x_B, x_R, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

Separando le variabili

$$\Psi(x_B, x_R, t) = \chi(x_B, t)\varphi(x_R, t)$$

$$H_0\chi(x_B, t) = i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (H_1 + V)\varphi(x_R, t) = i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Il baricentro si muove liberamente. Non ci sono forze applicate ad esso. Il problema è perciò ridotto allo studio del moto di una particella di massa m (massa ridotta) in un potenziale.

2 Forze centrali

Siamo in questo caso quando V dipende solo dal modulo della distanza, cioè $V \equiv V(|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|)$. In tre dimensioni abbiamo : $H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$, per una particella di massa m nel potenziale $V(r)$.

H , L^2 e L_z commutano perciò hanno una base comune, cioè è possibile scegliere un set di autofunzioni comune contemporaneamente a tutti e tre gli operatori.

Separando le variabili scriviamo il set così:

$$\Psi_{Elm} = R_{Elm}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Ricordiamo che possiamo scrivere l'operatore energia cinetica così

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

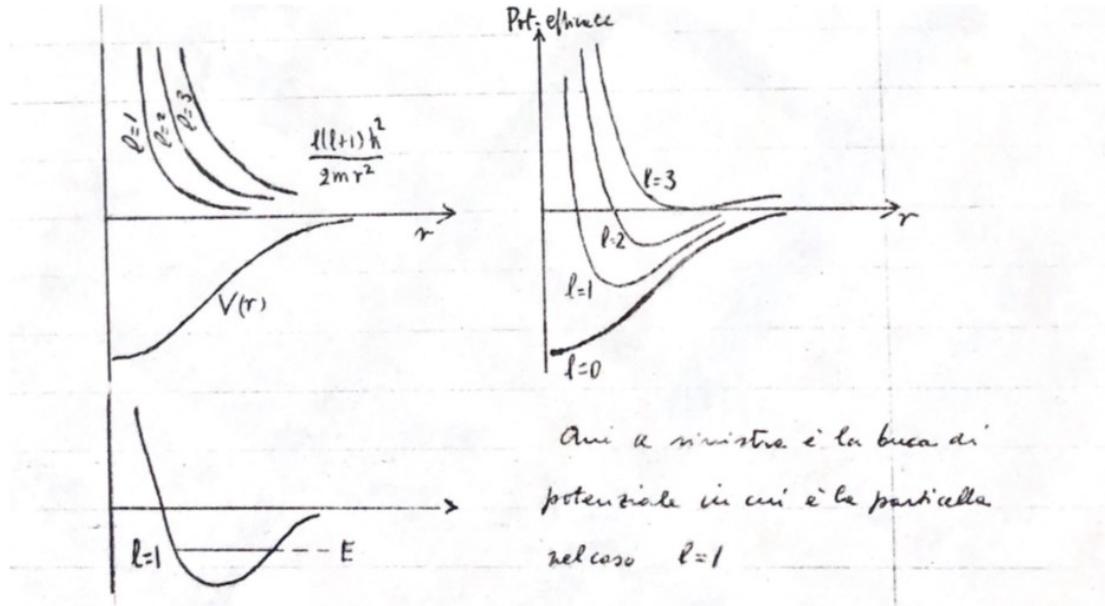
dove abbiamo indicato con P_r l'operatore (non la componente)

$$-i\hbar \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r$$

Allora possiamo scrivere la seguente equazione agli autovalori

$$\begin{aligned} & \left[\frac{P_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \right] \Psi_{Elm} = E\Psi_{Elm} \\ & \left[\frac{P_r^2}{2m} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right] R_{El}(r) = ER_{El}(r) \\ & \left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{d}{dr} \right)^2 + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right] u_{El} = Eu_{El} \quad u_{El} \equiv rR_{El} \end{aligned}$$

Abbiamo così la particella di massa m sottoposta ad un potenziale efficace che è la somma di V più un potenziale centrifugo $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$.



3 Atomo di idrogeno

Studiamo il moto di un elettrone in un potenziale coulombiano creato da un nucleo di carica Ze . Abbiamo: $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$, e

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} u - \frac{Ze^2}{r} u = Eu$$

Usiamo le nuove variabili:

$$\rho = \frac{\sqrt{-8mE}}{\hbar} r \quad , \quad \lambda = \sqrt{\frac{m}{-2E}} \cdot \frac{-Ze^2}{\hbar}$$

L'equazione di Schrödinger diventa

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} u + \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} \right) u = 0$$

Come nel caso dell'oscillatore armonico cerchiamo l'andamento asintotico della soluzione. Esso può essere

$$u \sim e^{\pm\rho/2}$$

Prendiamo la soluzione col segno meno perché u deve essere finita. Possiamo moltiplicare l'esponenziale per un polinomio ed ancora avremo lo stesso andamento asintotico. Si ha: $u = \mathcal{P} \cdot e^{-(1/2)\rho}$, perciò l'equazione per u diventa:

$$\frac{d^2\mathcal{P}}{d\rho^2} - \frac{d\mathcal{P}}{d\rho} + \left[\frac{\lambda}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] \mathcal{P} = 0$$

dove $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \rho^i$ ($\mathcal{P} \rightarrow 0$ per $\rho \rightarrow 0$)

Sostituiamo questa espressione nell'equazione differenziale e egualiamo a zero i coefficienti delle potenze di ρ aventi lo stesso valore. Così abbiamo:

$$\begin{aligned} l(l+1)\alpha_1 &= 0 \\ (\lambda-1)\alpha_1 + [2-l(l+1)]\alpha_2 &= 0 \\ \dots & \\ [i(i+1) - l(l+1)]\alpha_{i+1} + (\lambda-i)\alpha_i &= 0 \quad (i \geq 2) \end{aligned}$$

Se la serie non termina ed è infinita avremo

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} = \frac{i-\lambda}{i(i+1)-l(l+1)}$$

Perciò

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} = \frac{1}{i+1}$$

Questo rapporto è lo stesso rapporto che si ha tra i coefficienti dello sviluppo in serie di potenze di e^ρ . La serie con cui è espresso \mathcal{P} ha lo stesso andamento asintotico di e^ρ . Perciò la u ha un andamento asintotico come $e^{(1/2)\rho}$. Perciò la funzione d'onda non è finita dappertutto. Bisogna troncare la serie. Se λ non è intero si ha soluzione solo se tutte le $\alpha_i = 0$ o $\mathcal{P} = 0$.

Caso di λ intero: per $\lambda = 0$ o per $\lambda = l$ non si hanno soluzioni fisicamente accettabili.¹ Bisogna che

$$\lambda = n \quad (n \neq l, \text{ intero})$$

Ma il caso $\lambda = n < l$ conduce ad una serie infinita.

Solo il caso $\lambda = n > l$ conduce a troncare la serie.

Infatti si ha²

$$a_i = 0 \quad \text{per} \quad i \geq n+1$$

I polinomi risultanti possono essere classificati con due indici: n ed l (polinomi associati di Laguerre)

$$u_{ln} = \sum_{i=l}^n \alpha_i \rho^i e^{-\frac{1}{2}\rho}$$

Dalla definizione di λ e dalla condizione che $\lambda = n > l$ si hanno i possibili valori di energia per gli stati legati:

¹ Per $\lambda = 0$, $\alpha_i = 0$ per $i = l$, di conseguenza tutti gli a_i sono nulli; per $\lambda = l$ il rapporto α_{i+1}/α_i è indeterminato per $i = l$ [ndc].

² Per $i = n$ e $n > l$, $i(i+1) - l(l+1) > 0$ e $\lambda = n$, da cui $a_{n+1} = 0$ [ndc].

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{1}{2}m\frac{e^4}{\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2} \quad (n > l) \\ &= -\frac{1}{2}mc^2\alpha^2\frac{Z^2}{n^2} \quad \alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \text{ (costante di struttura fine)} \end{aligned}$$

Alcune funzioni d'onda radiali per l'atomo di idrogeno ($Z=1$) o idrogenoide sono ($R_{nl} \equiv \frac{1}{r}u_{nl}$):

$$\begin{aligned} R_{10}(r) &= \left(\frac{Z}{\beta}\right)^{3/2} 2e^{-\frac{Zr}{\beta}} \quad \left(\beta = \frac{\hbar^2}{me^2}\right) \\ R_{20}(r) &= \left(\frac{Z}{2\beta}\right)^{3/2} 2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Zr}{\beta}\right)e^{-\frac{Zr}{2\beta}} \\ R_{21}(r) &= \left(\frac{Z}{2\beta}\right)^{3/2} 2\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{Zr}{\beta}e^{-\frac{Zr}{2\beta}} \\ &\dots \end{aligned}$$

Il parametro β sopra definito è quello che, nella teoria dell'atomo di Bohr, si chiama raggio di Bohr dell'atomo di idrogeno.

La funzione d'onda totale dell'atomo di idrogeno o idrogenoide è la Ψ_{Elm} che è il prodotto della parte radiale ora studiata per una parte angolare. La funzione d'onda angolare non è altro che l'autofunzione di L^2 e Lz per un dato l e m . Non ci dilunghiamo perciò sulla parte angolare già vista nel capitolo del momento angolare. Utilizzando le funzioni $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ (funzioni armoniche sferiche) possiamo perciò scrivere

$$\Psi_{Elm} = R_{El}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Tenuto conto che ad uno stato di dato l corrispondono $(2l+1)$ valori del numero quantico magnetico m , possiamo dire che il numero di stati appartenenti alla stessa energia E_n (caratterizzata dal solo numero quantico n) sono dati da:

$$N = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2\left(\frac{n-1}{2} \cdot n\right) + n = n^2$$

Perciò si ha

$n = 1$	$l = 0$	1 solo stato	(1s)
$n = 2$	$l = 0, 1$	4 stati	(2s), (2p)
	$m = 0, m = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$		
$n = 3$	$l = 0, 1, 2$	9 stati	(3s), (3p), (3d)
	$m = 0, m = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}, m = \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{cases}$		

dove s sta per $l = 0$, p sta per $l = 1$, d per $l = 2$.

Nella vecchia teoria di Bohr dell'atomo di idrogeno la natura discreta dello spettro, evidenziata nel comportamento di E_n come $\frac{1}{n^2}$, veniva postulata con le condizioni che per le orbite periodiche caratterizzate dalla coordinata r e dall'impulso coniugato p , dovesse valere:

$$\oint p dr = nh$$

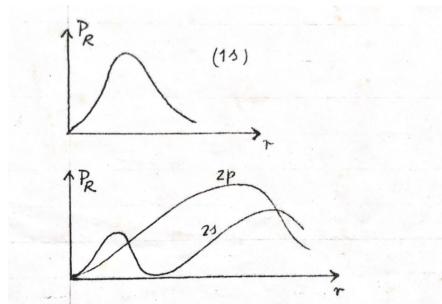
dove l'integrale va esteso a tutta l'orbita. Se le orbite sono considerate circolari si ottiene:

$$mv2\pi r = nh \quad , \quad r = n \frac{\hbar}{mv}$$

dove m è la massa ridotta del sistema.

Un'altra equazione che permette di valutare r e v è data dall'equilibrio tra forza centrifuga mv^2/r e attrazione coulombiana Ze^2/r^2 .

Riportiamo qui sotto l'andamento qualitativo della densità di probabilità radiale P_R :



4 Parità

Funzioni d'onda possono essere classificate come pari o dispari.
Introduciamo un operatore di parità P tale che:

$$P\Psi(r_1, r_2, \dots, r_n) = \Psi(-r_1, -r_2, \dots, -r_n)$$

cioè l'operatore P cambia segno alle variabili r_i .

Questo operatore può corrispondere ad una grandezza fisicamente misurabile.
Scriviamo l'equazione agli autovalori

$$P\Psi = \pi\Psi$$

Operiamo nuovamente con P

$$P^2\Psi = \pi^2\Psi$$

Operando due volte ritorniamo alla funzione di partenza: $\pi^2\Psi = \Psi$. P^2 è perciò l'operatore identità:

$$P^2\Psi = \mathbb{1}\Psi = \Psi \quad ; \quad \pi^2 = 1 \quad , \quad \pi = \pm 1$$

P ha due autovalori ± 1

Ψ è pari se	$P\Psi = +\Psi$
Ψ è dispari se	$P\Psi = -\Psi$

Supponiamo di avere una hamiltoniana per un sistema di n particelle del tipo:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{ij} V(r_{ij}) \quad r_{ij} = |\bar{r}_i - \bar{r}_j|$$

Si ha $[H, P] = 0$, cioè H e P commutano. P è anche hermitiano. Possiamo scegliere autofunzioni contemporaneamente di H e di P. Stati di differente energia possono allora essere caratterizzati dalla loro parità.

IX

Particelle identiche

1 Introduzione

Se in meccanica quantistica abbiamo da studiare un sistema di n particelle di coordinate r_1, \dots, r_n e momenti p_1, \dots, p_n , ancora possiamo dire valida l'equazione di Schrödinger:

$$H(r_1, p_1, \dots, r_n, p_n) \Psi(r_1, \dots, r_n, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r_1, \dots, r_n, t)$$

dove l'hamiltoniana H è data dalla formula:

$$H = T + V = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i} + V(r_1, \dots, r_n, t)$$

In meccanica classica date due particelle identiche, cioè dello stesso tipo, (due elettroni, due protoni, ...) ognuna possiede una sua individualità ed è possibile distinguere e seguire ogni singola particella nel suo moto.

In meccanica quantistica dobbiamo fare queste considerazioni:

- la funzione d'onda non distingue le particelle tra loro, predice la probabilità di trovare una particella in un certo punto ma non dice quale particella è,
- per il principio di indeterminazione il concetto di traiettoria non ha più senso,
- vale il principio di indistinguibilità di due particelle identiche: lo scambio di due particelle è privo di senso.

Consideriamo un sistema di due particelle identiche: x_1 e x_2 sono variabili che rappresentano coordinate, spin per la particella 1 e 2.

Un'osservabile è esprimibile come funzione di x_1 e x_2 e deve essere simmetrica rispetto allo scambio tra x_1 e x_2 .

Se $\Psi(x_1, x_2)$ è la funzione d'onda del sistema, deve essere:

$$\begin{aligned} |\Psi(x_1, x_2)|^2 &= |\Psi(x_2, x_1)|^2 \\ \Psi(x_1, x_2) &= e^{i\alpha} \Psi(x_2, x_1) \end{aligned}$$

Scambiamo nuovamente x_1 con x_2

$$\begin{aligned} e^{2i\alpha} &= 1 \\ e^{i\alpha} &= \pm 1 \end{aligned}$$

Quindi avremo:

- | | |
|-------------------|------------------------------------|
| f. simmetrica | $\Psi(x_1, x_2) = \Psi(x_2, x_1)$ |
| f. antisimmetrica | $\Psi(x_1, x_2) = -\Psi(x_2, x_1)$ |

La funzione d'onda deve sempre essere simmetrica od antisimmetrica.

Data una funzione d'onda simmetrica od antisimmetrica ad un certo tempo t resta tale negli istanti successivi.

2 Sistema di n particelle identiche

La funzione $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è simmetrica se resta invariata per qualunque permutazione tra x_l e x_k .

È antisimmetrica se cambia segno per uno scambio delle coordinate di due particelle. Quindi è pari per un numero di permutazioni pari, è dispari per un numero dispari.

Supponiamo che le n particelle non interagiscano tra loro.

Ogni particella si trovi in uno stato caratterizzato dall'insieme dei numeri quantici $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

L'equazione di Schrödinger ha allora come soluzione la funzione

$$\Psi = \Psi_{\alpha_1}(x_1)\Psi_{\alpha_2}(x_2)\dots\Psi_{\alpha_n}(x_n)$$

Se sottopongo a permutazioni tra le x_l la Ψ ottengo ancora soluzioni dell'equazione di Schrödinger.

La soluzione generale è la sovrapposizione di tutte queste soluzioni. Si può avere una sovrapposizione simmetrica od antisimmetrica

$$\Psi_S(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\text{perm.}} \Psi_{\alpha_1}(x_1)\Psi_{\alpha_2}(x_2)\dots\Psi_{\alpha_n}(x_n)$$

$$\Psi_A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \Psi_{\alpha_1}(x_1) & \Psi_{\alpha_1}(x_2) & \dots & \Psi_{\alpha_1}(x_n) \\ \Psi_{\alpha_2}(x_1) & \Psi_{\alpha_2}(x_2) & \dots & \Psi_{\alpha_2}(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{\alpha_n}(x_1) & \Psi_{\alpha_n}(x_2) & \dots & \Psi_{\alpha_n}(x_n) \end{vmatrix}$$

Per due sole particelle si ha:

$$\Psi_S(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{\alpha_1}(x_1)\Psi_{\alpha_2}(x_2) + \Psi_{\alpha_2}(x_1)\Psi_{\alpha_1}(x_2))$$

$$\Psi_A(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{\alpha_1}(x_1)\Psi_{\alpha_2}(x_2) - \Psi_{\alpha_2}(x_1)\Psi_{\alpha_1}(x_2))$$

Sappiamo che un elettrone legato in un'orbita atomica può essere descritto da quattro numeri quantici: n, l, m, σ_z .

Il principio di Pauli dice che:

In un atomo non possono esistere due elettroni nello stesso stato, cioè due elettroni aventi gli stessi quattro numeri quantici n, l, m, σ_z .

Il principio di Pauli fa parte di un principio più generale sulla asimmetria della funzione d'onda dei fermioni di Dirac:

Stabilito che le particelle con spin semintero sono dei fermioni (elettroni, protoni, neutroni, ...) e quelle a spin intero dei bosoni (fotoni, ...) si ha che un sistema di fermioni identici può avere solo stati descrivibili da funzioni d'onda antisimmetriche.

Appendici

A

Trasformate di Fourier

1 Oscillazioni libere

Studiamo il moto di un sistema su cui, oltre alla forza elastica, agiscono una forza di attrito ed una forza esterna. Incominciamo col caso di una forza di attrito proporzionale alla velocità. L'equazione del moto è:¹

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + \beta \frac{dx}{dt} = 0$$

Supponiamo una soluzione del tipo $x = e^{i\lambda t}$

$$-m\lambda^2 + i\beta\lambda + k = 0$$

I valori della frequenza λ sono

$$\lambda = \frac{i\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

in generale complessi.

Se β è grande rispetto a k , λ sarà immaginario. La soluzione si riduce ad un esponenziale ed il moto è smorzato, senza oscillazioni.

Se $\beta < k$ scriviamo:

$$\lambda = i\gamma \pm \omega_0 \quad ; \quad \gamma = \frac{\beta}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

Le soluzioni particolari sono:

$$e^{-\gamma t} e^{i\omega_0 t} \quad , \quad e^{-\gamma t} e^{-i\omega_0 t}$$

La soluzione generale è:

¹ In questo primo caso la forza esterna è assente [ndc].

$$x = \mathcal{B}e^{-\gamma t}e^{i\omega_0 t} + \mathcal{C}e^{-\gamma t}e^{-i\omega_0 t}$$

che si riduce a

$$x = \mathcal{A}e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Il tempo dopo il quale l'ampiezza dell'oscillazione si riduce di e è $\tau = 1/\gamma$.

2 Oscillazioni forzate

Se sul sistema agisce anche una forza esterna $F = F_0 e^{i\omega t}$ l'equazione del moto diventa:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$

Cerchiamo una soluzione che vibra colla frequenza della forza esterna

$$x = x_0 e^{i\omega t}$$

Allora

$$(-m\omega^2 + i\beta\omega + k)x_0 = F_0$$

Poniamo

$$Y(\omega) = (-m\omega^2 + i\beta\omega + k)^{-1}$$

Si ha

$$x_0 = Y(\omega)F_0$$

La soluzione è: $x = Y(\omega)F_0 e^{i\omega t}$.

$Y(\omega)$ è il rapporto tra l'ampiezza della risposta e l'ampiezza della forza esterna. È un numero complesso perciò: $Y(\omega) = |Y(\omega)|e^{i\varphi}$.

Si ha

$$\begin{aligned} F &= F_0 e^{i\omega t} \\ x &= F_0 |Y| e^{i\varphi} e^{i\omega t} = F_0 |Y| e^{i(\omega t + \varphi)} \end{aligned}$$

C'è una differenza di fase φ tra forza e spostamento.

Se si ha invece una forza esterna qualunque $F(t)$ allora l'equazione del moto è

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Supponiamo che $F(t)$ possa rappresentarsi come somma di forze oscillanti ognuna con una sola frequenza

$$F(t) = F_1 e^{i\omega_1 t} + F_2 e^{i\omega_2 t} + \dots + F_n e^{i\omega_n t}$$

La soluzione è

$$x(t) = x_1 e^{i\omega_1 t} + x_2 e^{i\omega_2 t} + \dots + x_n e^{i\omega_n t}$$

dove

$$x_j = Y(\omega_j) F_j$$

Scriviamo $F(t)$ come una sovrapposizione continua di vibrazioni con tutte le frequenze possibili

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu) e^{i\nu t} d\nu$$

L'equazione del moto diventa:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu) e^{i\nu t} d\nu$$

Anche $x(t)$ è una sovrapposizione di tutte le frequenze

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu) e^{i\nu t} d\nu$$

Il problema è risolto se è nota $h(\nu)$.

Otteniamo sostituendo $x(t)$ nell'equazione del moto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} \{-m\nu^2 h(\nu) + i\beta\nu h(\nu) + kh(\nu)\} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} g(\nu) d\nu$$

Uguagliando gli integrandi si ha

$$\begin{aligned} (-m\nu^2 + i\beta\nu + k)h(\nu) &= g(\nu) \\ h(\nu) &= g(\nu)Y(\nu) \\ Y(\nu) &= (k + i\beta\nu - m\nu^2)^{-1} \end{aligned}$$

La soluzione è perciò

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\nu)g(\nu)e^{i\nu t} d\nu$$

Dobbiamo perciò infine trovare l'espressione di $g(\nu)$ in funzione di $F(t)$. Chiameremo $g(\nu)$ trasformata di Fourier di $F(t)$.

3 La funzione δ di Dirac

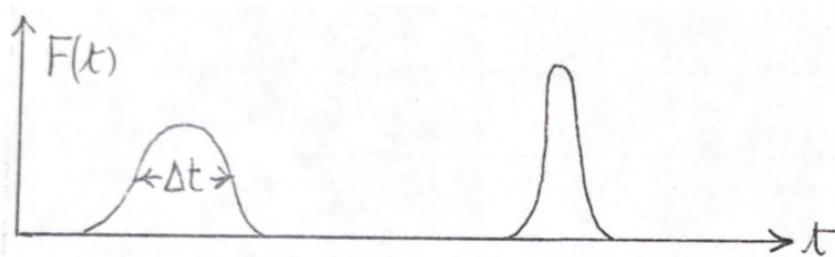
Cominciamo coll'introdurre la funzione δ .

Consideriamo una forza che agisce per un tempo molto breve, ma tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt \neq 0$. Si ha: $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt = 1$

Diminuiamo l'intervallo di tempo aumentando il valore di $F(t)$ in modo che l'area resti invariata (v. figura).

Al limite $dt \rightarrow 0$, affinché l'integrale non si annulli bisogna che F diventi infinita. Si ha allora la funzione δ . La funzione δ è una funzione che è 0 fuori dall'origine ed è infinita nell'origine in modo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \quad , \quad \int_a^b \delta(t)dt = 1 \quad \text{se } 0 \in (a, b)$$



In generale $\delta(t - t_0)$ è nulla dappertutto tranne per $t = t_0$, dove vale infinito.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt = 1$$

Si ha pure che

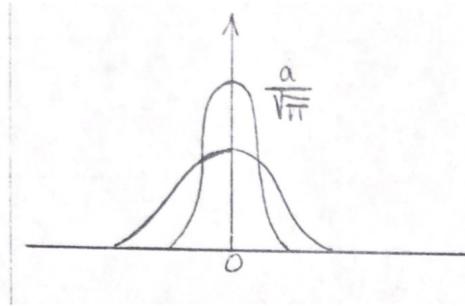
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$$

Possiamo introdurre la δ anche da un altro punto di vista. Consideriamo una gaussiana: $e^{-a^2 x^2}$. La larghezza del picco dipende da a . Diminuisce al crescere di a . Si ha anche che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

Consideriamo la funzione

$$f(ax) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 x^2}$$



La forma del picco dipende da a : al crescere di a il picco si restringe e si alza mentre l'area si mantiene costante e uguale ad uno. Si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)dx = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2} dx = 1$$

Facendo tendere a ad infinito, la larghezza del picco tende a zero e si ha di nuovo la funzione δ . Quindi

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2x^2}$$

4 Trasformata di Fourier

Cerchiamo la funzione $F(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2} e^{iqx} dx$ che si chiama Trasformata di Fourier della gaussiana $e^{-a^2x^2}$:

$$\begin{aligned} F(q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2} e^{iqx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2 + iqx} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \left(x^2 - \frac{iqx}{a^2} - \frac{q^2}{4a^4} + \frac{q^2}{4a^4} \right)} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \left[\left(x + \frac{iq}{2a^2} \right)^2 + \frac{q^2}{4a^4} \right]} dx = \\ &= e^{-\frac{q^2}{4a^4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \left(x + \frac{iq}{2a^2} \right)^2} dx \end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \left(x + \frac{iq}{2a^2} \right)^2} dx \\ x + \frac{iq}{2a^2} &= y \end{aligned}$$

Perciò: $I = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$

$$F(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} e^{iqx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{q^2}{4a^2}}$$

La Trasformata di Fourier di una gaussiana è ancora una gaussiana. La larghezza del picco nella Trasformata è inversamente proporzionale alla larghezza del picco nella curva di partenza.

Introduciamo la variabile $b = \frac{1}{2a}$. Si ha che:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty}} F(q) &= \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} e^{iqx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{iqx} = \lim_{b \rightarrow \infty} 2b\sqrt{\pi} e^{-q^2 b^2} \end{aligned}$$

Perciò utilizzando l'espressione della δ di Dirac

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi}\delta(q) &= \lim_{b \rightarrow \infty} b e^{-b^2 q^2} \\ \lim_{b \rightarrow \infty} 2b\sqrt{\pi} e^{-b^2 q^2} &= 2\pi\delta(q) \end{aligned}$$

Perciò

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqx} dx = 2\pi\delta(q)$$

Torniamo al problema della Trasformata di Fourier.

Poniamo

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu') e^{i\nu' t} d\nu'$$

Moltiplichiamo ambo i membri per $e^{-i\nu t}$ e integriamo:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu t} F(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu') e^{i\nu' t} d\nu' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu') d\nu' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\nu' - \nu)t} dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu') \delta(\nu' - \nu) d\nu' = 2\pi g(\nu) \end{aligned}$$

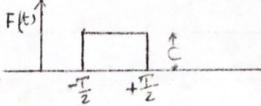
Da cui si ha: $g(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu t} F(t) dt$.

In conclusione abbiamo perciò le due formule:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu) e^{i\nu t} d\nu \\ g(\nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\nu t} dt \end{aligned}$$

che sono la Trasformata di Fourier e la trasformata inversa.

Riportiamo una tabella con tre trasformate interessanti.

$g(\nu)$	$F(t)$
$e^{-a^2 \nu^2}$ $\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(v_0-\nu)^2}{4a^2}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{1}{4a^2} t}$ $e^{i\nu_0 t} e^{-a^2 t^2}$
$\frac{CT}{2\pi} \frac{\sin \nu \frac{T}{2}}{\nu \frac{T}{2}}$	$F(t) = 0 \quad t < -\frac{T}{2}$ $= C \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ $= 0 \quad t > \frac{T}{2}$ 

5 Potenza assorbita da un oscillatore [aggiunta del curatore]

L'equazione del moto un oscillatore in un campo elettrico esterno $E_0 e^{i\omega t}$ è (v. sez. 2)²

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = eE_0 e^{i\omega t}$$

con soluzione

$$x = eE_0 |Y| e^{i(\omega t + \phi)}$$

dove $Y(\omega) = |Y(\omega)| e^{i\phi}$ è il rapporto tra l'ampiezza della risposta e l'ampiezza della forza esterna, con

$$|Y(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}}$$

La potenza istantanea assorbita dall'oscillatore è

² V. anche G. Grignani, *Potenza assorbita da un oscillatore*, documento Università di Perugia (senza data).

$$\begin{aligned}
eE \cdot \frac{dx}{dt} &= m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \beta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + kx \frac{dx}{dt} = m (-\omega^2 e E_0 |Y| \cos(\omega t + \phi)) (-\omega e E_0 |Y| \sin(\omega t + \phi)) + \\
&\beta (-\omega e E_0 |Y| \sin(\omega t + \phi))^2 + k (e E_0 |Y| \cos(\omega t + \phi)) (-\omega e E_0 |Y| \sin(\omega t + \phi)) = \\
&m \omega^3 e^2 E_0^2 |Y|^2 \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi) + \beta \omega^2 e^2 E_0^2 |Y|^2 \sin^2(\omega t + \phi) - \\
&k \omega e^2 E_0^2 |Y|^2 \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

e la potenza media

$$P_a(\omega) = \frac{1}{2} \beta \omega^2 e^2 E_0^2 |Y|^2$$

dove sostituiamo la densità di energia

$$u(\omega) = \frac{E_0^2(\omega)}{8\pi}$$

e riscriviamo come

$$P_a(\omega) = 4\pi \beta e^2 \omega^2 u(\omega) |Y|^2$$

Per radiazione non monocromatica si deve sostituire $u(\omega) \rightarrow u_\omega(\omega) d\omega$, dove $u_\omega(\omega)$ è la densità spettrale della radiazione, e integrare su ω :

$$P_a = 4\pi \beta e^2 \int_0^\infty \omega^2 u_\omega(\omega) |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{4\pi \beta e^2}{m} \int_0^\infty \frac{\omega^2 u_\omega(\omega)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \beta^2 \omega^2} d\omega$$

dove $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. La funzione $|Y(\omega)|$, a causa del denominatore, ha un picco molto stretto (di larghezza $\sim \beta \ll \omega_0$) intorno a ω_0 e si può sostituire ω_0 al numeratore. Inoltre $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega) = -2\omega_0 \xi$ con $\xi = \omega - \omega_0$. Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned}
P_a &\simeq \frac{\pi \beta e^2}{m} u_\omega(\omega_0) \int_{-\omega_0}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \beta^2/4} = \frac{\pi \beta e^2}{m} u_\omega(\omega_0) \cdot \frac{2}{\beta} \int_{-\omega_0/\beta}^\infty \frac{d\eta}{\eta^2 + 1} \simeq \\
&\frac{2\pi e^2}{m} u_\omega(\omega_0) \int_{-\infty}^\infty \frac{d\eta}{\eta^2 + 1} = \frac{2\pi^2 e^2}{m} u_\omega(\omega_0)
\end{aligned}$$

Per esprimere P_a in termini di $u_\nu(\nu)$ osserviamo che

$$\int_{-\infty}^\infty u_\omega(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^\infty u_\nu(\nu) d\nu$$

da cui $2\pi u_\omega(\omega) = u_\nu(\nu)$. Allora

$$P_a = \frac{\pi e^2}{m} u_\nu(\nu_0)$$

Dato che nella teoria della radiazione nera l'oscillatore è lineare viene eccitato da una sola componente del campo elettrico; in un campo di radiazione isotropo esso assorbe $1/3$ della quantità appena calcolata, cioè

$$P_a = \frac{\pi e^2}{3m} u_\nu(\nu_0)$$

6 Calcolo di valori medi per la gaussiana [*aggiunta del curatore*]

Poniamo

$$\Psi = \sqrt{a} e^{-bx^2/2}, \quad a = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi\epsilon}}, \quad b = \frac{\gamma}{\epsilon},$$

$$\Psi^* \Psi = ae^{-bx^2}$$

Si vede facilmente che $\langle x \rangle$ si annulla con una integrazione per parti. Si annulla inoltre $\langle p_x \rangle$ che si riconduce a $\langle x \rangle$. Per calcolare $\langle x^2 \rangle$ osserviamo che

$$\Psi^* x^2 \Psi dx = ae^{-bx^2} x^2 dx$$

con il cambio di variabile $y = \sqrt{b}x$ diventa

$$\Psi^* x^2 \Psi dx = \frac{a}{b^{3/2}} e^{-y^2} y^2 dy$$

che possiamo integrare per parti. A questo scopo osserviamo che

$$d(e^{-y^2} y) = e^{-y^2} dy - 2e^{-y^2} y^2 dy$$

da cui

$$e^{-y^2} y^2 dy = -\frac{1}{2} [d(e^{-y^2} y) - e^{-y^2} dy]$$

Integrando si annulla il primo termine dentro parentesi quadre per $y \rightarrow \infty$ e rimane

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

da cui

$$\langle x^2 \rangle = \frac{a}{b^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2b} = \frac{\epsilon}{2\gamma}$$

Per calcolare $\langle p_x^2 \rangle$ osserviamo che

$$(-i\hbar)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi = b\hbar^2 \Psi - b^2 \hbar^2 x^2 \Psi$$

da cui

$$\langle p_x^2 \rangle = b\hbar^2 a \sqrt{\frac{\pi}{b}} - \hbar^2 b^2 \cdot \frac{\epsilon}{2\gamma} = \frac{\hbar^2 \gamma}{2\epsilon} = \frac{m\epsilon}{2}$$

ricordando che $\epsilon = \hbar\omega$ e $\gamma = m\omega^2$.

Il restante $\langle H \rangle$ si trova facilmente dai precedenti.

Dimostriamo ora che la trasformata di Fourier di una gaussiana è una gaussiana. La trasformata di Fourier di

$$\Psi(x) = \sqrt{a}e^{-bx^2/2}$$

è

$$\Psi(k) = \sqrt{\frac{a}{b}}e^{-k^2/2b}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$$

Data la gaussiana $\Psi(x)$ la trasformata di Fourier di ottiene dall'integrale

$$\Psi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\Psi(x)dx$$

Derivando e integrando per parti

$$\begin{aligned} \Psi'(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -ix e^{-ikx}\Psi(x)dx \\ \frac{d}{dx}(e^{-ikx}\Psi(x)) &= -ike^{-ikx}\Psi(x) + e^{-ikx}\Psi'(x) = -ike^{-ikx}\Psi(x) - bx e^{-ikx}\Psi(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} -ixe^{-ikx}\Psi(x)dx &= \frac{1}{b} [e^{-ikx}\Psi(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} ik e^{-ikx}\Psi(x)dx = -\frac{k}{b}\sqrt{2\pi}\Psi(k) \end{aligned}$$

poiché l'integrale definito si annulla per $x \rightarrow \infty$. Inoltre

$$\Psi_k(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)dx = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{b}{2}x^2}dx = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Abbiamo perciò l'equazione differenziale

$$\Psi'(k) = -\frac{k}{b}\Psi(k), \quad \Psi(0) = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

con soluzione $\Psi(k) = \sqrt{\frac{a}{b}}e^{-k^2/2b}$. Abbiamo inoltre:

$$\begin{aligned} \Psi^*(k)\Psi(k) &= \frac{a}{b}e^{-k^2/b} = \frac{a}{b}e^{-p^2/\hbar^2 b} \\ -i\frac{\partial}{\partial k}\Psi(k) &= \frac{ik}{b}\Psi(k) = \frac{ip}{\hbar b}\Psi(k) \\ \left(-i\frac{\partial}{\partial k}\right)^2\Psi(k) &= -i\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{ik}{b}\Psi(k)\right) = \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial k}(k\Psi) = \frac{1}{b}\Psi - \frac{k^2}{b^2}\Psi = \frac{1}{b}\Psi - \frac{p^2}{\hbar^2 b^2}\Psi \end{aligned}$$

Ne segue subito che $\langle x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x} \rangle$ e $\langle p_x = p_x \rangle$ si annullano. Per calcolare $\langle p_x^2 = p_x^2 \rangle$ osserviamo che

$$\Psi^*(k)p_x^2\Psi(k)dk = \frac{a}{b}e^{-p_x^2/\hbar^2 b}p_x^2\frac{dp_x}{\hbar}$$

e con il cambio di variabile $q = p_x/\hbar\sqrt{b}$

$$\langle p_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(k)p_x^2\Psi(k)dk = \hbar^2 a \sqrt{b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} q^2 dq = \hbar^2 a \sqrt{b} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\hbar^2 \gamma}{2\epsilon} = \frac{m\epsilon}{2}$$

$$\text{Infine per } \langle x^2 \rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} \right)^2 \langle \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p_x^2/\hbar^2 b} \frac{dp_x}{\hbar} - \frac{1}{\hbar^2 b^2} \cdot \frac{a}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p_x^2/\hbar^2 b} p_x^2 \frac{dp_x}{\hbar} = \\ &\frac{1}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq - \frac{1}{\hbar^2 b^2} \cdot \frac{a}{b} \cdot \hbar^2 b \sqrt{b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} q^2 dq = \\ &\frac{a}{b^{3/2}} \cdot \sqrt{\pi} - \frac{a}{b^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{a}{b^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\epsilon}{2\gamma} \end{aligned}$$

e di conseguenza si calcola $\langle H \rangle$.

Parte B

Introduzione alla teoria della Relatività Speciale

X

Cinematica relativistica

1 Introduzione

La teoria della relatività secondo Einstein può essere intesa come una estensione della teoria della relatività secondo Galileo. Nondimeno la prima perviene a risultati che, dal punto di vista della seconda, appaiono piuttosto strani. Queste differenze sono dovute, in ultima analisi, a due fatti tra loro collegati. La inclusione dell'elettromagnetismo nella relatività e l'inesistenza, accertata sperimentalmente, dell'Ettere cosmico.

La scoperta fondamentale della meccanica classica era stato il ruolo della accelerazione (e non, per es., della velocità) come entità basilare nel determinare le leggi del moto.

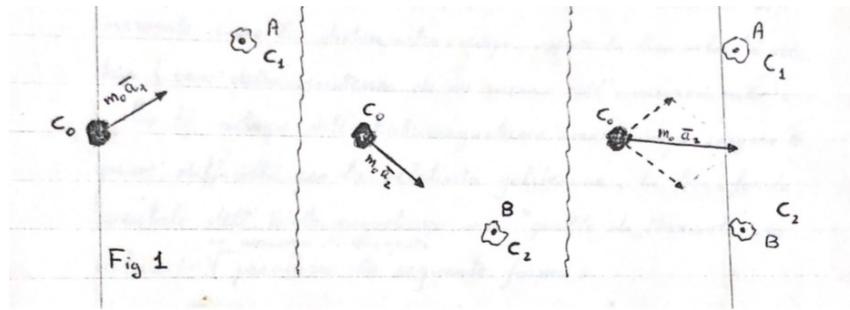
Si postula che esistano dei sistemi, detti sistemi inerziali di riferimento, in cui, per un corpo che si possa ritenere isolato (lontano cioè da altri corpi che possano interagire in qualsiasi modo con esso), la accelerazione sia zero. Dati due corpi che interagiscono si ha, in questo sistema di riferimento (s.r.)

$$m_1 \bar{a}_1 = -m_2 \bar{a}_2 \quad (1)$$

dove \bar{a}_1 e \bar{a}_2 sono le accelerazioni dei due corpi e m_1 , m_2 sono due numeri fissi (dimensionati) che possono essere associati ad ogni corpo, detti masse e interpretati intuitivamente come indicanti "la quantità di materia,, presente nei corpi. \bar{a}_1 e \bar{a}_2 devono inoltre agire entrambe lungo la congiungente i bari-centri dei due corpi e avere versi opposti. Questa legge può essere ovviamente estesa al caso di n corpi; si avrà allora:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i = 0 \quad (2)$$

Un'altra legge ci assicura il carattere vettoriale delle grandezze del tipo $m\bar{a}$. Sia \bar{a}_1 l'accelerazione del corpo c_0 in presenza del corpo c_1 posto in A, sia \bar{a}_2 l'accelerazione di c_0 in presenza di c_2 posto in B; in presenza di entrambi i



corpi c_1 e c_2 , c_0 possiederà una accelerazione \bar{a}_3 che è la somma vettoriale di \bar{a}_1 e \bar{a}_2 . Le accelerazioni si sommano cioè con la regola del parallelogrammo, come vettori.

Si noti che non è stata fatta menzione delle cosiddette "forze,. Il concetto di forza, infatti, per quanto possa essere comodo, è superfluo e la meccanica può essere completamente sviluppata senza ricorrervi. In meccanica celeste, generalmente, non si parla mai di forze, ma di accelerazioni degli astri in vicinanza di altri astri.

Le leggi fin qui enunciate risultano invarianti sotto trasformazioni di Galileo. Da ciò discende l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento inerziali a tutti gli effetti meccanici. Questo principio è detto in breve Relatività Galileiana. Perché questa condizione sia rispettata le interazioni fra due corpi possono dipendere solo da condizioni che rimangono immutate al variare del s.r. inerziale, come la distanza tra i corpi, oppure la loro velocità relativa (caso della resistenza di un mezzo all'avanzamento).

Con lo sviluppo dell'Elettromagnetismo cominciano a sorgere le prime difficoltà per la relatività galileiana. Le leggi fondamentali dell'Elettromagnetismo sono quelle di Maxwell che, nel vuoto, in assenza di sorgenti prendono la seguente forma:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \cdot \bar{E} &= 0 & \bar{\nabla} \times \bar{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\bar{H}} \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{H} &= 0 & \bar{\nabla} \times \bar{H} &= \frac{1}{c} \dot{\bar{E}}\end{aligned}\tag{3}$$

Da queste leggi si può facilmente dedurre l'equazione di un'onda elettromagnetica, infatti:

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{H}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{H}) - \nabla^2 \bar{H} = -\nabla^2 \bar{H}\tag{4}$$

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{H}) = \bar{\nabla} \times \left(\frac{1}{c} \dot{\bar{E}} \right) = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} (\bar{\nabla} \times \bar{E}) = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{c} \dot{\bar{H}} \right) = -\frac{1}{c^2} \ddot{\bar{H}}\tag{5}$$

Nella (4) abbiamo usato una identità notevole dell'operatore $\bar{\nabla}$, nella (5) abbiamo scambiato derivate spaziali e derivata temporale. Dalla (4) e dalla

(5), eguagliando i secondi membri, si ottiene:

$$\nabla^2 \bar{H} = -\frac{1}{c^2} \ddot{\bar{H}} = 0 \quad (6)$$

(è facile dedurre che una equazione analoga vale per \bar{E}).

Da questa equazione, formalmente molto simile a quella di propagazione di un'onda sonora $(\nabla^2 p - \frac{1}{a^2} \ddot{p} = 0)$, si deduce che un'onda elettromagnetica si propaga con velocità c che non dipende dalla sua frequenza. Il "vuoto," è cioè un mezzo non dispersivo, che trasmette le onde senza alterarne minimamente le caratteristiche.

Secondo le trasformazioni di Galileo risulta ora che non solo la velocità di propagazione della luce non è costante al variare dei s.r.i., ma che la stessa equazione (6) non è invariante in forma [si veda l'Appendice].

Ciò implicherebbe l'esistenza di un s.r. privilegiato in cui la propagazione delle onde è descritta dalla (6), e quindi nel quale le equazioni di Maxwell (3) sono corrette. L'esistenza di questo s.r., identificato come quello fisso rispetto al "supporto elastico," che si credeva necessario a trasmettere le onde luminose, detto Etere, porta alla conclusione che la relatività galileiana non può essere applicata all'Elettromagnetismo, dato che le sue leggi vengono a variare con la scelta del s.r. inerziale.

In questa situazione ambigua si trovava la fisica quando Michelson e Morley compirono la loro famosa esperienza*. Questo esperimento dimostrava la isotropia della propagazione della luce in ogni sistema di riferimento inerziale. Due strade si potevano seguire a questo punto: o negare la validità delle leggi di Maxwell (furono escogitate a questo scopo le cosiddette "teorie emissive," che facevano dipendere c dal moto della sorgente) o conciliare queste leggi con l'esistenza dell'Etere. I risultati sperimentali (misure della velocità della luce di stelle doppie in moto relativo rispetto alla terra) mostravano subito la sterilità della prima strada. La difficile conciliazione dell'esistenza dell'Etere con le equazioni di Maxwell fu tentata da Lorentz.

Lorentz si mise a cercare delle trasformazioni delle coordinate e delle trasformazioni dei campi (del tipo $\bar{E}' = \bar{f}(\bar{E}, \bar{H})$) rispetto alle quali le equazioni di Maxwell fossero invarianti. Ciò lo portò a conclusioni che apparivano curiose, come la contrazione delle lunghezze e la dilatazione del tempo.

I corpi, considerati da Lorentz come aventi natura essenzialmente elettromagnetica, si contraevano con le loro lunghezze nella direzione del moto rendendo inosservabile la variazione di c al variare del s.r. inerziale.

Einstein rifiutò la spiegazione di Lorentz, rifiutando insieme l'etere. La semplificazione così introdotta è però più che altro teorica, perché le trasformazioni di Lorentz avevano reso l'Etere (cioè i suoi effetti) del tutto inosservabile**.

* Si veda ad es. "La fisica di Berkeley," vol I cap. 10 §.

** Una discussione sufficientemente particolareggiata, seppure non specialistica, su questo capitolo di "storia della fisica," si trova in M. Born, La sintesi Einsteiniana (Boringhieri).

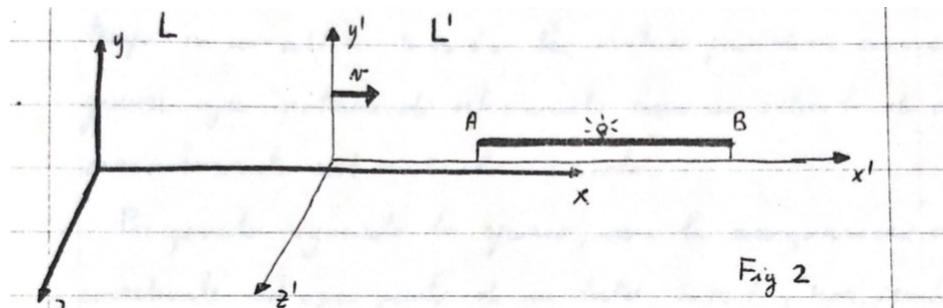
2 I postulati di Einstein e la formulazione operazionistica del concetto di simultaneità

Il principio di relatività introdotto da Einstein consta di due postulati:

- 1) Tutti i s.r. inerziali sono equivalenti nella descrizione dei fenomeni sia meccanici, sia ottici ed elettromagnetici.
- 2) La velocità della luce c è invariante.

Si noti come la non esistenza dell'etere, insieme con la affermazione 1) conduca direttamente alla 2).

Come conseguenza della adozione di questo principio entra in crisi il concetto di simultaneità. Si immaginino per es. due sistemi di riferimento inerziali L ed L' che abbiano gli assi paralleli e gli assi x , x' coincidenti. Con L' sia solidale un regolo rigido le cui estremità diano A e B. L' possiede inoltre rispetto ad L un moto traslatorio uniforme lungo l'asse x . Una sorgente luminosa situata al centro del regolo emette un segnale. È banale che per un osservatore posto in L' il segnale raggiunge contemporaneamente A e B. Per un osservatore solidale con L invece, dato che la velocità della luce è la stessa nei due versi di x , l'estremità A del regolo va incontro al segnale, mentre la estremità B gli "fugge," davanti; il segnale luminoso raggiunge prima A e poi B.



Due eventi simultanei in un sistema di riferimento inerziale (L'), non lo sono dunque necessariamente in un altro (L). Ciò impone ovviamente una revisione dei concetti di tempo e simultaneità.

Vediamo innanzitutto come si possono sincronizzare degli orologi posti in punti diversi di uno stesso sistema di riferimento inerziale. Sfruttando la velocità costante della luce, si dispone un orologio in un punto O, che segni il tempo $t = 0$ e si fanno partire contemporaneamente¹ l'orologio e un segnale luminoso da O. Quando il segnale raggiunge un altro orologio posto in un qualsiasi punto P, si sincronizza quest'ultimo al tempo $t = OP/c$. Si ammette che due segnali partiti da O ad una certa distanza di tempo l'uno dall'altro,

¹ È sempre possibile sincronizzare eventi che accadono nello stesso luogo [ndc].

raggiungano P separati dalla stessa distanza di tempo. Questa osservazione è, d'altra parte, sperimentalmente giustificata. L'operazione si ripete per gli orologi posti in ogni altro punto del sistema di riferimento. Si è così definita la simultaneità nel nostro s.r. Due eventi che accadono in due punti diversi P e P' di L sono simultanei quando gli orologi posti in P e P' segnano lo stesso tempo.

In maniera del tutto analoga ed indipendente si definisce il tempo in un altro s.r.i. Per evitare paradossi conviene immaginare ogni sistema di riferimento come un reticolo di orologi sincronizzati nel modo che si è visto.

Per quanto riguarda lo spazio, ossia la assegnazione delle coordinate ad ogni punto di un dato s.r.i., non sembrano sussistere particolari difficoltà. Fino a prova contraria consideriamo valida la geometria euclidea.

3 Trasformazioni di Lorentz

Il problema è ora quello di trovare il modo per passare dalle (x, y, z, t) di un evento misurato in un s.r.i., alle corrispondenti coordinate (x', y', z', t') misurate rispetto ad un altro s.r.i. Ciò si traduce matematicamente nello stabilire la forma delle funzioni:

$$\begin{cases} x' = x'(x, y, z, t) \\ y' = y'(x, y, z, t) \\ z' = z'(x, y, z, t) \\ t' = t'(x, y, z, t) \end{cases} \quad (7)$$

Queste funzioni si considerano lineari. Una giustificazione (che non vuole essere una dimostrazione) di questo fatto può essere la seguente.

Si consideri il differenziale

$$dx' = \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy + \frac{\partial x'}{\partial z} dz + \frac{\partial x'}{\partial t} dt \quad (8)$$

Ora, se le derivate parziali che compaiono nella (8) non fossero delle costanti, ne seguirebbe una non-omogeneità dello spazio e del tempo che non si vuole ammettere (nel senso che non vi sono evidenze sperimentali che ci costringono ad ammetterlo). Possiamo dunque dire che le trasformazioni di Lorentz sono della forma:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t + a_4 \end{cases} \quad (9)$$

Non resta ora che specificare i coefficienti a_{ij} della (9).

Cominciamo col considerare un caso semplice: i due s.r.i. $L\{x, y, z, t\}$ ed

$L' \{x', y', z', t'\}$ "scivolano," l'uno sull'altro lungo l'asse x ; l'asse y' si mantiene sempre parallelo rispetto all'asse y e così fanno gli assi z e z' . I tempi inoltre, per entrambi i sistemi di riferimento, sono contati dall'istante in cui le due origini O e O' coincidevano. Il moto dell'origine di L' lungo l'asse x è quin-

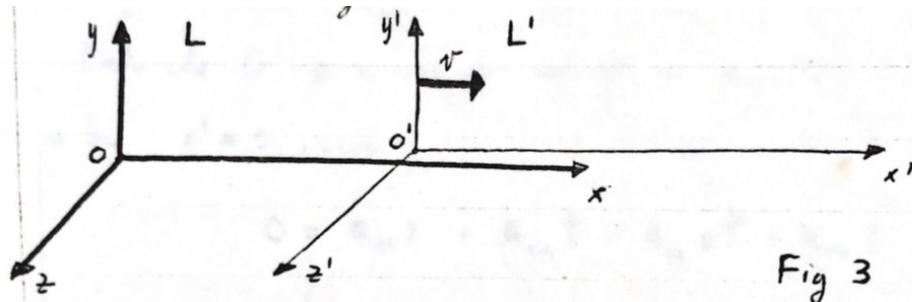


Fig 3

di rappresentato dall'equazione $x_{O'} = vt$, dove v è la velocità di traslazione di L' rispetto a L .

Dato che "l'evento di riferimento," per "l'istante zero," sia di t che di t' è la sovrapposizione di O e O' , si ha che a $t = x = y = z = 0$ in L corrisponde $t' = x' = y' = z' = 0$ in L' . Da ciò segue che $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ nella (9), cioè le trasformazioni sono omogenee.

Il fatto che l'asse x' è sovrapposto all'asse x significa che quando in L è $y = z = 0$, in L' è $y' = z' = 0$, perciò $a_{21} = a_{24} = a_{31} = a_{34} = 0$. Di più, l'asse y è parallelo all'asse y' e z è parallelo a z' , cioè se $y = 0$, $y' = 0$ e se $z = 0$, $z' = 0$; dunque anche $a_{23} = a_{32} = 0$.

Si consideri ora il piano di equazione $x = 0$ al tempo $t = 0$; al variare di y e di z i valori assunti da x' sono:

$$x' = a_{12}y + a_{13}z$$

Se adesso si tiene z nullo si ha $x' = a_{12}y$. Dato che l'orientamento dell'asse y è arbitrario, a_{12} non può che essere nullo. Per ragioni analoghe è nullo a_{13} .

Dato che O' si muove con velocità v rispetto ad L , per $x = vt$ ($x = x_{O'}$) si ha $x' = 0$, cioè:

$$0 = a_{11}x + a_{14}t = a_{11}vt + a_{14}t$$

cioè: $(a_{11}v + a_{14})t = 0$. Dunque $a_{14} = -a_{11}v$ data l'arbitrarietà di t . Perciò in ogni caso:

$$x' = a_{11}x + a_{14}t = a_{11}(x - vt)$$

Dato che γ è il simbolo convenzionale per a_{11} , riscriviamo:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

Riassumendo quanto abbiamo stabilito, la (9) si scrive:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = a_{22}y \\ z' = a_{33}z \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{cases} \quad (10)$$

Si consideri ora la trasformazione inversa della (10)

$$\begin{cases} x = \gamma'(x' - v't') \\ y = a'_{22}y' \\ z = a'_{33}z' \\ t = a'_{41}x' + a'_{42}y' + a'_{43}z' + a'_{44}t' \end{cases} \quad (11)$$

Per ragioni di simmetria, se si vuole che i due sistemi di riferimento inerziali L e L' siano equivalenti, deve essere $v' = -v$ (il segno meno è dovuto al fatto che gli assi x e x' sono concordi) e perciò la prima delle (11) diventa:

$$x = \gamma'(x' + vt') \quad (12)$$

Sempre per ragioni di simmetria è anche $a'_{22} = a_{22} = 1$; $a'_{33} = a_{33} = 1$.

Si immagini ora di avere un regolo rigido di lunghezza l solidale con l'asse x' di L', con un estremo in O' e l'altro sul semiasse positivo. Si vuole misurare la lunghezza di questo regolo in L. Un procedimento potrebbe essere il seguente: si fissa un istante t in L e si determinano, sempre in L, le coordinate degli estremi del regolo in quell'istante. Si definisce lunghezza del regolo in L la differenza (in valore assoluto) fra queste coordinate.

Nel riferimento L' le coordinate degli estremi del nostro regolo sono rispettivamente $(0, 0, 0, t')$ e $(l, 0, 0, t')$. Dette x_1 e x_2 le coordinate degli estremi in L si ha dalla prima delle (10)

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma(x_1 - vt) \\ l &= \gamma(x_2 - vt) \end{aligned}$$

La lunghezza del regolo in L è perciò

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{l}{\gamma}$$

Prendiamo ora lo stesso regolo, fissiamolo al s.r.i. L e misuriamo la sua lunghezza in L'; è chiaro che si avrà dalla (12):

$$\Delta x' = \frac{l}{\gamma'}$$

Per l'equivalenza dei due sistemi di riferimento L ed L', trattandosi dello stesso regolo, dovrà essere $\Delta x = \Delta x'$ e perciò:

$$\gamma = \gamma'$$

Riassumiamo a questo punto quello che sappiamo finora della matrice di trasformazione (la matrice dei coefficienti della (10)), essa sarà della forma:

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Finora per stabilire quali siano i coefficienti della (13) abbiamo fatto uso soltanto del postulato 1) della relatività einsteiniana, ossia della equivalenza di tutti i s.r.i. Ricordiamo, per inciso, che le nostre considerazioni sono state di natura puramente cinematica e che, in questo ambito l'equivalenza dei s.r.i. è affermata anche dalla relatività galileiana: in altre parole tutto ciò che abbiamo detto può essere riferito anche alle trasformazioni di Galileo ($\gamma = 1$; $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$; $a_{44} = 1$).

Per procedere oltre impieghiamo ora anche il postulato 2); imponiamo cioè l'invarianza di c .

Si immagini che al tempo $t = 0$, dall'origine, in quell'istante comune, di L e di L' sia partito un segnale luminoso. Nel s.r. L , all'istante t , il fronte d'onda interseca il semiasse x positivo nel punto di ascissa $x = ct$. Analogamente in L' all'istante t' , l'intersezione del fronte d'onda col semiasse x' positivo avrà ascissa $x' = ct'$. Gli eventi che hanno in L coordinate $(ct, 0, 0, t)$, hanno perciò in L' coordinate $(ct', 0, 0, t')$. Saranno dunque valide le trasformazioni:

$$ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma t(c - v) \quad (14)$$

$$ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma t'(c + v) \quad (15)$$

Dalla (14) si ottiene $t' = \gamma \frac{c-v}{c} t$. Sostituendo nella (15) risulta:

$$ct = \gamma(c+v)t' = \gamma(c+v)\gamma \frac{c-v}{c}t = \gamma^2(c^2-v^2)\frac{t}{c}$$

ossia

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - v^2)$$

e quindi

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

dove si è posto $\beta = \frac{v}{c}$. Finalmente otteniamo:

$$\gamma = \pm(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (16)$$

dove il segno \pm dipende dall'orientamento relativo degli assi x e x' .

Determiniamo infine la trasformazione del tempo. Dalla prima delle (11) e della (10) otteniamo

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma[\gamma(x - vt) + vt'] = \gamma^2x - \gamma^2vt + \gamma vt'$$

dunque:

$$\gamma vt' = (1 - \gamma^2)x + \gamma^2vt$$

da cui:

$$t' = \frac{(1 - \gamma^2)x}{\gamma v} + \gamma t$$

ma ora, essendo $1 - \gamma^2 = -\beta^2\gamma^2$ abbiamo:

$$t' = -\frac{\gamma\beta^2x}{v} + \gamma t = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

I coefficienti della matrice (13) che, si ricorda, rappresenta una trasformazione speciale di Lorentz, cioè con i s.r.i L ed L' in posizione particolarmente favorevole (Fig. 3), sono adesso

$$\gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1/\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\gamma & 0 \\ -\frac{v}{c^2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

cioè

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (18)$$

Questa è una delle vie possibili per giungere alle trasformazioni di Lorentz speciali. Un'altra via, alquanto elegante, si trova nell'articolo originale di Einstein sugli "Annalen der Physik,"* "Zur Elektrodynamik bewegter Körper," (Sulla elettrodinamica dei corpi in movimento) del quale esistono numerose traduzioni inglesi e italiane.

4 Generalizzazione delle trasformazioni di Lorentz

Abbiamo considerato finora una trasformazione molto particolare (Fig. 3). Vediamo ora di generalizzare la nostra trasformazione per due sistemi inerziali

* A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 891 (1905)

qualunque che si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme lungo una direzione qualunque.

Consideriamo dapprima il moto fra i s.r.i. L ed L' soggetto alle seguenti condizioni: gli assi x' , y' , z' di L' si mantengono sempre paralleli rispettivamente agli assi x , y , z , di L e per $t = t' = 0$ sia $O \equiv O'$ (le origini coincidono); il moto della origine O' di L' avviene con velocità costante in una direzione qualsiasi.

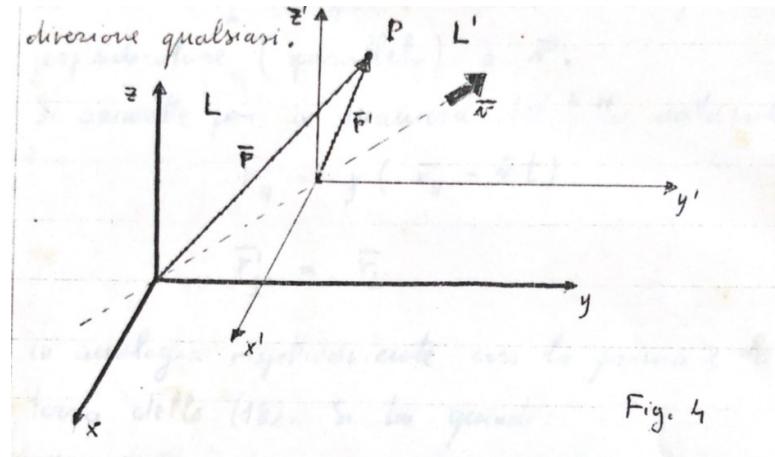


Fig. 4

Immaginiamo di dover scrivere le relazioni della trasformazione speciale (18) come relazioni fra vettori, in modo che risultino invarianti per rotazione. Per quanto riguarda le coordinate spaziali, osservando che nella (18) era:

$$x' = \gamma x - \gamma vt = x - \gamma vt + x(\gamma - 1) = x - \gamma vt + \frac{v(vx)}{v^2}(\gamma - 1)$$

La generalizzazione più naturale sembra*

$$\bar{r}' = \bar{r} - \gamma \bar{v}t + \frac{\bar{v}(\bar{v} \cdot \bar{r})}{v^2}(\gamma - 1) \quad (19)$$

D'altra parte per dedurre la (19) si può procedere, in maniera forse più persuasiva, così; si pone:

$$\bar{r}' = \bar{r}'_{\perp} + \bar{r}'_{\parallel}$$

dove con \bar{r}'_{\perp} (\bar{r}'_{\parallel}) si indica il componente di \bar{r}' perpendicolare (parallelo) a \bar{v} . Si ammette poi in maniera del tutto naturale che:

* Perché non abbiamo generalizzato più direttamente: $x' = \gamma(x - vt) \rightarrow \bar{r}' = \gamma(\bar{r} - \bar{v}t)$? [Risp: perché nel caso speciale \bar{v} parallelo all'asse x si avrebbe $y' = \gamma y$ e $z' = \gamma z$, valide solo per $\gamma = 1$ [ndc].]

$$\begin{aligned}\bar{r}'_{\parallel} &= \gamma(\bar{r}_{\parallel} - \bar{v}t) \\ \bar{r}'_{\perp} &= \bar{r}_{\perp}\end{aligned}$$

in analogia rispettivamente con la prima e la seconda o la terza delle (18). Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\bar{r}' &= \bar{r}_{\perp} + \gamma(\bar{r}_{\parallel} - \bar{v}t) = \\ &= \bar{r} - \bar{r}_{\parallel} + \gamma(\bar{r}_{\parallel} - \bar{v}t) = \\ &= \bar{r} + \bar{r}_{\parallel}(\gamma - 1) - \gamma\bar{v}t\end{aligned}$$

Ma è:

$$\bar{r}_{\parallel} = \left(\bar{r} \cdot \frac{\bar{v}}{v}\right) \frac{\bar{v}}{v} = \frac{\bar{r} \cdot \bar{v}}{v^2} \bar{v}$$

per cui si ha in definitiva:

$$\bar{r}' = \bar{r} + \bar{v} \frac{\bar{r} \cdot \bar{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma\bar{v}t$$

che è di nuovo la (19).

Per quanto riguarda la coordinata temporale la generalizzazione sembra essere ovvia. Si avrà:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\bar{v} \cdot \bar{r}}{c^2} \right) \quad (20)$$

Se si traduce tutto ciò in termini di componenti si avrà:

$$x'_i = x_i - \gamma v_i t + \frac{\gamma - 1}{v^2} v_i \sum_j v_j x_j \quad (19')$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{1}{c^2} \sum_j v_j x_j \right) \quad (20')$$

dove si è posto $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Si osservi che per $\bar{v} = (v, 0, 0)$ queste trasformazioni si riducono logicamente a quelle speciali (18).

Mostriamo ora che le (19') (20') sono invarianti per rotazione. Per mostrare questo ruotiamo ora il sistema L nello spazio in modo arbitrario. Otteniamo un sistema \tilde{L} in cui è:

$$\tilde{x}_i = \sum_j A_{ij} x_j \quad \tilde{t} = t$$

dove A è la matrice ortonormale dei coseni direttori della rotazione. Applichiamo la stessa rotazione ad L'; otteniamo un riferimento \tilde{L}' tale che

$$\tilde{x}'_i = \sum_j A_{ij} x'_j \quad \tilde{t}' = t'$$

Si può verificare facilmente (e si lascia per esercizio) che è:

$$\begin{aligned}\tilde{x}'_i &= \tilde{x}_i - \gamma \tilde{v}_i t + \frac{\gamma - 1}{v^2} \tilde{v}_i \sum_j \tilde{v}_j \tilde{x}_j \\ \tilde{t}' &= \gamma \left(\tilde{t} - \frac{1}{c^2} \sum_j \tilde{v}_j \tilde{x}_j \right)\end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che, come c'era da spettarsi, le relazioni (19), (20) sono invarianti per rotazione.

La trasformazione definita da (19) e (20) non è comunque ancora del tipo più generale, in quanto i due riferimenti hanno ancora gli assi paralleli e le loro origini coincidono al tempo $t = t' = 0$. Per ottenere la trasformazione più generale possiamo rototraslare L' ottenendo un sistema L'' tale che:

$$x''_i = \sum_j B_{ij} x'_j + b_j \quad (21)$$

$$t'' = t' + t_0 \quad (22)$$

dove B_{ij} è una matrice ortonormale.

L'applicazione nell'ordine di (19') (20') e di (21) (22) definisce i coefficienti della trasformazione di Lorentz generale. Il fatto che questa si ottenga a partire da quella speciale con l'uso di sole rotazioni spaziali, ci assicura che "tutta la fisica," (prescindendo cioè da complicazioni matematiche) della teoria della relatività speciale è già contenuta nelle trasformazioni speciali di Lorentz (18).

5 Significato fisico delle trasformazioni di Lorentz

Una delle conseguenze di queste trasformazioni è, come abbiamo visto nel § 3, la contrazione delle lunghezze nel senso del moto. Avevamo già determinato la lunghezza l_L , in L , di un regolo solidale con un riferimento L' in moto rettilineo uniforme rispetto a L con velocità v nella direzione della lunghezza del regolo. Ciò era stato fatto calcolando le coordinate in L dei due estremi del regolo in uno stesso istante e definendo lunghezza in L del regolo la loro differenza. Avevamo così ottenuto

$$l_L = \frac{l_{L'}}{\gamma} \quad (23)$$

dove $l_{L'}$ è la lunghezza del regolo misurata in L' (dove esso è a riposo).

Se la contrazione delle lunghezze è un fenomeno oggettivo, la sua determinazione mediante un metodo indipendente dal primo, dovrà pervenire agli stessi risultati. Consideriamo un regolo solidale con L' , avente lunghezza a riposo $l_{L'}$, giacente sull'asse x' e con il primo estremo in O' . La situazione è quella schematizzata in Fig. 5.

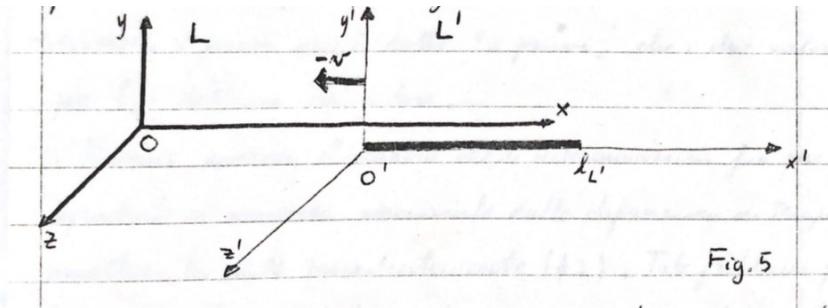


Fig. 5

Il primo estremo del regolo passa per O al tempo $t = 0$. Vogliamo calcolare il tempo t in cui il secondo estremo passa per O. Sappiamo che tale evento ha coordinate in L' $(l_{L'}, 0, 0, t')$ e in L $(0, 0, 0, t)$. Da cui, applicando la trasformazione speciale di Lorentz per la coordinata x , abbiamo:

$$x' = \gamma(x + vt)$$

cioè:

$$l_{L'} = \gamma(0 + vt)$$

pertanto:

$$t = +\frac{l_{L'}}{\gamma v}$$

L'intervallo trascorso in L tra i due passaggi è dato pertanto da:

$$t - 0 = \Delta t = \frac{l_{L'}}{\gamma v}$$

Definiamo ora lunghezza in L del regolo il prodotto:

$$l_{L'} = |v|\Delta t = \frac{l_{L'}}{\gamma}$$

che è analoga alla (23). La verifica che abbiamo fatto non è banale, perché le due definizioni di l_L , una data al § 3 e l'altra appena qui sopra, implicano procedimenti di misura diversi, e perciò non è detto "a priori," che i due valori ottenuti per l_L debbano coincidere.

Rimane ancora il dubbio che le determinazioni fin qui fatte dipendano in maniera essenziale dalla definizione di tempo e di simultaneità date precedentemente (§ 2). Tale problema fu sentito dallo stesso Einstein che propose, per superarlo, di immaginare il seguente esperimento*: si considerino due regoli uguali che si muovono rispetto ad L con velocità uguali ed opposte v e $-v$. È naturale ammettere che la loro lunghezza in L sia la distanza tra due osservatori di fronte ai quali i due estremi A e C; B e D vengono a sovrapporsi

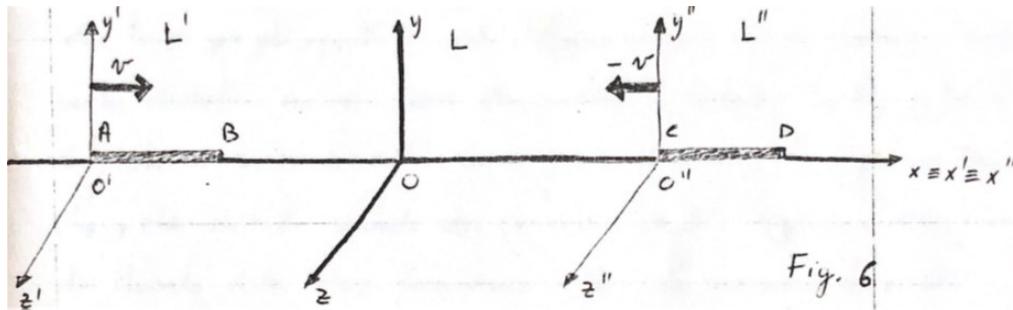


Fig. 6

rispettivamente.

Se riusciamo a dimostrare che queste sovrapposizioni in L (indipendentemente dalla velocità fisica della definizione di simultaneità che abbiamo adottato "c") sono simultanee, ricadiamo nella prima delle determinazioni di l_L fatte, superando così la difficoltà. Consideriamo a questo scopo due sistemi di riferimento L' ed L'' solidali rispettivamente al primo e al secondo regolo e tali che gli estremi A e C coincidano con le rispettive origini. Supponiamo inoltre che per $t = t' = t'' = 0$ si abbia $O \equiv O' \equiv O''$. Vogliamo provare che gli estremi B e D coincidono in L al tempo $t = 0$. Si avrà in generale

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\x'' &= \gamma(x + vt)\end{aligned}$$

L'evento "coincidenza di B e D " ha in L coordinate $(x_1, 0, 0, t_1)$. Sapendo che $x'_1 = x''_1 = l_0$ si avrà:

$$l_0 = \gamma(x_1 - vt_1) = \gamma(x_1 + vt_1)$$

cioè

$$x_1 - vt_1 = x_1 + vt_1$$

ovvero

$$t_1 = 0$$

È così confermato che la contrazione delle lunghezze ha una realtà fisica oggettiva.

Altra conseguenza fisica delle trasformazioni di Lorentz è la dilatazione dei tempi per gli oggetti in moto. Consideriamo un fenomeno di una certa durata, per es. una lampadina solidale con L' , posta in O' , che si accenda all'istante $t' = 0$ e resti accesa per un tempo t'_1 , che sarà la durata del fenomeno in L' . Vogliamo determinare la durata dello stesso fenomeno in L . La accensione

* Si veda anche, a questo proposito, Ya. P. Terletskii, Paradoxes in the Theory of Relativity, Plenum Press, N.Y. 1968 (Cap. II)

della lampadina ha in L coordinate $(0, 0, 0, 0)$, il suo spegnersi ha coordinate $(x_1, 0, 0, t_1)$. Definiamo dunque t_1 la durata del fenomeno in L. Abbiamo, applicando la trasformazione di Lorentz particolare per il tempo:

$$t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1 \right) = \gamma(t'_1 + 0) = \gamma t'_1 \quad (24)$$

Questa dilatazione del tempo ha ricevuto ampia conferma sperimentale. Oltre all'effetto Doppler trasversale, si osserva un allungamento della vita media nel sistema del Laboratorio di particelle veloci*.

6 Invariante relativistico. Divario spaziotemporale

Abbiamo visto dunque che sia la distanza spaziale tra due eventi, sia quella temporale non sono invarianti al variare del s.r.i.

Vogliamo ora introdurre una specie di "distanza", che risulti invece invariante sotto trasformazioni di Lorentz.

Dati due eventi di coordinate in L rispettivamente: (t_1, x_1, y_1, z_1) e (t_2, x_2, y_2, z_2) ed in L' (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1) e (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2) si avrà:

$$c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (25)$$

Per la dimostrazione della (25) si applicano le trasformazioni di Lorentz, limitatamente al caso speciale (18). Si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta y'^2 + \Delta z'^2 &= \Delta y^2 + \Delta z^2 \\ \Delta x'^2 &= (x'_2 - x'_1)^2 = \gamma^2(x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1)^2 = \gamma^2(\Delta x^2 - 2v\Delta x\Delta t + v^2\Delta t^2); \\ c^2 \Delta t'^2 &= c^2(t'_2 - t'_1)^2 = c^2\gamma^2\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2 - t_1 + \frac{v}{c^2}x_1\right)^2 = \\ &= c^2\gamma^2\left(\Delta t^2 + \frac{v^2}{c^4}\Delta x^2 - 2\frac{v}{c^2}\Delta x\Delta t\right) \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 &= c^2\gamma^2\left(\Delta t^2 + \frac{v^2}{c^4}\Delta x^2 - 2\frac{v}{c^2}\Delta x\Delta t\right) + \\ &\quad - \gamma^2(\Delta x^2 - 2v\Delta x\Delta t + v^2\Delta t^2) = \\ &= (c^2\gamma^2 - \gamma^2v^2)\Delta t^2 - \left(\gamma^2 - c^2\gamma^2\frac{v^2}{c^4}\right)\Delta x^2 = \\ &= \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)c^2\Delta t^2 - \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta x^2 = \\ &= \gamma^2\gamma^{-2}\left[c^2\Delta t^2 - \Delta x^2\right] = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 \end{aligned}$$

* Si veda, a questo proposito, (verifiche sperimentali) il già citato 1° vol. della Fisica di Berkeley, Meccanica.

Ponendo quindi:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (26)$$

si ottiene la "distanza invariante," che cercavamo. Δs^2 si dice divario spazio-temporale e non dipende, come abbiamo dimostrato limitatamente al caso delle trasformazioni speciali di Lorentz (18), dal s.r.i. dell'osservatore.

Ci chiediamo ora quale sia il significato fisico di questa quantità. Osserviamo che Δs^2 può essere sia negativo, sia nullo, sia positivo. Esaminiamo questi tre casi separatamente.

Supponiamo dapprima che due eventi A e B abbiano divario spazio-temporale negativo. In tal caso esiste un s.r.i. in cui A e B appaiono simultanei. Per dimostrare quanto affermato consideriamo un sistema L con l'asse x passante per A e B. In L i due eventi hanno rispettivamente le coordinate $(t_A, 0, 0, x_A)$ e $(t_B, 0, 0, x_B)$ dove è:

$$c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 < 0$$

In un secondo riferimento L' sarà:

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right)$$

Perché in L' i due eventi risultino simultanei dovrà essere:

$$\Delta t' = 0 \quad \text{cioè} \quad \Delta t = \frac{v}{c^2} \Delta x$$

ovvero:

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| = \left| \frac{v}{c} \right| \quad (27)$$

Ma essendo $\Delta s^2 < 0$ è:

$$c^2 \Delta t^2 < \Delta x^2 \quad \text{cioè} \quad \left| c \Delta t \right| < \left| \Delta x \right|$$

ovvero

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| < 1$$

Ricordando ora la (27) si ha:

$$\left| \frac{v}{c} \right| < 1$$

Il s.r.i. L' dovrà dunque muoversi rispetto ad L con una velocità v minore, in modulo, di quella della luce ed è perciò un s.r. ammissibile.

Due eventi che abbiano divario spazio-temporale nullo, per passare al secondo caso, possono essere chiaramente collegati da un segnale luminoso.

Consideriamo ora il terzo caso. Siano A e B due eventi con $\Delta s^2 > 0$. Si dimostra che esiste un s.r.i. in cui i due eventi accadono (successivamente nel tempo) nello stesso punto. Consideriamo infatti il solito sistema L con l'asse x passante per A e per B. In un secondo s.r. L' sarà:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

Perché i due eventi accadano nello stesso luogo di L' dev'essere $\Delta x' = 0$, cioè:

$$\Delta x = v\Delta t \quad \text{ovvero} \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (28)$$

Ma essendo $\Delta s^2 > 0$ si ha: $\Delta x^2 < c^2\Delta t^2$;

$$|\Delta x| < c|\Delta t| \quad ; \quad \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| < c$$

Ricordando la seconda delle (28) risulta $|v| < c$.

Anche questa volta il riferimento che cercavamo è ammissibile.

Vogliamo ora dimostrare che, sempre per due eventi con $\Delta s^2 > 0$, il segno del divario temporale è invariante. supponiamo che sia in L $\Delta t > 0$; in qualunque altro sistema L' sarà:

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) \quad (29)$$

Ma essendo $\Delta s^2 > 0$ è:

$$|\Delta x| < c|\Delta t| = c\Delta t$$

ovvero

$$\left| \frac{v}{c^2} \Delta x \right| < \left| \frac{v}{c} \right| \Delta t \quad (30)$$

Se L' è un s.r. ammissibile dovrà essere $|v| < c$, cioè:

$$\left| \frac{v}{c} \right| < 1 \quad ; \quad \left| \frac{v}{c} \right| \Delta t < \Delta t$$

cioè per la (30)

$$\left| \frac{v}{c^2} \Delta x \right| < \Delta t$$

e ponendo quest'ultimo risultato nella (29) si ottiene

$$\Delta t' > 0$$

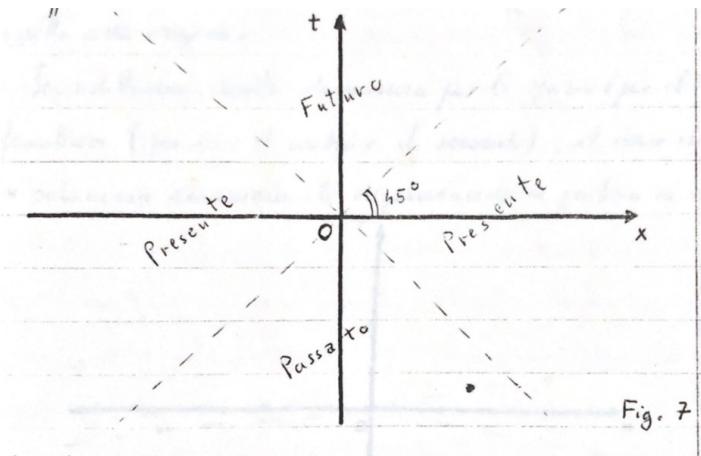
Soltanto tra due eventi il cui divario spaziotemporale sia positivo non può perciò essere scambiato l'ordine temporale, e si può dunque parlare di passato e futuro.

Consideriamo l'equazione

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 = 0 \quad (31)$$

che rappresenta gli eventi con divario spazio-temporale nullo rispetto all'evento "qui ed ora," di coordinate $(0, 0, 0, 0)$.

Si tratta della equazione di un ipercono a due falde in una varietà a 4 dimensioni, detto "cono di luce," che divide il cronotopo (ossia la varietà quadridimensionale ottenuta aggiungendo allo spazio ordinario un asse dei tempi perpendicolare agli altri tre) in tre regioni. Nella Fig. 7 lo spazio ordinario è rappresentato unidimensionalmente dal solo asse x .

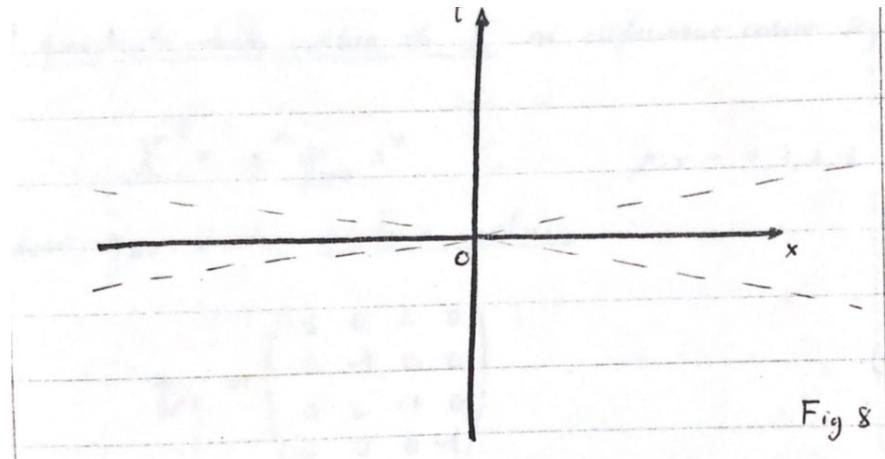


L'unità di misura del tempo è il periodo impiegato dalla luce a percorrere l'unità di lunghezza. I punti che si trovano nella regione del "presente," hanno con l'origine divario spazio-temporale negativo; esistono cioè, come abbiamo già visto, dei sistemi di riferimento in cui appaiono simultanei con l'evento origine. Gli eventi che si trovano in questa regione del cronotopo vengono perciò detti a volte spacelike (di tipo spazio). Gli eventi che si trovano nella regione del "passato," sono gli unici che possono influenzare causalmente l'evento situato nell'origine; l'evento situato nell'origine può influenzare, a sua volta, causalmente gli eventi posti nella regione del "futuro,". Ciò è conseguenza del fatto che c è la massima velocità con cui può propagarsi una interazione*. Gli eventi situati nelle regioni "passato," e "futuro," del cronotopo sono detti a volte timelike (di tipo tempo), ciò è dovuto al fatto che essi hanno con l'origine divario spazio-temporale positivo; esistono cioè, come abbiamo già visto, dei sistemi di riferimento in cui appaiono nello stesso luogo rispetto all'origine.

Se adottiamo unità di misura per lo spazio e per il tempo a noi familiari (per es. il metro e il secondo), il cono di luce si schiaccia enormemente de-

* L'argomento è ripreso nel § 7

generando in pratica in un iperpiano. Il presente corrisponde in tal modo a



quello "privo di spessore," familiare alla intuizione umana (si pensi che, visto dalla terra, il "presente," sulla luna dura circa due secondi e messo).

Gli eventi che si trovano sul cono luce si dicono a volte light-like (di tipo luce).

Facciamo ora una piccola anticipazione matematica: il divario spaziotemporale Δs^2 introdotto nella (26), può essere inteso come il quadrato della norma del vettore a 4 componenti

$$(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z).$$

Vettori di questo genere, detti quadrivettori, sono tutte le quaterne di numeri che, al cambiare del s.r.i., si trasformano secondo Lorentz.

Il formalismo usato oggi quasi ovunque per questi quadrivettori è il seguente; un generico quadrivettore X si scrive:

$$X = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (32)$$

Il quadrato della norma di X si definisce come segue:

$$X^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (33)$$

dove $g_{\mu\nu}$ è la matrice metrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Per il divario spazio-temporale infinitesimo (quadrispostamento infinitesimo) si ha:

$$ds = (cdt, dx, dy, dz) \quad (35)$$

Il quadrato della norma di ds è, giusta la (33)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (36)$$

7 Legge di addizione delle velocità

Un'altra conseguenza delle trasformazioni di Lorentz è il fatto che la legge di addizione delle velocità della meccanica classica

$$v = v_1 + v_2$$

non è più valida. Vedremo ora come si compongono le velocità in accordo con le trasformazioni di Lorentz.

Consideriamo come al solito il caso speciale schematizzato nella Fig. 3. Nello spazio vi sia una particella che si muove di moto arbitrario. Il suo moto sarà descritto in L da un sistema di equazioni

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t) \quad (37)$$

Il L' lo stesso moto sarà descritto da:

$$x' = x'(t') \quad , \quad y' = y'(t') \quad , \quad z' = z'(t') \quad (38)$$

Le (38) sono ottenute dalle (37) mediante la trasformazione speciale di Lorentz (18). La velocità istantanea della particella è in L:

$$\bar{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (39)$$

mentre in L' è analogamente:

$$\bar{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right) \quad (40)$$

La legge di trasformazione che lega \bar{u}' ad \bar{u} si ottiene differenziando la (18)

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt) \\ dy' = dy ; dz' = dz \\ dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx) \end{cases} \quad (41)$$

Facendo uso della (40) e della (41) si ottiene immediatamente

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_y &= \frac{u_y (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_z &= \frac{u_z (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \end{aligned} \quad (42)$$

Una delle più note conseguenze della teoria della relatività secondo Einstein è l'insuperabilità della velocità della luce. Ciò può essere dedotto dalle formule appena trovate; infatti, tenendo conto che l'inversa della prima delle trasformazioni (42) è:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \quad (43)$$

supponiamo di osservare in L' un fotone (o un raggio di luce se si preferisce) che si muove lungo l'asse x' . In questo caso sarà ovviamente

$$u'_x = c \quad (44)$$

Osservato dal s.r.i. L la sua velocità sarà data dalla (43) con la posizione (44), cioè:

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c.$$

Si potrebbe obiettare: e se la particella viaggia già a velocità $u > c$?

Vediamo se questa obiezione ha senso. Si consideri uno sperimentatore che lancia un segnale che viaggia più veloce della luce; questo segnale viene riflesso da uno "specchio," e dopo un certo tempo ritorna al punto di partenza. I tre eventi "lancio del segnale dall'origine al tempo t_1 ," "riflessione del segnale allo specchio al tempo t_2 ," "ricezione del segnale all'origine al tempo t_3 ," sono collegati da vettori spacelike, stante il fatto che il segnale viaggia a velocità $u > c$, cioè:

$$\begin{aligned} \Delta s^2|_{\text{andata}} &= c^2(t_2 - t_1)^2 - u^2(t_2 - t_1)^2 = (c^2 - u^2)(t_2 - t_1)^2 < 0 \\ \Delta s^2|_{\text{ritorno}} &= (c^2 - u^2)(t_3 - t_2)^2 < 0 \end{aligned}$$

Esiste dunque un s.r.i. in cui il loro ordine temporale è invertito².

In Fig. 9 i vettori \overline{OS} e \overline{SC} , che hanno inclinazione inferiore a 45° rispetto

² Posto in L $u > c$ e $\Delta t > 0$ esiste un s.r.i. L' risp. al quale $\Delta t' < 0$. Infatti $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}u\Delta t) = \gamma(1 - \frac{v}{c^2}u)\Delta t < 0$ da cui $1 - \frac{v}{c^2}u < 0$, ovvero $u > \frac{c^2}{v}$.

Perché questa condizione sia verificata basta che $\frac{c}{v} > 1$ cioè che L' sia un s.r. ammissibile, da cui segue infatti $u > c$ [n.d.c.].

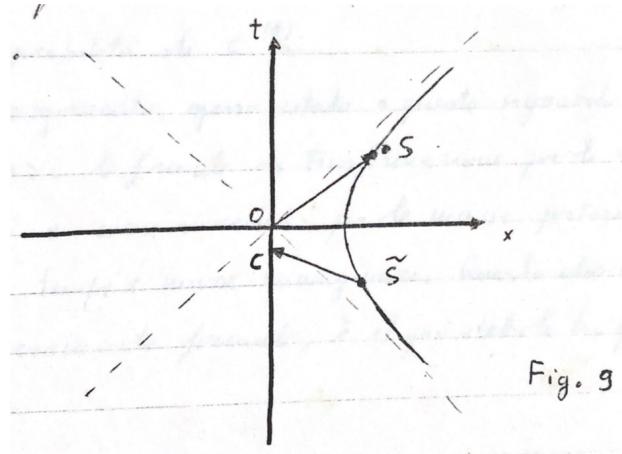


Fig. 9

all'asse x , rappresentano gli spostamenti effettuati a velocità $u > c$. Il ramo di iperbole rappresenta l'insieme dei punti del cronotopo cui si può giungere da S per mezzo di trasformazioni di Lorentz, o meglio rappresenta l'insieme di tutti i possibili trasformati di S sotto trasformazione di Lorentz. \tilde{S} è uno di questi trasformati. Cioè, per essere chiari, S e \tilde{S} rappresentano lo stesso punto del cronotopo, visto da due sistemi di riferimento inerziali diversi. Come si vede in Fig. 9 un osservatore posto su un sistema di riferimento ammissibile ($v < c$) rispetto al sistema "sperimentatore + specchio," può vedere l'arrivo del segnale riflesso prima del suo lancio. In altre parole, se ammettiamo che si possa superare la velocità della luce, ne segue che l'ordine di causalità può essere invertito passando da un s.r.i. ad un altro. Benché questo non possa venire escluso da un punto di vista puramente logico, l'argomento si può tuttavia considerare come un notevole sostegno alla tesi della insuperabilità di c *.

Un altro argomento, spesso citato a questo riguardo è che, per velocità $u > c$ le formule di trasformazione per le lunghezze, per i tempi e, come si vedrà, per le masse porterebbero a lunghezze, tempi e masse immaginari. Questo discorso, di natura meramente formale, è il più debole tra quelli citati.

* Ulteriori notizie su questioni di questo tipo si possono trovare in: Ya. P. Terletskii
- Paradoxes in the theory of Relativity - N.Y. 1968.

XI

Dinamica relativistica

1 L'impulso

Finora ci siamo occupati di spazio, tempo, velocità, ossia di cinematica. Vedremo adesso le conseguenze dinamiche della teoria della relatività ristretta.

Partiamo dal concetto di impulso. In meccanica classica, per un sistema isolato di particelle si aveva

$$\sum_i \bar{P}_i = \text{costante};$$

dove era:

$$\bar{P}_i = m_i \bar{v}_i$$

con m_i quantità caratteristica e invariabile associata alla particella i -esima, detta massa. In relatività una legge di conservazione di questo genere non può essere vera. Consideriamo per esempio due particelle di massa uguale ferme nel sistema di riferimento L . L'impulso totale del sistema è ovviamente 0. Facciamo ora muovere le particelle con velocità $-v$ uguali ed opposte (come se una molla si fosse improvvisamente distesa fra di loro). In L l'impulso totale sarà ancora 0, cioè si è conservato. Osserviamo ora il fenomeno da un riferimento L' dotato di una velocità $-v$ rispetto ad L nella direzione in cui si muoveranno le particelle. Inizialmente i due punti materiali, visti da L' hanno entrambi velocità v , l'impulso totale è quindi:

$$|\bar{P}'_i| = 2mv$$

In seguito all'estensione della molla, una delle due particelle apparirà ferma, mentre l'altra sarà dotata di velocità:

$$v'_2 = \frac{v + v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = 2v \cdot \frac{c^2}{c^2 + v^2}$$

L'impulso totale del sistema sarà ora:

$$|\overline{P}'_f| = 2mv \frac{c^2}{c^2 + v^2}$$

Come si vede è $|\overline{P}'_i| \neq |\overline{P}'_f|$, cioè in L' l'impulso non si è conservato.

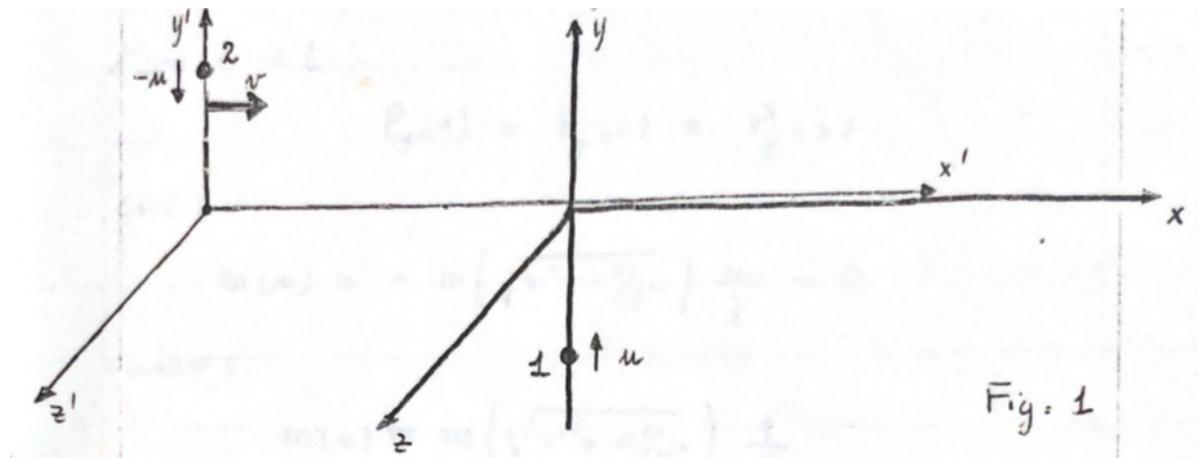
Vediamo ora di generalizzare il concetto di impulso in modo tale che la sua conservazione sia assicurata in relatività. La ragione per cui ci preoccupiamo tanto di non rinunciare alla Legge di conservazione dell'impulso è perché la validità di questa Legge va al di là delle differenze sostanziali fra trasformazioni di Galileo e trasformazioni di Lorentz, essendo legata, in ultima analisi, all'omogeneità dello spazio.

La maniera più naturale per generalizzare il concetto di impulso sembra essere quella di ammettere che la massa non sia più una caratteristica invariabile di ogni corpo, ma dipenda dalla velocità, o meglio, per ovvie ragioni di simmetria, dal modulo della velocità. Avremo cioè:

$$\overline{P} = m(v)\overline{v} \quad (1)$$

Assumiamo questa ipotesi e vediamo se è possibile determinare $m(v)$ in modo che l'impulso si conservi.

Consideriamo i soliti sistemi di riferimento L ed L' di cui ci siamo serviti per dedurre le trasformazioni particolari di Lorentz (Fig. X-3). Consideriamo ora due particelle, che chiameremo 1 e 2, di massa m uguale, che si muovono sugli assi y e y' con velocità u uguali ed opposte. Facciamo in modo che esse si urtino nell'origine al tempo $t = 0$.



L'impulso della particella 1 in L sarà:

$$\overline{P}(1) = (0, m(u)u, 0). \quad (2)$$

La velocità della particella 2 è in L' :

$$u'(2) = (0, -u, 0)$$

e quindi, detta v la velocità con cui L' trasla rispetto ad L , avremo in L , applicando le trasformazioni inverse delle (X-42):

$$u(2) = \left(v, -\frac{u}{\gamma}, 0\right)$$

Il modulo della velocità della particella 2 in L sarà:

$$|u(2)| = \sqrt{v^2 + u^2/\gamma^2}$$

e quindi l'impulso in L della particella 2 si può scrivere in base alla (1):

$$\bar{P}(2) = \left(m(\sqrt{v^2 + u^2/\gamma^2})v, -m(\sqrt{v^2 + u^2/\gamma^2})\frac{u}{\gamma}, 0\right) \quad (3)$$

Supponiamo che dopo l'urto le due particelle si fondano in una terza particella 3 (urto anelastico); è chiaro che, per simmetria, questa particella si muoverà lungo l'asse x di L ; il suo impulso sarà dunque:

$$\bar{P}(3) = (P_x(3), 0, 0). \quad (4)$$

Imponiamo a questo punto la conservazione dell'impulso lungo l'asse y di L .

$$P_y(1) + P_y(2) = P_y(3)$$

cioè:

$$m(u)u - m(\sqrt{v^2 + u^2/\gamma^2})\frac{u}{\gamma} = 0$$

ovvero:

$$m(u) = m(\sqrt{v^2 + u^2/\gamma^2})\frac{1}{\gamma}$$

Supponendo che $m(u)$ sia una funzione continua di u otteniamo infine per $u \rightarrow 0$

$$m(0) = \frac{m(v)}{\gamma}$$

$$m(v) = \gamma m(0). \quad (5)$$

Sottolineiamo che la condizione che abbiamo qui trovato è necessaria alla conservazione dell'impulso, non sappiamo ancora se sia sufficiente ad assicurarla. Ammettiamo comunque per il momento di aver trovato la soluzione definitiva del problema. $m(0)$ è detta massa a riposo di un corpo e si indica comunemente con m_0 . L'impulso è dunque:

$$\bar{P} = m(v)\bar{v} = \gamma m(0)\bar{v} = \frac{m_0\bar{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6)$$

2 La Forza e la potenza

Definito l'impulso, passiamo alla definizione della forza. In meccanica newtoniana si definisce forza il vettore

$$\bar{F} = \frac{d\bar{P}}{dt} \quad (7)$$

con $\bar{P} = m\bar{v}$. È abbastanza persuasivo adottare per la forza relativistica la stessa definizione (7) con \bar{P} dato dalla (6). Ciò comporta alcuni mutamenti sostanziali per quanto riguarda il concetto di energia cinetica. Vediamo quali. In base alla definizione della forza (7) si può definire la potenza, sarà:

$$W = \bar{F} \cdot \bar{v} = \frac{d\bar{P}}{dt} \cdot \bar{v} = \frac{dm}{dt} v^2 + m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{v} = \frac{dm}{dv^2} \frac{dv^2}{dt} v^2 + m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{v}$$

Ricordando la (5) il conto così prosegue:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{c^2} \frac{dv^2}{dt} v^2 + \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \\ &= \frac{1}{2} m_0 \frac{\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

Dato un corpo inizialmente fermo, il lavoro per metterlo in moto con velocità v è dunque:

$$\mathcal{L} = \int_0^t W(t) dt = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Big|_0^t = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 \quad (9)$$

essendo $u(0) = 0$ e $u(t) = v$.

È naturale considerare la (9) come espressione dell'energia cinetica T del corpo; sarà dunque

$$T(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 \quad (10)$$

Sviluppando in serie la (10) si ottiene:

$$T(v) = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots\right) - m_0 c^2 \simeq \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Per piccole velocità quindi la (10) riproduce con buona approssimazione l'energia cinetica definita classicamente, come ovviamente era da aspettarsi.

3 Il quadrivettore energia-impulso

Vediamo ora come si trasforma l'impulso che abbiamo definito nella (6) passando da un sistema di riferimento ad un altro. Consideriamo ancora una volta i soliti sistemi L e L' che abbiamo usato per ricavare le trasformazioni speciali di Lorentz (Fig. 3). Data la simmetria tra le trasformazioni relative agli assi x e y , considereremo anzi per semplicità il moto di una particella che si sposta nel piano xy ($\equiv x'y'$). Siano u_x e u_y le componenti della velocità della particella in L, sia v la velocità di L' rispetto ad L. Usando la X-42 abbiamo per la componente lungo l'asse x' dell'impulso:

$$P'_x = m(u')u'_x = \frac{m_0}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}u'_x = \frac{m_0}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} \cdot \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (11)$$

Vogliamo ora dimostrare che:

$$\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (12)$$

Infatti dalla prima delle X-42 si ha:

$$\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) u'_x = u_x - v$$

quadrando

$$\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2 u'^2_x = (u_x - v)^2$$

da cui:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2 u'^2_x - c^2 \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2 u'^2_y = \\ & = (u_x - v)^2 - c^2 \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2 u'^2_y \end{aligned}$$

perciò usando a secondo membro la seconda delle X-42 si ha:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2 (u'^2_x + u'^2_y - c^2) = (u_x - v)^2 - c^2 \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2 \\ & + \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2 \frac{u_y^2}{\gamma_v^2 (1 - \frac{vu_x}{c^2})^2}; \end{aligned}$$

proseguendo nei conti:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2 (u'^2 - c^2) = u_x^2 + v^2 - 2u_x v - c^2 - \frac{v^2 u_x^2}{c^2} + 2u_x v \\ & + u_y^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (u_x^2 + u_y^2 - c^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (u^2 - c^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Dividendo ambo i membri per $-c^2$ ed estraendo la radice quadrata si ottiene l'identità (12).

Sostituendo la (12) nella (11)abbiamo:

$$P'_x = \frac{m_0(u_x - v)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(m(u)u_x - m(u)v) \quad (13)$$

Per la componente lungo l'asse y' si ha:

$$\begin{aligned} P'_y &= m(u')u'_y = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \frac{1}{\gamma} = \frac{m_0 u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} u_y = m(u)u_y = P_y \end{aligned} \quad (14)$$

Nel caso generale si ha anche banalmente $P'_z = P_z$.

Consideriamo ora l'energia cinetica,abbiamo trovato:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

Il termine $m_0 c^2$ è costante in ogni sistema di riferimento. Vediamo come si trasforma l'altro termine che chiameremo

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m(u)c^2$$

Tenuto ancora conto della (12)abbiamo:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma E \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) = \\ &= \gamma \left(E - \frac{vu_x}{c^2} E\right) = \gamma \left(E - \frac{vu_x}{c^2} m(u)c^2\right) = \gamma (E - vP_x) \end{aligned}$$

Dividendo ambo i membri per c^2 si ottiene:

$$\frac{E'}{c^2} = \gamma \left(\frac{E}{c^2} - \frac{v}{c^2} P_x\right) \quad (15)$$

Ritornando ora alla trasformazione (13) della componente lungo x dell'impulso si ha d'altra parte:

$$P'_x = \gamma(m(u)u_x - m(u)v) = \gamma \left(P_x - v \frac{E}{c^2}\right) \quad (16)$$

Osserviamo a questo punto che impulso ed energia (a meno del fattore c^2) si trasformano secondo Lorentz rispettivamente come le coordinate spaziali e temporali. La quaterna*

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, P_x, P_y, P_z \right) \quad (17)$$

è pertanto un quadrivettore. È questo il primo esempio di quadrivettore diverso dallo spostamento quadridimensionale che incontriamo.

La norma di un quadrivettore (vedi X-33) si conserverà, proprio come si conserva ds^2 . La norma del quadrivettore energia-impulso appena introdotto è:

$$\frac{E^2}{c^2} - \overline{P}^2 = m^2(u)c^2 - m^2(u)u^2 = m^2(u)c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = m_0^2 c^2 \quad (18)$$

che è appunto invariante (scalare).

Sempre a proposito di quadrivettori: alcuni testi introducono la prima componente immaginaria (esempio: *ict*), ottenendo in tal modo una metrica formalmente euclidea nello spazio-tempo a quattro dimensioni. Tale uso però si sta estinguendo, non ha portato infatti ad alcuna comprensione più profonda della relatività (anzi porta ad alcune complicazioni). In relatività generale, d'altra parte, tale notazione non produce in assoluto alcun vantaggio. Noi, pertanto, non lo seguiamo fin dall'inizio.

C'è da notare, piuttosto, che le trasformazioni speciali di Lorentz per il quadrvettore $x^\mu = (ct, x, y, z)$ sono formalmente un po' diverse da quelle del § X-3, per il fatto che ora la componente temporale è la prima e $x^0 = ct$. Quindi in luogo di X 17-18 scriviamo:

$$x'^\mu = A_\nu^\mu x^\nu \quad (19)$$

con

$$A_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \frac{v}{c}x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \frac{v}{c}x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \quad (20)$$

* Ricordiamo che il quadrispostamento è:

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

Vogliamo ora dimostrare che il prodotto scalare tra due quadrivettori è invariante secondo Lorentz. La definizione di prodotto scalare, compatibile con quella già data di norma, è ovviamente la seguente: dati due quadrivettori A e B sarà:

$$A \cdot B = A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu \quad (21)$$

con $g_{\mu\nu}$ data dalla X-34.

Se poniamo ora $C = (A + B)$ abbiamo

$$\begin{aligned} C'^2 &= C^2 \\ (A' + B')^2 &= (A + B)^2 \\ A'^2 + B'^2 + 2A' \cdot B' &= A^2 + B^2 + 2A \cdot B \end{aligned}$$

da quest'ultima, tenuto conto che i quadrati delle norme si conservano, abbiamo direttamente:

$$A' \cdot B' = A \cdot B \quad .$$

4 Scrittura covariante delle leggi fisiche - tempo proprio - quadri velocità - quadri accelerazione

Se il nostro compito è quello di adeguare le leggi della fisica alla relatività, dobbiamo trovare il modo di scrivere delle leggi invarianti sotto trasformazioni di Lorentz. Le leggi della fisica classica sono invarianti (sotto trasformazioni di Galileo) in quanto non sono altro che relazioni tra scalari, vettori e tensori. Questa idea viene trasportata di pari passo in relatività. Il fatto stesso che abbiamo già trovato due quantità che si trasformano come quadrivettori ci spinge a pensare a questa idea come la più naturale. Il problema è: è possibile scrivere tutte le leggi della fisica in maniera invariante a vista sotto trasformazioni di Lorentz? È possibile cioè scriverle sotto forma di relazioni fra scalari (come il prodotto scalare che abbiamo appena visto), quadrivettori e quadritensori? La risposta al quesito non è un sì completo. La fisica cerca di farlo ma esistono dei controesempi, che però non contrastano col principio di invarianza in se stesso. Tutte le leggi della fisica classica (non quantistica) si possono comunque riscrivere in relatività in modo tensoriale.

Cerchiamo di vedere degli esempi.

Abbiamo un quadrivettore, lo spostamento infinitesimo:

$$dx^\mu = (cdt, d\bar{x}) \quad (22)$$

vogliamo scrivere una quadri velocità. Per ottenere una velocità dobbiamo dividere il quadrivettore (22) per una quantità che abbia le dimensioni di un tempo e che sia uno scalare, ossia invariante. Questa quantità è il tempo proprio; il

tempo, cioè, misurato nel sistema di riferimento inerziale rispetto al quale il corpo di cui vogliamo determinare la velocità sia in quiete nell'istante della misura. Questo s.r.i. è detto sistema di riferimento tangente. Detto L' il s.r. tangente, vogliamo determinare il tempo proprio quale risulta se misurato in un qualunque altro s.r.i. L.

Il tempo proprio si scrive:

$$\tau = t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

avremo dunque per l'intervallo infinitesimo di tempo proprio:

$$d\tau = \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right)$$

oppure, usando la trasformazione inversa:

$$dt = \gamma \left(d\tau + \frac{v}{c^2} dx' \right)$$

ma essendo nel s.r. tangente $dx' = 0$ abbiamo:

$$dt = \gamma d\tau$$

ovvero:

$$d\tau = dt/\gamma \quad (23)$$

Questa quantità, che rappresenta l'intervallo infinitesimo di tempo misurato da un orologio solidale col corpo, è uno scalare relativistico.

La quadrivelocità è dunque definita come:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\bar{x}}{d\tau} \right) = \left(c\gamma, \gamma \frac{d\bar{x}}{dt} \right)$$

cioè:

$$U^\mu = (c\gamma, \gamma\bar{v}) \quad (24)$$

dove \bar{v} è la velocità della particella misurata in L.

Dato il modo in cui la abbiamo ottenuta, possiamo dire che la quadrivelocità si trasforma come un quadrvettore senza bisogno di ulteriori dimostrazioni. Se vogliamo sapere come si trasforma la velocità classica, è sufficiente che applichiamo le trasformazioni di Lorentz (19) alla quadrivelocità (24) ed osserviamo che ne è di \bar{v} .

Immaginiamo, in altre parole, di avere il L una particella con velocità \bar{u} . Vogliamo trovare quale è la velocità \bar{u}' della stessa particella misurata in L' (Fig. 3). In L abbiamo $U^\nu = (c\gamma_u, \gamma_u \bar{u})$. In L' avremo, in base alla (19), $U'^\mu = A_\nu^\mu U^\nu$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} U'^0 \\ U'^1 \\ U'^2 \\ U'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma_u \\ \gamma_u u_x \\ \gamma_u u_y \\ \gamma_u u_z \end{pmatrix}$$

Dunque abbiamo:

$$\begin{aligned} U'^0 &= \left(c\gamma_u \gamma_v - \gamma_u \gamma_v \frac{vu_x}{c} \right) = \gamma_u \gamma_v c \left(1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) \\ U'^1 &= (\gamma_u \gamma_v u_x - \gamma_u \gamma_v v) = \gamma_u \gamma_v (u_x - v) \\ U'^2 &= \gamma_u u_y \quad ; \quad U'^3 = \gamma_u u_z \end{aligned}$$

Tenuto conto che la (12) si può riscrivere come:

$$\gamma_u \gamma_v = \frac{\gamma_{u'}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (25)$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} U'^0 &= \gamma_{u'} c \quad ; \quad U'^1 = \gamma_{u'} \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ U'^2 &= \frac{\gamma_{u'}}{\gamma_v} \frac{u_y}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \gamma_{u'} \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ U'^3 &= \gamma_{u'} \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \end{aligned} \quad (26)$$

Ora, essendo U^μ un quadrivettore, dobbiamo avere: $U'^\mu = (c\gamma_{u'}, \gamma_{u'} \bar{u}')$ e identificando i coefficienti di $\gamma_{u'}$ nelle (26) riotteniamo, come era da attendersi, le X-42.

Calcoliamo ora la norma della quadri velocità:

$$U^2 = c^2 \gamma^2 - \gamma^2 v^2 = c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = c^2 \gamma^2 \gamma^{-2} = c^2 \quad (27)$$

Dal fatto che la quadri velocità abbia norma costante si deduce che:

$$0 = \frac{dU^2}{d\tau} = 2U \cdot \frac{dU}{d\tau} \quad (28)$$

Indichiamo con A^μ il quadrivettore $\frac{dU}{d\tau}$, esso rappresenta la quadri accelerazione, che è, come si vede dalla (28), ortogonale (nello spazio a quattro dimensioni, con il prodotto scalare che abbiamo definito) in ogni istante alla quadri velocità.

Se ora moltiplichiamo la quadri velocità per uno scalare che abbia le dimensioni di una massa, cioè per la massa a riposo m_0 , otteniamo un impulso. Sarà:

$$P^\mu = m_0 U^\mu = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \bar{v}) = \left(\frac{E}{c}, \bar{P} \right)$$

con:

$$E = T + m_0 c^2 \quad ; \quad T = \text{energia cinetica.}$$

Abbiamo così ritrovato, per virtù del formalismo, il quadrimpulso cui eravamo già arrivati al § 3.

Consideriamo ora la quantità $m_0 U^2$ e deriviamola rispetto al tempo (dell'osservatore in L). Abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_0 U^2) &= \frac{d}{dt}(m_0 U \cdot U) = 2 \frac{d(m_0 U^0)}{dt} U^0 - 2 \frac{d(m_0 U^i)}{dt} U^i = \\ &= 2 \left\{ -\bar{F} \cdot \bar{v} \gamma + \frac{d}{dt}[m_0 \gamma c] \gamma c \right\} = 0 \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\bar{F} \cdot \bar{v} = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c^2)$$

che non è altro che la potenza considerata precedentemente (8).

5 Equivalenza di massa ed energia

Vogliamo ora esaminare in che senso si possa attribuire un significato di energia al termine $m_0 c^2$, che del resto ne ha le dimensioni. Consideriamo un sistema di punti materiali. La definizione più naturale di impulso del sistema è:

$$\bar{P} = \sum_i \bar{P}_i$$

Cambiando riferimento si avrà ovviamente

$$\bar{P}' = \sum_i \bar{P}'_i$$

Il nostro sistema sia completamente isolato; su di lui non agiscano cioè forze esterne e non vi siano neppure scambi di energia con l'ambiente. È naturale ammettere che in qualunque s.r.i. si avrà per questo sistema di punti materiali la conservazione dell'impulso (triimpulso spaziale). Consideriamo due s.r.i. L ed L'; avremo *

$$P'^i = A_\mu^i P^\mu = A_j^i P^j + A_0^i P^0 \quad (29)$$

* Col simbolo A_ν^μ si rappresenta generalmente la matrice corrispondente ad una trasformazione di Lorentz.

N.b. $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ $i, j = 1, 2, 3$

Poiché sia P^{ti} che P^j si conservano dalla (29) si ricava che deve conservarsi anche P^0 . Essendo il nostro sistema isolato energeticamente ed essendo

$$P^0 = \frac{T + m_0 c^2}{c} \quad , \quad T = \sum_i T_i \quad , \quad m_0 = \sum_i m_{0i}$$

la conservazione di P^0 implica che, se durante le interazioni è variata l'energia cinetica totale T (per esempio urti anelastici), bisogna ammettere che sono variate anche le masse a riposo.

Tutto ciò sembra suggerire una equivalenza tra massa ed energia; vediamo di esaminare la questione più a fondo. Poniamoci una domanda: che senso può avere parlare di massa totale di un sistema di particelle?

Cerchiamo un sistema di riferimento L in cui l'impulso totale (spaziale) del nostro insieme di particelle sia nullo. In qualunque altro riferimento definiremo "velocità dell'insieme di particelle", la velocità di L. Se tutte le particelle del nostro insieme hanno masse a riposo diverse da zero, è possibile trovare un s.r.i. L che gode della proprietà richiesta.

Si consideri infatti il quadriimpulso di una particella, esso ha sempre norma positiva $m_0^2 c^2$, è dunque un quadrivettore di tipo tempo o timelike. Esiste dunque, per quanto detto al § X-6, un sistema di riferimento L rispetto al quale la parte spaziale del quadriimpulso della particella (ossia appunto il triimpulso spaziale) si annulla. Tenuto conto che la somma di quadrivettori timelike è un

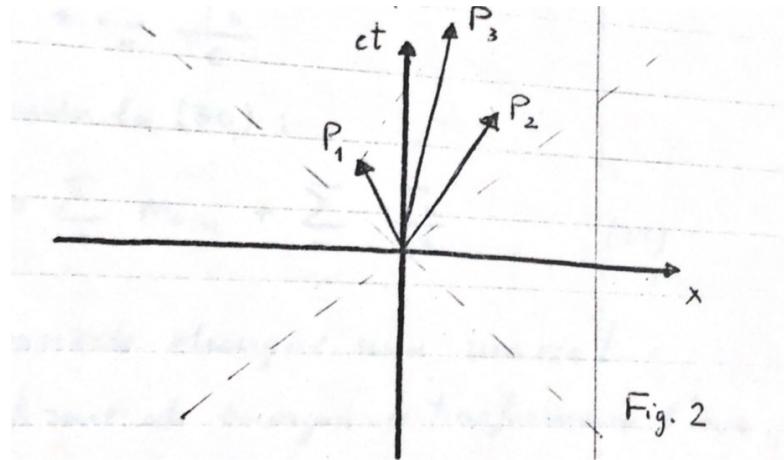


Fig. 2

quadrivettore timelike, il ragionamento valido nel caso di una singola particella, è valido ovviamente anche nel caso di un insieme di particelle.

In L il quadriimpulso totale sarà dunque: $P = (P^0, 0, 0, 0)$.

Poniamo ora:

$$P^0 = \frac{P^0}{c} c = \mu_0 c \quad (30)$$

Vogliamo dimostrare che μ_0 ha tutte le caratteristiche della "massa a riposo," (ossia misurata in L) del nostro sistema di particelle. Essendo P un quadrivettore, si trasforma secondo Lorentz, e perciò applicando le trasformazioni speciali (19), (20) si ha:

$$\begin{aligned} P'^0 &= \gamma \left(P^0 - \frac{v}{c} P^1 \right) = \gamma P^0 = \gamma c \mu_0 \\ P'^1 &= \gamma \left(P^1 - \frac{v}{c} P^0 \right) = -\gamma \frac{v}{c} P^0 = -\gamma v \mu_0 \end{aligned}$$

Come si vede μ_0 per un insieme di particelle gioca lo stesso ruolo di m_0 per una particella (potremmo anche definire $\mu(v) = \gamma_v \mu_0$). Questa definizione di massa per un insieme di particelle è dunque accettabile a tutti gli effetti dinamici. Vediamo quanto vale μ_0 in L; è:

$$\begin{aligned} P^0 &= \sum_n P_n^0 = \sum_n m_{0n} \gamma_n c = \sum_n \frac{T_n + m_{0n} c^2}{c} = \\ &= \sum_n m_{0n} c + \sum_n \frac{T_n}{c} \end{aligned}$$

da cui si ricava, usando la (30):

$$\mu_0 = \frac{P^0}{c} = \sum_n m_{0n} + \sum_n \frac{T_n}{c^2} \quad (31)$$

L'energia cinetica possiede dunque una massa!

Dal fatto che diverse forme di energia si trasformano l'una nell'altra si intuisce che il discorso non vale soltanto per la energia cinetica, ma ha validità generale. Vediamo di dimostrarlo rigorosamente. Ammettiamo due ipotesi:

- 1) In un sistema isolato impulso ed energia si conservano.
- 2) Per ogni sistema fisico l'impulso \bar{P} spaziale si trasforma sotto trasformazioni di Lorentz come la parte spaziale di un quadrivettore.

Abbiamo visto che la seconda ipotesi vale per un punto materiale. Non ammettere la validità per qualsiasi sistema fisico sarebbe una grave incongruenza, dato che per punto materiale si intende in pratica un sistema sufficientemente piccolo da poterne trascurare le dimensioni.

Consideriamo due sistemi fisici σ_1 e σ_2 . σ_1 è un insieme di particelle, σ_2 un sistema qualunque a cui chiediamo di soddisfare alle condizioni 1) e 2). I due sistemi entrano in interazione fra loro scambiandosi impulso ed energia. Come abbiamo già visto P_2^0/c * rappresenta a tutti gli effetti dinamici la massa di σ_2 . Prima dell'interazione impulso ed energia di σ_1 e σ_2 sono rispettivamente:

$$\bar{P}_1, E_1 ; \bar{P}_2, E_2.$$

* P_2^0 è la prima componente del quadrivettore P_2^μ , che deve esistere per l'ipotesi 2)

Dopo l'interazione sono

$$\overline{P}'_1, E'_1 ; \quad \overline{P}'_2, E'_2.$$

Poiché l'insieme σ , unione di σ_1 e σ_2 , costituisce un sistema isolato, per l'ipotesi 1), ponendo:

$$\Delta\overline{P}_1 = \overline{P}'_1 - \overline{P}_1; \quad \Delta E_1 = E'_1 - E_1; \quad \Delta\overline{P}_2 = \overline{P}'_2 - \overline{P}_2; \quad \Delta E_2 = E'_2 - E_2$$

abbiamo

$$\Delta\overline{P}_2 = -\Delta\overline{P}_1 \quad ; \quad \Delta E_2 = -\Delta E_1$$

ma essendo σ_1 un insieme di particelle è:

$$\Delta E_1 = \Delta P_1^0 \cdot c.$$

D'altra parte il fatto che si conservi la parte spaziale del quadriimpulso dell'insieme σ , unione di σ_1 e σ_2 , impone che si conservi anche la prima componente; abbiamo perciò:

$$\begin{aligned} P_1^0 + P_2^0 &= \text{cost.} \\ \Delta P_1^0 + \Delta P_2^0 &= 0 \\ \Delta P_2^0 &= -\Delta P_1^0 = -\frac{\Delta E_1}{c} = \frac{\Delta E_2}{c} \end{aligned}$$

Essendo poi $\mu_2 = P_2^0/c$ abbiamo:

$$\Delta\mu_2 c = \frac{\Delta E_2}{c}$$

cioè

$$\Delta\mu_2 = \frac{\Delta E_2}{c^2}$$

Ciò è quanto si voleva dimostrare (ricordiamo che E_2 può essere qualsiasi forma di energia, non avendo fatto alcuna ipotesi sulla natura di σ_2). La relazione fra massa ed energia:

$$E = \mu c^2, \tag{32}$$

che è forse l'equazione più nota di tutta la teoria della relatività, è così dimostrata nel caso più generale. Notiamo però che il nostro modo di procedere è stato antistorico; in realtà il primo caso preso in considerazione non fu quello di un insieme di punti materiali, ma quello della radiazione elettromagnetica. Vediamo ora come si trasforma l'energia di un sistema di particelle al variare del s.r.i.. In meccanica classica era:

$$E = T + U = \frac{1}{2}\mu v_B^2 + T_c + U \quad (33)$$

dove E rappresenta l'energia totale, T l'energia cinetica, U l'energia potenziale, μ la massa totale, \bar{v}_B la velocità del baricentro, T_c l'energia cinetica nel sistema del baricentro.

Al variare del sistema di riferimento inerziale si aveva:

$$\bar{P}' = \bar{P} - \bar{v}\mu \quad (34)$$

con \bar{v} velocità del nuovo s.r.i. rispetto al vecchio,

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}\mu v'_B^2 + T_c + U = \frac{1}{2}(\bar{v}_B - \bar{v})^2 + T_c + U = \\ &= \frac{1}{2}\mu v_B^2 - \mu \bar{v}_B \cdot \bar{v} + \frac{1}{2}\mu v^2 + T_c + U = \\ &= E - \bar{P} \cdot \bar{v} + \frac{1}{2}\mu v^2 \end{aligned} \quad (35)$$

Vediamo cosa succede in meccanica relativistica. Applichiamo le trasformazioni di Lorentz particolari:

$$P'^1 = \gamma \left(P^1 - \frac{v}{c} P^0 \right) = \gamma(P^1 - v\mu)$$

per piccole velocità, sviluppando γ in serie e trascurando i termini di ordine superiore al primo in v/c ,abbiamo:

$$P'^1 = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) (P^1 - v\mu) = P^1 - v\mu$$

Dato che sappiamo che P^2 e P^3 rimangono invariati, possiamo scrivere in forma vettoriale:

$$\bar{P}' = \bar{P} - \bar{v}\mu$$

Per l'energia abbiamo:

$$\frac{E'}{c} = P'^0 = \gamma \left(P^0 - \frac{v}{c} P^1 \right) \simeq \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \left(P^0 - \frac{\bar{v} \cdot \bar{P}}{c} \right);$$

cioè:

$$\begin{aligned} E' &\simeq \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \left(P^0 c - \bar{v} \cdot \bar{P} \right) \simeq \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) (E - \bar{v} \cdot \bar{P}) \simeq \\ &\simeq E - \bar{v} \cdot \bar{P} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} E - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \bar{v} \cdot \bar{P} \simeq E - \bar{v} \cdot \bar{P} + \frac{1}{2} \mu v^2 \end{aligned}$$

Come si vede, ancora una volta i risultati della meccanica relativistica si riducono a quelli della meccanica classica per piccole velocità.

6 Urti fra particelle

Esaminiamo adesso l'urto tra due particelle in relatività. Durante l'urto, come abbiamo già visto, il quadriimpulso totale si conserva. Si ha cioè, dette 1 e 2 le due particelle:

$$\Delta P_1^\mu = -\Delta P_2^\mu ; \quad \Delta E_1 = -\Delta E_2.$$

Osserviamo la collisione in un altro sistema di riferimento. ΔP_1^μ , differenza di due quadrivettori, è ovviamente un quadrivettore. Risulta cioè:

$$\Delta P_1'^\mu = \Lambda_\nu^\mu \Delta P_1^\nu$$

Si possono considerare due casi:

$$1) \quad \Delta P_1^2 \geq 0 \quad 2) \quad \Delta P_1^2 < 0$$

Nel primo caso il Δ quadriimpulso è un vettore di tipo tempo o di tipo luce; il segno della componente temporale è dunque (come visto nel § X-6), invariante. In altre parole non dipende dal sistema di riferimento dell'osservatore quale delle due particelle appaia aver ceduto e quale ricevuto energia; cosa che non si può affermare nel secondo caso.

Consideriamo ora un problema di urto molto particolare che ha però, come vedremo, una notevole importanza pratica. Abbiamo due particelle di massa a riposo uguale, una è ferma mentre l'altra la colpisce con una data velocità v . Vogliamo sapere qual è la massima energia che si può sviluppare dalla collisione. Considereremo dunque l'urto completamente anelastico: le due particelle si fondono in una terza.

La risposta della meccanica classica a questo interrogativo è che la massima energia che si può sviluppare è uguale alla energia cinetica delle due particelle viste nel sistema del baricentro; cioè, se le particelle hanno la stessa massa m

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{2} \right)^2 = \frac{mv^2}{4} \quad (36)$$

che è esattamente metà della energia cinetica della particella proiettile vista nel sistema in cui l'altra è ferma (laboratorio).

Vediamo quale è la soluzione relativistica del problema.

Innanzitutto è disponibile anche l'energia rappresentata dalle masse a riposo delle particelle. Consideriamo perciò un urto in cui si abbia la "annichilazione", delle due masse. Prima della collisione il quadriimpulso della particella proiettile è $P_1^\mu = (P_1^0, \bar{P})$ e quello della particella bersaglio: $P_2^\mu = (cm_0, \bar{0})$, il tutto nel sistema del laboratorio L. Mettiamoci ora nel sistema di riferimento L' in cui l'impulso totale è nullo. Avremo:

$$\begin{aligned} P_1'^\mu &= (P_1'^0, \bar{P}') \\ P_2'^\mu &= (P_2'^0, -\bar{P}') \end{aligned}$$

L'energia disponibile per essere sviluppata nell'urto è:

$$E = (P_1'^0 + P_2'^0)c$$

Il quadriimpulso totale è, nel sistema del laboratorio L:

$$P_{tot}^\mu = (cm_0 + P_1^0, \bar{P})$$

e nel sistema di riferimento L':

$$P_{tot}'^\mu = \left(\frac{E}{c}, \bar{0} \right)$$

Essendo la norma del quadriimpulso invariante, avremo così:

$$\frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + 2m_0 c P_1^0 + (P_1^{0^2} - \bar{P}^2)$$

Gli ultimi due termini rappresentano la norma di P_1^μ , sarà dunque:

$$\frac{E^2}{c^2} = 2m_0^2 c^2 + 2m_0 c P_1^0$$

$$E = c \sqrt{2m_0^2 c^2 + 2m_0 c \cdot \frac{m_0 c^2 + T}{c}} = c \sqrt{4m_0 c^2 + 2m_0 T} \quad (37)$$

dove T è l'energia cinetica della particella proiettile nel sistema del laboratorio. Se T è piccola, un valore approssimato di E risulta:

$$E = 2m_0 c^2 \sqrt{1 + T/2m_0 c^2} \simeq 2m_0 c^2 + \frac{T}{2} \quad \text{per } T \ll m_0 c^2$$

Questo risultato differisce da quello classico (36) soltanto per il termine che rappresenta l'energia ottenuta dalla annichilazione delle masse.

Supponiamo ora invece che T sia preponderante rispetto all'energia rappresentata dalle masse a riposo delle particelle, abbiamo in questo caso:

$$E \simeq c \sqrt{2m_0 T} \quad (38)$$

Questo risultato ha, come abbiamo detto, notevole importanza pratica: negli esperimenti di fisica nucleare si usa spesso infatti, "bombardare" particelle ferme con altre notevolmente accelerate. Per alte velocità delle particelle-proiettile l'energia che si sviluppa nell'urto è, come si vede dalla (38) proporzionale alla radice quadrata dell'energia cinetica della particella-proiettile stessa, e non cresce affatto linearmente con essa.

Una parte notevolissima di questa energia cinetica non si rende dunque per nulla disponibile al momento della collisione (per es. per "creare," nuove particelle), ma rimane sotto forma di energia cinetica dei prodotti della collisione stessa (si ricordi che al momento dell'urto la massa dinamica della particella

che funge da proiettile appare in L molto superiore a quella della particella bersaglio, anche se le due masse a riposo sono uguali).

Per ovviare a questo inconveniente si sono costruite delle macchine dette "anelli di accumulazione," (storage rings) che fanno urtare fra di loro due fasci di particelle con velocità uguale e contraria (come l'anello di accumulazione "Adone," di Frascati, che opera con elettroni e positroni): tutta l'energia spesa per accelerare le particelle si rende in tal modo disponibile al momento degli urti.

7 Quadriforza; termodinamica relativistica.

Esaminiamo ora, prima di concludere il capitolo, un'ultima questione: abbiamo visto che impulso ed energia costituiscono le componenti di un unico quadrivettore; ciò suggerisce una considerazione. La forza è la derivata dell'impulso rispetto al tempo: essa dovrà dunque essere legata in qualche modo con le variazioni di energia. In che modo?

Per cercare di rispondere introduciamo un altro quadrivettore, la quadriforza. Essa è la derivata del quadriimpulso, che è un quadrivettore, rispetto al tempo proprio, che è uno scalare. Cioè:

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{d(m_0 U^\mu)}{d\tau} = m_0 \frac{dU^\mu}{d\tau} + \frac{dm_0}{d\tau} U^\mu \quad (38)$$

dove U^μ è la quadrivelocità (24).

Si noti che se m_0 rimane costante la quadriforza ha la stessa direzione della quadriaccelerazione, cioè è ortogonale alla quadrivelocità (28). Se m_0 varia col tempo ciò non è più vero. Abbiamo ancora

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dP^0}{d\tau}, \frac{d\bar{P}}{d\tau} \right) = \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma \bar{F} \right) \quad (39)$$

dove \bar{F} è la forza meccanica usuale.

Abbiamo così risposto al quesito iniziale: moltiplicate per opportuni fattori, la forza e la derivata dell'energia rispetto al tempo sono anch'esse componenti di un unico quadrivettore. Facciamo ora il prodotto scalare tra quadriforza e quadrivelocità: otterremo qualcosa di corrispondente alla potenza della meccanica classica:

* Nel capitolo XII vedremo che ad ogni quadrivettore $A^\mu = (A^0, \bar{A})$ con l'indice in alto, detto quadrivettore controvariante, si può fare corrispondere un quadrivettore $A_\mu = (A^0, -\bar{A})$ con l'indice in basso, detto quadrivettore covariante; il legame fra i due essendo:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (**)$$

Tenuto conto della definizione di prodotto scalare fra quadrivettori X-33 e della (**), si ha:

$$\mathcal{F}^\mu U_\mu = \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma \bar{F} \right) \cdot (c\gamma, -\gamma \bar{v}) = \gamma^2 \frac{dE}{dt} - \gamma^2 \bar{F} \cdot \bar{v} \quad (40)$$

ma anche:

$$\mathcal{F}^\mu U_\mu = \left(m_0 \frac{dU^\mu}{d\tau} + \frac{dm_0}{d\tau} U^\mu \right) U_\mu = 0 + \frac{dm_0}{d\tau} U^\mu U_\mu = c^2 \frac{dm_0}{d\tau} \quad (41)$$

Abbiamo dunque da (40) e (41):

$$\gamma^2 \frac{dE}{dt} - \gamma^2 \bar{F} \cdot \bar{v} = c^2 \frac{dm_0}{d\tau}$$

ovvero:

$$\frac{dE}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{d(m_0 c^2)}{d\tau} = W + \frac{1}{\gamma^2} Q_0^{(1)} = W + Q^{(1)} \quad (42)$$

dove W è la potenza meccanica usuale e abbiamo posto

$$Q_0^{(1)} = \frac{d(m_0 c^2)}{d\tau} \quad ; \quad Q^{(1)} = \frac{1}{\gamma^2} Q_0^{(1)}$$

Dalla (42) otteniamo:

$$dE = dL + Q^{(1)} dt = dL + dQ \quad (43)$$

dove L è il lavoro meccanico e Q uno scambio di energia sotto forma diversa da quella meccanica, detta in termodinamica "calore,".

Tutto ciò porta a risultati piuttosto curiosi: immaginiamo un corpo fermo presso una sorgente di calore in un s.r.i. L. Esso è sottoposto ad una quadri-forza che ha parte spaziale nulla $\mathcal{F}^\mu = \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}, \bar{0} \right) = \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dQ}{dt}, \bar{0} \right)$. Cambiando sistema di riferimento la quadri-forza di trasforma però secondo Lorentz assumendo una parte spaziale non nulla. In altre parole un osservatore in moto vede la sorgente di calore esercitare anche una forza meccanica sul corpo. Si ricordi, del resto, che $\bar{F} = \frac{d\bar{P}}{dt}$ e che la massa a riposo di un corpo riscaldato aumenta nel tempo. Aumenta così, se il corpo si muove uniformemente, anche il suo impulso.

$$X \cdot X = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = x^\mu x_\mu$$

che è la notazione usata nella formula (40) per $\mathcal{F}^\mu U_\mu$.

XII

Fluidodinamica relativistica

1 Conservazione della massa propria - Quadridivergenza.

Premettiamo che quella che segue non è una trattazione sistematica della fluidodinamica relativistica. Ciò che ci interessa è introdurre alcuni concetti fondamentali che saranno molto utili sia per approfondire certi aspetti della meccanica relativistica, sia per talune analogie con concetti dell'Elettrodinamica esaminata dal punto di vista della relatività (cap. XIII). Studieremo perciò il comportamento di un solo tipo di fluido: consideriamo il nostro fluido come un mezzo materiale continuo le cui particelle* siano completamente "slegate," fra di loro, non interagiscono cioè reciprocamente in nessun modo. Caratteristiche di questo tipo sono possedute, tanto per fare un esempio, con buona approssimazione dalle "polveri,".

Mettiamoci in un s.r.i. L rispetto al quale il nostro fluido si muove e definiamo la densità di massa in un punto. Sarà:

$$\mu = \frac{dm}{dV} \quad (1)$$

dove sia m che V sono misurati in L.

Possiamo anche definire la densità di massa propria

$$\mu_0 = \frac{dm_0}{dV} \quad (2)$$

dove dm_0 è la massa a riposo della materia contenuta nell'elementino di volume dV . dm_0 è misurata cioè nel sistema di riferimento L' tangente al fluido nel punto che consideriamo e nell'istante in cui compiamo la misura (non è così per dV , che è misurato in L).

Definiamo infine la densità propria di massa propria; è

* Un mezzo formato da numerosissime particelle di dimensioni ridottissime rispetto alle dimensioni in gioco del fenomeno che si vuole studiare può ben essere considerato, in una trattazione macroscopica, come continuo.

$$\mu_0^0 = \frac{dm_0}{dV_0} \quad (3)$$

dove dV_0 è un elementino di volume a "cavallo del fluido," misurato anch'esso nel s.r. tangente L' . Vediamo che relazioni vi sono fra le quantità (1), (2), (3). È chiaro che essendo $dm = \gamma dm_0$ sarà:

$$\mu = \gamma \mu_0 \quad (4)$$

Abbiamo ora da (2) e (3)

$$\mu_0 dV = \mu_0^0 dV_0.$$

Dato che, passando dal s.r. tangente L' al sistema del laboratorio L , una delle dimensioni lineari dell'elementino di volume solidale al fluido subisce una contrazione di un fattore γ , mentre le altre rimangono invariate, qualunque sia la forma del volumetto dV_0 , avremo:

$$dV = dV_0/\gamma \quad (5)$$

da cui otteniamo:

$$\mu_0 = \gamma \mu_0^0 \quad (5')$$

Ci interessa ora esaminare il comportamento del fluido sotto l'azione di forze esterne. Le forze si possono dividere in due categorie: quelle puramente meccaniche, che conservano la massa propria, e quelle generalizzate che sono in grado di alterarla*.

Consideriamo intanto il fluido soggetto a forze del primo tipo. Scriviamo dunque, prima di tutto, la conservazione della massa propria.

Abbiamo:

$$\begin{aligned} m_0^{(V_1)}(t_1) &= \int_{V_1} \mu_0(\bar{r}, t_1) dV_1 \\ m_0^{(V_2)}(t_2) &= \int_{V_2} \mu_0(\bar{r}, t_2) dV_2 \end{aligned}$$

dove $\mu_0(\bar{r}, t_1)$, $\mu_0(\bar{r}, t_2)$ sono le densità di massa propria in due istanti diversi t_1 e t_2 e V_1 , V_2 sono i volumi occupati nei due istanti (t_1 e t_2) dalla porzione di fluido che consideriamo, cioè materialmente dalle stesse particelle. Siccome le forze in gioco conservano la massa propria dovrà essere:

$$m_0^{(V_1)}(t_1) = m_0^{(V_2)}(t_2)$$

cioè:

* Cfr. cap. XI § 7.

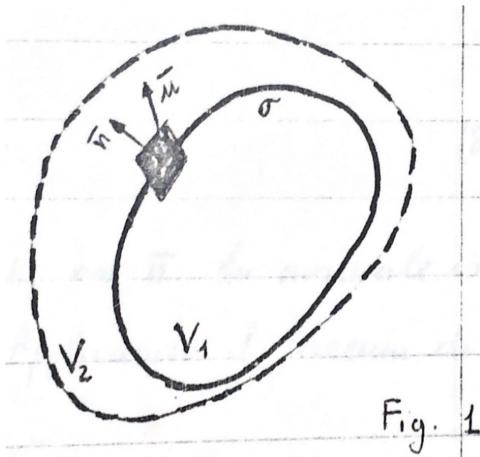
$$\int_{V_1} \mu_0(\bar{r}, t_1) dV_1 = \int_{V_2} \mu_0(\bar{r}, t_2) dV_2 \quad (6)$$

La relazione (6) diventa per V_1 e V_2 infinitesimi (δV_1 e δV_2):

$$\mu_0(\bar{r}, t_1) \delta V_1 = \mu_0(\bar{r}, t_2) \delta V_2 \quad (7)$$

dove \bar{r}_1 (\bar{r}_2) è non importa quale punto interno a δV_1 (δV_2)*.

Vediamo ora come varia nel tempo il volume occupato da una certa porzione di fluido. Chiamiamo σ la superficie che delimita il nostro volume. Possiamo



immaginare σ fisicamente costituita dalle particelle "di confine," della nostra porzione di fluido. σ si deforma pertanto seguendo il moto delle particelle che la compongono.

Abbiamo perciò:

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\sigma} \bar{u} \cdot \bar{n} d\sigma \quad (8)$$

dove \bar{u} è la velocità del fluido ed \bar{n} la normale esterna alla superficie σ (vedi Fig. 1). Applicando il teorema di Gauss si ha:

$$\frac{dV}{dt} = \int_{V_1} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} dV \quad (9)$$

Per volumetti infinitesimi δV la relazione (9) diventa:

$$\frac{d}{dt} \delta V = \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \delta V \quad (10)$$

* È questo il pregio fondamentale del ragionamento mediante infinitesimi.

Tenuto conto della (7) imponiamo ora che la quantità $\mu_0 \delta V$ rimanga costante nel tempo, cioè:

$$\frac{d}{dt}(\mu_0 \delta V) = \frac{d\mu_0}{dt} \delta V + \mu_0 \frac{d(\delta V)}{dt} = 0 \quad (11)$$

Usando la (10), la (11) si può scrivere:

$$\left(\frac{d\mu_0}{dt} + \mu_0 \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right) \delta V = 0 \quad (11')$$

Notiamo che $\frac{d\mu_0}{dt}$ è una derivata totale; se la scriviamo in termini di derivate parziali rispetto a t, x_1, x_2, x_3 , abbiamo:

$$d\mu_0 = \frac{\partial \mu_0}{\partial t} dt + \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mu_0}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \mu_0}{\partial x_3} dx_3$$

ovvero:

$$\frac{d\mu_0}{dt} = \frac{\partial \mu_0}{\partial t} + \frac{\partial \mu_0}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \mu_0}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial \mu_0}{\partial x_3} u_3 = \frac{\partial \mu_0}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} \mu_0$$

Sostituendo quest'ultima nella (11') otteniamo:

$$\left[\frac{\partial \mu_0}{\partial t} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} \mu_0 + \mu_0 \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right] \delta V = 0$$

e per l'arbitrarietà di δV si ha infine:

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\mu_0 \bar{u}) = 0 \quad \text{eq}^{\text{ne}} \text{ di continuità} \quad (12)$$

Abbiamo dunque trovato la relazione che rappresenta la conservazione della massa propria. Non si tratta però di una formulazione "invariante a vista", sotto trasformazioni di Lorentz. Cerchiamo ora di scriverla in termini di scalari relativistici e di quadrvettori.

Lo scalare relativistico che rappresenta la densità di massa è μ_0^0 ; il quadrvettore che corrisponde alla velocità è ovviamente U^ν . Notiamo che:

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial t} = \frac{\partial(\gamma \mu_0^0)}{\partial t} = \frac{\partial(\gamma \mu_0^0 c)}{\partial ct} = \frac{\partial(\mu_0^0 U^0)}{\partial x^0} \quad (13)$$

e inoltre:

$$\bar{\nabla} \cdot (\mu_0 \bar{u}) = \frac{\partial(\mu_0 u_\lambda)}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial(\frac{\mu_0}{\gamma} \gamma u_\lambda)}{\partial x^\lambda} \quad \lambda = 1, 2, 3$$

ovvero, passando alla notazione quadrvettoriale:

$$\bar{\nabla} \cdot (\mu_0 \bar{u}) = \frac{\partial(\mu_0^0 U^\lambda)}{\partial x^\lambda} \quad \lambda = 1, 2, 3 \quad (14)$$

La (12) diventa perciò in termini di μ_0^0 e U^ν :

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\mu_0^0 U^\nu) = 0 \quad \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (15)$$

Cioè, se la massa propria si conserva, la quadridivergenza di $\mu_0^0 U^\nu$ * deve essere nulla.

A questo punto sorge una domanda: una quadridivergenza è uno scalare? Per rispondere non resta che verificare come si comporta sotto trasformazioni di Lorentz. Sia dunque A^μ un quadrivettore; $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}$ la sua quadridivergenza**. Sarà, cambiando sistema di riferimento:

$$\frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial(\Lambda_\nu^\mu A^\nu)}{\partial x'^\mu}$$

dove con Λ si indica, come al solito, la matrice corrispondente ad una trasformazione di Lorentz***. Proseguendo nei conti otteniamo:

$$\frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial(\Lambda_\nu^\mu A^\nu)}{\partial x^\lambda} \cdot \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial(\Lambda_\nu^\mu A^\nu)}{\partial x^\lambda} (\Lambda^{-1})^\lambda_\mu = (\Lambda^{-1})^\lambda_\mu \Lambda_\nu^\mu \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\lambda}$$

I primi due fattori indicano il prodotto righe per colonne di una matrice Λ per la sua inversa. Il risultato (vedi nota ***) è la matrice identità δ_ν^λ .

Abbiamo perciò:

$$\frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\mu} = \delta_\nu^\lambda \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu}$$

Concludiamo dunque che una quadridivergenza è uno scalare relativistico.

2 Algebra delle trasformazioni di Lorentz - Gruppo delle matrici di Lorentz - Un po' di calcolo tensoriale.

Abbiamo così risposto alla domanda che ci eravamo posti, ma subito ce ne viene in mente un'altra: quante volte ci dovremo ancora imbattere in simili difficoltà? Per evitare di trovarci ancora di fronte a inconvenienti di questo genere ci conviene aprire una breve parentesi ed esaminare più a fondo l'aspetto algebrico delle trasformazioni di Lorentz.

* Il quadrivettore $\mu_0^0 U^\nu$ può essere inteso come densità propria di quadriimpulso.

** Si sottintende la sommatoria sugli indici ripetuti.

*** È ovviamente $\Lambda_\nu^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$; $(\Lambda^{-1})_\nu^\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$
ed inoltre si ha:

$$\begin{aligned} \Lambda_\nu^\mu (\Lambda^{-1})_\sigma^\nu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\sigma} = \delta_\sigma^\mu \\ \delta_\sigma^\mu &= 0 \quad \text{se } \mu \neq \sigma ; \quad \delta_\sigma^\mu = 1 \quad \text{se } \mu = \sigma. \end{aligned}$$

Partiamo dal fatto, che abbiamo già dimostrato (cap. XI §3), che il prodotto scalare fra due quadrivettori è invariante.

Abbiamo dunque:

$$X'^\mu g_{\mu\nu} Y^\nu = \Lambda_\rho^\mu X^\rho g_{\mu\nu} \Lambda_\sigma^\nu Y^\sigma = X^\rho g_{\rho\sigma} Y^\sigma$$

e questo significa:

$$\Lambda_\rho^\mu g_{\mu\nu} \Lambda_\sigma^\nu = g_{\rho\sigma}$$

cioè:^{*}

$$\Lambda^t g \Lambda = g \quad (16)$$

dove i prodotti sono righe per colonne.

Dalla (16) e da alcune proprietà dei determinanti segue che:

$$\text{Det}(\Lambda^t) \cdot \text{Det}(g) \cdot \text{Det}(\Lambda) = \text{Det}(g)$$

ed essendo $\text{Det}(g) = -1$ si ha:

$$\text{Det}(\Lambda^t) \cdot \text{Det}(\Lambda) = [\text{Det}(\Lambda)]^2 = 1$$

cioè

$$\text{Det}(\Lambda) = \pm 1$$

Essendo $\text{Det}(\Lambda) \neq 0$ vediamo che le matrici Λ che rappresentano trasformazioni di Lorentz ammettono sempre l'inversa. Che questa inversa sia ancora una trasformazione di Lorentz è piuttosto banale; vediamo infatti che essa soddisfa la condizione (16):

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1})^t g \Lambda^{-1} &= (\Lambda^{-1})^t (\Lambda^t g \Lambda) \Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^t \Lambda^t g \Lambda \Lambda^{-1} = \\ &= [\Lambda(\Lambda^{-1})]^t g [\Lambda \Lambda^{-1}] = g \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che il prodotto (righe per colonne) di due matrici di Lorentz Λ_1 e Λ_2 è sempre una matrice di Lorentz. Abbiamo:

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^t g (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^t \Lambda_1^t g \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^t g \Lambda_2 = g$$

Risulta con ciò dimostrato che le matrici di Lorentz definite mediante la proprietà (16) formano gruppo.

^{*} Possiamo considerare praticamente questa condizione necessaria e sufficiente perché una matrice Λ rappresenti una trasformazione di Lorentz.

Consideriamo le rappresentazioni di questo gruppo. Si dice rappresentazione di un gruppo ogni omomorfismo tra il gruppo stesso e quello degli isomorfismi di uno spazio vettoriale in se stesso.

Le matrici Λ_ν^μ sono rappresentazioni di se stesse nello spazio dei quadrivettori che ben conosciamo. Una matrice di Lorentz Λ_ν^μ infatti associa a se stessa una trasformazione lineare che manda ogni vettore in un altro; questa trasformazione può essere intesa ovviamente come un isomorfismo dello spazio dei quadrivettori in se stesso. Questo tipo di rappresentazione di un gruppo si dice rappresentazione diretta.

Le matrici trasposte delle inverse delle matrici di Lorentz $\left[(\Lambda^{-1})_\nu^\mu \right]^t$ sono un'altra rappresentazione del gruppo. È infatti immediato provare che l'operazione $\Lambda_\nu^\mu \rightarrow \left[(\Lambda^{-1})_\nu^\mu \right]^t$ è un omomorfismo:

$$\left(\Lambda_1^{-1} \right)^t \left(\Lambda_2^{-1} \right)^t = \left(\Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} \right)^t = \left[\left(\Lambda_1 \Lambda_2 \right)^{-1} \right]^t \quad (17)$$

Vogliamo ora vedere quali quaterne di numeri formano lo spazio di questa rappresentazione, ovvero si trasformano, cambiando il sistema di riferimento, secondo le trasposte delle inverse delle matrici di Lorentz. Dimostriamo che i quadrigradienti (definiti in maniera analoga ai gradienti tridimensionali) sono quadrivettori di questo tipo. Risulta infatti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial (\Lambda^{-1})_\sigma^\nu x'^\sigma}{\partial x'^\mu} = \\ &= (\Lambda^{-1})_\sigma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})_\sigma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta_\mu^\sigma = \\ &= (\Lambda^{-1})_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left[(\Lambda^{-1})_\mu^\nu \right]^t \frac{\partial}{\partial x^\nu} \end{aligned} \quad (18)$$

I quadrivettori che si comportano come i quadrigradienti, che si trasformano cioè con le matrici trasposte delle inverse di quelle di Lorentz, si dicono quadrivettori covarianti e si scrivono con gli indici in basso. Si ha cioè:

$$A'_\mu = (\Lambda^{-1})_\mu^\nu A_\nu \quad (19)$$

I quadrivettori che avevamo incontrato finora, che si trasformano con le matrici di Lorentz, si dicono invece quadrivettori controvarianti e si scrivono con gli indici in alto. Si ha per essi:

$$B'^\mu = \Lambda_\nu^\mu B^\nu \quad (20)$$

Esempi di vettori controvarianti sono lo spostamento spaziotemporale, in qv. energia impulso, etc.

Sono rappresentazioni del gruppo di Lorentz anche le composizioni (che non hanno niente a che fare, ovviamente, con i prodotti righe per colonne) del tipo:

$$\Lambda_{\mu'}^{\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu} \cdots \Lambda_{\lambda'}^{\lambda} \quad (21)$$

Dimostriamo quanto abbiamo detto per composizioni di due matrici. Sia Λ_1 una matrice di Lorentz, ad essa sia associata la composizione $\Lambda_{1\beta}^{\alpha} \Lambda_{1\delta}^{\gamma}$, alla matrice Λ_2 associamo analogamente la composizione $\Lambda_{2\nu}^{\mu} \Lambda_{2\sigma}^{\lambda}$. Vogliamo vedere, in analogia con la (17), che questa composizione è un omomorfismo. Il prodotto (righe per colonne) delle due composizioni dovrà dunque risultare uguale alla composizione del prodotto (righe per colonne) di Λ_1 e Λ_2 . Abbiamo infatti:

$$\Lambda_{1\beta}^{\alpha} \Lambda_{1\delta}^{\gamma} \Lambda_{2\lambda}^{\beta} \Lambda_{2\sigma}^{\delta} = \Lambda_{1\beta}^{\alpha} \Lambda_{2\lambda}^{\beta} \Lambda_{1\delta}^{\gamma} \Lambda_{2\sigma}^{\delta} = (\Lambda_1 \Lambda_2)_{\lambda}^{\alpha} (\Lambda_1 \Lambda_2)_{\sigma}^{\gamma}$$

Quanto dimostrato può banalmente estendersi alla composizione di una matrice di Lorentz con se stessa più di due volte.

Analogamente si dimostra che sono ripresentazioni del gruppo di Lorentz le composizioni di una matrice Λ , oltre che con se stessa, con la trasposta dell'inversa un numero qualunque di volte; qualcosa del tipo

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} \Lambda_{\delta}^{\gamma} \cdots \left[(\Lambda^{-1})_{\nu}^{\mu} \right]^t \left[(\Lambda^{-1})_{\sigma}^{\lambda} \right]^t \cdots \quad (22)$$

Gli spazi su cui operano tutte queste rappresentazioni sono gli spazi dei quadritensori di ordine N (N =numero degli indici del tensore). La definizione di quadritensore è analoga a quella di tensore nello spazio tridimensionale. I quadritensori possono essere, a seconda di come si trasformano, controvarianti o covarianti o misti. Ad esempio è controvariante (due volte) il quadritensore $A^{\alpha\beta}$ tale che:

$$A'^{\alpha\beta} = \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\delta}^{\beta} A^{\gamma\delta} \quad (23)$$

È invece covariante (tre volte) il tensore $B_{\alpha\beta\gamma}$ tale che:

$$B'_{\alpha\beta\gamma} = (\Lambda^{-1})_{\alpha}^{\mu} (\Lambda^{-1})_{\beta}^{\nu} (\Lambda^{-1})_{\gamma}^{\sigma} B_{\mu\nu\sigma} \quad (24)$$

Esistono anche tensori n volte controvarianti e m volte covarianti. Per esempio il tensore $C_{\beta\gamma}^{\alpha}$, tale che:

$$C'_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} (\Lambda^{-1})_{\beta}^{\nu} (\Lambda^{-1})_{\gamma}^{\sigma} C_{\nu\sigma}^{\mu} \quad (25)$$

è una volta controvariante e due volte covariante.

Vogliamo ora riprendere da capo il problema, che avevamo già risolto un po' empiricamente, di introdurre una metrica nello spazio dei quadrvettori. Consideriamo due quadrvettori controvarianti A^{μ} e B^{ν} . Definiamo il loro prodotto scalare;* esso sarà rappresentato da una forma bilineare reale e simmetrica di matrice $g_{\mu\nu}$. Sarà cioè per definizione:

* Immaginate, per un attimo, di avere dimenticato cosa sia e, nel ragionamento, seguite strettamente le ipotesi.

$$A \cdot B = A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu \quad (26)$$

Vogliamo che il prodotto scalare (26) sia invariante per trasformazioni di Lorentz, sia cioè un vero e proprio scalare relativistico.

Deve essere dunque:

$$A'^\mu g'_{\mu\nu} B'^\nu = A^\alpha g_{\alpha\beta} B^\beta$$

cioè, tenendo conto della (20):

$$(\Lambda_\alpha^\mu A^\alpha) g'_{\mu\nu} (\Lambda_\beta^\nu B^\beta) = A^\alpha g_{\alpha\beta} B^\beta$$

cioè

$$\Lambda_\alpha^\mu g'_{\mu\nu} \Lambda_\beta^\nu = g_{\alpha\beta} \quad (27)$$

Moltiplicando entrambi i membri della (27) per $(\Lambda^{-1})_\mu^\alpha (\Lambda^{-1})_\nu^\beta$ otteniamo:

$$(\Lambda^{-1})_\mu^\alpha \Lambda_\alpha^\mu g'_{\mu\nu} \Lambda_\beta^\nu (\Lambda^{-1})_\nu^\beta = (\Lambda^{-1})_\mu^\alpha g_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})_\nu^\beta \quad (28)$$

ovvero:

$$g'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})_\mu^\alpha (\Lambda^{-1})_\nu^\beta g_{\alpha\beta} \quad (29)$$

da cui si vede che la matrice metrica $g_{\mu\nu}$ deve essere, come avevamo correttamente scritto (con gli indici in basso), un tensore due volte covariante.

Chiamiamo ora e_μ un vettore della base nel riferimento non primato; per un cambiamento di coordinate il suo trasformato sia e'_μ . Avremo:

$$e'_\mu = \Lambda_\mu^\alpha e_\alpha \quad (30)$$

Imponiamo l'invarianza, sotto trasformazioni di Lorentz, del prodotto scalare tra due vettori della base. Otteniamo, indicando i prodotti scalari con barrette verticali:

$$(e_\mu | e_\nu) = (e'_\mu | e'_\nu) = (\Lambda_\mu^\alpha e_\alpha | \Lambda_\nu^\beta e_\beta) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta (e_\alpha | e_\beta)$$

Ma essendo per definizione (vedi l'algebra lineare)

$$g_{\mu\nu} = (e_\mu | e_\nu) \quad , \quad g_{\alpha\beta} = (e_\alpha | e_\beta)$$

otteniamo

$$g_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta g_{\alpha\beta} \quad (31)$$

Moltiplicando ambo i membri della (31) per $(\Lambda^{-1})_\alpha^\mu (\Lambda^{-1})_\beta^\nu$ otteniamo:

$$g_{\alpha\beta} = (\Lambda^{-1})_\alpha^\mu (\Lambda^{-1})_\beta^\nu g_{\mu\nu}$$

e cambiando nome agli indici $\begin{pmatrix} \alpha & \longleftrightarrow & \mu \\ \beta & \longleftrightarrow & \nu \end{pmatrix}$ si ha:

$$g_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\Lambda^{-1})_{\nu}^{\beta} g_{\alpha\beta} \quad (32)$$

Confrontando la (32) con la (29) si vede subito che è:

$$g' = g$$

cioè le componenti del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ non variano al variare del sistema di riferimento, purché il nuovo riferimento sia legato al vecchio tramite matrici appartenenti al gruppo di Lorentz.

Ricordiamo che il tensore metrico che abbiamo adottato per la relatività ristretta è:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo un tensore due volte controvariante e una volta covariante; "contraendo," cioè sommando su due indici (uno in alto e uno in basso) otteniamo una quaterna di numeri:

$$B^{\mu} = T_{\nu}^{\mu\nu}.$$

Ci domandiamo se B è un quadrivettore. Abbiamo:

$$T'_{\sigma}^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} (\Lambda^{-1})_{\sigma}^{\gamma} T_{\gamma}^{\alpha\beta}$$

da cui:

$$\begin{aligned} B'^{\mu} &= T'_{\nu}^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} (\Lambda^{-1})_{\nu}^{\gamma} T_{\gamma}^{\alpha\beta} \\ &= \Lambda_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\gamma} T_{\gamma}^{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} T_{\beta}^{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} B^{\alpha} \end{aligned}$$

cioè B è proprio un quadrivettore controvariante.

Questa è una regola generale: contraendo indici in alto con indici in basso in quadritensori, si ottengono ancora quadritensori di ordine inferiore, che risultano controvarianti, covarianti o misti a seconda della posizione degli indici rimasti. Contraendo i due indici di un tensore una volta covariante e una volta controvariante, per esempio, si ottiene uno scalare. $\frac{\partial B^{\nu}}{\partial x^{\mu}}$ è un tensore di questo tipo e la sua contrazione $\frac{\partial B^{\nu}}{\partial x^{\nu}}$ è uno scalare che si dice quadridivergenza di B . Non si possono invece contrarre tra di loro indici in alto o indici in basso. Dette S^{μ} , per esempio, le componenti di uno spostamento quadridimensionale abbiamo:

$$\sum_{\mu} S^{\mu} S^{\mu} = c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

che non è affatto uno scalare relativistico (invariante).

Per ricavare un vettore covariante da uno controvariante basta moltiplicare quest'ultimo per il tensore metrico:

$$B_\mu = g_{\mu\nu} B^\nu \quad (33)$$

Se poniamo ora

$$(g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu}$$

possiamo trasformare semplicemente anche un vettore covariante in uno controvariante. Sarà infatti per la (33)

$$B^\mu = (g_{\mu\nu})^{-1} B_\nu = g^{\mu\nu} B_\nu \quad (34)$$

Si noti che la matrice $g^{\mu\nu}$ è uguale, componente per componente alla $g_{\mu\nu}$. L'utilità di (33) e (34) è facilmente intuibile. Esse sono state, d'altra parte, già usate per dedurre la formula (XI - 40).*

3 Equazione invariante a vista del moto dei mezzi continui soggetti a forze puramente meccaniche

Nel § 1 stavamo considerando il moto di un fluido quando fosse soggetto a forze puramente meccaniche, tali cioè da conservare la massa propria. Avevamo scritto appunto una relazione invariante a vista che rappresenta la conservazione locale (cioè nell'intorno di un punto) della massa propria (15). Introduciamo a questo punto una densità di forza \bar{f} tale che:

$$\int_{V_0} \bar{f} dV = \bar{F}(V_0) \quad (35)$$

dove $\bar{F}(V_0)$ rappresenta la forza totale esercitata nel fluido che occupa il volume V_0 .

Ricordiamo che si definisce quadriforza il quadrivettore

$$\mathcal{F}^\mu = \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma \bar{F} \right) \quad (36)$$

Consideriamo la porzione di fluido contenuta nel volumetto infinitesimo δV . Dato che le forze che agiscono sono puramente meccaniche, l'energia scambiata è costituita unicamente dal lavoro meccanico. Si ha cioè, essendo nullo il temine $dm_0 c^2/d\tau$ nella (XI-42),

* Per approfondire gli argomenti di questo §, e per vederne una diversa presentazione, vedasi: Landau Lifchitz - Theorie des champs [Cap. I § 6].

$$\frac{dE}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{u} \quad (37)$$

La quadriforza cui è soggetto il fluido contenuto in δV è perciò:

$$\delta \mathcal{F}^\mu = \left(\frac{\gamma \bar{f} \cdot \bar{u}}{c}, \gamma \bar{f} \right) \delta V \quad (38)$$

dove \bar{u} è la velocità del fluido. Inoltre il quadriimpulso infinitesimo della nostra porzione di fluido è:

$$\delta P^\mu = \delta m_0 u^\mu = \mu_0 u^\mu \delta V \quad (39)$$

dove u^μ è la quadrivelocità del fluido in non importa quale punto di δV .

Ma la quadriforza è la derivata del quadriimpulso rispetto al tempo proprio (XI-39); si ha cioè:

$$\frac{d}{d\tau} (\delta P^\mu) = \delta \mathcal{F}^\mu$$

cioè:

$$\left(\frac{\gamma \bar{f} \cdot \bar{u}}{c}, \gamma \bar{f} \right) \delta V = \frac{d}{d\tau} (\mu_0 u^\mu \delta V) \quad (40)$$

La conservazione della massa propria impone che sia:

$$\frac{d}{d\tau} (\mu_0 \delta V) = 0$$

Abbiamo perciò:

$$\left(\frac{\gamma \bar{f} \cdot \bar{u}}{c}, \gamma \bar{f} \right) \delta V = \mu_0 \delta V \frac{du^\mu}{d\tau}$$

Dividendo ambo i membri per $\gamma \delta V$ otteniamo:

$$\left(\frac{\gamma \bar{f} \cdot \bar{u}}{c}, \gamma \bar{f} \right) \frac{\delta V}{\gamma \delta V} = \frac{\mu_0}{\gamma} \frac{du^\mu}{d\tau}$$

Usando le (5), (5') e passando al limite per $V_0 \rightarrow 0$ si ottiene infine

$$\frac{d\mathcal{F}^\mu}{dV_0} = \left(\frac{\bar{f} \cdot \bar{u}}{c}, \bar{f} \right) = \mu_0^0 \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (41)$$

La (41) è finalmente l'equazione invariante a vista del moto dei mezzi continui soggetti a forze puramente meccaniche.

$d\mathcal{F}^\mu / dV_0$ si dice densità propria di quadriforza ed è uguale alla densità propria di massa propria moltiplicata per la quadriaccelerazione. Ricordiamo ancora che la quadrivelocità è ortogonale alla quadriaccelerazione. Nel caso di forze che conservano la massa propria, la densità propria di quadriforza è dunque ortogonale alla quadrivelocità.

4 Il tensore energia impulso

Vogliamo ora esaminare il caso in cui la massa propria non si conserva, in cui cioè il fluido è soggetto a forze generalizzate capaci di alterarla (sorgenti termiche etc.)*.

Consideriamo ancora la porzione di fluido che occupa il volumetto infinitesimo δV ; essa avrà quadriimpulso totale δP^μ . Sarà:

$$\frac{d}{d\tau} \delta P^\mu = \delta \mathcal{F}^\mu = f^\mu \delta V = f_0^\mu \delta V_0 = \left(\frac{\bar{f}_0 \cdot \bar{u} + q}{c}, \bar{f}_0 \right) \delta V_0 \quad (42)$$

dove \bar{f}_0 è la densità propria di forza meccanica e $q \delta V_0$ rappresenta lo scambio di energia non meccanica. Abbiamo anche, d'altra parte, per la (39):**

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \delta P^\mu \frac{d}{d\tau} (\mu_0 \delta V u^\mu) &= \frac{d}{d\tau} (\mu_0^0 \delta V_0 u^\mu) = \\ &= \mu_0^0 u^\mu \frac{d}{d\tau} \delta V_0 + \delta V_0 \frac{d}{d\tau} (\mu_0^0 u^\mu) = \\ &= \mu_0^0 u^\mu \delta V_0 \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_0 + \delta V_0 \frac{d}{d\tau} (\mu_0^0 u^\mu) \end{aligned} \quad (43)$$

dove \bar{u}_0 è la trivelocità del fluido vista nel sistema di riferimento L (cfr. § 1) nel quale l'impulso totale del fluido contenuto nel volumetto infinitesimo δV_0 è nullo (\bar{u}_0 si annulla ovviamente in un punto interno a δV_0).

Dimostriamo ora che in L vale la seguente:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{u}_0 = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu} \quad (44)$$

Nel riferimento L è infatti

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma \bar{u}_0) \quad ; \quad \gamma = (1 - u_0^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Calcoliamo i singoli termini della quadridivergenza:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^0}{\partial x^0} &= \frac{1}{c} \frac{\partial u^0}{\partial \tau} = \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} = \frac{\partial \gamma}{\partial u_0^2} \cdot \frac{\partial u_0^2}{\partial \tau} = 2\bar{u}_0 \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial u_0^2} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \tau} \\ \frac{\partial u^1}{\partial x^1} &= \frac{\partial \gamma u_x}{\partial x} = \gamma \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial \gamma u_y}{\partial y} = \gamma \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_y \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^3} &= \frac{\partial \gamma u_z}{\partial z} = \gamma \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_z \frac{\partial \gamma}{\partial z} \end{aligned}$$

* cfr. cap. XI § 7.

** Nell'ultimo passaggio si è usata la (10).

Essendo δV_0 un volumetto infinitesimo, ed essendo \bar{u}_0 nulla in un punto interno a δV_0 , per continuità \bar{u}_0 sarà infinitesimo (e quindi trascurabile rispetto alle sue derivate) in tutto δV_0 . Risulta perciò:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^0}{\partial x^0} &\simeq 0 \quad ; \quad \frac{\partial u^1}{\partial x^1} \simeq \gamma \frac{\partial u_x}{\partial x} \simeq \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^2} &\simeq \gamma \frac{\partial u_y}{\partial y} \simeq \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \simeq \gamma \frac{\partial u_z}{\partial z} \simeq \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{45}$$

se \bar{u}_0 è trascurabile possiamo infatti a maggior ragione porre $\gamma = 1$. Sommando le (45) si ottiene la (44) c.v.d.

Tenendo conto della (45) e della (43) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \delta P^\mu &= \delta V_0 \left(\mu_0^0 u^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\nu} + \frac{d}{d\tau} (\mu_0^0 u^\mu) \right) = \\ &= \delta V_0 \left(\mu_0^0 u^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial(\mu_0^0 u^\mu)}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = \\ &= \delta V_0 \left(\mu_0^0 u^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial(\mu_0^0 u^\mu)}{\partial x^\nu} u^\nu \right) = \\ &= \delta V_0 \frac{\partial(\mu_0^0 u^\mu u^\nu)}{\partial x^\nu}\end{aligned}$$

Sostituendo questo risultato nella (42) otteniamo:

$$f_0^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\mu_0^0 u^\mu u^\nu)\tag{46}$$

Il termine tra parentesi:

$$T^{\mu\nu} = \mu_0^0 u^\mu u^\nu\tag{47}$$

è un tensore doppio controvariante chiaramente simmetrico che si dice Tensore Energia Impulso. Il perché di questa denominazione verrà chiarito in seguito.

Abbiamo già visto che se le forze sono puramente meccaniche si ha $f_0^\mu g_{\mu\mu'} u^{\mu'} = 0$. Vogliamo vedere quanto vale questa espressione nel caso di forze generalizzate:

$$\begin{aligned}f_0^\mu g_{\mu\mu'} u^{\mu'} &= \left(\frac{\bar{f}_0 \cdot \bar{u} + q}{c}, \bar{f}_0 \right) g(\gamma c, \gamma \bar{u})^t = \\ &= \gamma (\bar{f}_0 \cdot \bar{u} + q) - \gamma \bar{f}_0 \cdot \bar{u} = \gamma q = q_0\end{aligned}\tag{48}$$

Interpretando q come densità propria di potenza termica, q_0 risulta essere densità propria di potenza termica propria, che è effettivamente uno scalare.

Si ha d'altra parte:

$$\begin{aligned}
f_0^\mu g_{\mu\mu'} u^{\mu'} &= \frac{\partial(\mu_0^0 u^\mu u^\nu)}{\partial x^\nu} g_{\mu\mu'} u^{\mu'} = \\
&= \mu_0^0 u^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} g_{\mu\mu'} u^{\mu'} + \frac{\partial \mu_0^0 u^\nu}{\partial x^\nu} u^\mu g_{\mu\mu'} u^{\mu'} = \\
&= \mu_0^0 u^\nu \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial(u^\mu g_{\mu\mu'} u^{\mu'})}{\partial x^\nu} + c^2 \frac{\partial \mu_0^0 u^\nu}{\partial x^\nu} = \\
&= \mu_0^0 u^\nu \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial x^\nu} + c^2 \frac{\partial \mu_0^0 u^\nu}{\partial x^\nu} = c^2 \frac{\partial \mu_0^0 u^\nu}{\partial x^\nu}
\end{aligned} \tag{49}$$

(48) e (49) implicano che:

$$\frac{\partial \mu_0^0 u^\nu}{\partial x^\nu} = \frac{q_0}{c^2} \tag{50}$$

Avevamo trovato (15) che la massa propria si conserva se e solo se $\partial \mu_0^0 u^\nu / \partial x^\nu = 0$. Questa è pertanto una riprova del fatto che le forze generalizzate non conservano la massa propria.

In particolare abbiamo, se sul flusso non agiscono forze di sorta:

$$\frac{\partial \mu_0^0 u^\mu u^\nu}{\partial x^\nu} = 0$$

Fissiamo $\mu = 0$ e scriviamo più distesamente; si ha:

$$\frac{\partial(\mu_0^0 u^0 u^\nu)}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^0}(\mu_0^0 u^0 u^0) + \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu_0^0 u^0 u^i) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Integrando su tutto lo spazio si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\int_{V_\infty} \frac{\partial}{\partial x^0}(\mu_0^0 u^0 u^0) dV + \int_{V_\infty} \frac{\partial}{\partial x^i}(\mu_0^0 u^0 u^i) dV = \\
&= \frac{1}{c} \int_{V_\infty} \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0^0 u^0 u^0) dV + \int_{\sigma_\infty} \mu_0^0 u^0 \gamma \bar{u} \cdot \bar{n} d\sigma = 0
\end{aligned} \tag{51}$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è applicato il teorema di Gauss. Se supponiamo il fluido limitato ad una regione finita di spazio l'integrale su σ_∞ nella (51) si annulla. Abbiamo pertanto:

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{V_\infty} \mu_0^0 \gamma^2 c^2 dV = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{V_\infty} \mu c^2 dV = 0 \tag{52}$$

Quest'ultima rappresenta la conservazione dell'energia. Ovviamente non abbiamo speso una pagina di conti per dimostrare che, se non agiscono forze, si conserva l'energia*. Vogliamo suggerire una regola generale: ogni volta che una

* Anche se è bene sincerarsi sempre che il formalismo non prevarichi sul buonsenso!

quadridivergenza è nulla, si ha la conservazione di una grandezza.

Si può verificare, per esempio, procedendo come sopra dopo aver fissato l'indice $\mu = 1$, che da:

$$\frac{\partial \mu_0^0 u^1 u^\nu}{\partial x^\nu} = 0$$

si ottiene la conservazione della prima componente dell'impulso, e analogamente per le altre componenti.

Se nei calcoli effettuati precedentemente, invece di integrare su tutto lo spazio, si integra su un volume limitato V si ottiene dalla (51):

$$\frac{d}{dt} \int_V \mu c^2 dV = -c \int_\sigma \mu_0^0 u^0 \gamma \bar{u} \cdot \bar{n} d\sigma \quad (53)$$

Si vede che al primo membro della (53) si ha la derivata rispetto al tempo dell'energia racchiusa nel volume V , e al secondo membro il flusso, attraverso la superficie che delimita V , della quantità:

$$-c(\mu_0^0 u^0 \gamma \bar{u}) = -c(\mu_0^0 u^0 u^i)$$

Le quantità $\mu_0^0 u^0 u^i$ rappresentano le componenti 01, 02, 03, del tensore energia impulso $T^{\mu\nu}$. Si ha perciò che cT^{01} , cT^{02} , cT^{03} rappresentano le componenti della densità di corrente di Energia S^i . $T^{00} = W$ rappresenta ovviamente la densità di energia. In maniera del tutto analoga si dimostra che T^{10}/c , T^{20}/c , T^{30}/c , rappresentano la densità di impulso \mathcal{P}^i , mentre le componenti rimaste $T^{ij} = \sigma^{ij}$ rappresentano le densità di corrente delle varie componenti dell'impulso nelle varie direzioni*. La struttura del tensore $T^{\mu\nu}$ risulta in definitiva la seguente:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & S^x/c & S^y/c & S^z/c \\ c\mathcal{P}^x & \sigma^{xx} & \sigma^{xy} & \sigma^{xz} \\ c\mathcal{P}^y & \sigma^{yx} & \sigma^{yy} & \sigma^{yz} \\ c\mathcal{P}^z & \sigma^{zx} & \sigma^{zy} & \sigma^{zz} \end{pmatrix} \quad (54)$$

Dalla simmetria di $T^{\mu\nu}$ segue $S^i = c^2 \mathcal{P}^i$.

* σ^{ij} = densità di corrente della componente i dell'impulso nella direzione j .

XIII

Formulazione covariante della Elettrodinamica

1 Equazione di continuità - Carattere quadrivettoriale della corrente - conservazione della carica.

Il primo argomento di cui ci occupiamo in questo capitolo è la conservazione della carica elettrica. Quella della carica elettrica è la legge di conservazione più accuratamente verificata negli esperimenti. Tale legge si può tradurre nella nota formula della equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{u}) = 0. \quad (1)$$

Questa relazione esprime il fatto che la carica si conserva localmente. È impossibile in relatività dare immediatamente una legge di conservazione che non sia locale, per non andare incontro a difficoltà col concetto di simultaneità. Per questa ragione in generale tutte le relazioni relativistiche sono relazioni locali.

La (1) vale ovviamente in ogni s.r.i. Se introduciamo la quaterna di numeri:

$$s^\mu = \left(\rho, \rho/c \bar{u} \right) \quad (2)$$

la (1) si traduce nella forma:

$$\frac{\partial s^\mu}{dx^\mu} = 0 \quad (3)$$

Facciamo notare ancora una volta che ad una quadridivergenza che si annulla corrisponde una legge di conservazione.

Vogliamo ora dimostrare che s^μ risulta essere quadrivettore. Sapremo così come si trasforma la densità di carica passando da un s.r.i. ad un altro. Ammettiamo, per fare ciò, le seguenti ipotesi, tutte molto ragionevoli:

- a) $s'^\nu = f^\nu(s^0, s^1, s^2, s^3) = f^\nu(s^\nu)$
- b) $s^\nu = 0 \iff s'^\nu = 0$

c) $\frac{\partial s^\nu}{\partial x^\nu} = 0$ in ogni s.r.i.

Cominciamo col notare che:

$$\frac{\partial s'^\nu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial f^\nu(s^\alpha)}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial f^\nu}{\partial s^\mu} \frac{\partial s^\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial f^\nu}{\partial s^\mu} \frac{\partial s^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}$$

dove naturalmente è:

$$x^\rho = (\Lambda^{-1})_\nu^\rho x'^\nu.$$

Pertanto:

$$0 = \frac{\partial s'^\nu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial f^\nu}{\partial s^\mu} (\Lambda^{-1})_\nu^\rho \frac{\partial s^\mu}{\partial x^\rho} \quad (4)$$

Quando $\mu = \rho$ si ha per l'ipotesi (c) $\frac{\partial s^\mu}{\partial x^\mu} = 0$. Per $\mu \neq \rho$ i diversi $\frac{\partial s^\mu}{\partial x^\rho}$ possono assumere, al variare del s.r.i., qualunque valore. Perché l'espressione (4) si annulli dovranno essere dunque nulli i coefficienti di $\frac{\partial s^\mu}{\partial x^\rho}$, quindi:

$$\frac{\partial f^\nu}{\partial s^\mu} (\Lambda^{-1})_\nu^\rho = 0 \quad \text{per } \rho \neq \mu$$

In definitiva possiamo scrivere:

$$\frac{\partial f^\nu}{\partial s^\mu} (\Lambda^{-1})_\nu^\rho = a \delta_\nu^\rho \quad (4')$$

Dimostriamo ora che a non dipende dagli indici della (4'); infatti derivando la (4') rispetto ad s^λ si ha:

$$\frac{\partial^2 f^\nu}{\partial s^\mu \partial s^\lambda} (\Lambda^{-1})_\nu^\rho = \frac{\partial a}{\partial s^\lambda} \delta_\mu^\rho = \frac{\partial a}{\partial s^\mu} \delta_\lambda^\rho$$

l'ultimo passaggio essendo giustificato dal fatto che

$$\frac{\partial^2 f^\nu}{\partial s^\mu \partial s^\lambda} = \frac{\partial^2 f^\nu}{\partial s^\lambda \partial s^\mu}.$$

Per $\rho = \mu \neq \lambda$ vale dunque:

$$\frac{\partial a}{\partial s^\lambda} = \frac{\partial a}{\partial s^\mu} \delta_\lambda^\mu = 0 \quad (5)$$

La (5) vale per qualunque valore dei diversi indici (purché $\rho = \mu \neq \lambda$) vale in particolare per ogni λ . Possiamo perciò concludere che a è una costante, come volevamo dimostrare.

Scriviamo ora la relazione (4') per $\rho = \mu$:

$$\frac{\partial f^\nu}{\partial s^\mu} (\Lambda^{-1})_\nu^\mu = a$$

che si può anche scrivere

$$\frac{\partial f^\nu}{\partial s^\mu} = a A_\mu^\nu. \quad (6)$$

Integrando la (6) in ds^μ otteniamo:

$$s'^\nu = f^\nu = a A_\mu^\nu s^\mu + b^\nu \quad (7)$$

Sfruttando l'ipotesi (b) si ottiene $b^\nu = 0$. Pertanto si ha:

$$s'^\nu = a A_\mu^\nu s^\mu. \quad (7')$$

In particolare per $L \equiv L'$ è $A_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu$ per cui:

$$s^\nu = a \delta_\mu^\nu s^\mu = a s^\nu$$

e questo implica $a = 1$ nella (7').

Abbiamo così finalmente dimostrato (a partire dalle ipotesi a), b), c)) che s^ν è un quadrvettore.

Vediamo ora come si trasforma la densità di carica al variare del s.r.i. Consideriamo la quantità:

$$s^\nu g_{\nu\nu'} U^{\nu'} \quad (8)$$

dove $U^{\nu'}$ è la quadrivelocità che compete alla carica. La quantità espressa dalla (8) è certamente uno scalare. Nel s.r.i. in cui la carica è ferma all'istante considerato abbiamo $U^{\nu'} = (c, 0, 0, 0)$, pertanto lo scalare (8) è espresso da:

$$s^\nu g_{\nu\nu'} U^{\nu'} = \rho_0 c \quad (9)$$

dove ρ_0 indica la densità di carica misurata nel s.r.i. tangente. In ogni altro s.r.i. si ha:

$$s^\nu g_{\nu\nu'} U^{\nu'} = \rho \gamma c - \rho \gamma \frac{u^2}{c} = \rho \gamma c \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \rho c / \gamma \quad (10)$$

La relazione che lega fra loro ρ e ρ_0 è pertanto la seguente:

$$\rho = \gamma \rho_0 \quad (11)$$

Questo per la densità di carica. Vediamo che cosa succede alle cariche. Abbiamo, con notazioni ormai familiari:

$$\rho_0 = \frac{dq_0}{dV_0} \quad ; \quad \rho = \frac{dq}{dV} = \gamma \frac{dq}{dV_0} \quad (12)$$

sostituendo le (12) nella (11) si ha:

$$\gamma \frac{dq}{dV_0} = \gamma \frac{dq_0}{dV_0} \implies dq = dq_0 \quad (13)$$

Possiamo dunque dire che la carica contenuta in un volumetto infinitesimo, tale cioè che non sussistono in esso problemi di simultaneità, è invariante.

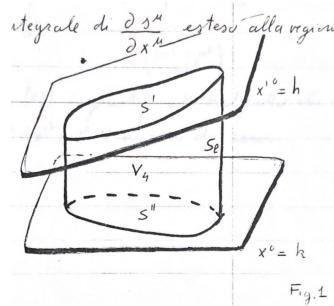
Abbiamo pertanto, riassumendo i risultati precedenti, due proprietà locali della carica: la conservazione e l'invarianza al variare del s.r.i. dell'osservatore. Vogliamo dimostrare che queste proprietà sono in realtà tutt'altro che locali. Per fare ciò dobbiamo usare l'estensione a quattro dimensioni del teorema di gauss, che qui enunciamo: sia $W^\mu(x^\alpha)$ un qualunque campo quadrivettoriale, sia V_4 una qualsiasi regione del cronotopo ed S la ipersuperficie che la delimita: l'enunciato del teorema di gauss è in questo caso:

$$\int_{V_4} \frac{\partial W^\mu}{\partial x^\mu} dV_4 = \int_S W^\mu(x^\alpha) dS_\mu \quad (14)$$

dove $dS_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma$ è l'elemento infinitesimo di ipersuperficie S ($\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$ è il tensore di Ricci a 4 dimensioni). Come si vede l'enunciato (14) è, almeno formalmente analogo a quello familiare a tre dimensioni. È bene comunque riguardare l'argomento su qualche testo specifico*. Ad ogni modo per quanto ci riguarda sarà sufficiente l'enunciato (14). Ci serviremo di esso per dimostrare, come avevamo accennato in precedenza, che la carica totale di un sistema "elettricamente isolato," (che non abbia scambio di cariche con l'esterno) è invariante al variare dei s.r.i. e si conserva. Partiamo dall'equazione di conservazione locale (1), (3). Ci proponiamo di dimostrare che vale la relazione generale:

$$Q(t) = \int_{\substack{\text{per } t=\text{cost} \\ \text{in } L}} \rho dV = \int_{\substack{\text{per } t'=\text{cost} \\ \text{in } L'}} \rho' dV' = Q'(t') \quad (15)$$

Questi integrali si intendono eseguiti su un volume che contenga tutta la carica in considerazione. Per dimostrare la (15) prendiamo in esame l'integrale di $\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu}$ esteso alla regione di cronotopo V_4 così definita: V_4 è delimitata dagli iperpiani di equazione $x^0 = k$ e $x'^0 = h$ e da un'ipersuperficie limitata tale che in essa sia $s^\mu = 0$ (Fig. 1). Si ha:



* Si veda ad es. Landau-Lifchitz Théorie du Champ.

$$0 = \int_{V_4} \frac{\partial s^\mu}{\partial x^\mu} dV_4 = \int_S s^\mu dS_\mu = \int_{S'} s^\mu dS_\mu + \int_{S''} s^\mu dS_\mu \quad (16)$$

infatti sulla superficie laterale il flusso è banalmente nullo. In S'' però solo $dS_0 = -dx^1 dx^2 dx^3 = -dV_3$ ^{*} è diverso da zero per cui si ha:

$$0 = \int_{S'} s^\mu dS_\mu - \int_{S''} s^0 dV_3 \quad (16')$$

cioè:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_{S''} s^0 dV_3 = \int_{S'} s^\mu dS_\mu = \int_{S'} (\Lambda^{-1})_\nu^\mu s'^\nu \Lambda_\mu^\rho dS'_\rho = \\ &= \int_{S'} \delta_\nu^\rho s'^\nu dS'_\rho = \int_{S'} s'^\nu dS'_\nu = \int_{S'} (\text{per } t'=\text{cost} \text{ in } L') s'^0 dV'_3 = Q'(t') \end{aligned} \quad (17)$$

L'ultimo passaggio nella (17) è giustificato dal fatto che su S' solo $dS'_0 = dx'^1 dx'^2 dx'^3$ è diverso da zero.

2 Formulazione covariante delle Equazioni di Maxwell

Vogliamo ora porci il problema di dare una formulazione relativisticamente invariante a vista dell'elettrodinamica.

Le leggi fondamentali dell'elettrodinamica sono, come è ben noto, le equazioni di Maxwell:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 4\pi\rho \quad (18)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{H} = 0 \quad (19)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (20)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (21)$$

La (18) equivale, come si sa, alla legge di Coulomb**; la (19) esprime il fatto che non esistono cariche magnetiche, la (20) esprime la legge di induzione di Faraday e la (21) esprime la prima parte della legge di Ampere.

Come ormai sappiamo queste equazioni si scrivono allo stesso modo in tutti i s.r.i. (la teoria della relatività di base proprio su questo presupposto). Ci

* Si ricorda che è: $dS_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma$ con $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$ tensore di Ricci quadridimensionale.

** In realtà equivale quasi alla legge di Coulomb; occorre imporre che il campo sia irrotazionale $\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0$.

proponiamo dunque di scriverle in forma invariante a vista. Per fare questo introduciamo la seguente tabella:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Con questa notazione le equazioni di Maxwell assumono la forma:^{*}

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -4\pi j^\mu. \quad (24)$$

Tenendo conto che $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico osserviamo che abbiamo scritto 8 relazioni linearmente indipendenti, tante quante le equazioni di Maxwell (18~21).

Se poniamo per esempio nella (23) $\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2$ essa assume la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{01}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x_0} + \frac{\partial F^{20}}{\partial x_1} &= \frac{\partial F^{12}}{\partial x^0} - \frac{\partial F^{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^1} = \\ &= -\frac{\partial H_3}{c\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^1} = 0. \end{aligned}$$

cioè: $(\bar{\nabla} \times \bar{E})_3 = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_3}{\partial t}$ che è una delle relazioni (20).

Ponendo invece, sempre nella (23) $\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x_2} &= -\left(\frac{\partial F^{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^2} \right) = \\ &= -\left(-\frac{\partial H_1}{\partial x^1} - \frac{\partial H_2}{\partial x^2} - \frac{\partial H_3}{\partial x^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

cioè: $\bar{\nabla} \cdot \bar{H} = 0$ che è la (19).

Poniamo ora nella (24) $\mu = 0$; risulta così:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} &= \\ -\frac{\partial E_1}{\partial x^1} - \frac{\partial E_2}{\partial x^2} - \frac{\partial E_3}{\partial x^3} &= -4\pi j^0 \end{aligned}$$

cioè: $\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 4\pi\rho$ che è la (18).

Infine, ponendo nella (24) per esempio $\mu = 1$ otteniamo:

^{*} Ricordiamo che è: $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$; cioè se il quadrivettore x^μ ha componenti (ct, x_1, x_2, x_3) , $x_\mu = (ct, -x_1, -x_2, -x_3)$.

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t} - \frac{\partial H_3}{\partial x^2} + \frac{\partial H_2}{\partial x^3} = -4\pi s^1$$

cioè: $(\bar{\nabla} \times \bar{H})_1 = \frac{4\pi}{c} J_1 + \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t}$ che è una delle relazioni (21).

Vediamo ora di esaminare un po' più da vicino questa tabella così comoda. È del tutto naturale ammettere che, dati due sistemi di riferimento L ed L', il valore di \bar{E}' ed \bar{H}' in L' sia funzione dei valori di \bar{E} e di \bar{H} in L. Possiamo perciò scrivere

a) $F'^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}(F^{\lambda\rho})$

È evidente inoltre che se il campo elettrico e quello magnetico sono entrambi nulli in L, lo saranno anche in L', cioè:

b) $F^{\mu\nu}(x^\alpha) = 0 \iff F'^{\mu\nu}(x'^\alpha) = 0.$

Dal fatto che $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico deriva poi che:

$$\frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 F^{\nu\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial^2 F^{\nu\mu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

ciò implica che:

c) $\frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0$ Date le premesse (a) (b) (c), con procedimento sostanzialmente analogo a quello che si era usato per dimostrare che s^μ è un quadrivettore, si dimostra che $F^{\mu\nu}$ è un tensore due volte controvariante.*

Il carattere tensoriale di $F^{\mu\nu}$ ci permette di calcolare con facilità come si trasformano \bar{E} ed \bar{H} al variare del s.r.i. Consideriamo una trasformazione di Lorentz speciale tale che il moto di L' relativo ad L avvenga lungo l'asse x^1 . detta Λ la matrice che rappresenta la trasformazione abbiamo:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu F^{\alpha\beta} \quad (25)$$

il che, tradotto in termini di prodotto (righe per colonne) di matrici significa:

$$F' = \Lambda F \Lambda^t \quad (25')$$

ovvero:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E'_1 & -E'_2 & -E'_3 \\ E'_1 & 0 & -H'_3 & H'_2 \\ E'_2 & H'_3 & 0 & -H'_1 \\ E'_3 & -H'_2 & H'_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eseguendo brevi calcoli il secondo membro diviene:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -\gamma(E_2 - \beta H_3) & -\gamma(E_3 + \beta H_2) \\ E_1 & 0 & -\gamma(H_3 - \beta E_2) & \gamma(H_2 + \beta E_3) \\ \gamma(E_2 - \beta H_3) & \gamma(H_3 - \beta E_2) & 0 & -H_1 \\ \gamma(E_3 + \beta H_2) & -\gamma(H_2 + \beta E_3) & H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

* D'altra parte, ammesse come vere (23) e (24) il carattere tensoriale di $F^{\mu\nu}$ deriva dal fatto che s^μ è un quadrivettore.

da cui si ricava facilmente confrontando i coefficienti di ugual posto delle matrici:

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 & H'_1 &= H_1 \\ E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta H_3) & H'_2 &= \gamma(H_2 + \beta E_3) \\ E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta H_2) & H'_3 &= \gamma(H_3 - \beta E_2) \end{aligned} \quad (26)$$

Ricavare le (26) dalla semplice invarianza delle equazioni di Maxwell sarebbe stata un'impresa assai più noiosa.

Vediamo di mettere in luce l'utilità di queste trasformazioni con un paio di esempi. Determiniamo per cominciare il campo elettrico prodotto da una carica in moto rettilineo uniforme lungo l'asse x^1 . Mettiamoci per fare ciò nel sistema di riferimento solidale con la carica, che chiameremo L' . In L' abbiamo:

$$\bar{E}' = \frac{q}{r^3} \bar{r} \quad ; \quad \bar{H}' = 0$$

Trasformando nel sistema L del laboratorio abbiamo per le (26):

$$\begin{aligned} E_1(x^\alpha) &= E'_1(x'^\mu) & H_1(x^\alpha) &= 0 \\ E_2(x^\alpha) &= \gamma E'_2(x'^\mu) & H_2(x^\alpha) &= -\gamma \beta E'_3(x'^\mu) \\ E_3(x^\alpha) &= \gamma E'_3(x'^\mu) & H_3(x^\alpha) &= \gamma \beta E'_2(x'^\mu) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda, in particolare, la prima componente del campo elettrico si ha:

$$E_1(x^\alpha) = E'_1 \left(\gamma(ct + \frac{v}{c}x^1), \gamma(x^1 + vt), x^2, x^3 \right);$$

poiché in L' la carica è ferma, il campo misurato in L' è indipendente dal tempo, per cui è anche:

$$E_1(x^\alpha) = E'_1 \left(0, \gamma(x^1 + vt), x^2, x^3 \right).$$

Calcolando il campo elettrico per $t = 0$, quando la carica si trova nell'origine di L , abbiamo:

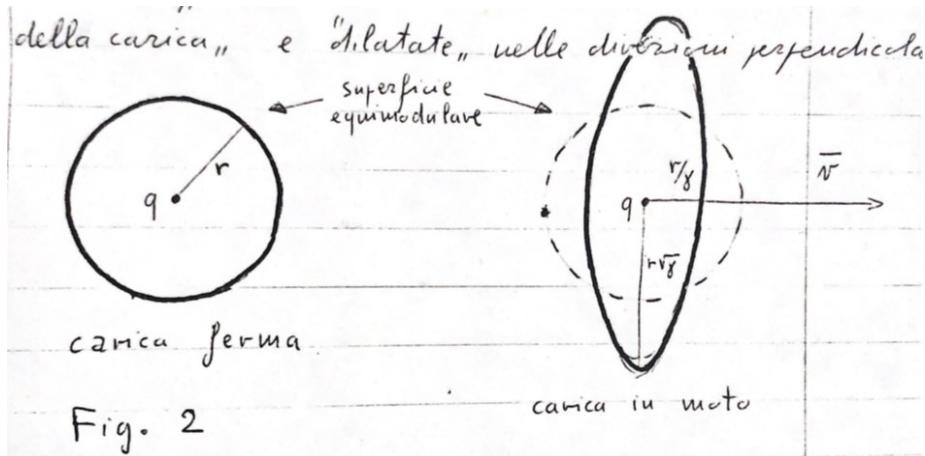
$$E_1(\bar{x}) = E'_1(\gamma x^1, x^2, x^3) \quad (27)$$

e per le altre due componenti:

$$E_2(\bar{x}) = \gamma E'_2(\gamma x^1, x^2, x^3) \quad (28)$$

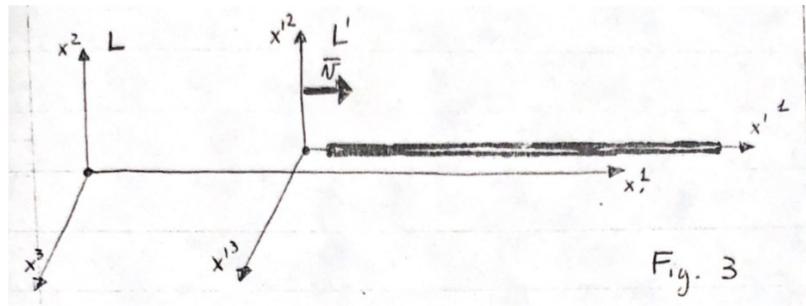
$$E_3(\bar{x}) = \gamma E'_3(\gamma x^1, x^2, x^3) \quad (29)$$

Osserviamo che la componente E_1 decresce spostandoci lungo l'asse x_1 più rapidamente di quanto non farebbe se la carica fosse ferma; mentre le componenti E_2 ed E_3 decrescono più lentamente rispettivamente lungo gli assi x_2 e

 x_3 .

Se definiamo "superficie equimodulare," il luogo dei punti in cui $|\bar{E}|$ è costante, tali superfici, sferiche nel caso statico, appaiono in L "schiacciate nella direzione del moto della carica, e "dilatate,, nelle direzioni perpendicolari.

Si badi a non confondere le superfici equimodulari con le superfici equipotenziali, tanto più che, nel nostro caso di una carica in moto, queste ultime non esistono, non potendosi nemmeno definire un potenziale, dato che $\bar{\nabla} \times \bar{E} \neq 0$. Passiamo ad un altro esempio. Supponiamo di avere un filo uniformemente carico, posto come in figura 3, la cui densità lineare, misurata nel s.r.i. L' solidale con esso, sia λ_0 .



Vogliamo calcolare i campi elettrico e magnetico in un sistema L in cui si vede scorrere uniformemente il filo, considerato indefinito, lungo l'asse x^1 .

In L' il campo magnetico è banalmente nullo, mentre quello elettrico è radiale (nel senso della simmetria cilindrica) e ha modulo:

$$|\bar{E}'| = \frac{2\lambda_0}{r} \quad (30)$$

Per ragioni di simmetria il campo elettrico è radiale anche in L, ($E'_1 = E_1 = 0$). Ne calcoliamo il modulo in un punto dell'asse x^2 a distanza r dal filo (le superfici coassiali cilindriche del filo sono, sempre per ragioni di simmetria, equimodulari). Nel punto che abbiamo scelto è per le (27), (28), (29):

$$\begin{aligned} E'_1 &= 0 \quad ; \quad E'_2 = \frac{2\lambda_0}{r} \quad ; \quad E'_3 = 0 \\ E_1 &= 0 \quad ; \quad E_2 = \frac{2\gamma\lambda_0}{r} \quad ; \quad E_3 = 0 \end{aligned}$$

cioè:

$$|\bar{E}'| = \frac{2\gamma\lambda_0}{r} = 2\lambda/r \quad (31)$$

dove $\lambda = \gamma\lambda_0$ è la densità lineare di carica del filo misurata in L.

Il valore del campo magnetico nello stesso punto è per le (26):

$$H_1 = 0 \quad ; \quad H_2 = 0 \quad ; \quad H_3 = \frac{\gamma\beta\lambda_0}{r} = \frac{2\lambda v}{rc} \quad (32)$$

Osserviamo che \bar{H} è ortogonale a \bar{r} e al filo; per ragioni di simmetria possiamo dire che lo sarà in ogni punto e che il suo modulo dipende unicamente dalla distanza dal filo. Si può verificare facilmente che si ottiene lo stesso risultato col calcolo classico (campo magnetico generato da una corrente in un filo rettilineo illimitato), tenendo conto che la corrente misurata in L è:

$$I = \lambda v = \gamma\lambda_0 v$$

3 Un ragionamento curioso

Il fatto che le equazioni di Maxwell siano invarianti per trasformazioni di Lorentz è una constatazione matematica del tutto indipendente dal principio di relatività (inesistenza dell'etere etc...): ciò è evidente, dal momento che le equazioni di trasformazione di Lorentz esistevano prima della teoria della relatività. Anche un fisico classico poteva perciò adoperare il formalismo che abbiamo esposto ragionando più o meno in questo modo:

"In realtà le equazioni di Maxwell non sono affatto invarianti, fisicamente, passando da un sistema di riferimento inerziale ad un altro: queste leggi sono corrette in un sistema di riferimento fisso rispetto all'etere e lo sono anche, molto approssimativamente, nel mio laboratorio che, per fortuna, non ha un movimento molto sensibile rispetto al sistema assoluto. In un sistema di riferimento che si muova molto velocemente (con velocità paragonabile a quella della luce) rispetto al mio laboratorio, le leggi di Maxwell sono del tutto inadeguate ad approssimare la realtà fisica, e i fenomeni elettromagnetici sono descritti correttamente da altre equazioni incomparabilmente più complicate.

Le equazioni di Maxwell sono però corrette in ogni s.r.i. se faccio comparire in esse, invece di lunghezze tempi e campi reali, opportune grandezze che sono particolari funzioni, dipendenti dal sistema di riferimento, delle grandezze fisiche reali. Posso cioè immaginare uno spazio fittizio, che non è il nostro spazio fisico, in cui lunghezze, tempi e campi si trasformano, al variare del s.r.i., secondo Lorentz. In questo spazio fittizio le equazioni di Maxwell sono sempre corrette. Tutto ciò mi risulta molto utile, data la semplicità di queste equazioni. Quando mi si presenta un problema pratico, infatti, posso trasportarlo nel mio spazio fittizio e risolverlo lì, visto che poi posso sempre risalire, dalle quantità fittizie che ho calcolato, che sono funzioni di quelle reali, a quelle reali stesse; posso cioè ritradurre la soluzione che ho trovato, nello spazio reale.,,

I due problemi che abbiamo affrontato in precedenza, per esempio, si sarebbero potuti risolvere ragionando anche in questo modo. E in questo modo ragionarono effettivamente, per la maggior parte, i fisici negli anni immediatamente precedenti l'affermazione della teoria della relatività.

Il fatto nuovo fu portato dall'esperienza di Michelson. Questo esperimento dimostrava, come abbiamo già visto nel cap. X, l'isotropia della propagazione della luce in ogni sistema di riferimento inerziale e perciò l'invarianza fisica, reale, delle equazioni di Maxwell. Ciò toglieva il carattere di finzione matematica allo "spazio fittizio," introdotto in precedenza, elevandolo al rango di spazio fisico reale.

4 La forza di Lorentz

Dopo avere esaminato il comportamento del campo elettromagnetico in se stesso, ci occupiamo ora delle sue interazioni con le cariche. Vogliamo calcolare la forza esercitata dal campo su una particella carica. Per fare ciò dobbiamo partire necessariamente da uno dei seguenti postulati:

- 1) Le forze elettromagnetiche non variano la massa propria delle particelle.
- 2) La forza a cui è soggetta una particella dipende solo dalla sua posizione e dalla sua velocità.

Il postulato 1) riflette la realtà se applicato a particelle elementari, prive cioè di struttura interna; particelle diverse infatti, quali per esempio gli atomi, possono "eccitarsi," e quindi variare la massa propria.

Dal postulato 1) si arriva all'espressione della forza nel modo seguente: ci si mette prima di tutto nel s.r. tangente alla particella. In esso sarà:

$$\bar{F} = e\bar{E} \quad (33)$$

e poiché la massa propria si conserva,

$$\frac{dm_0}{dt} = 0$$

l'espressione della quadriforza, sempre nel s.r. tangente è:*

* Ricordiamo che nel s.r. tangente è $\gamma = 1$.

$$\mathcal{F}^\mu = \left(\gamma/c \frac{d(m_0\gamma c^2)}{dt}, \gamma \bar{F} \right) = (0, \bar{F}) \quad (34)$$

Consideriamo ora, sempre nel s.r. tangente, il quadrivettore:

$$\tilde{\mathcal{F}}^\mu = e/c \left(F^{\mu\nu} U_\nu \right) = e/c \left(F^{\mu\nu} g_{\nu\nu'} U^{\nu'} \right) \quad (35)$$

dove $U^{\nu'}$ è la quadrivelocità della particella, cioè:

$$U_\nu = g_{\nu\nu'} U^{\nu'} = (c, \bar{0}) \quad (36)$$

Abbiamo pertanto:

$$\tilde{\mathcal{F}}^\mu = \frac{e}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{e}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ cE_1 \\ cE_2 \\ cE_3 \end{pmatrix}$$

cioè:

$$\tilde{\mathcal{F}}^\mu = (0, e\bar{E})^t = (0, \bar{F})^t = \mathcal{F}^\mu \quad (37)$$

\mathcal{F}^μ e $\tilde{\mathcal{F}}^\mu$ coincidendo nel s.r. tangente alla particella sono ovviamente lo stesso quadrivettore.

Si può ragionare anche partendo dal postulato 2). L'unico quadrivettore infatti che si può ricavare da $F^{\mu\nu}$, funzione della posizione, e da U^ν , quadrivelocità della particella è:

$$\hat{\mathcal{F}}^\mu = k(F^{\mu\nu} U_\nu)$$

La quadriforza non può dunque avere che questa forma.

La costante k si ricava mettendoci nel s.r. tangente e imponendo $\hat{\mathcal{F}}^\mu = (0, e\bar{E})$. Si noti che il postulato 2) implica il postulato 1). Infatti, per l'antisimmetria di $F^{\mu\nu}$, si ha:

$$F^{\mu\nu} U_\nu U_\mu = \mathcal{F}^\mu U_\mu = 0 \quad (38)$$

ossia la quadriforza è ortogonale alla quadrivelocità, il che implica la conservazione della massa propria.*

Esplicitando le componenti di \mathcal{F}^μ si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^1 &= \frac{e}{c} (F^{10} U_0 + F^{11} U_1 + F^{12} U_2 + F^{13} U_3) = \\ &= \frac{e}{c} (F^{10} U^0 - F^{11} U^1 - F^{12} U^2 - F^{13} U^3) = \\ &= \frac{e}{c} (E_1 \gamma c + H_3 \gamma v_2 - H_2 \gamma v_3) = e\gamma \left[E_1 + \frac{1}{c} (\bar{v} \times \bar{H})_1 \right] = \gamma F_1 \end{aligned}$$

* cfr. cap. XI § 7.

analogamente si ricavano \mathcal{F}^2 e \mathcal{F}^3 , ottenendo così:

$$\bar{F} = e \left[\bar{E} + \frac{1}{c} \bar{v} \times \bar{H} \right] \quad (39)$$

che è l'usuale formula della Forza di Lorentz.

Risulta inoltre che la componente temporale di \mathcal{F}^μ è:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^0 &= \frac{e}{c} (F^{00}U^0 - F^{01}U^1 - F^{02}U^2 - F^{03}U^3) = \\ &= \frac{e}{c} (E_1\gamma v_1 + E_2\gamma v_2 + E_3\gamma v_3) = \frac{e}{c}\gamma \bar{E} \cdot \bar{v} \end{aligned}$$

cioè si ha per la potenza:

$$W = \frac{c\mathcal{F}^0}{\gamma} = e\bar{E} \cdot \bar{v} \quad (40)$$

Dalla (40) appare che solo il campo elettrico compie lavoro sulla particella, cosa che si arguiva bene anche dalla (39).

5 Il Tensore Energia Impulso per il campo e.m.

Generalizziamo in questo paragrafo i risultati che abbiamo ottenuto al caso dei mezzi continui. Analizziamo cioè il comportamento in presenza di campi elettromagnetici di fluidi carichi analoghi a quelli trattati nel cap. XII (polveri). Facciamo notare che nel campo elettromagnetico è incluso anche il campo generato dalle cariche del fluido.

La densità propria di quadriforza che agisce sul fluido è:

$$f^\mu = \frac{d\mathcal{F}^\mu}{dV_0} = \frac{\rho_0 dV_0 F^{\mu\nu} U_\nu}{cdV_0} = \rho_0/c F^{\mu\nu} U_\nu = F^{\mu\nu} s_\nu \quad (41)$$

Sempre per l'antisimmetria di $F^{\mu\nu}$, abbiamo che la densità propria di quadriforza è ortogonale in ogni punto (del cronotopo) alla quadrivelocità; cioè, anche in questo caso, la massa propria si conserva.

Essendo il sistema (campo+fluido) un sistema isolato, in esso energia e impulso si conservano. Da ciò si deduce che il fluido esercita sul campo una densità di quadriforza:^{*}

$$\tilde{f}^\mu = -f^\mu = -F^{\mu\nu} s_\nu \quad (41')$$

Cerchiamo ora un tensore $T^{\mu\nu}$ funzione del campo elettromagnetico la cui divergenza sia \tilde{f}^μ , cioè tale che:

^{*} Questa relazione (41') è necessaria a meno di non ammettere azioni a distanza: una porzione di fluido localizzata in un punto che interagisce col campo in un altro punto.

$$\frac{\partial T^{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda} = -F^{\mu\nu}s_\nu \quad (42)$$

Il procedimento formale di soluzione della (42) è un po' noioso e sfrutta in sostanza tutti i "trucchi," del calcolo tensoriale, cioè l'antisimmetria di $F^{\mu\nu}$ ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$), la simmetria di $g_{\mu\nu}$ ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$), il cambiamento di nome degli indici ripetuti, l'abbassamento e l'innalzamento di indici mediante il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ ($A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$) etc...

Per l'equazione di Maxwell (24) si ha:

$$s_\nu = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_\nu^\lambda}{\partial x^\lambda} \quad (43)$$

pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda} &= \left(-F^{\mu\nu}\right) \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_\nu^\lambda}{\partial x^\lambda}\right) = \frac{F^{\mu\nu}}{4\pi} \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x_\lambda} (F^{\mu\nu} F_{\nu\lambda}) - \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} F_{\nu\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Ma è, sfruttando l'antisimmetria di $F^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} F_{\nu\lambda} &= \frac{\partial F^{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} F_{\lambda\nu} = \frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} F_{\nu\lambda} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} \right) F_{\nu\lambda} \end{aligned} \quad (45)$$

Si noti a questo punto che vale sempre:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (46)$$

Se infatti gli indici hanno valori tutti diversi la (46) si riconduce alla equazione di Maxwell (23); se invece almeno due indici sono uguali la relazione (46) è vera per la antisimmetria di $F^{\mu\nu}$.

Si può quindi scrivere proseguendo la (45):

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} F_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} \right) F_{\nu\lambda} = -\frac{1}{2} F_{\nu\lambda} \frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} \quad (47)$$

Proseguendo nelle trasformazioni formali della (47) si ha: *

* Si noti che $g_{\mu\nu}$ è un tensore simmetrico.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} F_{\nu\lambda} &= -\frac{1}{2} g_{\nu\nu'} g_{\lambda\lambda'} F^{\nu'\lambda'} \frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = \\ &= -\frac{1}{2} g_{\nu'\nu} g_{\lambda'\lambda} F^{\nu\lambda} \frac{\partial F^{\nu'\lambda'}}{\partial x_\mu} = -\frac{1}{2} F^{\nu\lambda} \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}. \end{aligned} \quad (48)$$

Semisommando (47) e (48) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} F_{\nu\lambda} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (F^{\nu\lambda} F_{\nu\lambda}) = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}) \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\mu} = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}) \delta_\lambda^\mu. \end{aligned} \quad (49)$$

Tornando ora alla (44) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x_\lambda} (F^{\mu\nu} F_{\nu\lambda}) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}) \delta_\lambda^\mu \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left[\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\nu} F_{\nu\lambda} + \frac{\delta_\lambda^\mu}{4} F^{\nu\rho} F_{\nu\rho} \right) \right] \end{aligned} \quad (50)$$

Innalzando l'indice λ dentro la parentesi quadraabbiamo:

$$\frac{\partial T^{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left[\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\nu} F_\nu^\lambda + \frac{g^{\mu\lambda}}{4} F^{\nu\rho} F_{\nu\rho} \right) \right] \quad (51)$$

da cui si ricava:

$$T^{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\nu} F_\nu^\lambda + \frac{g^{\mu\lambda}}{4} F^{\nu\rho} F_{\nu\rho} \right) \quad (52)$$

Il tensore $T^{\mu\nu}$ è comunemente detto tensores energia impulso del campo elettromagnetico, in analogia con quello introdotto in fluidodinamica. Analizzandone le componenti, vedremo ora che questa denominazione è giustificata.

Abbiamo infatti ponendo $\mu = \nu = 0$

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{4\pi} \left(F^{0\nu} F_\nu^0 + \frac{1}{4} F^{\nu\rho} F_{\nu\rho} \right) = \frac{1}{4\pi} \left(F^{0\nu} g_{\nu\nu'} F^{\nu'0} + \frac{1}{4} F^{\nu\rho} g_{\nu\nu'} g_{\rho\rho'} F^{\nu'\rho'} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \frac{1}{4} (-2E_1^2 - 2E_2^2 - 2E_3^2 + 2H_1^2 + 2H_2^2 + 2H_3^2) \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[E^2 + \frac{1}{2} (H^2 - E^2) \right] = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) \end{aligned} \quad (53)$$

che come si sa è la densità di energia del campo elettromagnetico.

Consideriamo ora un volume V (dello spazio ordinario a tre dimensioni) in cui

sia $s^\mu = 0$, ossia in cui non vi siano né cariche né correnti; in questo volume abbiamo:

$$\tilde{f}^\mu = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (54)$$

in particolare: $\frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu} = 0$.

Integrando in dV la (54) si ha:

$$0 = \int_V \frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu} dV = \int_V \frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} dV + \int_V \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} dV$$

cioè, chiamando \bar{P} il vettore di componenti cT^{0i} si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_V T^{00} dV = -c \int_\sigma (T^{0i}) \cdot \bar{n} d\sigma = - \int_\sigma \bar{P} \cdot \bar{n} d\sigma \quad (55)$$

Il primo membro della (55) rappresenta la derivata rispetto al tempo dell'energia totale contenuta nel volume V . Questa è uguale (per il secondo membro della (55)) all'opposto del flusso del vettore \bar{P} attraverso la superficie che delimita il volume. T^{0i} rappresenta pertanto, a meno di una costante moltiplicativa la densità di corrente di energia. A \bar{P} si dà il nome di vettore di Poynting, esso è di notevole importanza nella teoria dell'irraggiamento di onde elettromagnetiche. Ne diamo qui le componenti, che si ottengono facilmente* dall'espressione di $T^{\mu\nu}$ (52).

$$\begin{aligned} P_1 &= cT^{01} = \frac{c}{4\pi} (E_2 H_3 - E_3 H_2) \\ P_2 &= cT^{02} = \frac{c}{4\pi} (E_3 H_1 - E_1 H_3) \\ P_3 &= cT^{03} = \frac{c}{4\pi} (E_1 H_2 - E_2 H_1) \end{aligned}$$

cioè:

$$\bar{P} = \frac{c}{4\pi} (\bar{E} \times \bar{H}). \quad (56)$$

Dimostriamo ora che, nell'ipotesi che non ci siano cariche che interagiscono col campo, la quaterna di numeri:

$$cP^\mu = \left(\int_V T^{00} dV, \int_V T^{i0} dV \right) \quad (57)$$

(dove per V si intende la regione dello spazio al di fuori della quale il campo è trascurabile) è un quadrvettore.

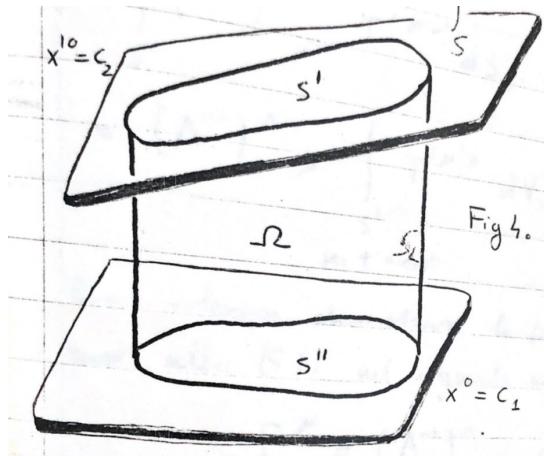
Applicando l'estensione a 4 dimensioni del teorema di Gauss abbiamo:

* fatelo per esercizio.

$$0 = \int_{\Omega} \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} d\Omega = \int_S T^{\mu\nu} dS_\nu \quad (58)$$

dove Ω è la regione di cronotopo delimitata dagli iperpiani di equazione $x^0 = c_1$ e $x'^0 = c_2$ (x'^0 deriva da una trasformazione di Lorentz, la situazione è analoga a quella della Fig 1) e da una ipersuperficie S_L che si trova già interamente nella zona in cui il campo è trascurabile. La (58) si può scrivere:

$$0 = \int_{S''} T^{\mu\nu} dS_\nu + \int_{S'} T^{\mu\nu} dS_\nu + \int_{S_L} T^{\mu\nu} dS_\nu \quad (59)$$



L'ultimo integrale nella (59) è, come si è detto, trascurabile.
Procedendo come nel § XIII 1 si ha:

$$0 = \int_{S''} T^{\mu 0} dS_0 + \int_{S'} T^{\mu\nu} dS_\nu = - \int_{S''} T^{\mu 0} dV_3 + \int_{S'} T^{\mu\nu} dS_\nu$$

cioè:

$$\begin{aligned} & \int_{S''} T^{\mu 0} dV_3 = \int_{S'} T^{\mu\nu} dS_\nu = \\ &= \int_{S'} (\Lambda^{-1})^\mu_{\mu'} (\Lambda^{-1})^\nu_{\nu'} T'^{\mu'\nu'} (\Lambda)^\nu_{\nu'} dS'_{\nu'} = \\ &= \int_{S'} (\Lambda^{-1})^\mu_{\mu'} T'^{\mu'\nu'} dS'_{\nu'} = (\Lambda^{-1})^\mu_{\mu'} \int_{S'} T'^{\mu' 0} dS'_0 = \\ &= (\Lambda^{-1})^\mu_{\mu'} \int_{S'} (\text{per } t'=\text{cost}) T'^{\mu' 0} dV'_3. \end{aligned} \quad (59')$$

Come volevasi dimostrare la (59') può essere scritta in base alla (57) nel seguente modo

$$cP^\mu = (\Lambda^{-1})_{\mu'}^\mu cP'^{\mu'} \quad (60)$$

cioè cP^μ si trasforma sotto trasformazioni di Lorentz come un quadrivettore. Il fatto che P^μ è un quadrivettore la cui prima componente è, in ogni sistema di riferimento, il rapporto tra l'energia e la velocità della luce, implica che P^μ è il quadrivettore energia impulso del campo elettromagnetico.

Possiamo pertanto concludere che le componenti T^{i0} del tensore $T^{\mu\nu}$ rappresentano, a meno di una costante moltiplicativa, la densità di impulso. Si vede ancora facilmente che la restante parte del tensore $T^{\mu\nu}$ rappresenta, sempre a meno di costanti, la densità di corrente delle varie componenti dell'impulso. Perciò la struttura di $T^{\mu\nu}$ è identica a quella dell'omonimo tensore trattato in fluidodinamica (cap. XII).

Appendici

B

Covarianza della equazione delle onde sotto trasformazione di Lorentz

In questa appendice si dimostra che l'equazione*

$$\nabla^2 \varphi(x^\mu) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x^\mu) = 0 \quad (1)$$

dove $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$

non è invariante sotto trasformazioni speciali di Galileo, ma è invariante sotto trasformazioni speciali di Lorentz.

Supponiamo note le formule (2) (2') (3) (3')

Trasformazioni di Galileo

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y ; z' = z \end{cases} ; \quad \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2)$$

cioè:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2')$$

Trasformazioni di Lorentz

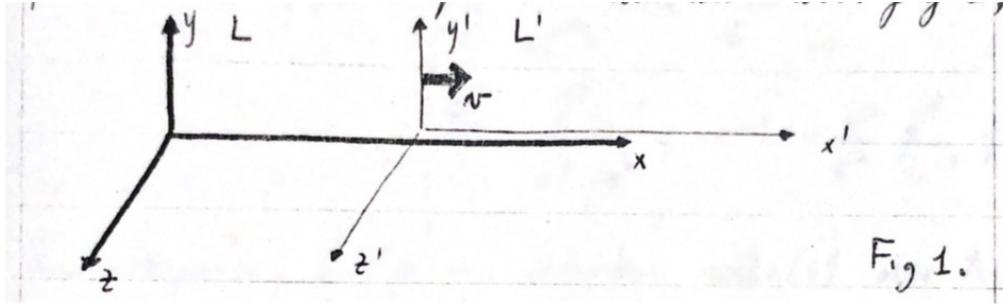
$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y ; z' = z \end{cases} ; \quad \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c^2} & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3)$$

cioè:

* $\varphi(x^\mu)$ può essere una qualsiasi componente di \overline{E} o di \overline{H} .

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c^2} & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3')$$

Supponiamo che la (1) sia valida nel s.r.i. L. Nel s.r.i. L', per la descrizione del quale rimandiamo alla fig 1,



sarà:

$$\varphi'(x'^\mu) = \varphi[x^\mu(x'^\nu)], \quad (4)$$

inoltre per la regola di derivazione delle funzioni di funzione è:

$$\frac{\partial \varphi'(x'^\alpha)}{\partial x^\nu} = \sum_\mu \frac{\partial \varphi'(x'^\alpha)}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (5)$$

Ciò posto esaminiamo separatamente i due casi:

a) Trasformazioni di Galileo

In L', usando (4) e (2') e abbreviando la notazione $[\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu]$, sarà operatorialmente:

$$\begin{aligned} \partial_0 &= \partial'_0 - v\partial'_1. \\ \partial_0^2 &= \partial_0\partial_0 = \partial'_0(\partial'_0 - v\partial'_1) - v\partial'_1(\partial'_0 - v\partial'_1) = \\ &\quad \partial'^2_0 - 2v\partial'_0\partial'_1 + v^2\partial'^2_1. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\partial_1^2 = \partial'^2_1 \quad ; \quad \partial_2^2 = \partial'^2_2 \quad ; \quad \partial_3^2 = \partial'^2_3 \quad (7)$$

Ponendo (6) e (7) nella (1) troviamo:

$$\partial'^2_1\varphi' + \partial'^2_2\varphi' + \partial'^2_3\varphi' - \frac{1}{c^2} [\partial'^2_0\varphi' - 2v\partial'_0\partial'_1\varphi' + v^2\partial'^2_1\varphi'] = 0$$

cioè:

$$\left[\nabla'^2 \varphi'(x'^\mu) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \varphi'(x'^\mu) \right] + \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} \varphi'(x'^\mu) - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \varphi'(x'^\mu) = 0 \quad (8)$$

La comparsa nel primo membro della (8) dei termini fuori della parentesi quadra, mostra la non covarianza sotto trasformazioni di Galileo della (1). Risulta così dimostrata la non covarianza sotto trasformazioni di Galileo delle equazioni di Maxwell da cui la (1) può essere dedotta.

b) Trasformazioni di Lorentz

In L' , usando (4) e (3') sarà operatorialmente:

$$\partial_0 = \partial'_0 \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} + \partial'_1 \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} = \gamma \partial'_0 - \gamma v \partial'_1$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \partial_0^2 &= \partial_0 \partial_0 = \gamma \partial'_0 (\gamma \partial'_0 - \gamma v \partial'_1) - \gamma v \partial'_1 (\gamma \partial'_0 - \gamma v \partial'_1) = \\ &= \gamma^2 \partial'^2_0 - 2\gamma^2 v \partial'_0 \partial'_1 + \gamma^2 v^2 \partial'^2_1 \end{aligned} \quad (9)$$

Inoltre:

$$\partial_1 = \partial'_0 \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} + \partial'_1 \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} = -\frac{v}{c^2} \gamma \partial'_0 + \gamma \partial'_1 ;$$

ovvero:

$$\partial_1^2 = \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \partial'^2_0 - 2\gamma^2 \frac{v}{c^2} \partial'_0 \partial'_1 + \gamma^2 \partial'^2_1 \quad (10)$$

Infine:

$$\partial_2^2 = \partial'^2_2 \quad ; \quad \partial_3^2 = \partial'^2_3 \quad (11)$$

Ponendo nella (1) le (9), (10), (11) abbiamo:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{c^2} \left(\gamma^2 \partial'^2_0 \varphi' - 2v\gamma^2 \partial'_0 \partial'_1 \varphi' + v^2 \gamma^2 \partial'^2_1 \varphi' \right) + \\ &+ \left(\frac{v^2 \gamma^2}{c^4} \partial'^2_0 \varphi' - 2\gamma^2 \frac{v}{c^2} \partial'_0 \partial'_1 \varphi' + \gamma^2 \partial'^2_1 \varphi' \right) + \\ &\quad + \partial'^2_2 \varphi' + \partial'^2_3 \varphi' = 0 \end{aligned}$$

Eseguendo qualche calcolo si ha:

$$\begin{aligned} &-\frac{\gamma^2}{c^2} \partial'^2_0 \varphi' - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \partial'^2_1 \varphi' + \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \partial'^2_0 \varphi' + \\ &\quad + \gamma^2 \partial'^2_1 \varphi' + \partial'^2_2 \varphi' + \partial'^2_3 \varphi' = 0 \end{aligned}$$

Raccogliendo opportunamente:

$$-\frac{\gamma^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \partial'^2_0 \varphi' + \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \partial'^2_1 \varphi' + \partial'^2_2 \varphi' + \partial'^2_3 \varphi' = 0$$

Infine essendo $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma^{-2}$ si ha:

$$-\frac{1}{c^2} \partial_0'^2 \varphi'(x'^\mu) + \partial_1'^2 \varphi'(x'^\mu) + \partial_2'^2 \varphi'(x'^\mu) + \partial_3'^2 \varphi'(x'^\mu) = 0$$

e tornando alle variabili t' , x' , y' , z' :

$$\nabla'^2 \varphi'(x'^\mu) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \varphi'(x'^\mu) = 0 \quad (12)$$

Come si vede, sotto le trasformazioni di Lorentz (3) la (1) si è trasformata in maniera covariante.

N.b. Noi siamo partiti dalle trasformazioni di Lorentz (3) per dimostrare la covarianza della (1) sotto di esse.

Si può, per esercizio, percorrere il cammino inverso (quello seguito da Lorentz); si può cioè cercare una trasformazione del tipo

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e determinarne i coefficienti a_{ij} incogniti imponendo la covarianza della (1).

Svolgimento

Con la condizione che $x'^1 = 0$ quando $x^1 = v/cx^0$
si trova $a_{10}/a_{11} = -v/c$ (*)

Dalla covarianza della (1) segue:

$a_{10}^2 - a_{00}^2 = -1$, $a_{11} - a_{00} = 0$, $a_{11}^2 - a_{10}^2 = 1$
che si riduce a: $a_{11} = a_{00}$, $a_{11}^2 - a_{10}^2 = 1$ e per la (*):

$$\begin{aligned} a_{00} &= a_{11} = \gamma \\ a_{10} &= -\frac{v}{c} \gamma \end{aligned}$$