



Università degli Studi di Cagliari  
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Fisica

## Appunti di Fisica Superiore

Prof. Piero Broveto

### L'Interazione elettromagnetica: Teoria classica

Anno Accademico 1975–1976

# Indice

<b>CAPITOLO 1. LE LEGGI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO.....</b>	<b>5</b>
1.1 Introduzione.....	5
1.2 Concetti fondamentali - Cariche e correnti.....	8
1.3 Azioni a distanza tra cariche elettriche.....	17
1.4 Il campo elettromagnetico.....	22
1.5 Azioni dinamiche sui dipoli.....	28
1.6 Le equazioni del campo.....	33
1.7 Le leggi di Laplace e di Coulomb .....	42
1.8 Potenziali elettromagnetici - Vettore di Hertz .....	50
1.9 Calcolo dei potenziali col metodo di Green .....	55
1.10 Potenziale e campo di alcune distribuzioni statiche di carica .....	63
1.11 Potenziale e campo del dipolo e del doppio strato elettrico.....	73
1.12 Legge di Biot e Savart - Principio di equivalenza .....	79
1.13 Sviluppo in serie di multipli del potenziale di una distribuzione di carica .....	91
 <b>CAPITOLO 2. PROPRIETÀ ENERGETICHE E INERZIALI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO.....</b>	 <b>102</b>
2.1 Il metodo variazionale – Potenziale di Schwarzschild.....	102
2.2 La lagrangiana elettromagnetica.....	108
2.3 L'energia del campo elettromagnetico. Il vettore di Poynting.....	113

2.4 Energia di un sistema stazionario di cariche e di correnti. Coefficienti di Induzione .....	119
2.5 Hamiltoniana meccanica ed elettromagnetica .....	126
2.6 Espressione dell'hamiltoniana meccanica mediante i momenti coniugati – Significato dei termini dipendenti dal campo magnetico .....	132
2.7 Il tensore degli sforzi elettromagnetici.....	143
2.8 Quantità di moto elettromagnetica. Pressione della radiazione .....	148
2.9 Momento angolare del campo elettromagnetico .....	156
 <b>CAPITOLO 3. ONDE ELETTROMAGNETICHE .....</b>	<b>162</b>
3.1 La propagazione delle onde elettromagnetiche – Onde piane .....	162
3.2 Polarizzazione .....	171
3.3 Integrazione dell'equazione delle onde per separazione delle variabili – Coordinate cartesiane.....	182
3.4 Integrazione per separazione delle variabili – Coordinate cilindriche .....	187
3.5 Integrazione per separazione delle variabili – Coordinate sferiche .....	193
3.6 Propagazione di onde a simmetria cilindrica .....	198
3.7 Onde quasi sinusoidali – Matrice di coerenza.....	205
3.8 I parametri di Stokes.....	215
3.9 Onde di forma arbitraria. Spettro di frequenze .....	221
3.10 Onde modulate.....	231
3.11 Fenomeni di interferenza .....	241
3.12 Irraggiamento di onde elettromagnetiche – Dipolo oscillante .....	253
3.13 Oscillazioni smorzate – Allargamento delle linee spettrali .....	262
3.14 Dipolo oscillante in presenza di un campo magnetico – Effetto Zeeman.....	269

3.15 Irraggiamento di un'antenna lineare .....	276
<b>CAPITOLO 9. APPENDICI MATEMATICHE .....</b>	<b>285</b>
9.2 Vettori ed operatori vettoriali .....	286
9.3 Equazioni relative ai vettori ed agli operatori vettoriali .....	299
9.4 Il teorema di Stokes .....	309
9.5 Serie di Fourier .....	314

# Capitolo 1. Le Leggi del campo elettromagnetico

## 1.1 Introduzione

Lo studio dei fenomeni elettromagnetici consiste nel determinare le azioni dinamiche fra cariche elettriche in movimento nello spazio vuoto. Questo problema generale può essere reso più definito considerando dei casi particolari la cui importanza può essere dovuta o al loro interesse pratico o anche soltanto alla semplicità che permette, eventualmente, di formularli come principi. Si possono considerare, ad esempio, dei sistemi di cariche in quiete o comunque tali che l'effetto del movimento sia trascurabile. Si avranno in questo caso delle azioni dinamiche di tipo elettrostatico che potranno essere attrattive o repulsive; storicamente lo studio dell'elettricità iniziò proprio da fenomeni di questo tipo. In base alla natura attrattiva o repulsiva delle azioni elettriche fu possibile a B. Franklin (1747) stabilire l'esistenza di due tipi di cariche di opposto segno; in seguito, nel 1785, C. A. Coulomb, mediante un'esperienza di grande accuratezza, dimostrò la sua celebre legge sulla dipendenza dell'azione elettrica dall'inverso del quadrato della distanza. D'altra parte, per certi insiemi contenenti cariche di entrambi i segni, può accadere che le azioni dinamiche si manifestino solo quando le cariche sono in movimento. Casi di questo genere intervengono quando si considerano dei conduttori metallici in cui esistono ioni positivi ed elettroni negativi. Per effetto della corrente elettrica, ossia del moto degli elettroni, i conduttori interagiscono con delle forze magnetiche la cui dipendenza dalla distanza è in relazione alla geometria dei conduttori stessi. Lo studio di queste forze venne iniziato nel 1820 da A. M. Ampère. Una situazione analoga la si riscontra nel fenomeno di induzione in cui una variazione nello stato di moto degli elettroni in un conduttore è ottenuta per effetto della variazione della velocità degli elettroni che ne percorrono un altro. Questo fenomeno, scoperto da J. Henry nel 1830, venne studiato in modo esauriente da M. Faraday (1831). Si deve tener conto, inoltre, che le modalità con cui le azioni dinamiche si manifestano, differiscono grandemente in relazione alla distanza fra le cariche elettriche. Precisamente, se la distanza fra due gruppi di cariche è considerevole la loro mutua interazione dipende sensibilmente dal tempo nel senso che essa si manifesta con un ritardo che diventa tanto più apprezzabile quanto più la distanza è grande. Una situazione di questo genere trova riscontro nel fenomeno della pro-

pagazione delle onde elettromagnetiche. Esse vennero previste, nel 1865, da J. C. Maxwell il quale fu il primo a costruire un soddisfacente schema teorico capace di riassumere tutti i fenomeni elettromagnetici; in seguito gli studi sperimentali di R. H. Hertz (1887) ne confermarono l'esistenza. La più importante conseguenza della teoria maxwelliana, però, fu la scoperta della natura elettromagnetica della luce. Fu così possibile utilizzare i fenomeni ottici per tentare di stabilire quale fosse il sistema di riferimento adatto ad esprimere le leggi elettromagnetiche nella forma data loro da Maxwell. Si pensava, infatti, che i fenomeni elettromagnetici non obbedissero al principio di relatività galileiano e fosse quindi possibile utilizzarli per determinare lo stato di quiete o di moto assoluto del sistema di riferimento. Dal fallimento di questi tentativi nacque, nel 1905, ad opera di A. Einstein, la teoria della relatività. Essa permise di esprimere le equazioni di Maxwell in modo più sintetico, inoltre rese necessarie delle modifiche alla meccanica newtoniana che condussero alla fondamentale scoperta dell'equivalenza tra la massa e l'energia.

Si deve, però, notare che le azioni dinamiche tra le cariche vengono modificate dalla presenza di materia neutra. Nelle applicazioni pratiche dell'elettromagnetismo si tiene conto di questo fatto rappresentando l'effetto del mezzo materiale mediante opportuni parametri fenomenologici, come la costante dielettrica e la permeabilità magnetica. Essi vengono inseriti nelle leggi elettromagnetiche alterandone la forma in relazione alle proprietà del mezzo. Ciò, tuttavia, non è necessario; la teoria atomica, infatti, ha dimostrato che la materia è, a sua volta, costituita da insiemi di cariche di opposto segno, cioè da nuclei atomici positivi e da elettroni negativi. Di conseguenza la presenza di materia non fa altro che aumentare il numero delle cariche elettriche di cui occorre tener conto. Benché ne risulti una notevole complicazione, si possono quindi usare, e senza alcuna modifica, le equazioni scritte per il vuoto; esse restano, pertanto, le più generali possibili. Questo modo di procedere, d'altra parte, è essenziale se si vuole arrivare a costruire una teoria elettromagnetica del mezzo materiale.

Quando si considerano i fenomeni elettromagnetici a scala atomica, tuttavia, occorre includere nelle leggi elettromagnetiche gli effetti quantistici. Essi vennero scoperti da M. Planck nel 1901 studiando lo spettro di emissione del corpo nero. L'ipotesi fondamentale introdotta da Planck fu che l'energia elettromagnetica varia per quanti, ossia per multipli interi della quantità:

$$w = h\nu, \quad (1.1.1)$$

in cui  $h$  è una costante universale ( $h = 6,6256 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$ ) e  $\nu$  la frequenza della radiazione elettromagnetica. Successive ricerche sperimentali, eseguite principalmente da A. Compton mediante l'emissione  $\gamma$  di sostanze radioattive, permisero di conclu-

dere che anche la quantità di moto elettromagnetica varia in modo discreto; ossia in modulo è multipla intera della quantità:

$$p = \frac{w}{c}, \quad (1.1.2)$$

dove  $w$  è data dalla (1.1.1) e  $c$  indica la velocità della luce ( $c = 2,99792 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ ). L'interpretazione di questi risultati condusse all'ipotesi che il campo elettromagnetico è costituito da particelle di massa nulla, dette fotoni, capaci di muovere con velocità  $c$ . Importantissimi a questo riguardo furono gli studi di A. Einstein. Parallelamente a queste ricerche N. Bohr (1911), studiando lo spettro dell'atomo di idrogeno (vedi paragrafo 5.1), considerò l'interazione tra il campo elettromagnetico e le cariche elettriche e dimostrò l'insufficienza delle leggi dell'elettrodinamica classica. Fu così manifesta la necessità di riformulare l'elettromagnetismo in modo da tenere conto anche degli effetti quantistici. Questa successiva evoluzione della teoria fu compiuta, dal 1927 al 1950, ad opera di vari ricercatori; basti ricordare, a questo riguardo, i nomi di P.A.M. Dirac, S. Tomonaga, J. Schwinger e R.P. Feynman.

Naturalmente la teoria quantistica applicata alle cariche contenute in un grande numero di atomi, dà, come del resto ci si deve attendere, gli stessi risultati di quella classica. Tuttavia, anche in casi in cui intervengono pochi atomi, non sempre è necessario usare le leggi quantistiche. In altre parole molti fenomeni elettromagnetici a scala atomica rimangono, sia pure con una certa approssimazione, di tipo classico. D'altra parte una delle principali difficoltà della teoria classica, cioè l'interpretazione della struttura dell'elettrone, non è stata superata dalla teoria quantistica la quale semplicemente evita di considerare l'argomento. Si può concludere pertanto che, limitatamente a certe questioni, l'interesse di uno studio classico dell'elettromagnetismo è tuttora altrettanto attuale di quello quantistico anche per quanto riguarda le proprietà della materia.

## 1.2 Concetti fondamentali - Cariche e correnti

È essenziale, per iniziare il nostro studio, chiarire cosa si intenda esattamente per carica elettrica. Per far questo consideriamo un sistema meccanico costituito da oggetti materiali di natura arbitraria. Esiste uno stato di questi oggetti in cui essi interagiscono con le forze che possono essere attrattive o repulsive e che dipendono inoltre dalla velocità. Simili forze, di tipo assolutamente diverso da quelle gravitazionali di cui sono molto più intense, sono le forze elettromagnetiche. Esse sono dovute all'associazione degli oggetti in questione con enti fisici detti appunto cariche elettriche. È possibile stabilire, nel seguente modo, un criterio per confrontare, e quindi misurare, le cariche elettriche. Due cariche elettriche sono eguali quando sottoposte, nelle stesse condizioni di quiete, o di moto, all'azione di uno o più oggetti carichi esse risultano sollecitate da eguali forze. Parimenti saranno eguali in modulo ma opposte di segno se le forze risultano eguali e contrarie; inoltre se la forza cui è sottoposta una delle cariche è doppia o tripla di quella cui è sottoposta l'altra anche la carica sarà doppia o tripla e così via. Questo criterio è strettamente analogo a quello comunemente usato in pratica per il confronto delle masse. Si assume, infatti, che due masse sono eguali quando, a parità di condizioni, subiscono la stessa azione gravitazionale da parte della massa terrestre e che il rapporto delle masse è pari al rapporto delle forze gravitazionali, determinate, ad esempio, mediante un dinamometro.

Il precedente criterio permise a Millikan di dimostrare, mediante una celebre esperienza, l'esistenza dell'elettrone, cioè di una carica elettrica elementare di cui tutte le altre sono multiple intere. Ecco in cosa consiste l'esperienza di Millikan. Delle piccolissime goccioline sferiche di olio (del diametro di circa  $10^{-3} \div 10^{-4} \text{ cm}$ ) sono insufflate con uno spruzzatore, tra le armature di un condensatore piano, cioè un dispositivo formato da due piatti metallici sui quali vi sono delle cariche di segno opposto (vedi fig. (1.2.1)). Le goccioline, per effetto dell'attrito con l'aria, si elettrizzano debolmente e vengono così sottoposte all'azione di forze che ne alterano la velocità di caduta. Un opportuno microscopio, dotato di reticolo, consente di misurare la velocità

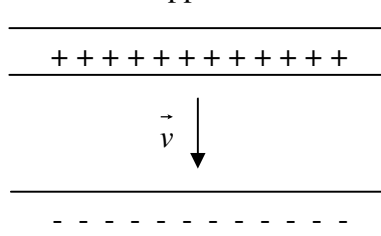


Fig. (1.2.1)

delle goccioline e di risalire, così, alle forze che agiscono su di esse. Per far ciò, si elimina momentaneamente l'effetto del condensatore (per esempio allontanandolo) e si osserva la caduta libera di una gocciolina. Essa è sottoposta al proprio peso ed è ostacolata a muoversi dalla resistenza di attrito dell'aria. Quest'ultima, quando la gocciolina ha acquistato una sufficiente velocità di caduta, il che avviene pressoché immediatamente, eguaglia in modulo la forza peso, cosicché il moto diventa uniforme. Ora la forza di



attrito  $\vec{f}_a$  che una sfera di raggio  $r$  incontra nel muoversi con velocità  $\vec{v}$  in un fluido di viscosità  $\eta$  (nel nostro caso, appunto, l'aria) è, per la legge di Stokes:

$$\vec{f}_a = -6\pi\eta\vec{v}r. \quad (1.2.1)$$

Dall'equazione:

$$m\vec{g} + \vec{f}_a = 0 \quad (1.2.2)$$

e cioè:

$$m\vec{g} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \vec{g} = 6\pi\eta\vec{v}r \quad (1.2.3)$$

in cui  $m$  è la massa della gocciolina,  $\rho$  la densità dell'olio e  $\vec{g}$  l'accelerazione di gravità, si ottiene subito, misurando  $\vec{v}$ , il raggio e quindi il peso della gocciolina. Quando l'effetto del condensatore viene ripristinato, la velocità della gocciolina risulta, in generale, variata, anzi può accadere che essa cambi segno. Anche questa volta le forze si equilibrano immediatamente, con il che il moto ancora diventa uniforme. Possiamo perciò scrivere:

$$\vec{f}_c + m\vec{g} - 6\pi\eta\vec{v}'r = 0 \quad (1.2.4)$$

dove  $\vec{v}'$  è la nuova velocità della gocciolina e  $\vec{f}_c$  è la forza dovuta alla sua carica; essa, essendo noti tutti i parametri che compaiono nella (1.2.4), può essere così determinata. È importante rilevare che, nelle condizioni sperimentali testé descritte, non si riscontra nessun effetto dovuto alla velocità delle goccioline la quale, peraltro, è molto piccola (dell'ordine dei millimetri per minuto). Sta di fatto che Millikan, osservando sistematicamente parecchie goccioline, constatò che le forze che agivano su di esse erano tutte multiple intere di una forza minima, cui ovviamente era da associare la carica di un elettrone.

Si potrebbe pensare, in astratto, di prendere come unità di misura delle cariche la carica dell'elettrone la quale, per quanto piccola, è resa tuttavia accessibile dall'esperienza di Millikan. Ciò però non sarebbe pratico, per cui nel sistema C.G.S. si usa una carica unitaria pari a  $2,082 \cdot 10^9$  cariche elettroniche; nel sistema M.K.S. una carica  $3 \cdot 10^9$  volte maggiore, cioè il Coulomb pari quindi a  $6,246 \cdot 10^{18}$  cariche e-

lettroniche. Il sistema C.G.S., inoltre, assegna alla carica elettrica delle dimensioni esprimibili in masse, lunghezze e tempi attraverso le leggi delle azioni dinamiche tra le cariche, mentre il sistema M.K.S. usa una quarta grandezza fondamentale che, sovente, viene presa coincidente con la carica elettrica. Un'altra unità, di uso però meno comune, è il Farad pari al prodotto fra il numero di Avogadro, cioè  $6,0225 \cdot 10^{23}$ , e la carica elettronica; esso corrisponde a 96487 Coulomb. Torneremo in seguito su questo argomento per giustificare le ragioni di queste scelte. Del tutto arbitraria è, invece, la convenzione per i segni delle cariche che attribuisce il segno negativo alla carica dell'elettrone.

Finora abbiamo considerato degli oggetti materiali carichi senza preoccuparci del rapporto fra le rispettive quantità di carica e di materia associate. In effetti da un punto di vista macroscopico questo rapporto non è soggetto ad alcuna restrizione che non sia dovuta a ragioni contingenti. La teoria atomica, invece, distingue tre tipi di particelle in cui la materia o per meglio dire la massa è in vario grado associata alla carica; esse sono il neutrone di massa  $1,67482 \cdot 10^{-24} g$  e carica nulla, il protone di massa  $1,67252 \cdot 10^{-24} g$  e carica positiva uguale a quella dell'elettrone, il quale ultimo ha una massa di soli  $9,10909 \cdot 10^{-28} g$ . Esistono inoltre varie altre particelle di masse differenti, esse però non ci interessano in quanto altamente instabili.

Stabilito così il concetto di carica elettrica, occupiamoci della distribuzione spaziale delle cariche. Si constata, in generale, che la carica contenuta in una data regione dello spazio è funzione del suo volume; ossia ad un elemento di volume  $dV$  si può associare una carica  $dq$  mediante la relazione:

$$dq = \rho dV \quad (1.2.5)$$

dove  $\rho$ , cioè la densità di carica, è di solito una funzione del posto ed anche eventualmente del tempo. La carica contenuta in una regione di volume  $V$  risulta pertanto:

$$q = \int_V \rho dV . \quad (1.2.6)$$

Tenendo conto della struttura atomica della materia, possiamo scrivere, in luogo dell'equazione (1.2.6):

$$q = \sum_{i=1}^{n(V)} q_i . \quad (1.2.7)$$

La (1.2.7) significa che la carica considerata è costituita da  $n(V)$  cariche elementari  $q_i$  appartenenti agli elettroni ed agli ioni positivi, oppure ai nuclei atomici, della materia contenuta nel volume  $V$ . Scegliendo, anziché  $V$ , un volume  $\Delta V$  abbastanza piccolo, la densità di carica nel suo punto centrale può essere assunta eguale alla densità media; possiamo cioè porre:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n(V)} q_i}{\Delta V}. \quad (1.2.8)$$

Ciò richiede però che, anche quando  $V$  è molto piccolo,  $n(V)$  sia grande abbastanza da poter ritenere continua la distribuzione di carica. In pratica ciò accade quasi sempre; il numero di cariche presenti nella materia è, infatti, molto elevato essendo il suo ordine di grandezza compreso fra  $10^{17} / \text{mm}^3$ , per i gas in condizioni normali di temperatura e pressione, e  $10^{22} / \text{mm}^3$ , per le sostanze solide. Si badi però che nella (1.2.7) e (1.2.8) intervengono cariche  $q_i$  di segno opposto le quali, per un oggetto materiale macroscopico, si compensano di regola quasi esattamente. L'eccesso di una carica, positiva o negativa, su  $10^{11} \div 10^{12}$  cariche dei due segni corrisponde già ai massimi possibili valori di  $\rho$ . Ciò è dovuto al fatto che un sensibile eccesso di carica, positivo o negativo, darebbe luogo a delle forze repulsive così intense da vincere la coesione della materia di cui è costituito l'oggetto.

Tuttavia, utilizzando una speciale funzione discontinua dovuta a Dirac, è possibile estendere il concetto di densità di carica anche a distribuzioni discrete, contenenti un numero di cariche arbitrariamente piccolo. Consideriamo, a questo scopo, la cosiddetta funzione  $\delta$  tridimensionale; essa, data una funzione arbitraria del posto  $f(P)$ , è definita dalla relazione:

$$\int_V f(P) \delta(P - P_i) dV = f(P_i) \quad (1.2.9)$$

e in particolare:

$$\int_V \delta(P - P_i) dV = 1. \quad (1.2.10)$$

Sostanzialmente  $\delta(P - P_i)$  è una funzione nulla dappertutto, tranne nel punto  $P_i$  dove, pur soddisfacendo la condizione (1.2.10), assume un valore infinito. Poniamo, come definizione di  $\rho$ :

$$\rho(P) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(P - P_i); \quad (1.2.11)$$

da essa risulta subito, integrando su  $V$ , che la (1.2.6) è verificata e la carica totale  $q$  assume il valore (1.2.7) indipendentemente da ogni restrizione sul valore di  $N$ . La (1.2.11) esprime pertanto, nel modo più generale, la relazione tra  $\rho$  e la distribuzione delle cariche  $q_i$ .

Al moto delle cariche possiamo associare un vettore  $\vec{j}$ , detto densità di corrente, mediante le seguenti due relazioni:

$$\vec{j} = \frac{\sum_{i=1}^{n(\Delta V)} q_i \vec{v}_i}{\Delta V} \quad (1.2.12)$$

e:

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i \delta(P - P_i) \quad (1.2.13)$$

dove  $\vec{v}_i$  è la velocità dell' $i$ -esima carica. La prima, analogamente alla (1.2.8), corrisponde al caso della distribuzione continua; la seconda, analogamente alla (1.2.11), è del tutto generale. Introducendo la seguente definizione della velocità media delle  $n(\Delta V)$  cariche:

$$\vec{v} = \frac{\sum_{i=1}^{n(\Delta V)} q_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n(\Delta V)} q_i} \quad (1.2.14)$$

e ricordando la (1.2.8), possiamo scrivere:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (1.2.15)$$

La generalizzazione della (1.2.14) al caso della distribuzione discreta è banale;  $\vec{v}$ , in questo caso, può essere calcolato sostituendo le (1.2.14) e (1.2.13) nella (1.2.15). Si deve notare, riguardo l'equazione (1.2.14), che il rapporto tra la velocità media  $\vec{v}$  e le velocità  $\vec{v}_i$  delle singole cariche può essere diversissimo a seconda dei casi. Nei raggi catodici, ad esempio,  $\vec{v}$  coincide praticamente con le velocità dei singoli elettroni; gli elettroni di conduzione di un metallo, invece, posseggono delle velocità che raggiungono i  $10^8 \text{ cm/s}$  contro una velocità media, dovuta al passaggio della corrente, dell'ordine di soli  $10^{-2} \text{ cm/s}$ .

Poiché in generale  $\rho$  e  $\vec{v}$  sono delle funzioni del posto e del tempo, tale risulta anche  $\vec{j}$ ; esso costituisce quindi un campo vettoriale. Analogamente a quanto si fa nello studio della meccanica, è utile rappresentare il campo del vettore  $\vec{j}$ , come d'altra parte quello di qualsiasi altro vettore elettrico, mediante le cosiddette linee di flusso. Esse sono definite come le linee tangenti in ogni loro punto al vettore considerato. Il fascio di linee di flusso che attraversano una data superficie  $S$ , vedi fig. (1.2.2), prende il nome di tubo di flusso. Il numero di linee di flusso che attraversano

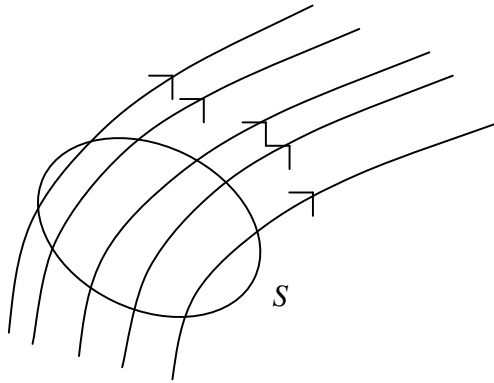


Fig. (1.2.2)

ortogonalmente una superficie di area unitaria viene assunto proporzionale alla misura di  $\vec{j}$ . Si ottiene in questo modo una descrizione geometrica del campo vettoriale capace di rappresentare tutte le proprietà. La quantità scalare intensità di corrente attraverso una superficie  $S$  è data, per definizione, dal flusso di  $\vec{j}$  attraverso ad  $S$ , cioè:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS . \quad (1.2.16)$$

dove  $\vec{n}$  indica la normale, arbitrariamente orientata, alla superficie  $S$ . Il significato fisico del vettore densità di corrente è di per sé ovvio. Esso rappresenta la densità di carica che fluisce per unità di tempo attraverso una superficie unitaria normale a  $\vec{v}$ . Così pure  $I$  rappresenta la quantità di carica che fluisce per unità di tempo attraverso la superficie  $S$ .

Quando la densità di corrente è dappertutto nulla salvo entro il volume di un tubo di flusso estremamente sottile e lungo, è utile scrivere una relazione tra  $\vec{j}$  ed  $I$  che ci permetta di eseguire l'integrale di volume su  $\vec{j}$  mediante un'integrazione sulla lunghezza del volume stesso. Per far ciò consideriamo, vedi fig. (1.2.3), un elemento  $dV$  del volume tubiforme di lunghezza  $d\vec{l}$  e di base  $dS$ . Dalla (1.2.16) risulta che

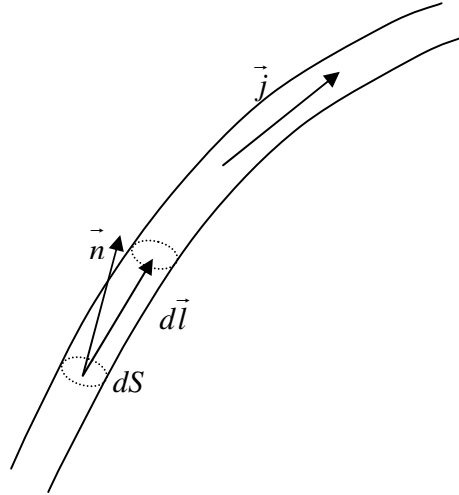


Fig. (1.2.3)

l'intensità di corrente attraverso la sezione  $dS$  di questo volume è:

$$dI = \vec{j} \cdot \vec{n} dS. \quad (1.2.17)$$

Essendo, per la definizione di tubo di flusso, i vettori  $\vec{j}$  e  $d\vec{l}$  paralleli, si ha:

$$\vec{j} \cdot \vec{n} d\vec{l} = d\vec{l} \cdot \vec{n} \vec{j} \quad (1.2.18)$$

da cui si ottiene:

$$dI \, d\vec{l} = d\vec{l} \cdot \vec{n} \, \vec{j} \, dS = \vec{j} \, dV \quad (1.2.19)$$

che è la relazione richiesta. Se  $\vec{j}$  è abbastanza grande che l'intensità di corrente attraverso  $dS$  possa essere considerata, nella (1.2.17), una quantità finita si può scrivere semplicemente:

$$I \, d\vec{l} = \vec{j} \, dV . \quad (1.2.20)$$

È interessante notare che il vettore  $\vec{j}$ , e quindi anche l'intensità di corrente  $I$ , sono sostanzialmente delle quantità discrete in quanto dipendono dalla presenza di un numero intero di cariche elettroniche. Di conseguenza, misurando correnti di debolissima intensità, ci si deve aspettare che  $I$  subisca delle fluttuazioni tanto più sensibili quanto più il suo valore è piccolo. Un effetto di questo genere venne osservato da W. Schottky nel 1918; in seguito si riuscì a rendere lo studio del fenomeno abbastanza quantitativo da poterlo utilizzare per valutare la carica dell'elettrone.

È possibile stabilire una fondamentale relazione tra densità di corrente e densità di carica. A tal fine consideriamo una superficie chiusa  $S$  contenente un volume  $V$ . Indichiamo con  $\vec{n}$  la normale ad  $S$  rivolta all'esterno; la carica  $dq$  che esce nel tempo  $dt$  da  $S$  è data dalla relazione:

$$dq = Idt = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS \, dt . \quad (1.2.21)$$

D'altra parte la diminuzione di carica in  $V$  è, ricordando la (1.2.6):

$$dq = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dt \, dV . \quad (1.2.22)$$

Applicando il teorema della divergenza la (1.2.21) diventa:

$$dq = dt \int_V \text{div} \vec{j} \, dV . \quad (1.2.23)$$

Eguagliando la diminuzione di carica in  $V$  con la carica uscita attraverso  $S$  e cioè le due espressioni (1.2.22) e (1.2.23) di  $dq$ , si ottiene:

$$\int_V \left( \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (1.2.24)$$

A causa dell'arbitrarietà del volume  $V$ , l'annullarsi dell'integrale implica ovviamente che sia nullo l'integrando; si ha quindi:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.2.25)$$

Questa equazione, detta di continuità, esprime la legge di conservazione della carica.



### 1.3 Azioni a distanza tra cariche elettriche

Nel precedente paragrafo abbiamo definito le cariche elettriche utilizzando le azioni dinamiche con cui esse si influenzano. Ciò non ha, tuttavia, richiesto lo studio dettagliato delle forze che agiscono sulle cariche; ci occupiamo ora, pertanto, di questo fondamentale argomento. Consideriamo, nello spazio vuoto, due cariche  $q_1$  e  $q_2$  in quiete nei punti  $P_1$  e  $P_2$  situati alla distanza  $r_{12}$ : l'esperienza dimostra che la forza con cui la carica  $q_1$  agisce sulla carica  $q_2$  è data dalla legge di Coulomb:

$$\vec{f}_{12}' = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} (P_2 - P_1). \quad (1.3.1)$$

L'equazione (1.3.1) è espressa mediante le unità C.G.S.; ossia si è assunta in essa una carica unitaria pari a  $2,082 \cdot 10^9$  cariche elettroniche; questa scelta implica che due cariche unitarie si respingano alla distanza di un centimetro con la forza di una dina.

L'espressione (1.3.1) della legge di Coulomb, non comparando in essa alcuna costante, può venire usata per esprimere in termini di centimetri, grammi e secondi le dimensioni delle cariche elettriche. La forza con cui  $q_2$  agisce su  $q_1$  è analogamente:

$$\vec{f}_{21}' = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} (P_1 - P_2). \quad (1.3.2)$$

Le forze  $\vec{f}_{12}'$  e  $\vec{f}_{21}'$ , che possono essere attrattive o repulsive a seconda dei segni delle cariche, obbediscono al principio meccanico di azione e reazione. Esse infatti agiscono lungo la congiungente i punti  $P_1$  e  $P_2$  e sono uguali e contrarie. Supponiamo ora che le cariche  $q_1$  e  $q_2$  non siano in quiete ed indichiamone la velocità rispettivamente con  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ . Gli esperimenti di Ampère hanno dimostrato che la forza con cui la carica  $q_1$  agisce sulla carica  $q_2$  risulta variata; precisamente interviene, oltre a  $\vec{f}_{12}'$ , una forza:

$$\vec{f}_{12}'' = \frac{1}{c^2} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{v}_2 \wedge [\vec{v}_1 \wedge (P_2 - P_1)]. \quad (1.3.3)$$

In questa equazione  $c$  è una costante che dipende dalle unità di misura; nel sistema C.G.S. essa ha le dimensioni di una velocità e vale  $3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ . La forza  $\vec{f}_{12}''$  risulta quindi molto piccola rispetto a  $\vec{f}_{12}'$ ; il rapporto di queste forze, infatti, è minore o uguale a  $|\vec{v}_1| |\vec{v}_2| / c^2$  che, per velocità ordinarie, è un numero certamente molto piccolo rispetto all'unità. Analogamente si ha, scambiando  $q_1$  con  $q_2$ :

$$\vec{f}_{21}'' = \frac{1}{c^2} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{v}_1 \wedge [\vec{v}_2 \wedge (P_1 - P_2)]. \quad (1.3.4)$$

Si vede subito che le forze  $\vec{f}_{12}''$  e  $\vec{f}_{21}''$  non sono, in generale, eguali e contrarie. Si ha infatti, usando la formola per il doppio prodotto vettoriale (9.3.6):

$$\vec{f}_{12}'' + \vec{f}_{21}'' = \frac{1}{c^2} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \left\{ \vec{v}_1 [\vec{v}_2 \cdot (P_2 - P_1)] + \vec{v}_2 [\vec{v}_1 \cdot (P_1 - P_2)] \right\} \quad (1.3.5)$$

ossia:

$$\vec{f}_{12}'' + \vec{f}_{21}'' = \frac{1}{c^2} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} (P_2 - P_1) \wedge (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2). \quad (1.3.6)$$

Solo quando le velocità sono tra di loro parallele oppure entrambe ortogonali alla congiungente i punti  $P_1$  e  $P_2$  la somma delle forze è nulla e vale quindi il principio di azione e reazione. Rinunciare a questo principio, ovviamente, non è possibile senza negare la validità della meccanica newtoniana.

È importante osservare, tuttavia, che l'interazione tra le correnti che circolano lungo due tubi di flusso chiusi  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  non dà luogo a nessuna evidente violazione del terzo principio. Per dimostrare questo fatto consideriamo, vedi fig. (1.3.1), le cariche contenute nei volumi  $dV_1$  e  $dV_2$  corrispondenti agli elementi di lunghezza rispettivamente  $d\vec{l}_1$  e  $d\vec{l}_2$  di  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . La risultante delle forze in gioco vale in questo caso:

$$d^2 \vec{F}_{12} + d^2 \vec{F}_{21} = \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{n(dV_1)} \sum_{j=1}^{n(dV_2)} \frac{1}{r_{ij}^3} \left\{ q_i \vec{v}_i [q_j \vec{v}_j \cdot (P_j - P_i)] + q_j \vec{v}_j [q_i \vec{v}_i \cdot (P_i - P_j)] \right\} \quad (1.3.7)$$

dove  $i$  e  $j$  indicano le cariche contenute rispettivamente in  $dV_1$  e  $dV_2$  ed  $r_{ij}$  è il modulo della distanza  $P_i - P_j$ .

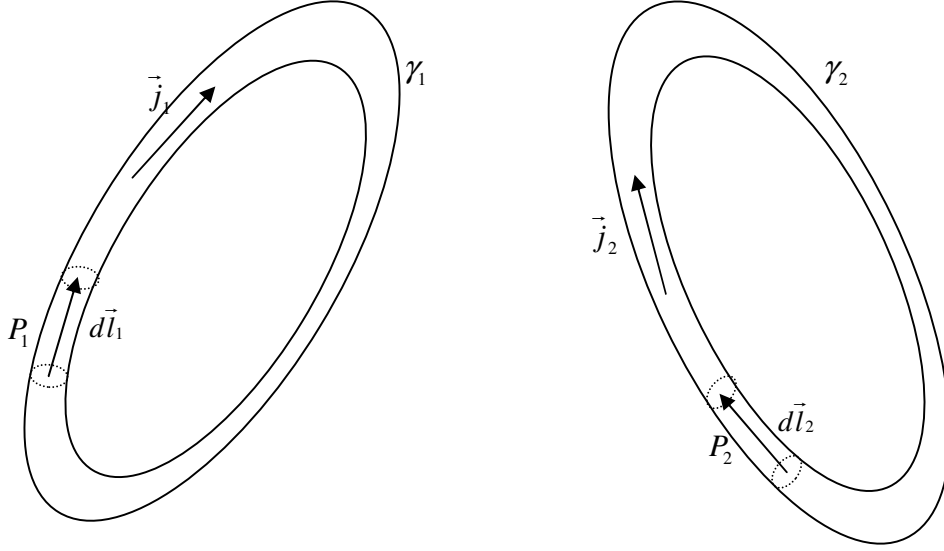


Fig. (1.3.1)

Se gli elementi di volume sono abbastanza piccoli da poter confondere i punti  $P_i$  col punto centrale  $P_1$  e analogamente il punto  $P_j$  con  $P_2$ , si ha:

$$d^2 \vec{F}_{12} + d^2 \vec{F}_{21} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{r_{12}^3} \sum_{i=1}^{n(dV_1)} \sum_{j=1}^{n(dV_2)} \left\{ q_i \vec{v}_i \left[ q_j \vec{v}_j \cdot (P_2 - P_1) \right] + q_j \vec{v}_j \left[ q_i \vec{v}_i \cdot (P_1 - P_2) \right] \right\}. \quad (1.3.8)$$

Dalla (1.2.12) otteniamo allora:

$$d^2 \vec{F}_{12} + d^2 \vec{F}_{21} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{r_{12}^3} \left\{ \vec{j}_1 \left[ \vec{j}_2 \cdot (P_2 - P_1) \right] + \vec{j}_2 \left[ \vec{j}_1 \cdot (P_1 - P_2) \right] \right\} dV_1 dV_2 \quad (1.3.9)$$

ossia, ricordando la (1.2.20):

$$d^2 \vec{F}_{12} + d^2 \vec{F}_{21} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{r_{12}^3} I_1 I_2 \left\{ d\vec{l}_1 \left[ d\vec{l}_2 \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \right] + d\vec{l}_2 \left[ d\vec{l}_1 \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \right] \right\}. \quad (1.3.10)$$

In queste equazioni  $\vec{j}_1, \vec{j}_2$  e  $I_1, I_2$  indicano rispettivamente le densità di corrente e le correnti che circolano in  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Per ricavare la forza totale basta ora integrare; supponendo le correnti solenoidali, e quindi costanti lungo tutto il percorso, si ha:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \frac{1}{c^2} I_1 I_2 \left\{ \oint_{\gamma_1} d\vec{l}_1 \oint_{\gamma_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)}{r_{12}^3} + \oint_{\gamma_2} d\vec{l}_2 \oint_{\gamma_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)}{r_{12}^3} \right\}. \quad (1.3.11)$$

D'altra parte, con successive trasformazioni, si ottiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)}{r_{12}^3} &= \oint_{\gamma_2} \frac{dP_2 \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)}{r_{12}^3} = \frac{1}{2} \oint_{\gamma_2} \frac{d(P_2 - P_1)^2}{r_{12}^3} = \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma_2} \frac{dr_{12}^2}{r_{12}^3} = \oint_{\gamma_2} \frac{dr_{12}}{r_{12}^2} = \oint_{\gamma_2} d\left(-\frac{1}{r_{12}}\right); \end{aligned}$$

una analoga relazione può essere scritta per l'integrale su  $\gamma_1$ . Poiché l'integrale su una linea chiusa di un differenziale è identicamente nullo, i due integrali su  $\gamma_2$  e  $\gamma_1$  che compaiono nella (1.3.11) e quindi anche la somma  $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}$  valgono zero. Ciò appunto è il risultato a cui si voleva arrivare. In altre parole, la somma dei contributi degli elementi di  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dà luogo ad una compensazione che rende apparentemente valido, per le forze ampèriane, il terzo principio della dinamica.

Ad analoghe conclusioni si potrebbe arrivare considerando il momento angolare risultante delle forze tra cariche elettriche in movimento. È tuttavia più importante segnalare un'altra fondamentale difficoltà che insorge nell'applicazione delle equazioni (1.3.3) e (1.3.4). Essa consiste nel fatto che le velocità  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  sono relative ad un dato sistema di riferimento. Non è affatto ovvio a priori che esso debba coincidere col sistema del laboratorio in cui si esegue l'esperienza. Considerazioni d'ordine generale rendono più plausibile che questo sistema debba coincidere col sistema assoluto della meccanica newtoniana solidale col sole e le stelle fisse. In questo caso, però, il moto della terra modificherebbe le forze ampèriane in quanto interverrebbe un contributo della velocità del laboratorio rispetto al sistema assoluto. Un'esperienza per osservare un effetto di questo tipo venne tentata da F. T. Troughton e H. R. Noble nel

1903, ma con esito negativo. Non possiamo, per ora, insistere su questo argomento che verrà sviluppato quando studieremo la teoria della relatività; quanto si è detto, tuttavia, è sufficiente a far capire che il problema dell'azione tra cariche elettriche in movimento va trattato in modo differente, rinunciando, in vista delle difficoltà che esse coinvolgono, a considerare le (1.3.3) e (1.3.4) come equazioni di partenza.

## 1.4 Il campo elettromagnetico

Allo scopo di superare le difficoltà incontrate nel precedente paragrafo si introduce il concetto di campo elettromagnetico, il quale, d'altra parte, è indispensabile per sviluppare estensivamente lo studio dei fenomeni elettrici. Esso consiste nell'attribuire la forza che agisce sulla carica  $q_1$  a degli opportuni campi vettoriali prodotti dalla carica  $q_2$ ; si evita così di dover considerare l'azione a distanza tra le cariche. Sorgono però i problemi di stabilire come il campo elettromagnetico agisca sulle cariche e come le cariche producano il campo. Occupiamoci, per ora, del primo problema; esso, tra l'altro, ci fornirà l'occasione di formulare rigorosamente la definizione di campo elettrico e di campo magnetico. Premettiamo che accettiamo senz'altro dalla dinamica l'equazione fondamentale:

$$\vec{f} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}; \quad (1.4.1)$$

essa ci permette di determinare la forza  $\vec{f}$  che agisce su un oggetto puntiforme di massa  $m$  attraverso la variazione della sua quantità di moto  $m\vec{v}$ .

Consideriamo, nello spazio vuoto, delle cariche elettriche in movimento; per studiare il campo elettromagnetico da esse prodotto all'istante  $t$  in un dato punto  $P$ , supponiamo che in questo punto, o quanto meno in uno stretto intorno con esso identificabile, vi siano, all'istante  $t$ , varie cariche puntiformi  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , che si muovono con velocità  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ . Un esempio pratico in cui questa situazione è realizzata lo si ottiene supponendo di collocare in  $P$ , mediante una sottile asticciola, un granellino di materiale radioattivo che emetta elettroni, positivi e negativi, e particelle  $\alpha$  (cioè nuclei di elio di carica pari a due cariche elettroniche). Si disporrà così di un insieme di cariche elettriche le cui velocità sono comprese tra zero e un certo valore massimo (vedi fig. (1.4.1)). L'asticciola col materiale radioattivo costituisce, come ora vedremo, una specie di sonda per determinare il campo elettromagnetico in  $P$ . Valutiamo, mediante la (1.4.1) le forze  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$  relative alle varie cariche considerando dapprima le forze  $\vec{f}_{e,i}$  che agiscono sulle cariche  $q_i$  in quiete all'istante  $t$ . L'esperienza dimostra che qualunque sia la carica  $q_i$ , purché abbastanza piccola, vale la legge:

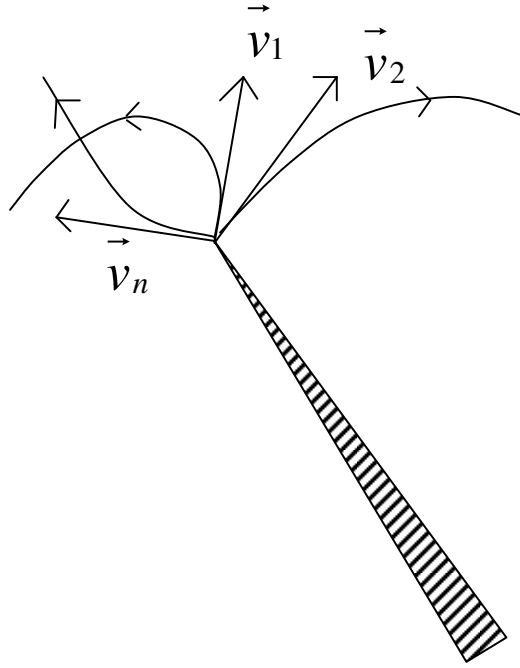


Fig. (1.4.1)

$$\frac{\vec{f}_{e,i}}{q_i} = \text{cost.} \quad (1.4.2)$$

Possiamo pertanto definire il vettore campo elettromagnetico  $\vec{E}$  mediante la relazione:

$$\alpha_e \frac{\vec{f}_{e,i}}{q_i} = \vec{E}(P, t), \quad (1.4.3)$$

dove  $\alpha_e$  è una costante dipendente dalle unità di misura. Nel sistema C.G.S.  $\alpha_e$  viene posta eguale a uno; in seguito vedremo quale valore essa assume nel sistema M.K.S. (vedi paragrafo 9.1). Possiamo anche scrivere, in unità C.G.S.:

$$\vec{f}_{e,i} = q_i \vec{E}(P, t). \quad (1.4.4)$$

Quando si osservano delle cariche in moto, però, la legge (1.4.2) non è più verificata. Determiniamo, sempre usando la (1.4.1), le forze  $\vec{f}_i$  che sollecitano queste cariche e consideriamo le differenze:

$$\vec{f}_{m,i} = \vec{f}_i - \vec{f}_{e,i}. \quad (1.4.5)$$

L'esperienza dimostra che vale, anche questa volta per cariche abbastanza piccole, la legge:

$$\frac{1}{q_i} \frac{\vec{f}_{m,i} \wedge \vec{f}_{m,j}}{\vec{v}_i \cdot \vec{f}_{m,j}} = \text{cost.} \quad (1.4.6)$$

Definiamo perciò il vettore campo magnetico mediante l'equazione:

$$\frac{\alpha_m}{q_i} \frac{\vec{f}_{m,i} \wedge \vec{f}_{m,j}}{\vec{v}_i \cdot \vec{f}_{m,j}} = \vec{H}(P, t), \quad (1.4.7)$$

dove, come prima,  $\alpha_m$  è una costante dipendente dalle unità di misura. Essa nel sistema C.G.S. viene scelta eguale a  $3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ , ossia viene identificata con la costante  $c$  dell'equazione (1.3.3). In questo modo le dimensioni di  $\vec{H}$  risultano (vedi paragrafo 9.1) eguali a quelle di  $\vec{E}$ ; alla unità di misura di  $\vec{H}$  nel sistema C.G.S. si dà il nome di *gauss*<sup>(†)</sup>. Il caso del sistema M.K.S. verrà trattato in seguito. È importante rilevare inoltre che il vettore  $\vec{H}$ , a differenza del vettore  $\vec{E}$ , non cambia segno invertendo gli assi spaziali; si tratta perciò di un vettore assiale (vedi paragrafo 9.2, equazione (9.2.40)). Nelle precedenti equazioni abbiamo dovuto supporre che le cariche fossero piccole, in quanto diversamente le (1.4.2) e (1.4.6) non sarebbero verificate. La ragione di ciò è ovvia; le cariche  $q_i$ , infatti, oltre a subire l'azione del campo elettromagnetico, lo generano esse stesse. Tuttavia delle cariche molto piccole certamente non

---

<sup>(†)</sup> Sovente l'unità di misura C.G.S. di  $\vec{H}$  viene indicata col nome di *oersted* per poter riservare il nome *gauss* alla unità di misura del vettore  $\vec{B}$  che verrà introdotto nel capitolo 5. Questa distinzione, tuttavia, è inopportuna, perchè *gauss* e *oersted* risultano dimensionalmente e numericamente identici. Noi pertanto usiamo solo il termine *gauss*.



riescono a produrre un campo apprezzabile che sovrapponendosi a quello localmente esistente in  $P$  ne alteri il valore.

Vogliamo ora ottenere un'espressione esplicita della forza dovuta al campo elettromagnetico. Moltiplichiamo vettorialmente la (1.4.7) per  $q_i \vec{v}_i$  ed usando la (9.3.6) si ha:

$$\frac{\alpha_m}{\vec{v}_i \cdot \vec{f}_{m,j}} \left[ (\vec{v}_i \cdot \vec{f}_{m,j}) \vec{f}_{m,i} - (\vec{v}_i \cdot \vec{f}_{m,i}) \vec{f}_{m,j} \right] = q_i \vec{v}_i \wedge \vec{H}(P, t). \quad (1.4.8)$$

D'altra parte, ricavando dalla (1.4.7) la quantità  $\vec{v}_i \cdot \vec{f}_{m,j}$  e ponendo nella sua espressione  $i = j$ , si trova:

$$\vec{v}_i \cdot \vec{f}_{m,i} = 0, \quad (1.4.9)$$

il che significa che la forza  $\vec{f}_{m,i}$  agisce trasversalmente alla traiettoria dell' $i$ -esima carica. Mediante questo risultato e usando le unità C.G.S. ( $\alpha_m = c$ ) la (1.4.8) diventa:

$$\vec{f}_{m,i} = \frac{q_i}{c} \vec{v}_i \wedge \vec{H}(P, t). \quad (1.4.10)$$

Di conseguenza, tenendo conto della (1.4.5), la forza totale che agisce su una carica in movimento risulta essere:

$$\vec{f}_i = q_i \vec{E} + \frac{q_i}{c} \vec{v}_i \wedge \vec{H}(P, t). \quad (1.4.11)$$

Questa relazione, data da H.A. Lorentz nel 1892, determina le azioni dinamiche del campo elettromagnetico. Si badi, però, che non è possibile risalire dalla forza di Lorentz al campo magnetico  $\vec{H}$ ; infatti, aggiungendo ad  $\vec{H}$  una componente parallela a  $\vec{v}_i$ , la forza  $\vec{f}_i$  non risulta alterata.

Per determinare il campo magnetico, è pertanto necessario considerare simultaneamente, come appunto si è fatto nella (1.4.8) le forze che agiscono su due differenti cariche.

Dalla (1.4.11) risulta subito che la parte magnetica della forza di Lorentz, a differenza della parte elettrica, non compie lavoro in quanto sempre trasversale alla velocità  $\vec{v}_i$ .

Supponiamo ora di avere una distribuzione di cariche abbastanza fitta da rendere opportuno l'uso del vettore  $\vec{j}$ . Come abbiamo visto nel paragrafo 1.2, questa situazione certamente si presenta quando si considera un mezzo materiale. Appliciamo la (1.4.11) al sistema di cariche; la risultante delle forze che agiscono su di esse è:

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^N \left( q_i \vec{E} + \frac{q_i}{c} \vec{v}_i \wedge \vec{H} \right) \quad (1.4.12)$$

dove  $N$  è il numero di cariche. Suddividiamo il volume in cui esse sono contenute in tanti volumetti  $\Delta V_j$ , l'equazione (1.4.12) può essere scritta nel seguente modo:

$$\vec{f} = \sum_{\Delta V_j} \sum_{i=1}^{n(\Delta V_j)} \left( q_i \vec{E} + \frac{q_i}{c} \vec{v}_i \wedge \vec{H} \right) \quad (1.4.13)$$

dove la somma su  $i$  è estesa a tutte le cariche contenute in  $\Delta V_j$ , mentre quella su  $\Delta V_j$  riguarda tutti i volumetti in cui abbiamo frazionato la distribuzione di carica. In questo modo la somma nella (1.4.13) risulta complessivamente estesa a tutte le  $N$  cariche come nell'equazione (1.4.12). Usando per il volumetto  $\Delta V_j$  le (1.2.8) e (1.2.12) e tenendo conto della definizione di integrale si ha:

$$\vec{f} = \sum_{\Delta V_j} \left( \rho \vec{E} + \frac{\vec{j}}{c} \wedge \vec{H} \right) \Delta V_j = \int_V \left( \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{H} \right) dV \quad (1.4.14)$$

la quale sostituisce la (1.4.12) nel caso di una distribuzione continua. Quando la corrente è limitata a un sottile tubo di flusso, è possibile trasformare ulteriormente la (1.4.14). Si ha, infatti, utilizzando la (1.2.20):

$$\vec{f} = \int_V \rho \vec{E} dV + \frac{1}{c} \int_{\gamma} I d\vec{l} \wedge \vec{H} \quad (1.4.15)$$

o ancora, supponendo  $\vec{j}$  solenoidali e quindi  $I$  costante lungo  $\gamma$ :

$$\vec{f} = \int_V \rho \vec{E} dV + \frac{I}{c} \int_\gamma d\vec{l} \wedge \vec{H}. \quad (1.4.16)$$

Quest'ultima espressione della forza di Lorentz è di particolare utilità per le applicazioni. È da segnalare infine che l'espressione della forza che agisce su un elemento  $d\vec{l}$  di  $\gamma$ , ossia:

$$d\vec{f} = \frac{I}{c} d\vec{l} \wedge \vec{H}, \quad (1.4.17)$$

Viene indicata, sovente, col nome di seconda legge elementare di Laplace.

## 1.5 Azioni dinamiche sui dipoli

Una prima importante applicazione delle equazioni (1.4.11) e (1.4.14) riguarda l'azione del campo elettromagnetico su due particolari distribuzioni di cariche e di correnti, che di frequente si incontrano nella pratica. Iniziamo dal caso delle cariche; precisamente consideriamo il sistema costituito da due cariche  $-q$  e  $+q$  collocate rispettivamente nei punti  $Q$  e  $Q + \Delta\vec{Q}$ . Supponiamo che al tendere a zero di  $\Delta\vec{Q}$  la carica  $q$  tenda ad infinito in modo che:

$$\lim_{\Delta\vec{Q} \rightarrow 0} q\Delta\vec{Q} = \vec{p}, \quad (1.5.1)$$

il sistema di cariche così ottenuto prende il nome di dipolo elettrico ed il vettore  $\vec{p}$  viene detto momento del dipolo. La forza che si esercita sulla carica  $q$  è, ricordando la (1.4.11):

$$\vec{f}_1 = q\vec{E}, \quad (1.5.2)$$

analogamente:

$$\vec{f}_2 = -q\vec{E}, \quad (1.5.3)$$

è la forza che agisce su  $-q$ . Evidentemente se il campo elettrico è dappertutto costante, o quanto meno sufficientemente omogeneo che la sua variazione nell'intervallo  $\Delta\vec{Q}$  possa essere trascurata, la risultante delle forze  $\vec{f}_1$  e  $\vec{f}_2$  è nulla.

Ciò non accade, tuttavia, per il momento risultante rispetto ad un'origine  $O$  arbitrariamente fissata. Si ha, infatti, indicando con  $\vec{T}$  questo momento:

$$\vec{T} = (Q + \Delta\vec{Q} - O) \wedge \vec{f}_1 + (Q - O) \wedge \vec{f}_2 \quad (1.5.4)$$

da cui, usando le (1.5.2) e (1.5.3):

$$\vec{T} = q\Delta\vec{Q} \wedge \vec{E}. \quad (1.5.5)$$

Passando al limite per  $\Delta\vec{Q}$  tendente a zero e ricordando la (1.5.1) si ha infine:

$$\vec{T} = \vec{p} \wedge \vec{E}. \quad (1.5.6)$$

Il momento risultante delle forze elettriche è dunque un vettore assiale indipendente dall'origine  $O$ ; esso è ortogonale sia a  $\vec{p}$  che a  $\vec{E}$ .

Ad un risultato analogo si arriva considerando l'azione di un campo magnetico omogeneo su una corrente solenoidale che circoli lungo un percorso chiuso  $\gamma$ . Dalla (1.4.17), integrando e tendo conto che  $I$  ed  $\vec{H}$  sono costanti lungo  $\gamma$  si ottiene:

$$\vec{f} = \frac{I}{c} \oint_{\gamma} d\vec{l} \wedge \vec{H} = 0; \quad (1.5.7)$$

ossia la risultante delle forze magnetiche che agiscono sull'intero circuito, allo stesso modo di quanto accadeva per il dipolo, è nulla. Il momento di  $d\vec{f}$ , rispetto ad una origine  $O$ , è:

$$d\vec{T} = (Q - O) \wedge \left( \frac{I}{c} d\vec{l} \wedge \vec{H} \right) \quad (1.5.8)$$

dove  $Q$  è il punto centrale di  $d\vec{l}$  (vedi fig. (1.5.1)). Il momento risultante vale pertanto:

$$\vec{T} = \frac{I}{c} \oint_{\gamma} (Q - O) \wedge (d\vec{l} \wedge \vec{H}) \quad (1.5.9)$$

ossia, applicando la formola per il doppio prodotto vettoriale (vedi equazione (9.3.6)):

$$\vec{T} = \frac{I}{c} \oint_{\gamma} (Q - O) \cdot \vec{H} d\vec{l} - \frac{I}{c} \oint_{\gamma} \vec{H} (Q - O) \cdot d\vec{l}. \quad (1.5.10)$$

Essendo il campo magnetico costante, il secondo integrale è nullo. Infatti mettendo  $\vec{H}$  in evidenza e usando il teorema di Stokes, si ha:

$$\oint_{\gamma} \vec{H} (Q - O) \cdot d\vec{l} = \vec{H} \oint_{\gamma} (Q - O) \cdot d\vec{l} = \vec{H} \int_S \text{rot}(Q - O) \cdot \vec{n} dS, \quad (1.5.11)$$

dove  $S$  è una superficie avente per orlo la linea  $\gamma$ ; tenendo conto che (vedi equazione (9.3.32)):

$$\text{rot}(Q-O) = 0, \quad (1.5.12)$$

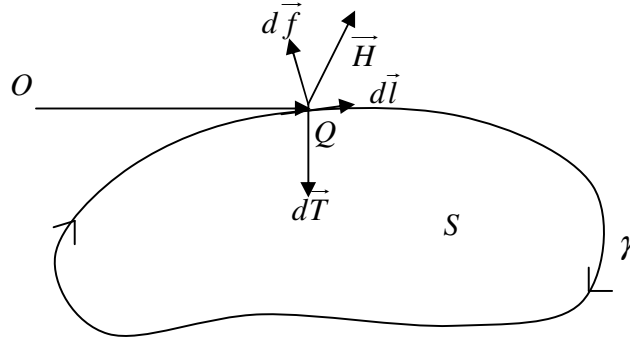


Fig. (1.5.1)

ne segue questo enunciato. Trasformiamo ora il primo integrale che compare nella (1.5.10) in integrale di superficie. Per far questo occorre applicare il teorema (9.3.42), tenendo conto delle (1.5.11), (1.5.12) otteniamo così:

$$\vec{T} = \frac{I}{c} \int_S \vec{n} \wedge \text{grad}[(Q-O) \cdot \vec{H}] dS. \quad (1.5.13)$$

Utilizzando, per esprimere il gradiente, la formola (9.3.13) si ha:

$$\begin{aligned} \vec{T} = \frac{I}{c} \int_S \vec{n} \wedge \{ & [(Q-O) \cdot \text{grad}] \vec{H} + (\vec{H} \cdot \text{grad})(Q-O) + \\ & + (Q-O) \wedge \text{rot} \vec{H} + \vec{H} \wedge \text{rot}(Q-O) \} dS. \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

Ricordando che  $\vec{H}$  è costante ed inserendo la (1.5.12), questa equazione si riduce a:

$$\vec{T} = \frac{I}{c} \int_S \vec{n} \wedge (\vec{H} \cdot \text{grad})(Q-O) dS. \quad (1.5.15)$$

D'altra parte osservando che, per la (9.3.29):

$$(\vec{H} \cdot \text{grad})(Q - O) = \vec{H} \quad (1.5.16)$$

e ricordando che nella (1.5.14) interviene la normale assiale, la (1.5.15) diventa infine:

$$\vec{T} = \left( \frac{I}{c} \int_S \vec{n} dS \right) \wedge \vec{H}. \quad (1.5.17)$$

Supponiamo ora che la linea  $\gamma$  si chiuda su se stessa riducendosi ad un punto e che, corrispondentemente, la corrente  $I$  aumenti in modo che:

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{I}{c} \int_S \vec{n} dS = \vec{m} \quad (1.5.18)$$

dove  $\vec{m}$  è un vettore assiale di modulo limitato. Il sistema di correnti così definito viene detto dipolo magnetico ed  $\vec{m}$  rappresenta il momento di dipolo. Mediante la (1.5.18) il momento torcente  $\vec{T}$  può essere scritto nella forma:

$$\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{H}; \quad (1.5.19)$$

data l'analogia tra questa relazione e la (1.5.6) resta giustificato il nome di dipolo magnetico scelto per indicare le correnti che circolano lungo il percorso  $\gamma$ .

Nel caso in cui non si possa assumere che la superficie racchiusa da  $\gamma$  tenda a zero, conviene introdurre la nozione di doppio strato magnetico. Precisamente ad ogni elemento della superficie  $S$  si associa un dipolo infinitesimo di momento:

$$d\vec{m} = \vec{\mathfrak{M}} dS \quad (1.5.20)$$

in cui il vettore assiale  $\vec{\mathfrak{M}}$ , detto potenza del doppio strato magnetico, è dato dalla relazione:

$$\vec{\mathfrak{M}} = \frac{I}{c} \vec{n}. \quad (1.5.21)$$

L'espressione del momento  $\vec{T}$  diventa in questo caso:

$$\vec{T} = \left( \int_S \vec{\mathcal{M}} dS \right) \wedge \vec{H} \quad (1.5.22)$$

che è paragonabile alla (1.5.19).

Questo risultato che, come vedremo in seguito, trova riscontro nelle proprietà del campo magnetico generato dalla corrente che circola lungo  $\gamma$ , prende il nome di teorema di equivalenza di Ampère<sup>(‡)</sup>.

---

<sup>(‡)</sup> Il teorema (o principio) di equivalenza di Ampère può essere così enunciato: “una spira piana percorsa da una corrente di intensità  $I$ , posta in un campo magnetico uniforme, è equivalente ad un dipolo di momento  $\vec{m} = \frac{I}{c} S \vec{n}$ ”. Nel caso di una spira infinitesima i risultati ottenuti per una spira piana sono validi per qualunque campo magnetico (uniforme o non uniforme), e il principio di equivalenza di Ampère assegna alla spira infinitesima un momento di dipolo  $d\vec{m} = \frac{I}{c} \vec{n} dS$  (vedi ad esempio F. Er-  
das - Lezioni di Fisica Generale – Univ. Cagliari – A.A. 1974-1975 – Parte III – Cap. 6). L'equivalenza si applica al momento torcente che agisce su di una spira percorsa da corrente per effetto di un campo magnetico esterno; come si vedrà più avanti, la legge è applicabile anche all'effetto magnetico delle correnti stazionarie [n.d.c.].



## 1.6 Le equazioni del campo

Occorre ora stabilire attraverso quali leggi le cariche agiscono come sorgenti del campo. A questo scopo supponiamo che nello spazio, vuoto da ogni mezzo materiale, vi siano delle cariche in movimento e siano  $\rho$  e  $\vec{j}$  le densità di carica e di corrente ad esse associate (vedi equazioni (1.2.11) e (1.2.13)). Le equazioni che determinano il campo elettromagnetico sono:

$$\text{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (1.6.1)$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho, \quad (1.6.2)$$

$$\text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \quad (1.6.3)$$

$$\text{div} \vec{H} = 0, \quad (1.6.4)$$

in esse si sono utilizzate le unità C.G.S. e  $c$  è la stessa costante che appare nella (1.3.3) e (1.4.10); in seguito (vedi paragrafo 9.1) vedremo quale forma esse assumono nel sistema M.K.S.. Queste equazioni costituiscono il postulato fondamentale dell'elettromagnetismo e, assieme alle espressioni (1.4.11) e (1.4.14) della forza di Lorentz, risolvono il problema del calcolo delle mutue azioni tra cariche in movimento. Le equazioni (1.6.1) e (1.6.3) vennero date nel 1865 da Maxwell. Le (1.6.2) e (1.6.4) sono più antiche; esse esprimono, in forma differenziale, la legge per il flusso rispettivamente del campo elettrico e del campo magnetico. Questa legge, nel caso elettrico, fu scritta per la prima volta da C. F. Gauss nel 1840. Attualmente si usa indicare col nome di equazioni di Maxwell l'intero gruppo delle (1.6.1) ÷ (1.6.4).

È importante notare che dalle equazioni (1.6.1) e (1.6.2) discende l'equazione di continuità (1.2.25). Infatti, ricordando che la divergenza di un rotore è identicamente nulla (vedi formola (9.3.18)) e commutando le derivate spaziali con quella temporale, si ha dalla (1.6.1):

$$\text{div} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{E} + 4\pi \text{div} \vec{j}, \quad (1.6.5)$$

ossia, usando la (1.6.2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0, \quad (1.6.6)$$

che coincide appunto con al (1.2.25).

Dalle equazioni (1.6.1)÷(1.6.4) possono essere dedotte immediatamente le leggi di Ampère sulla circuitazione di  $\vec{H}$ , di Faraday sull'induzione elettromagnetica e di Gauss sul flusso. Basta, per questo, dare alle suddette equazioni forma integrale. Consideriamo, infatti, una superficie  $S$  il cui contorno coincida con una linea chiusa  $\gamma$  e applichiamo alla (1.6.1), mediante questa superficie, il teorema di Stokes (vedi fig. (1.6.1)). Si ha:

$$\int_S \text{rot} \vec{H} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left( \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, dS, \quad (1.6.7)$$

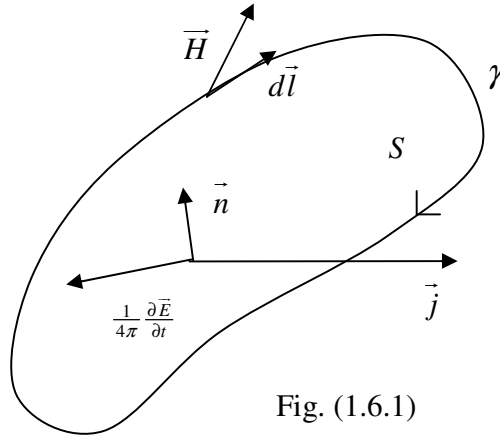


Fig. (1.6.1)

dove  $\vec{n}$  è il versore normale a  $S$ . La (1.6.7) è la relazione di Ampère sulla circuitazione del campo magnetico; in essa appare, però, oltre alla densità di corrente  $\vec{j}$ , anche il termine  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Esso venne introdotto da Maxwell per rendere valida l'equazione (1.6.1) nel caso non stazionario, quando cioè la densità di carica e di corrente variano nel tempo. In questo modo, anche quando  $\partial \rho / \partial t$  non è nullo, è garantita, come testé abbiamo verificato, la validità dell'equazione di continuità (1.2.25).

Il termine  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , che prende il nome di densità di corrente di spostamento, produce gli stessi effetti della ordinaria densità di corrente  $\vec{j}$ . Indicando con  $I_s$  la corrente di spostamento, cioè il flusso di  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , e ricordando la (1.2.16), possiamo scrivere:

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} (I + I_s) \quad (1.6.8)$$

che è la forma generale della legge della circuitazione di Ampère, in cui interviene la corrente elettrica totale (cioè la somma della corrente  $I$  dovuta al moto delle cariche e della corrente di spostamento  $I_s$ ). Essa, per il teorema di Stokes, ha segno positivo quando è diretta nel verso di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti intorno ad  $\vec{n}$ , nel senso in cui, nel valutare la circuitazione di  $\vec{H}$ , viene percorsa la linea  $\gamma$  (regola della vite, vedi paragrafo 9.3, fig. (9.3.1)).

Analogamente, applichiamo il teorema di Stokes alla (1.6.3); si ottiene:

$$\int_S \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = \frac{4\pi}{c} \int_S \left( -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS. \quad (1.6.9)$$

Ponendo:

$$\int_S \vec{H} \cdot \vec{n} dS = \Phi_{\vec{H}}, \quad (1.6.10)$$

la (1.6.9) diventa:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \left( \frac{d\Phi_{\vec{H}}}{dt} \right)_{\gamma=\text{cost}} \quad (1.6.11)$$

dove l'indicazione:  $\gamma=\text{cost}$  denota che la linea  $\gamma$  è fissa ed il flusso varia in quanto  $\vec{H}$  dipende dal tempo. La (1.6.11) è la legge di Faraday sull'induzione elettromagnetica; essa mette in relazione la circuitazione del campo elettrico (ossia la cosiddetta forza elettromotrice) con la variazione nel tempo del flusso magnetico  $\Phi_{\vec{H}}$ . Anche

questa volta il segno del termine a secondo membro, cioè di  $\frac{d\Phi_{\vec{H}}}{dt}$ , è dato dalla regola della vite.

Consideriamo ora l'equazione (1.6.2); integrandola membro a membro su un volume  $V$  e ricordando la (1.2.6) si ottiene.

$$\int_V \text{div} \vec{E} \, dV = 4\pi \int_V \rho \, dV = 4\pi q, \quad (1.6.12)$$

ossia usando il teorema della divergenza:

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = 4\pi q, \quad (1.6.13)$$

dove  $S$  è la superficie che racchiude il volume  $V$  ed  $\vec{n}$  la normale ad  $S$  diretta verso l'esterno (vedi fig. (1.6.2)). Considerando la (1.6.4) si ha analogamente:

$$\int_S \vec{H} \cdot \vec{n} \, dS = 0, \quad (1.6.14)$$

Le (1.6.13) e (1.6.14) sono l'espressione del teorema di Gauss per il flusso rispettivamente del campo elettrico e del campo magnetico. Mentre il campo magnetico è sempre a flusso nullo, cioè solenoidali, il campo elettrico è proporzionale alla carica  $q$  che lo genera. Questo fatto implica una essenziale differenza tra il campo elettrico e

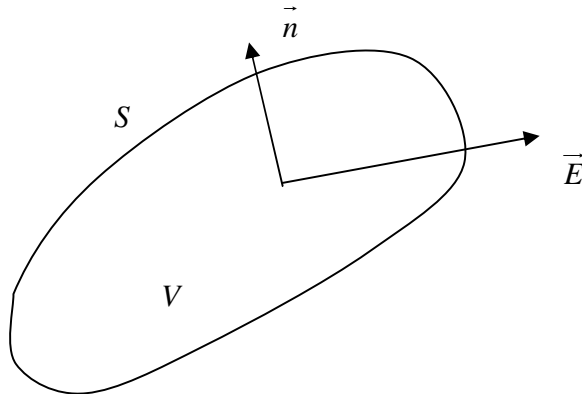


Fig. (1.6.2)

quello magnetico; infatti il primo dipende, mediante la (1.6.2), dalla presenza di cariche elettriche, il secondo dipende invece, mediante la (1.6.1), dalle correnti. La eventuale simmetria tra il campo elettrico e quello magnetico richiederebbe l'esistenza di cariche e di correnti magnetiche. Questa simmetria, però, la si ottiene in assenza di cariche e di correnti; infatti alla corrente di spostamento elettrica corrisponde un'analogia corrente di spostamento magnetica data dal vettore:  $-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ .

È importante osservare che la legge di Faraday è più generale di quanto faccia supporre l'equazione (1.6.11). Vale infatti una relazione analoga alla (1.6.11) in cui, però, il campo magnetico è costante nel tempo e la variazione del flusso è dovuta al movimento della linea  $\gamma$ . Per stabilire questo risultato, supponiamo che la linea  $\gamma$  sia una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $R$  la quale ruoti attorno ad un suo diametro con

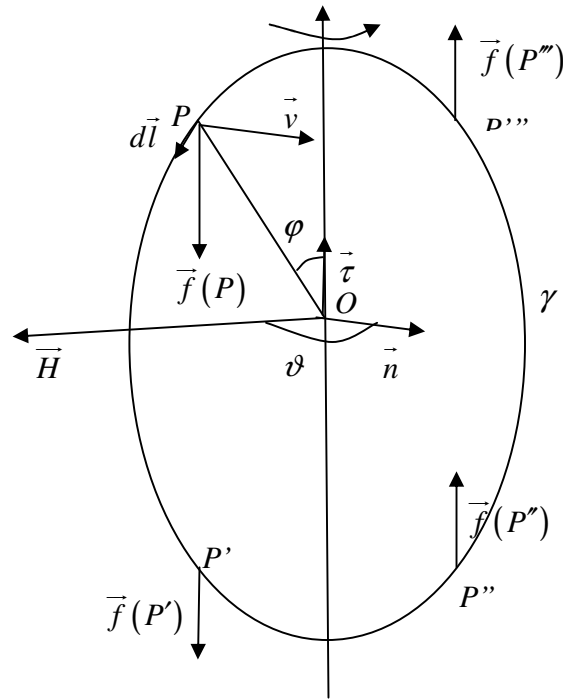


Fig. (1.6.3)

velocità angolare  $\vartheta$  (vedi fig. (1.6.3)). Di conseguenza una carica  $q$  collocata su  $\gamma$  nel punto  $P$  si muove con velocità:

$$\vec{v} = \dot{\vartheta} \vec{\tau} \wedge (P - O) = \dot{\vartheta} R \sin \varphi \vec{n}, \quad (1.6.15)$$

dove  $\vec{\tau}$  è il versore dell'asse di rotazione,  $\vec{n}$  la normale al piano della circonferenza e  $\varphi$  l'angolo tra  $\vec{\tau}$  e  $(P - O)$ . Supponiamo il campo magnetico omogeneo, costante rispetto al tempo e ortogonale a  $\vec{\tau}$ ; ricordando la (1.4.10) esso determina sulla carica  $q$  una forza data dalla relazione:

$$\vec{f} = \frac{q}{c} \vec{v} \wedge \vec{H} = \frac{q}{c} \dot{\vartheta} R \sin \varphi \vec{n} \wedge \vec{H} = -\frac{q}{c} \dot{\vartheta} R \sin \varphi |\vec{H}| \sin \vartheta \vec{\tau}, \quad (1.6.16)$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo tra i vettori  $\vec{H}$  ed  $\vec{n}$ . Integrando l'espressione di  $\vec{f}$  sul percorso  $\gamma$  si ha:

$$\oint_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{l} = -\frac{q}{c} \dot{\vartheta} R |\vec{H}| \sin \vartheta \oint_{\gamma} \sin \varphi \vec{\tau} \cdot d\vec{l}; \quad (1.6.17)$$

osservando che:

$$\vec{\tau} \cdot d\vec{l} = \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) R d\varphi = -\sin \varphi R d\varphi, \quad (1.6.18)$$

l'equazione (1.6.17) diventa:

$$\oint_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{c} \dot{\vartheta} R^2 |\vec{H}| \sin \vartheta \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{q}{c} \dot{\vartheta} R^2 |\vec{H}| \sin \vartheta. \quad (1.6.19)$$

Nel caso presente il flusso  $\Phi_{\vec{H}}$  del campo magnetico vale:

$$\Phi_{\vec{H}} = \pi R^2 \vec{H} \cdot \vec{n} = \pi R^2 |\vec{H}| \cos \vartheta, \quad (1.6.20)$$

per cui, derivando rispetto al tempo in relazione alla variazione di  $\vartheta$ , si ha:

$$\left( \frac{d\Phi_{\vec{H}}}{dt} \right)_{\vec{H}=\text{cost}} = -\pi R^2 |\vec{H}| \sin \vartheta \dot{\vartheta}. \quad (1.6.21)$$

Inserendo questo risultato nella (1.6.19) si ottiene infine:

$$\oint \frac{\vec{f}}{q} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \left( \frac{d\Phi_{\vec{H}}}{dt} \right)_{\vec{H}=\text{cost}}, \quad (1.6.22)$$

che è una relazione paragonabile alla (1.6.11); in essa l'indicazione  $\vec{H} = \text{cost}$  denota che il campo magnetico è costante nel tempo e la variazione del flusso è dovuta al movimento di  $\gamma$ .

Questo risultato può essere stabilito in modo più generale considerando l'equazione (1.6.3) che esprime la legge di Faraday in forma differenziale. A questo scopo supponiamo che una carica  $q$  attraversi, muovendosi con velocità  $\vec{v}$ , un campo magnetico costante nel tempo ma dipendente dal posto e calcoliamo il rotore della forza lorentziana che agisce su  $q$ . Mediante la (9.3.21) si ha che:

$$\text{rot} \vec{F} = \frac{q}{c} \text{rot} \vec{v} \wedge \vec{H} = \frac{q}{c} \left[ \vec{v} \text{div} \vec{H} - \vec{H} \text{div} \vec{v} - (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{H} + (\vec{H} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right], \quad (1.6.23)$$

Il cui unico termine non nullo nel secondo membro è il terzo. Si ha infatti, indicando rispettivamente con  $x_i$  e  $v_j$  una generica coordinata cartesiana e una componente della velocità:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dx_j}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \delta_{ij} = 0, \quad (1.6.24)$$

in cui  $\delta_{ij}$  è il simbolo di Kroenecker<sup>(§)</sup>. Ciò prova che il secondo e il quarto termine della (1.6.23) sono effettivamente nulli; per il primo basta ricordare la (1.6.49). Possiamo scrivere pertanto:

---

<sup>(§)</sup> Esso è definito nel modo seguente:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}$

$$\text{rot} \vec{F} = \frac{q}{c} \text{rot} \vec{v} \wedge \vec{H} = -\frac{q}{c} (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{H}. \quad (1.6.25)$$

D'altra parte, mediante la (9.3.14), risulta subito che:

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{H} = \dot{x} \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial \vec{H}}{\partial z}. \quad (1.6.26)$$

Questa espressione, tenendo conto che  $\vec{H}$  è costante rispetto al tempo, coincide con la cosiddetta derivata sostanziale di  $\vec{H}$  rispetto a  $t$ . Consideriamo infatti il campo magnetico che agisce sulla carica  $q$ ; essa nel suo movimento attraversa regioni in cui il campo ha valori differenti e, conseguentemente, sarà sottoposta ad un campo variabile da istante a istante. La derivata rispetto a questa variazione (ricordando il teorema di derivazione di una funzione di funzione) è data proprio dal secondo membro della (1.6.26); pertanto:

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{H} = \left( \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)_s, \quad (1.6.27)$$

Dove l'indice  $s$  denota la derivazione sostanziale. Mediante la (1.6.27) la (1.6.25) diventa:

$$\text{rot} \left( \frac{\vec{F}}{q} \right) + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)_s = 0, \quad (1.6.28)$$

Che è un'equazione formalmente paragonabile alla (1.6.3). La (1.6.28) e la (1.6.22) sono del tutto equivalenti, così come lo sono la (1.6.3) e la (1.6.11).

Si deve notare, a proposito di questi risultati, che un osservatore solidale con la linea  $\gamma$ , e quindi con la carica  $q$ , attribuirebbe la forza che agisce su di essa non già al campo magnetico, ma bensì a quello elettrico. Quest'ultimo infatti, come si è visto nel paragrafo 1.4, riguarda le cariche in quiete. Si potrebbe, pertanto, mediante considerazioni relative al passaggio da un osservatore fisso ad uno solidale con la carica mobile, unificare le due formulazioni della legge di Faraday. Ciò, tuttavia, per il momento, non verrà fatto in quanto è bene affrontare questo tipo di problemi da un punto



di vista molto più generale, come si farà nei capitoli 7 ed 8 dedicati alla teoria della Relatività speciale<sup>(\*\*)</sup>. Vale invece la pena di segnalare una questione che concerne il significato energetico della legge di Faraday. Si deve osservare, a questo riguardo, che la legge di Faraday esprime il lavoro compiuto dalle forze del campo quando la carica unitaria percorre la linea  $\gamma$ . Parrebbe pertanto che quando  $\gamma$  è mobile ed  $\vec{H}$  non varia nel tempo questo lavoro debba essere nullo in quanto dovuto ad una forza lorentziana, la quale non può compiere lavoro (vedi paragrafo 1.4). È facile vedere che la ragione di questa apparente contraddizione dipende dal fatto che la forza lorentziana compie, in realtà, due lavori corrispondenti rispettivamente alla circuitazione lungo  $\gamma$  ed alla rotazione di  $\gamma$ . Manifestamente è il lavoro complessivo che deve essere nullo; ossia se la rotazione lungo  $\gamma$  dà luogo ad un lavoro positivo, la rotazione di  $\gamma$  produce un eguale lavoro negativo.

In altre parole: impiegando energia meccanica per far ruotare  $\gamma$  si ottiene lavoro elettrico sulle cariche, e la forza di Lorentz non fa altro che trasferire energia dal moto delle cariche associato alla rotazione di  $\gamma$  al moto lungo  $\gamma$ .

---

<sup>(\*\*)</sup> D'altra parte, la Relatività speciale considera solo il moto rettilineo e uniforme e non è quindi applicabile al caso in cui (vedi equazione (1.6.22)) la linea  $\gamma$  ruota.

## 1.7 Le leggi di Laplace e di Coulomb

Considerando un fenomeno interamente stazionario, ossia supponendo che tanto il campo elettromagnetico quanto le densità di carica e di corrente non varino nel tempo, vogliamo ora ottenere, partendo dalle equazioni (1.6.1) ÷ (1.6.4), le espressioni esplicite del campo magnetico e del campo elettrico. È ovvio che queste espressioni saranno, in generale, più utili della legge della circuitazione (1.6.8) o del teorema di Gauss (1.6.12) che determinano il campo magnetico in forma implicita. Il procedimento che useremo è estensibile al caso non stazionario il quale, tuttavia, richiedendo un'analisi assai più delicata, verrà trattato in seguito.

Consideriamo l'equazione (1.6.1) in cui si sia posto  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ ; applicando ad ambo i membri il rotore, osservando che vale la relazione (vedi formola (9.3.23)):

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \Delta_2 \vec{H} \quad (1.7.1)$$

e tenendo conto della (1.6.4), si ottiene:

$$\Delta_2 \vec{H} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}. \quad (1.7.2)$$

Così pure, posto  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$  nella (1.6.3), applicandovi il rotore ed utilizzando la (1.6.2), si ottiene in modo analogo:

$$\Delta_2 \vec{E} = 4\pi \text{grad } \rho. \quad (1.7.3)$$

Esprimendo  $\vec{H}$  ed  $\vec{E}$  mediante le loro componenti cartesiane, le equazioni vettoriali (1.7.2) e (1.7.3) si riducono (vedi equazione (1.3.24)) a delle equazioni scalari della forma:

$$\Delta_2 \varphi = \Phi, \quad (1.7.4)$$

Dove  $\Phi$  è una funzione assegnata del posto dipendente dalla distribuzione delle cariche o da quella delle correnti. Per integrare la (1.7.4) applichiamo un metodo dovuto a G. Green che consiste nell'applicare il lemma omonimo (vedi equazione (9.3.40))

alla funzione incognita  $\varphi$  e ad una adatta funzione ausiliaria  $g$ . Consideriamo a questo scopo la funzione:

$$g = \frac{1}{r}, \quad (1.7.5)$$

dove  $r$  è la distanza da un punto variabile  $Q$  al punto  $P$  in cui si vuole determinare il valore di  $\varphi$ . La funzione  $g$  in tutto lo spazio, eccetto il punto  $P$  in cui essendo  $r=0$  essa diventa infinita, è una funzione armonica; ossia, come immediatamente si verifica (vedi equazioni (9.3.31) e (9.3.58)), essa soddisfa all'equazione:

$$\Delta_2 g = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dg}{dr} \right) = 0. \quad (1.7.6)$$

Consideriamo il volume  $V^*$  compreso entro una superficie  $S$  di forma arbitraria che contenga il punto  $P$  ed una seconda superficie sferica  $S_0$ , di raggio molto piccolo, concentrica al punto  $P$  (vedi fig. (1.7.1)). Poiché in questo volume le funzioni  $\varphi$  e  $g$  sono entrambe regolari, abbiamo dal lemma di Green:

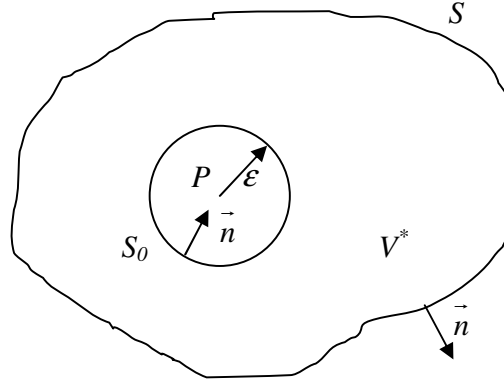


Fig. (1.7.1)

$$\int_{V^*} (g \Delta_2 \varphi - \varphi \Delta_2 g) dV = \int_{S_0} \left( g \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dg}{dn} \right) dS_0 + \int_S \left( g \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dg}{dn} \right) dS. \quad (1.7.7)$$

Usando le equazioni (1.7.4) e (1.7.6) l'integrale a primo membro diventa:

$$\int_{V^*} (g \Delta_2 \varphi - \varphi \Delta_2 g) dV = \int_{V^*} g \Phi dV. \quad (1.7.8)$$

Trasformiamo il primo integrale a secondo membro della (1.7.7). Tenendo conto che sulla superficie  $S_0$  la normale  $\vec{n}$ , essendo diretta all'esterno di  $V^*$ , è opposta al raggio  $r$  ed inserendo le espressioni di  $g$  e di  $dS_0$  si ha:

$$\int_{S_0} \left( g \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dg}{dn} \right) dS_0 = - \int_{S_0} \left( g \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial g}{\partial r} \right) dS_0 = - \int_{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \varphi \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \varepsilon^2 d\omega. \quad (1.7.9)$$

Introducendo i valori medi  $\overline{\varphi}$  e  $\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}$  della funzione  $\varphi$  e della sua derivata valutati sulla superficie  $S_0$  e facendo tendere a zero il raggio  $\varepsilon$ , la (1.7.9) diventa:

$$\int_{S_0} \left( g \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{dg}{dn} \right) dS_0 = -4\pi\varepsilon^2 \left( \frac{1}{\varepsilon} \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial r}} + \overline{\varphi} \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -4\pi\varphi(P). \quad (1.7.10)$$

Inserendo questo risultato e la (1.7.8) nella (1.7.7) e ricordando la (1.7.5), si ottiene:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{1}{r_{PQ}} \frac{d\varphi(Q)}{dn} + \varphi(Q) \frac{1}{r_{PQ}^2} \frac{dr_{PQ}}{dn} \right] dS_Q - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Phi(Q)}{r_{PQ}} dV_Q, \quad (1.7.11)$$

in cui  $V$  indica l'intero volume interno alla superficie  $S$ .

Questa equazione, benché dia un'espressione esplicita di  $\varphi$ , non risolve ancora il problema della determinazione della funzione  $\varphi$ ; essa infatti richiede la conoscenza di  $\varphi$  e di  $\frac{d\varphi}{dn}$  sulla superficie  $S$ . Dal punto di vista matematico la (1.7.11) può essere considerata un'equazione integrale equivalente all'equazione a derivate parziali (1.7.4). Tuttavia, supposto che la funzione  $\Phi$  sia nulla in tutto lo spazio salvo entro una regione  $V_0$  di estensione limitata, è possibile dimostrare che quando la superficie  $S$  va all'infinito l'integrazione su di essa dà contributo nullo. A questo scopo osserviamo che la (1.7.11), tenuto conto dell'ipotesi sul comportamento di  $\Phi$ , può essere scritta nella forma:

$$\varphi(P) = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{1}{r_{PQ}} \frac{d\varphi(Q)}{dn} + \varphi(Q) \frac{1}{r_{PQ}^2} \frac{dr_{PQ}}{dn} \right] dS_Q - \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\Phi(Q)}{r_{PQ}} dV_Q. \quad (1.7.12)$$

Dimostriamo che sostituendo nella (1.7.12) l'espressione:

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\Phi(Q)}{r_{PQ}} dV_Q, \quad (1.7.13)$$

essa risulta identicamente verificata. Infatti, indicando con  $O$  un'origine arbitraria interna al volume  $V_0$  ed applicando il teorema di Carnot (vedi fig. (1.7.2)), la (1.7.13) può essere scritta nella forma:

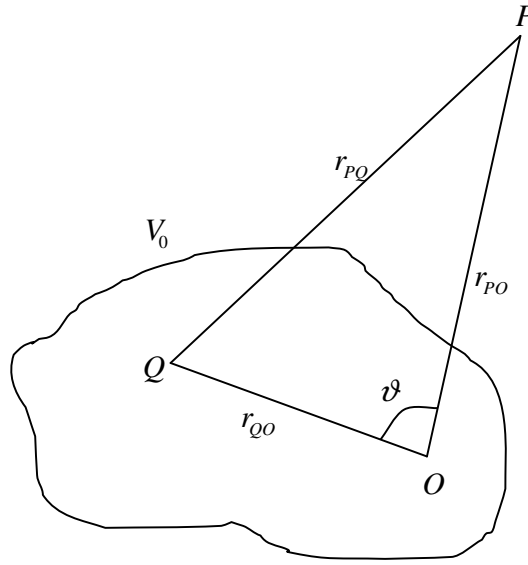


Fig. (1.7.2)

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi r_{PO}} \int_{V_0} \frac{\Phi(Q)}{\sqrt{1 - 2 \frac{r_{QO}}{r_{PO}} \cos \vartheta + \left( \frac{r_{QO}}{r_{PO}} \right)^2}} dV_Q \quad (1.7.14)$$

dove  $r_{PO}$ ,  $r_{QO}$  sono le distanze dei punti  $P$  e  $Q$  dall'origine e  $\vartheta$  indica l'angolo  $Q\hat{O}P$ . Quando il punto  $P$  va all'infinito il rapporto  $r_{QO}/r_{PO}$  tende a zero e la (1.7.14) diventa asintoticamente:

$$\varphi(P) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} -\frac{1}{4\pi r_{PO}} \int_{V_0} \Phi(Q) dV_Q \quad (1.7.15)$$

in cui, manifestamente, l'integrale della funzione  $\Phi$  è una quantità finita. Ne segue che valgono le equazioni asintotiche:

$$\varphi(P) r_{PO} \xrightarrow{P \rightarrow \infty} -\frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \Phi(Q) dV_Q = -k \quad (1.7.16)$$

$$\frac{d\varphi(P)}{dr_{PO}} r_{PO}^2 \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \Phi(Q) dV_Q = k \quad (1.7.17)$$

dove  $k$  è una costante finita. Possiamo ora valutare il primo integrale che compare nella (1.7.12). Assumendo come superficie  $S$  una sfera di centro  $O$ , le derivate rispetto alla direzione normale ad  $S$  vengono sostituite dalle derivate rispetto a  $r_{QO}$ . Di conseguenza, osservando che  $r_{PQ}$  e  $r_{QO}$  diventano coincidenti per  $Q$  tendente ad infinito (vedi fig. (1.7.2)) e tenendo conto delle (1.7.16) e (1.7.17) (in cui si sostituisca  $P$  con  $Q$ ), i due termini che compaiono nell'integrale in questione diventano asintoticamente proporzionali a  $r_{QO}^{-3}$ . Tenendo conto che l'estensione di  $S$  cresce proporzionalmente a  $r_{QO}^2$ , ciò basta a concludere che l'integrale su  $S$  calcolato mediante la (1.7.12) tende a zero<sup>(††)</sup>. Abbiamo pertanto provato che la (1.7.12) effettivamente si riduce ad una identità quando in essa si sostituisca la (1.7.13). Essendo, d'altra parte, la (1.7.12) equivalente all'equazione iniziale (1.7.4), ne segue che l'espressione (1.7.13) di  $\varphi$  costituisce la soluzione di questa equazione nel caso in cui le condizioni limitative per la  $\Phi$  siano verificate. Inoltre, confrontando la (1.7.13) colla (1.7.11) risulta subito che nella (1.7.11) l'integrale su  $S$  rappresenta, per un volume  $V$  limitato e più piccolo di  $V_0$ , il contributo dovuto ai valori di  $\Phi$  esterni a  $V$ .

---

<sup>(††)</sup> È da notare che questa conclusione è rafforzata dal fatto che i due contributi che intervengono nell'integrazione su  $S$  sono eguali in valore assoluto, ma opposti in segno.

Applicando la (1.7.13) alle componenti della (1.7.2) otteniamo per il campo magnetico:

$$\vec{H}(P) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\text{rot}_Q \vec{j}(Q)}{r_{PQ}} dV_Q \quad (1.7.18)$$

in cui si è indicato con  $V$  anziché con  $V_0$  il volume occupato dalle correnti; il caso in cui esse siano distribuite in tutto lo spazio fino a distanza infinita è senz'altro da escludersi per ovvie ragioni fisiche. Usando l'identità (vedi equazione (9.3.20)):

$$\text{rot} \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) = \frac{\text{rot} \vec{j}}{r} + \text{grad} \frac{1}{r} \wedge \vec{j} \quad (1.7.19)$$

possiamo scrivere la (1.7.18) nella forma:

$$\vec{H}(P) = \frac{1}{c} \int_V \text{rot}_Q \left[ \frac{\vec{j}(Q)}{r_{PQ}} \right] dV_Q - \frac{1}{c} \int_V \text{grad}_Q \frac{1}{r_{PQ}} \wedge \vec{j}(Q) dV_Q. \quad (1.7.20)$$

Dimostriamo che il primo integrale è nullo; si ha, infatti, applicando il teorema (9.3.38):

$$\int_V \text{rot}_Q \left[ \frac{\vec{j}(Q)}{r_{PQ}} \right] dV_Q = \int_S \frac{\vec{n} \wedge \vec{j}(Q)}{r_{PQ}} dS_Q, \quad (1.7.21)$$

dove  $S$  è la superficie che limita il volume occupato dalla corrente e  $\vec{n}$  la normale ad  $S$  diretta verso l'esterno. Poiché  $S$  contiene all'interno tutti i punti in cui  $\vec{j}$  è differente da zero, l'integrale (1.7.21) è effettivamente nullo. Mediante le (9.3.28), (9.3.33) la (1.7.20) diventa quindi:

$$\vec{H}(P) = \frac{1}{c} \int_V \frac{(Q-P) \wedge \vec{j}(Q)}{r_{PQ}^3} dV_Q, \quad (1.7.22)$$

che è l'espressione cercata. Ricordando le (1.2.15) e (1.2.5) il contributo di un elemento di volume  $dV_Q$  può essere scritto nella forma:

$$d\vec{H}(P) = \frac{1}{c} \frac{1}{r_{PQ}^3} (Q - P) \wedge \vec{v}_Q dq, \quad (1.7.23)$$

ossia in termini finiti:

$$\vec{H}(P) = \frac{q}{c} \frac{\vec{v} \wedge (P - Q)}{r_{PQ}^3}. \quad (1.7.24)$$

Queste relazioni vengono comunemente indicate col nome di prima legge elementare di Laplace. Considerando come elemento di volume un tratto di un sottile tubo di flusso, di lunghezza eguale al vettore infinitesimo  $d\vec{l}$  parallelo alla densità di corrente  $\vec{j}$ , otteniamo, ricordando la (1.2.20):

$$d\vec{H}(P) = \frac{1}{c} \frac{I}{r_{PQ}^3} (Q - P) \wedge d\vec{l}, \quad (1.7.25)$$

che è una forma alternativa spesso usata della legge di Laplace.

Partendo dalla (1.7.3) è possibile ottenere per il campo elettrico un'espressione di tipo analogo alla (1.7.21). Infatti, applicando la (1.7.12) alle componenti della (1.7.3), si ha:

$$\vec{E} = - \int_V \frac{\text{grad}_Q \rho(Q)}{r_{PQ}} dV_Q \quad (1.7.26)$$

dove  $V$  è un volume limitato che racchiude lo spazio in cui la densità di carica non è nulla. Mediante la (9.3.12) la (1.7.26) assume la forma:

$$\vec{E} = - \int_V \text{grad}_Q \left[ \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} \right] dV_Q + \int_V \rho(Q) \text{grad}_Q \frac{1}{r_{PQ}} dV_Q. \quad (1.7.27)$$

È facile vedere che il primo integrale vale zero; si ha infatti utilizzando il teorema (9.3.36):

$$\int_V \text{grad}_Q \left[ \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} \right] dV_Q = \int_S \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} \vec{n} dS, \quad (1.7.28)$$



dove  $S$  è la superficie che delimita il volume  $V$ . Per le ipotesi fatte, la densità di carica su questa superficie e quindi gli integrali che compaiono nei due membri della (1.7.28) sono nulli. Utilizzando le (9.3.28) e (9.3.33) resta pertanto:

$$\vec{E}(P) = \int_V \frac{P-Q}{r_{PQ}^3} \rho(Q) dV, \quad (1.7.29)$$

che è una espressione confrontabile con la (1.7.22). Considerando una carica infinitesima concentrata in un elemento di volume  $dV_Q$  si ha analogamente alla (1.7.23):

$$d\vec{E}(P) = \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}^3} (P-Q) dV_Q; \quad (1.7.30)$$

questa relazione può essere scritta in termini finiti nella forma:

$$\vec{E}(P) = \frac{q}{r_{PQ}^3} (P-Q) \quad (1.7.31)$$

e corrisponde alla legge di Coulomb (1.3.1).

I risultati testé ottenuti ci permettono di ritrovare le leggi sull'azione a distanza delle cariche elettriche studiate nel paragrafo 3. Infatti sostituendo nelle (1.7.24) e (1.7.30) i punti  $P$  e  $Q$  rispettivamente con  $P_2$  e  $P_1$  e applicando la (1.4.11) (in cui si sia posto  $i = 2$ ) si ottengono le equazioni (1.3.1) e (1.3.3) relative all'azione colombiana ed amperiana di una carica  $q_1$  (situata in  $P_1$ ) su una carica  $q_2$  (situata in  $P_2$ ). Evidentemente scambiando  $P_1$  e  $P_2$  si ottengono in modo analogo le (1.3.2) e (1.3.4). Resta così chiarito che le leggi sull'azione a distanza tra cariche elettriche sono in realtà delle leggi limite valide quando il campo elettromagnetico è statico. Ciò permette di intuire la ragione per cui esse sono in disaccordo col terzo principio della dinamica. Supponendo il fenomeno statico si è infatti trascurata la circostanza che il campo elettromagnetico generato da  $q_1$  si propaga, ossia impiega un tempo finito per determinare la sua azione su  $q_2$ . Tenere conto di ciò implica, come vedremo nel paragrafo 2.7, attribuire al campo elettromagnetico una quantità di moto di tipo meccanico la quale si trasferisce in modo non istantaneo dalla carica  $q_1$  alla carica  $q_2$ . È quindi necessario introdurre nel bilancio delle forze anche la quantità di moto del campo che determina la interazione fra le cariche, o, più precisamente, la sua variazione per unità di tempo. Nel paragrafo 4.9 dimostreremo che considerando le forze di inerzia elettromagnetiche, il principio di azione e reazione effettivamente risulta verificato nel modo usuale.

## 1.8 Potenziali elettromagnetici - Vettore di Hertz

Le equazioni (1.6.1)÷(1.6.4) permettono di valutare il campo elettromagnetico, in funzione del posto e del tempo, quando siano note le distribuzioni di  $\vec{j}$  e di  $\rho$ . Per procedere effettivamente al calcolo conviene, tuttavia, sostituire queste equazioni con delle altre, da esse dedotte, che contengono un numero minore di variabili. A questo scopo, osservando che la divergenza di un rotore è identicamente nulla e che tale è pure, per la (1.6.4), la divergenza di  $\vec{H}$ , poniamo:

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}, \quad (1.8.1)$$

dove  $\vec{A}$  è un vettore, funzione del posto e del tempo, detto potenziale vettore. Sostituendo la (1.8.1) nella (1.6.3) e scambiando l'ordine delle derivate temporali e spaziali si ottiene:

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.8.2)$$

Tenendo conto che il rotore di un gradiente è identicamente nullo, poniamo:

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} \mathcal{V}, \quad (1.8.3)$$

dove  $\mathcal{V}$  è una funzione del posto e del tempo detta potenziale scalare. Il campo elettromagnetico risulta così espresso mediante la (1.8.1) e la (1.8.3) che possiamo scrivere nella forma:

$$\vec{E} = -\text{grad} \mathcal{V} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad (1.8.4)$$

in esse intervengono quattro sole funzioni scalari, ossia  $\mathcal{V}$  e le tre componenti di  $\vec{A}$ . Si deve però notare che la scelta dei potenziali  $\vec{A}$  e  $\mathcal{V}$  non è univoca. Infatti indicando con  $\vec{A}_0$  e  $\mathcal{V}_0$  una determinazione dei potenziali soddisfacente le equazioni (1.8.1) e (1.8.4), si verifica immediatamente che anche i potenziali:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \text{grad} \varphi, \quad (1.8.5)$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1.8.6)$$

dove  $\varphi$  è una arbitraria funzione del posto e del tempo, soddisfano queste equazioni.

Determiniamo ora le equazioni cui obbediscono i potenziali. A questo scopo sostituiamo le (1.8.1) e (1.8.4) nella (1.6.1); si ottiene:

$$\text{rot rot} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \mathcal{V} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (1.8.7)$$

Utilizzando l'identità:

$$\text{rot rot} \vec{A} = \text{grad div} \vec{A} - \Delta_2 \vec{A}, \quad (1.8.8)$$

la (1.8.7) diventa:

$$\Delta_2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{-4\pi \vec{j}}{c} + \text{grad} \left( \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \right). \quad (1.8.9)$$

Analogamente sostituendo la (1.8.4) nella (1.6.2) abbiamo:

$$\Delta_2 \mathcal{V} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = -4\pi \rho. \quad (1.8.10)$$

È possibile dare a queste equazioni una forma più compatta approfittando dell'arbitrarietà della funzione  $\varphi$ . Supponiamo, infatti, di scegliere  $\varphi$  in modo che:

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} = 0, \quad (1.8.11)$$

ossia, come si vede subito usando le (1.8.5) e (1.8.6):

$$\Delta_2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \left( \text{div} \vec{A}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial t} \right). \quad (1.8.12)$$

Quest'ultima equazione, come vedremo nel prossimo paragrafo, può essere risolta con un metodo analogo a quello usato nel paragrafo 1.7. In questo modo, mediante la (1.8.11), che viene detta condizione di Lorentz, le equazioni per i potenziali diventano semplicemente:

$$\Delta_2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (1.8.13)$$

$$\Delta_2 \mathcal{V} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (1.8.14)$$

esse, tenendo conto delle opportune condizioni al contorno, della condizione supplementare (1.8.11) nonché delle equazioni (1.8.1) e (1.8.4), ci permettono di determinare il campo elettromagnetico in funzione delle cariche e delle correnti. Sovente, per semplificare le notazioni, si fa uso del simbolo:

$$\square_2 = \Delta_2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (1.8.15)$$

esso prende il nome di operatore d'Alambertiano. Le equazioni (1.8.13), (1.8.14) assumono così la forma:

$$\square_2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (1.8.16)$$

$$\square_2 \mathcal{V} = -4\pi\rho. \quad (1.8.17)$$

È importante rilevare che la condizione di Lorentz implica la validità dell'equazione di continuità (1.2.25). Infatti, applicando alla (1.8.16) la divergenza e sommando con la (1.8.17) derivata rispetto a  $ct$ , si ottiene:

$$0 = \square_2 \left( \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \left( \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right), \quad (1.8.18)$$

che è appunto quanto si voleva stabilire. Ciò significa, in altri termini, che il legame esistente tra le soluzioni delle (1.8.16) e (1.8.17) corrisponde a quello che intercorre tra  $\vec{j}$  e  $\rho$ . Nelle applicazioni si può utilizzare questo legame per evitare di integrare

l'equazione per il potenziale scalare  $\mathcal{V}$ . Per far ciò basta ricavare  $\vec{A}$  dalla (1.8.16) e calcolarne la divergenza, dopodiché la (1.8.11) con una integrazione rispetto al tempo ci fornisce, a meno di una costante dipendente dal posto, il valore di  $\mathcal{V}$ . All'atto pratico questa costante può, di solito, essere determinata senza difficoltà; è tuttavia preferibile un differente procedimento che, anche a priori, non dà luogo ad alcuna ambiguità. A questo scopo introduciamo un vettore  $\vec{Q}$ , funzione del posto e del tempo, tale che:

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t}, \quad (1.8.19)$$

e:

$$\rho = -\text{div} \vec{Q}. \quad (1.8.20)$$

Si constata immediatamente che la forma di queste equazioni garantisce la validità della (1.2.25), qualunque sia  $\vec{Q}$ . D'altra parte poniamo:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}, \quad (1.8.21)$$

e:

$$\mathcal{V} = -\text{div} \vec{Z}, \quad (1.8.22)$$

dove  $\vec{Z}$  è un vettore da determinarsi detto vettore di Hertz. Sostituendo la (1.8.21) e la (1.8.19) nella (1.8.16) si ha:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\square_2 \vec{Z} + 4\pi \vec{Q}] = 0. \quad (1.8.23)$$

Analogamente, sostituendo la (1.8.22) e la (1.8.20) nella (1.8.17), si ottiene:

$$-\text{div} [\square_2 \vec{Z} + 4\pi \vec{Q}] = 0. \quad (1.8.24)$$

Basta, pertanto, assumere  $\vec{Z}$  tale che esso verifichi l'equazione:

$$\square_2 \vec{Z} = -4\pi \vec{Q}, \quad (1.8.25)$$

perché le (1.8.17) e (1.8.16) siano a loro volta verificate. Partendo dall'espressione di  $\vec{Z}$  si può ottenere, mediante successive derivazioni, il campo elettromagnetico; poiché  $\vec{A}$  e  $\mathcal{V}$  sono espressi dalle (1.8.21), (1.8.22) attraverso le derivate di  $\vec{Z}$ , questo vettore prende il nome di superpotenziale. È da notare che la condizione di Lorentz (1.8.11) è immediata conseguenza della forma delle (1.8.21), (1.8.22). L'espressione del campo elettrico, con qualche trasformazione ed utilizzando la (1.8.25) diventa:

$$\vec{E} = \text{grad } \text{div} \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = \text{rot } \text{rot} \vec{Z} + \square_2 \vec{Z} = \text{rot } \text{rot} \vec{Z} - 4\pi \vec{Q}, \quad (1.8.26)$$

mentre per il campo magnetico si ha:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{Z}. \quad (1.8.27)$$

Queste equazioni, assieme alla (1.8.25), riducono il problema del calcolo del campo elettromagnetico alla determinazione di  $\vec{Z}$ , ossia di tre sole funzioni scalari.

## 1.9 Calcolo dei potenziali col metodo di Green

Occorre ora sviluppare un metodo che permetta di valutare i potenziali  $\vec{A}$  e  $\vec{\mathcal{V}}$  oppure il vettore di Hertz  $\vec{Z}$ . A questo scopo osserviamo che l'equazione (1.8.14), le tre componenti della (1.8.13), la (1.8.12) e le componenti della (1.8.25) sono della forma:

$$\square_2 f = \Delta_2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = F(x, y, z, t). \quad (1.9.1)$$

Per integrare una equazione di questo tipo occorre innanzitutto eliminare la variabile tempo. A tal fine sviluppiamo in serie (o in integrale) di Fourier di forma complessa le funzioni  $f$  e  $F$ :

$$F(x, y, z, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_s \Phi_s(x, y, x) e^{-i\omega_s t}. \quad (1.9.2)$$

$$f(x, y, z, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_s \varphi_s(x, y, x) e^{-i\omega_s t}. \quad (1.9.3)$$

Sostituendo nella (1.9.1) abbiamo:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_s (\Delta_2 \varphi_s + k_s^2 \varphi_s - \Phi_s) e^{-i\omega_s t} = 0, \quad (1.9.4)$$

Dove si è posto:

$$\frac{\omega_s}{c} = k_s. \quad (1.9.5)$$

La (1.9.4) è verificata se valgono le equazioni:

$$\Delta_2 \varphi_s + k_s^2 \varphi_s = \Phi_s. \quad (1.9.6)$$

Quando  $k_s$  vale zero esse si riducono alla (1.7.4) già incontrata nel paragrafo (1.7); generalizziamo pertanto il procedimento allora usato. Consideriamo questa volta la funzione:

$$g_s = \frac{e^{ik_s r}}{r}, \quad (1.9.7)$$

dove  $r$  è la distanza dal punto  $P(x, y, z)$  in cui si vuole determinare il valore della funzione  $\varphi_s$ . Usando l'espressione del laplaciano in coordinate polari (vedi equazione (9.3.58)) si verifica subito che  $g_s$  è un integrale particolare dell'equazione:

$$\Delta_2 g_s + k_s^2 g_s = 0. \quad (1.9.8)$$

Poiché, come già la funzione  $g$  dell'equazione (1.7.5), anche  $g_s$  è singolare in  $P$  usiamo per applicare il lemma di Green lo stesso volume scelto per la (1.7.7), cioè il volume  $V^*$  delimitato da una superficie chiusa  $S$ , contenente all'interno il punto  $P$ , e da una sferetta  $S_0$  di raggio  $\varepsilon$  con centro nel punto  $P$  stesso. Si ha in questo modo:

$$\begin{aligned} \int_{V^*} (g_s \Delta_2 \varphi_s - \varphi_s \Delta_2 g_s) dV &= \int_{S_0} \left( g_s \frac{d\varphi_s}{dn} - \varphi_s \frac{dg_s}{dn} \right) dS_0 + \\ &+ \int_S \left( g_s \frac{d\varphi_s}{dn} - \varphi_s \frac{dg_s}{dn} \right) dS. \end{aligned} \quad (1.9.9)$$

Usando le equazioni (1.9.6) e (1.9.8) l'integrale a primo membro diventa:

$$\int_{V^*} (g_s \Delta_2 \varphi_s - \varphi_s \Delta_2 g_s) dV = \int_{V^*} g_s \Phi_s dV. \quad (1.9.10)$$

Trasformiamo ora il primo integrale a secondo membro della (1.9.9); tenendo conto che sulla superficie  $S_0$  la derivata normale coincide, salvo il segno, con la derivata rispetto a  $r$ , si ottiene:

$$\int_{S_0} \left( g_s \frac{d\varphi_s}{dn} - \varphi_s \frac{dg_s}{dn} \right) dS_0 = - \int_{S_0} e^{ik_s r} \left[ \frac{1}{r} \frac{d\varphi_s}{dr} - \varphi_s \left( \frac{ik_s}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \right] dS_0. \quad (1.9.11)$$

Introduciamo i valori medi  $\overline{\varphi_s}$  e  $\overline{\frac{d\varphi_s}{dr}}$  e facciamo tendere a zero  $\varepsilon$ ; la (1.9.11) analogamente alla (1.7.9) si riduce a:



$$\begin{aligned}
& \int_{S_0} \left( g_s \frac{d\varphi_s}{dn} - \varphi_s \frac{dg_s}{dn} \right) dS_0 = \\
& -4\pi\epsilon^2 e^{ik_s\epsilon} \left[ \frac{1}{\epsilon} \frac{d\overline{\varphi_s}}{dr} - \overline{\varphi_s} \left( \frac{ik_s}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon^2} \right) \right] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -4\pi\varphi_s(P).
\end{aligned} \tag{1.9.12}$$

Sostituendo le (1.9.10) e (1.9.12) nella (1.9.9) ed osservando che per  $\epsilon$  tendente a zero il volume  $V^*$  coincide coll'intero volume  $V$  interno ad  $S$  abbiamo:

$$\begin{aligned}
\varphi_s(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left( g_s \frac{d\varphi_s}{dn} - \varphi_s \frac{dg_s}{dn} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_V g_s \Phi_s dV = \\
& \frac{1}{4\pi} \int_S e^{ik_s r} \left[ \frac{1}{r} \frac{d\varphi_s}{dn} - \varphi_s \left( \frac{ik_s}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \frac{dr}{dn} \right] dS - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{ik_s r}}{r} \Phi_s dV,
\end{aligned} \tag{1.9.13}$$

dove è stata inserita l'espressione (1.9.7) della funzione  $g_s$ . Risulta così determinata anche la funzione  $f$ ; per ricavarla in modo esplicito, sostituiamo la (1.9.13) nella (1.9.3) ed eliminiamo  $k_s$  mediante la (1.9.5). Si trova:

$$\begin{aligned}
f(P, t) &= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \varphi_s(P) e^{-i\omega_s t} = \\
& \frac{1}{4\pi} \int_S \sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_s(t-\frac{r}{c})} \left[ \frac{1}{r} \frac{d\varphi_s}{dn} - \varphi_s \left( \frac{i\omega_s}{cr} - \frac{1}{r^2} \right) \frac{dr}{dn} \right] dS + \\
& - \frac{1}{4\pi} \int_V \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega_s(t-\frac{r}{c})}}{r} \Phi_s dV.
\end{aligned} \tag{1.9.14}$$

Notiamo ora che, esprimendo la (1.9.3) all'istante  $t - \frac{r}{c}$  anziché all'istante  $t$ , si ottiene:

$$f\left(P, t - \frac{r}{c}\right) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \varphi_s(P) e^{-i\omega_s(t-\frac{r}{c})}, \tag{1.9.15}$$

analogamente la derivata di  $f$  calcolata all'istante  $t - \frac{r}{c}$  diventa:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{t-\frac{r}{c}} = - \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \varphi_s(P) i\omega_s e^{-i\omega_s(t-\frac{r}{c})}, \tag{1.9.16}$$

infine, considerando sempre allo stesso istante la funzione  $F$ , si ha:

$$F(P, t - \frac{r}{c}) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \Phi_s(P) e^{-i\omega_s(t - \frac{r}{c})}. \quad (1.9.17)$$

Mediante la (1.9.15), l'equazione da essa ottenuta derivando rispetto a  $n$  e le (1.9.16), (1.9.17), l'espressione (1.9.14) della funzione  $f$  assume la forma:

$$\begin{aligned} f(P, t) = & \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{1}{r} \frac{df}{dn} + \left( \frac{1}{cr} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{r^2} f \right) \frac{dr}{dn} \right]_{t-\frac{r}{c}} dS + \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ \frac{1}{r} F \right]_{t-\frac{r}{c}} dV. \end{aligned} \quad (1.9.18)$$

Questa relazione, dovuta a Kirchhoff, determina il valore di  $f$  nel punto  $P$  all'istante  $t$  mediante i valori che questa funzione e le sue derivate assumono sulla superficie  $S$ , oltreché mediante i valori di  $F$  nel volume interno ad  $S$ . Tutte queste quantità devono però essere valutate all'istante antecedente  $t - \frac{r}{c}$ . In altre parole: il valore di  $f(P, t)$  dipende con il ritardo  $\frac{r}{c}$  dalla situazione sulla superficie  $S$  e nel volume  $V$ . Tenendo conto che  $r$  è la distanza tra  $P$  e il punto variabile nelle integrazioni in questi domini ne segue l'importante risultato che la funzione  $f$  si propaga con velocità  $c$ .

Utilizzando le stesse ipotesi e lo stesso procedimento del paragrafo 1.7, è possibile dimostrare che quando la superficie  $S$  va all'infinito, l'espressione (1.9.18) di  $f$  si riduce al solo integrale di volume. Si consideri, infatti, la funzione  $f$  definita dalla relazione:

$$f(P, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{F(Q, t - \frac{r_{PQ}}{c})}{r_{PQ}} dV_Q, \quad (1.9.19)$$

in cui l'integrale è esteso al volume  $V_0$  entro il quale la funzione  $F$  è diversa da zero. La sua espressione asintotica (vedi fig. (1.7.2)) risulta essere:

$$f(P, t) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} -\frac{1}{4\pi r_{PO}} \int_{V_0} F(Q, t - \frac{r_{PO}}{c}) dV_Q. \quad (1.9.20)$$

Si vede subito da questa equazione che  $f$  dipende dal posto non solo attraverso la variabile  $r_{PO}$ , come accadeva per la funzione  $\varphi$  nel paragrafo 1.7, ma anche attraverso la variabile:

$$t' = t - \frac{r_{PO}}{c}; \quad (1.9.21)$$

nell'eseguire le derivate occorre quindi tener conto di questa circostanza. Si ha perciò:

$$\frac{df}{dr_{PO}} = \left( \frac{\partial f}{\partial r_{PO}} \right)_{t'=\text{cost}} + \frac{\partial f}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial r_{PO}} = \frac{1}{4\pi r_{PO}^2} \int_{V_0} F(Q, t - \frac{r_{PO}}{c}) dV_Q + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \left( -\frac{1}{c} \right), \quad (1.9.22)$$

ne segue:

$$\left( \frac{df}{dr_{PO}} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right) r_{PO}^2 \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} F(Q, t - \frac{r_{PO}}{c}) dV_Q = K \left( t - \frac{r_{PO}}{c} \right), \quad (1.9.23)$$

che è la condizione asintotica da sostituire alla (1.7.15) nel caso in cui il problema non sia stazionario. Alla (1.7.14) corrisponde invece semplicemente la condizione:

$$f(P, t) r_{PO} \xrightarrow{P \rightarrow \infty} -K \left( t - \frac{r_{PO}}{c} \right), \quad (1.9.24)$$

come risulta subito dalla (1.9.20). Assumendo per  $S$  una sfera con centro l'origine  $O$  le derivate rispetto a  $r_{PO}$  coincidono con le derivati normali ad  $S$ ; se ne conclude, analogamente a quanto fatto nel paragrafo 1.7 e osservando che  $K \left( t - \frac{r_{PO}}{c} \right)$  rappresenta comunque una funzione finita per tutti i valori del suo argomento, che la (1.9.19) è la soluzione della (1.9.1).

Resta inoltre stabilito, come nel paragrafo 1.7, che l'integrale di superficie che compare nella (1.9.18) rappresenta il contributo dei valori di  $F$  esterni ad  $S$ . È importante osservare, a questo riguardo, che, utilizzando la formola di Kirchhoff nella forma completa (1.9.18), il volume  $V$  può essere, anche, quello esterno alla superficie  $S$  anziché quello interno come si è supposto in fig. (1.7.1). Ciò evidentemente richiede che la normale  $\vec{n}$  sia diretta internamente ad  $S$  e che la dimostrazione venga eseguita supponendo la sferetta  $S_0$  esterna. In questo caso, se nel volume  $V$  i valori di  $F$  sono

nulli, cioè non esistono sorgenti, l'integrale di superficie rappresenterà l'effetto su un punto  $P$  esterno ad  $S$  delle sorgenti contenute in  $S$ . Questo modo di applicare la formula di Kirchhoff sarà in seguito utilizzato nello studio di alcuni fenomeni di propagazione.

La soluzione ora discussa della (1.9.1) dimostra la legittimità della posizione (1.8.11), la quale appunto richiedeva la determinazione di una funzione ausiliaria  $\varphi$  attraverso un'equazione di forma eguale alla (1.9.1). Essa inoltre ci permette di valutare i potenziali elettromagnetici  $\vec{A}$  e  $\mathcal{V}$ . Si ha infatti, applicando la (1.9.19) alle equazioni (1.8.13) e (1.8.14):

$$\vec{A}(P, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(Q, t - \frac{r}{c})}{r_{PQ}} dV_Q, \quad (1.9.25)$$

$$\mathcal{V}(P, t) = \int_V \frac{\rho(Q, t - \frac{r}{c})}{r_{PQ}} dV_Q, \quad (1.9.26)$$

dove  $V$  indica tutto il volume occupato dalle correnti o dalle cariche. Queste espressioni di  $\vec{A}$  e  $\mathcal{V}$  sono effettivamente soluzioni delle (1.8.13) e (1.8.14); esse, però, per essere accettabili, devono soddisfare anche alla condizione di Lorentz (1.8.11). Si può facilmente mostrare che ciò avviene procedendo per verifica diretta. Ciò può essere fatto sostituendo le (1.9.25) e (1.9.26) nella (1.8.11) e tenendo conto dell'equazione di continuità (1.2.25)<sup>(††)</sup>. Resta così provata la correttezza del risultato ottenuto.

<sup>(††)</sup> Sostituendo  $\vec{A}(P, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(Q, t - \frac{r}{c})}{r_{PQ}} dV_Q$  (1.9.25),  $\mathcal{V}(P, t) = \int_V \frac{\rho(Q, t - \frac{r}{c})}{r_{PQ}} dV_Q$  (1.9.26)

nella (1.8.11) si ottiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_P \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} &= \frac{1}{c} \int_V \left[ \operatorname{div}_P \frac{\vec{j}(Q, t - \frac{r}{c})}{r_{PQ}} + \frac{\partial \rho(Q, t - \frac{r}{c}) / \partial t}{r_{PQ}} \right] dV_Q = \frac{1}{c} \int_V \frac{\operatorname{div}_P \vec{j}(Q, t - \frac{r}{c})}{r_{PQ}} dV_Q + \\ &+ \frac{1}{c} \int_V \left[ \vec{j}(Q, t - \frac{r}{c}) \cdot \operatorname{grad}_P \frac{1}{r_{PQ}} + \frac{\partial \rho(Q, t - \frac{r}{c}) / \partial t}{r_{PQ}} \right] dV_Q. \end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo poiché  $\operatorname{div}_P \vec{j}(Q, t - \frac{r}{c})$  si annulla identicamente. Per il secondo, osserva-

Le (1.9.25) e (1.9.26) sono le celebri formole dette, per le ragioni testé esposte, dei potenziali ritardati; esse risolvono in modo esplicito il problema del calcolo del campo elettromagnetico anche nel caso non stazionario. Da esse è facile riottenere le equazioni (1.7.22) e (1.7.27). Per quest'ultima, infatti, basta applicare alla (1.9.26) la (1.8.4) in cui si sia annullata la derivata temporale del potenziale vettore. Si ottiene:

$$\vec{E}(P) = -\int_V \rho(Q) \text{grad}_P \frac{1}{r_{PQ}} dV_Q \quad (1.9.27)$$

la quale, tenendo conto delle (9.3.28), (9.3.33), coincide proprio con la (1.7.29). D'altra parte, utilizzando la (9.3.20) si ottiene la formola:

$$\text{rot}_P \frac{\vec{j}(Q)}{r_{PQ}} = \frac{1}{r_{PQ}} \text{rot}_P \vec{j}(Q) + \text{grad}_P \frac{1}{r_{PQ}} \wedge \vec{j}(Q); \quad (1.9.28)$$

mo che, in virtù della (1.2.25), possiamo sostituire  $\partial \rho(Q, t - \frac{r}{c}) / \partial t$  con  $-\text{div}_Q \vec{j}(Q, t - \frac{r}{c})$  e riscrivere il secondo termine dell'integrando nella forma

$$\frac{\partial \rho(Q, t - \frac{r}{c}) / \partial t}{r_{PQ}} = -\frac{\text{div}_Q \vec{j}(Q, t - \frac{r}{c})}{r_{PQ}} = -\left[ \text{div}_Q \frac{\vec{j}(Q, t - \frac{r}{c})}{r_{PQ}} - \vec{j}(Q, t - \frac{r}{c}) \cdot \text{grad}_Q \frac{1}{r_{PQ}} \right].$$

Introducendo l'espressione contenente le [ ] nel secondo integrale e raccogliendo i fattori comuni esso assume la forma

$$\int_V \vec{j}(Q, t - \frac{r}{c}) \cdot \left( \text{grad}_P \frac{1}{r_{PQ}} + \text{grad}_Q \frac{1}{r_{PQ}} \right) dV_Q - \int_V \text{div}_Q \frac{\vec{j}(Q, t - \frac{r}{c})}{r_{PQ}} dV_Q.$$

Osservando che  $\text{grad}_P \frac{1}{r_{PQ}} = -\frac{(P-Q)}{r_{PQ}^3}$ ,  $\text{grad}_Q \frac{1}{r_{PQ}} = -\frac{(Q-P)}{r_{PQ}^3} = \frac{(P-Q)}{r_{PQ}^3} = -\text{grad}_P \frac{1}{r_{PQ}}$ ,

il primo integrale di questa nuova forma è nullo essendo identicamente nullo il fattore entro ( ) dell'integrando.

Il secondo,  $\int_V \text{div}_Q \frac{\vec{j}(Q, t - \frac{r}{c})}{r_{PQ}} dV_Q$ , essendo uguale a  $\int_S \frac{\vec{j}(Q, t - \frac{r}{c}) \cdot \vec{n}}{r_{PQ}} dS$  per il teorema di

Gauss, con  $\vec{j}$  limitata all'interno del volume  $V$  racchiuso dalla superficie  $S$ , è anch'esso nullo [n.d.c.].

essa, osservando che le derivate di  $\vec{j}(Q)$  rispetto alle coordinate di  $P$  sono nulle, diventa:

$$\text{rot}_P \frac{\vec{j}(Q)}{r_{PQ}} = \frac{(Q-P) \wedge \vec{j}(Q)}{r_{PQ}^3}. \quad (1.9.29)$$

Usando questa equazione ed inserendo la (1.9.25), supposta indipendente da  $t$ , nella (1.8.1) si trova:

$$\vec{H}(P) = \frac{1}{c} \int_V \frac{(Q-P) \wedge \vec{j}(Q)}{r_{PQ}^3} dV_Q \quad (1.9.30)$$

che è appunto la (1.7.22).

## 1.10 Potenziale e campo di alcune distribuzioni statiche di carica

Il presente paragrafo e i due successivi sono dedicati allo studio del campo elettromagnetico nel caso statico, cioè quando le equazioni:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.10.1)$$

sono verificate per tutti i valori di  $t$ .

È evidente che il campo elettromagnetico statico corrisponde ad una distribuzione stazionaria di cariche e di correnti. Sostituendo, infatti, la prima delle (1.10.1) nella (1.6.5) si ottiene che la densità di corrente  $\vec{j}$  è solenoidale e quindi, per la (1.2.25),  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  è nullo. Derivando poi la (1.6.1) rispetto al tempo e usando le (1.10.1) si verifica

subito che anche  $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$  vale zero. Si badi però che la proprietà inversa non è vera in generale; cioè quando le cariche e le correnti sono stazionarie le equazioni (1.10.1) possono, eventualmente, non essere verificate. Particolarmente importante a questo riguardo è il caso, che verrà trattato in seguito, della propagazione del campo elettromagnetico attraverso lo spazio vuoto, cioè in presenza di una distribuzione nulla, e quindi stazionaria, di cariche e correnti. Se le equazioni (1.10.1) sono verificate si ottiene subito dalla (1.6.3) che:

$$\text{rot} \vec{E} = 0; \quad (1.10.2)$$

il potenziale  $\vec{A}$ , inoltre, risulta indipendente dal tempo, per cui la (1.8.4) diventa:

$$\vec{E} = -\text{grad}_P \mathcal{V}(P) \quad (1.10.3)$$

ed il campo elettrico, in questo caso, viene detto conservativo. Le superfici su cui  $\mathcal{V}(P)$  è costante prendono il nome di superfici equipotenziali; si può dimostrare che esse sono sempre ortogonali alla direzione del campo. Infatti, indicando con  $P$  e  $P + dP$  due punti appartenenti ad una qualunque superficie equipotenziale, si ha:

$$d\mathcal{V} = \text{grad}_P \mathcal{V} \cdot d\vec{P} = 0, \quad (1.10.4)$$

ossia, tenendo conto della (1.10.3):

$$\vec{E} \cdot d\vec{P} = 0. \quad (1.10.5)$$

Questa equazione stabilisce che  $\vec{E}$  è ortogonale ad un generico vettore  $d\vec{P}$  tangente alla superficie e quindi alla superficie stessa. Il precedente risultato può anche essere enunciato dicendo che le linee di forza del campo sono ortogonali alle superfici equipotenziali. Una semplice applicazione dell'equazione (1.10.3) può essere ottenuta considerando, ad esempio, il campo di una carica puntiforme  $q$ . Sostituendo nella (1.10.3) il potenziale:

$$\mathcal{V}(P) = \frac{q}{r_{PQ}} \quad (1.10.6)$$

dove  $Q$  è il punto occupato dalla carica, si ottiene, come si verifica subito, l'espressione (1.7.31) del campo dovuto a  $q$ ; la (1.10.6) ne rappresenta perciò il potenziale.

Applichiamo ora i risultati cui siamo pervenuti nei precedenti paragrafi per calcolare il campo elettrico dovuto ad alcune particolari distribuzioni stazionarie di carica. Cominciamo dal caso di una sfera uniformemente carica. Suddividiamo la sfera in tanti strati sferici di spessore infinitesimo  $dr$  e dimostriamo, innanzitutto, che il campo all'interno di tali strati è nullo. Infatti il campo elettrico dovuto nel punto  $P$  alla carica della porzione di strato sferico contenuta nell'angolo solido  $d\omega$  (vedi fig. (1.10.1)) è:

$$d^2 \vec{E}' = \frac{\rho dr dS}{r_{PQ'}^3} (P - Q') \quad (1.10.7)$$

dove  $\rho$  è la densità di carica,  $dS$  l'elemento di superficie sferica,  $r_{PQ'}$  il modulo della distanza tra  $P$  e il punto  $Q'$  appartenente a  $dS$ . Per la definizione di angolo solido si ha:

$$\frac{dS \cos \alpha}{r_{PQ'}^2} = d\omega \quad (1.10.8)$$



dove  $\alpha$  è l'angolo tra la direzione  $Q' - P$  e la normale alla superficie della sfera nel punto  $Q'$ <sup>(§§)</sup>.

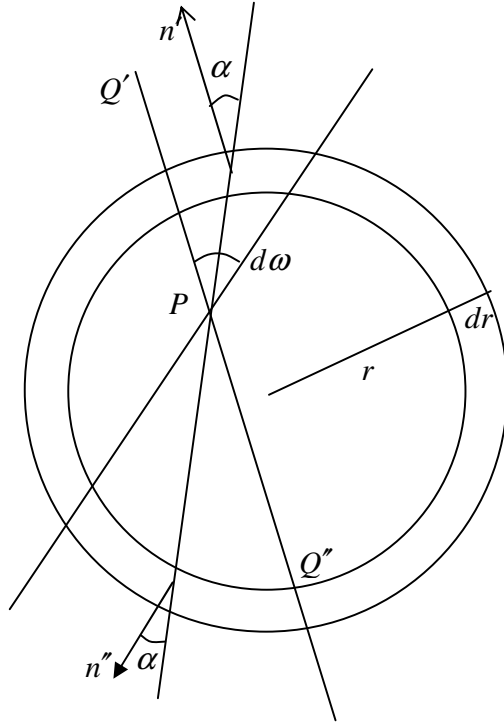


Fig. (1.10.1)

La (1.10.7) diventa perciò:

$$d^2 \vec{E}' = \frac{\rho dr d\omega}{\cos \alpha} \frac{P - Q'}{r_{PQ'}}. \quad (1.10.9)$$

Analogamente il campo dovuto alla porzione di strato sferico opposta è:

---

<sup>(§§)</sup> Si badi che l'angolo  $d\omega$  definito dall'equazione (1.10.8) risulta un numero reale il cui segno coincide con quello di  $\cos \alpha$ .

$$d^2 \vec{E} = \frac{\rho dr d\omega}{\cos \alpha} \frac{P-Q''}{r_{PQ}}. \quad (1.10.10)$$

Risulta quindi:

$$d^2 \vec{E}' + d^2 \vec{E}'' = 0, \quad (1.10.11)$$

ossia gli elementi di strato sferico opposti si compensano dando un campo nullo; l'asserto è così provato.

Dall'equazione (1.10.3) si deduce, di conseguenza, che il potenziale all'interno dello strato sferico è costante; si può quindi valutarlo in un punto qualsiasi, ad esempio al centro. Per far questo usiamo l'espressione (1.9.26) del potenziale in cui  $\rho$  è supposta costante nel tempo, cioè:

$$\mathcal{V}(P) = \int_V \frac{\rho}{r_{PQ}} dV_Q. \quad (1.10.12)$$

Si trova così per il potenziale all'interno di uno strato sferico:

$$d\mathcal{V}_{\text{int}} = 4\pi\rho r dr. \quad (1.10.13)$$

Calcoliamo ora il potenziale in un punto  $P$  esterno. Il contributo di un generico elemento di superficie  $dS$  è

$$d^2 \mathcal{V}_{\text{est}} = \frac{\rho dS dr}{r_{PQ}} \quad (1.10.14)$$

in cui  $r_{PQ}$  è la distanza tra il punto  $P$  ed un punto  $Q$  appartenente al volumetto  $dS dr$  (vedi fig. (1.10.2)).

Dimostriamo che il potenziale (1.10.14) è proporzionale al potenziale interno; per far questo consideriamo, sulla congiungente il punto  $P$  col centro  $O$  dello strato sferico, un punto  $P'$ , detto immagine di  $P$ , tale che:

$$|P-O| \cdot |P'-O| = r^2. \quad (1.10.15)$$

Il punto  $P'$ , di conseguenza, è interno allo strato se il punto  $P$  è esterno. Dalla (1.10.15) si ricava che i triangoli  $POQ$  e  $QOP'$  sono simili; essi infatti hanno comune l'angolo di vertice  $O$  ed hanno i lati proporzionali, cioè:

$$\frac{|P-O|}{|Q-O|} = \frac{|Q-O|}{|P'-O|}. \quad (1.10.16)$$

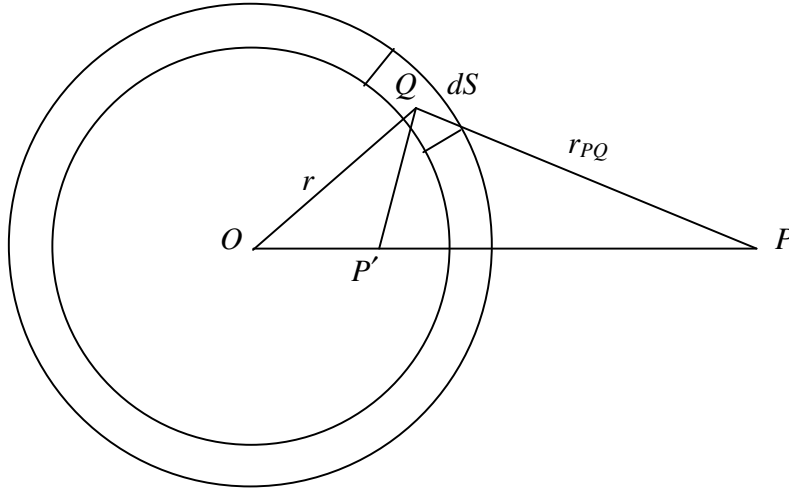


Fig. (1.10.2)

Vale perciò la relazione:

$$\frac{|P-O|}{|P-Q|} = \frac{|Q-O|}{|Q-P'|} \quad (1.10.17)$$

cioè:

$$\frac{1}{r_{PQ}} = \frac{r}{r_{PO}} \cdot \frac{1}{r_{P'Q}} \quad (1.10.18)$$

che sostituita nella (1.10.14) dà:

$$d^2 \mathcal{V}_{\text{est}} = \frac{\rho dS dr}{r_{P'Q}} \cdot \frac{r}{r_{PO}}. \quad (1.10.19)$$

Il termine  $\frac{\rho dSdr}{r_{P'Q}}$  è il potenziale nel punto  $P'$  interno allo strato, dovuto alla carica contenuta nel volumetto  $dSdr$ ; integrando la (1.10.19) su tutto lo strato e ricordando la (1.10.13) si ottiene così:

$$d\mathcal{V}_{\text{est}} = \frac{r}{r_{PO}} d\mathcal{V}_{\text{int}} = \frac{4\pi r^2 \rho dr}{r_{PO}}. \quad (1.10.20)$$

Confrontando questa equazione con la (1.10.6) risulta che lo strato sferico produce nei punti esterni lo stesso potenziale che si avrebbe se tutta la carica fosse concentrata in  $O$ . Ritorniamo ora alla sfera uniformemente carica; il potenziale in un punto interno distante  $r$  dal centro è, evidentemente:

$$\mathcal{V}_{\text{int}}(r) = \int_0^r d\mathcal{V}_{\text{est}} + \int_r^R d\mathcal{V}_{\text{int}} \quad (1.10.21)$$

dove  $R$  è il raggio della sfera. Usando (1.10.20) e (1.10.13) si ha:

$$\mathcal{V}_{\text{int}}(r) = \int_0^r \frac{4\pi\rho}{r'} r'^2 dr' + \int_r^R \rho 4\pi r' dr' = 2\pi\rho \left( R^2 - \frac{1}{3} r^2 \right), \quad (r \leq R). \quad (1.10.22)$$

Integrando la (1.10.20) si ottiene, analogamente, il potenziale in un punto esterno:

$$\mathcal{V}_{\text{est}}(r) = \int_0^R \frac{4\pi\rho r'^2 dr'}{r} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{1}{r}. \quad (1.10.23)$$

Risulta subito dalle (1.10.22) e (1.10.23) che sulla superficie della sfera, cioè per  $r = R$ , il potenziale è continuo. Usando la (1.10.3) si ottengono immediatamente le espressioni del campo elettrico nei punti interni ed esterni alla sfera. Si ha:

$$\vec{E}_{\text{int}}(P) = -\frac{P-O}{r} \frac{d}{dr} \mathcal{V}_{\text{int}}(r) = \frac{4}{3} \pi \rho r \frac{P-O}{r} \quad (r \leq R) \quad (1.10.24)$$

e analogamente:

$$\vec{E}_{\text{est}}(P) = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{P-O}{r^3} \quad (r \geq R). \quad (1.10.25)$$

In fig. (1.10.3) sono riportati gli andamenti del potenziale e del campo dati dalle equazioni (1.10.22), (1.10.23), (1.10.24) e (1.10.25).

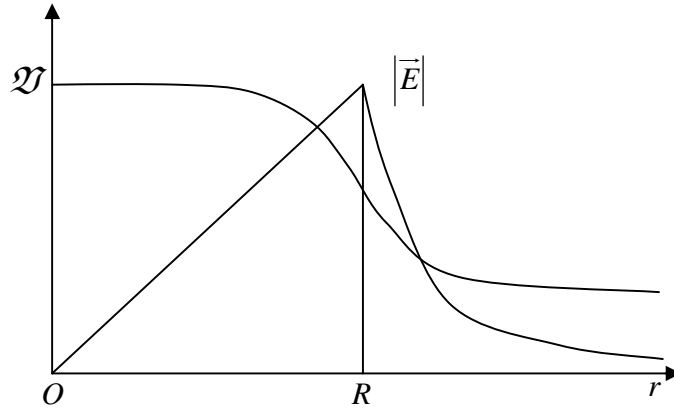


Fig. (1.10.3)

Da essa risulta che, mentre il potenziale decresce monotonicamente, il campo invece è massimo sulla superficie, cioè per  $r = R$ .

Un altro caso di notevole interesse, che ora tratteremo, è quello del piano uniformemente carico. A questo scopo supponiamo che nello spazio compreso fra due piani illimitati, paralleli e situati a distanza  $\varepsilon$  arbitrariamente piccola, sia contenuta una distribuzione di carica a densità  $\rho$  costante. Nel volumetto  $\varepsilon dS$  sarà perciò contenuta la carica:

$$dq = \rho \varepsilon dS. \quad (1.10.26)$$

Facciamo l'ipotesi che per  $\varepsilon$  tendente a zero si abbia:

$$\rho \varepsilon = \sigma. \quad (1.10.27)$$

La (1.10.26) diventa:

$$dq = \sigma dS, \quad (1.10.28)$$

in cui  $\sigma$  rappresenta la densità superficiale di carica. Valutiamo il campo dovuto a questa distribuzione di cariche. Consideriamo la carica  $dq$  associata all'elemento di superficie  $dS$ ; il campo da essa prodotto in un punto  $P$  è, ricordando la (1.7.30):

$$d\vec{E} = \frac{\sigma dS}{r_{PQ}^3} (P - Q), \quad (1.10.29)$$

dove  $Q$  è un punto interno a  $dS$  (vedi fig. (1.10.4)).

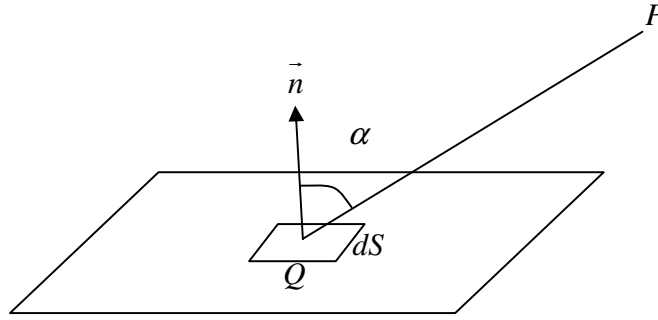


Fig. (1.10.4)

Indicando con  $\alpha$  l'angolo fra il vettore  $P - Q$  e la normale al piano abbiamo, usando la definizione (1.10.8) di angolo solido:

$$d\vec{E} = \frac{\sigma d\omega}{\cos \alpha} \frac{(P - Q)}{r_{PQ}}. \quad (1.10.30)$$

Dalla (1.10.30) risulta che la componente di  $d\vec{E}$  normale al piano vale:

$$d\vec{E} \cdot \vec{n} = \sigma d\omega. \quad (1.10.31)$$

Integrando la (1.10.30) su tutto il piano le componenti parallele dei contributi  $d\vec{E}$  dovute ai vari elementi di superficie, per ovvie ragioni di simmetria, si elidono a vicenda; rimangono le sole componenti normali. Di conseguenza, tenendo conto che l'integrale su  $d\omega$  relativo all'intero piano vale  $2\pi$  abbiamo dalla (1.10.31):

$$\vec{E} = 2\pi\sigma\vec{n}; \quad (1.10.32)$$

il campo cioè è indipendente dalla distanza dal piano. Questo risultato e il precedente, relativo alla distribuzione sferica di carica, possono essere ottenuti, eventualmente, anche utilizzando l'equazione (1.6.13), cioè il teorema di Gauss.

Useremo questo procedimento per ricavare la discontinuità del campo elettrico attraverso una distribuzione superficiale di carica di forma qualsiasi. A questo scopo, dato un elemento  $dS$  di superficie, consideriamo il volumetto compreso fra le superfici  $dS'$  e  $dS''$  situate da bande opposte rispetto a  $dS$  ed ottenute spostando  $dS$  parallelamente a sé stesso (vedi fig. (1.10.5)).

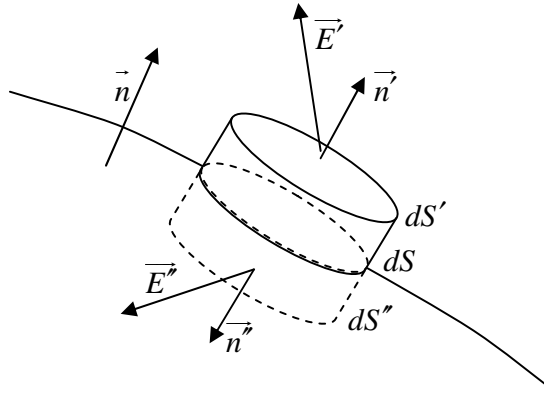


Fig. (1.10.5)

Supponiamo  $dS'$  e  $dS''$  abbastanza vicine da poter trascurare, relativamente ad esse, la superficie che limita lateralmente questo volumetto. Il flusso uscente è di conseguenza:

$$d\Phi_{\vec{E}} = (\vec{E}' \cdot \vec{n}' + \vec{E}'' \cdot \vec{n}'') dS \quad (1.10.33)$$

dove  $\vec{E}'$  ed  $\vec{E}''$ ,  $\vec{n}'$  ed  $\vec{n}''$  sono, rispettivamente, il campo e la normale uscente su  $dS'$  e  $dS''$ . Per il teorema di Gauss (1.6.13) si ha:

$$d\Phi_{\vec{E}} = 4\pi\sigma dS \quad (1.10.34)$$

per cui

$$\vec{E}'_n - \vec{E}''_n = 4\pi\sigma \quad (1.10.35)$$

dove  $\vec{E}'_n$  ed  $\vec{E}''_n$  sono le componenti del campo lungo la normale  $\vec{n}$  alla superficie in due punti situati da bande opposte ed infinitamente vicini. L'equazione (1.10.35) stabilisce che la discontinuità della componente normale del campo è proporzionale alla densità di carica superficiale. Dimostriamo ora che la componente del campo tangente

alla superficie è, viceversa, continua. Per far questo consideriamo su un piano normale alla superficie un rettangolo  $\gamma$  arbitrariamente piccolo, di cui due lati siano paralleli alla superficie e situati da bande opposte rispetto ad essa, mentre gli altri due, ortogonali alla superficie, siano infinitesimi rispetto ai primi (vedi fig. (1.10.6)).

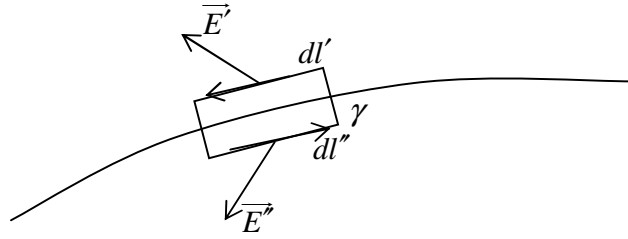


Fig. (1.10.6)

Applichiamo a questo rettangolo l'equazione (1.6.9); ricordando la (1.10.1) si ha:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.10.36)$$

ossia:

$$E'_t dl' - E''_t dl'' = 0 \quad (1.10.37)$$

dove  $E'_t$  ed  $E''_t$  sono le componenti tangenziali del campo in due punti infinitamente vicini alla superficie e situati da bande opposte. Essendo i lati opposti di eguale lunghezza, otteniamo dalla (1.10.37):

$$E'_t - E''_t = 0 \quad (1.10.38)$$

che è appunto quanto si voleva stabilire.



## 1.11 Potenziale e campo del dipolo e del doppio strato elettrico

Consideriamo ora un dipolo elettrico, cioè (vedi paragrafo 1.5) due cariche  $-q$  e  $+q$  collocate rispettivamente nei punti  $Q$  e  $Q + \Delta\vec{Q}$  e tali che al tendere a zero di  $\Delta\vec{Q}$  si abbia:

$$\lim_{\Delta\vec{Q} \rightarrow 0} q\Delta\vec{Q} = \vec{p}. \quad (1.11.1)$$

Tenendo conto della (1.10.6), il potenziale del dipolo vale:

$$\mathcal{V}(P) = \lim_{\Delta\vec{Q} \rightarrow 0} q \left( \frac{1}{r_{P, Q + \Delta\vec{Q}}} - \frac{1}{r_{PQ}} \right). \quad (1.11.2)$$

Per valutare il limite osserviamo che si ha:

$$\frac{1}{r_{P, Q + \Delta\vec{Q}}} = \frac{1}{r_{PQ}} + \frac{d\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)}{d|\vec{Q}|} |\Delta\vec{Q}| + \dots \quad (1.11.3)$$

per cui a meno di termini infinitesimi di ordine superiore rispetto a  $\Delta\vec{Q}$  la (1.11.2) diventa:

$$\mathcal{V}(P) = \lim_{\Delta\vec{Q} \rightarrow 0} q |\Delta\vec{Q}| \frac{d\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)}{d|\vec{Q}|}. \quad (1.11.4)$$

D'altra parte possiamo scrivere:

$$\frac{d\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)}{d|\vec{Q}|} = \frac{d\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)}{dx_Q} \frac{dx_Q}{d|\vec{Q}|} + \frac{d\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)}{dy_Q} \frac{dy_Q}{d|\vec{Q}|} + \frac{d\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)}{dz_Q} \frac{dz_Q}{d|\vec{Q}|} = \text{grad}_Q \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right) \cdot \frac{d\vec{Q}}{d|\vec{Q}|}. \quad (1.11.5)$$

Sostituendo questa equazione nella (1.11.4) ed osservando che, per la definizione di differenziale,  $\Delta\vec{Q}$  al limite coincide con  $d\vec{Q}$ , si ottiene, ricordando la (1.11.1):

$$\mathcal{V}(P) = \lim_{\Delta \vec{Q} \rightarrow 0} \text{grad}_Q \frac{1}{r_{PQ}} \cdot \frac{d\vec{Q}}{|\Delta \vec{Q}|} q |\Delta \vec{Q}| = \vec{p} \cdot \text{grad}_Q \frac{1}{r_{PQ}}, \quad (1.11.6)$$

ossia eseguendo il gradiente (vedi equazione (1.7.20)):

$$\mathcal{V}(P) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{P} - \vec{Q})}{r_{PQ}^3}, \quad (1.11.7)$$

che è l'espressione del potenziale del dipolo. Indicando con  $\vartheta$  l'angolo fra il momento  $\vec{p}$  e la distanza  $(\vec{P} - \vec{Q})$  fra il dipolo ed il punto potenziato, la (1.11.7) può anche essere scritta nella forma:

$$\mathcal{V}(P) = \frac{|\vec{p}| \cos \vartheta}{r_{PQ}^2}. \quad (1.11.8)$$

In fig. (1.11.1) è illustrato l'andamento delle superfici equipotenziali di un dipolo (curve tratteggiate).

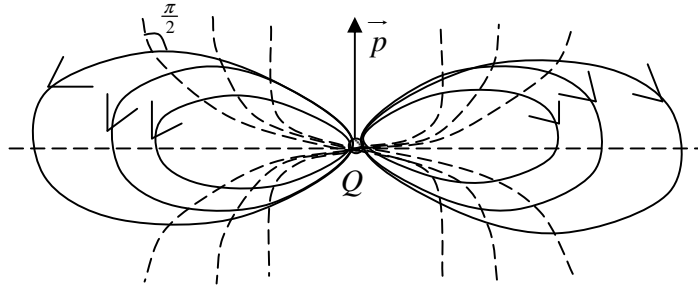


Fig. (1.11.1)

Il campo può essere ottenuto come al solito per derivazione mediante la (1.10.3); si ha<sup>(\*\*\*)</sup>:

$$\vec{E} = -\text{grad}_P \frac{\vec{p} \cdot (P-Q)}{r_{PQ}^3} = -\frac{1}{r_{PQ}^3} \left[ \vec{p} - 3 \frac{\vec{p} \cdot (P-Q)}{r_{PQ}^2} (P-Q) \right]. \quad (1.11.9)$$

Risulta dunque che il campo decresce colla terza potenza della distanza mentre il potenziale dipende dalla seconda. Utilizzando coordinate polari, con asse parallelo al momento  $\vec{p}$ , le componenti non nulle del campo sono, come si verifica subito mediante la (1.11.8):

$$E_r = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} = 2 \left| \vec{p} \right| \frac{\cos \vartheta}{r_{PQ}^3}, \quad (1.11.10)$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vartheta} = \left| \vec{p} \right| \frac{\sin \vartheta}{r_{PQ}^3}. \quad (1.11.11)$$

In fig. (1.11.1) sono riportate le linee di forza corrispondenti alle equazioni (1.11.10) e (1.11.11); appare subito che esse, come si è a suo tempo dimostrato, sono ortogonali alle superfici equipotenziali.

Dai precedenti risultati è facile ottenere il potenziale dovuto ad un doppio strato elettrico. Esso è costituito da due distribuzioni di carica, eguali in modulo, ma opposte in segno, su due superfici parallele ed infinitamente vicine. Questo sistema di cariche equivale perciò ad una distribuzione superficiale di dipoli tale che ad ogni elemento di superficie sia associato un dipolo elementare  $d\vec{p}$  ad esso ortogonale, cioè:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_P} \left( \frac{p_x(Q)(x_P - x_Q) + p_y(Q)(y_P - y_Q) + p_z(Q)(z_P - z_Q)}{r_{PQ}^3} \right) = \frac{1}{r_{PQ}^3} p_x + \left[ p_x(x_P - x_Q) + p_y(y_P - y_Q) + p_z(z_P - z_Q) \right] \frac{\partial}{\partial x_P} \left( \frac{1}{r_{PQ}^3} \right) = \\ & \frac{1}{r_{PQ}^3} p_x + \vec{p} \cdot (P-Q) \frac{\partial}{\partial x_P} \left( \frac{1}{r_{PQ}^3} \right) = \frac{1}{r_{PQ}^3} p_x - 3r_{PQ}^{-4} \vec{p} \cdot (P-Q) \frac{\partial r_{PQ}}{\partial x_P} = \frac{1}{r_{PQ}^3} p_x - 3r_{PQ}^{-4} \vec{p} \cdot (P-Q) \frac{(x_P - x_Q)}{r_{PQ}} = \\ & \frac{1}{r_{PQ}^3} \left[ p_x - 3 \frac{\vec{p} \cdot (P-Q)}{r_{PQ}^2} (x_P - x_Q) \right] \end{aligned}$$

[n.d.c.].

$$d\vec{p} = \vec{\mathcal{P}} dS = |\vec{\mathcal{P}}| \vec{n} dS \quad (1.11.12)$$

dove la normale  $\vec{n}$  è orientata verso la carica positiva. Il vettore  $\vec{\mathcal{P}}$  prende il nome di potenza del doppio strato. Il potenziale ad esso dovuto è la somma dei potenziali dovuti ai vari elementi  $d\vec{p}$ , cioè<sup>(†††)</sup>:

$$\mathcal{V}(P) = \int_S \vec{\mathcal{P}}(Q) \cdot \text{grad}_Q \frac{1}{r_{PQ}} dS_Q. \quad (1.11.13)$$

In generale  $\vec{\mathcal{P}}$  è funzione del punto  $Q$  considerato sulla superficie del doppio strato; quando ciò non accade il doppio strato viene detto uniforme. In quest'ultimo caso il potenziale di doppio strato assume una forma particolarmente semplice. Si ha infatti calcolando il gradiente:

$$\mathcal{V}(P) = |\vec{\mathcal{P}}| \int_S \frac{(P-Q) \cdot \vec{n}}{r_{PQ}^3} dS_Q, \quad (1.11.14)$$

ossia, indicando con  $\alpha$  l'angolo tra  $\vec{n}$  ed il vettore  $Q-P$ :

$$\mathcal{V}(P) = -|\vec{\mathcal{P}}| \int_S \frac{\cos \alpha}{r_{PQ}^2} dS_Q. \quad (1.11.15)$$

Questa equazione, ricordando la (1.10.8), diventa:

$$\mathcal{V}(P) = -|\vec{\mathcal{P}}| \omega_p \quad (1.11.16)$$

in cui  $\omega_p$  è l'angolo solido sotto cui dal punto  $P$  è vista la superficie del doppio strato. Il segno del potenziale dipende da quello di  $\omega_p$  ed è perciò positivo (vedi nota all'equazione (1.10.8)) dal lato del doppio strato cui sono affacciate le cariche positive.<sup>(†††)</sup> Quando la distanza tra il punto  $P$  e la superficie  $S$  diventa infinitesima il mo-

---

<sup>(†††)</sup> Dalla (1.11.6) [n.d.c.].

dulo dell'angolo  $\omega_p$  tende a  $2\pi$ . Ne risulta, considerando due punti infinitamente vicini alla superficie e situati da bande opposte, che il potenziale è discontinuo attraverso il doppio strato, e la discontinuità vale in modulo:

$$\Delta \mathcal{V} = 4\pi |\vec{\mathcal{P}}|. \quad (1.11.17)$$

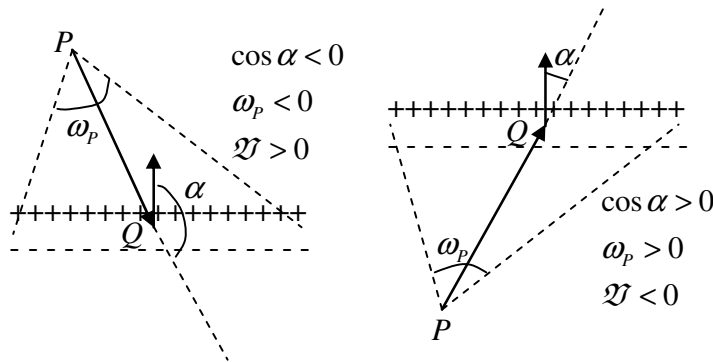
Questo risultato vale, però, anche se il doppio strato non è uniforme. Infatti, quando il punto  $P$  giace sulla superficie  $S$  la funzione sotto segno di integrale nella (1.11.13) diventa, come si vede facilmente, infinita quando  $Q$  si avvicina a  $P$ . Di conseguenza solo uno stretto intorno di  $P$  contribuisce efficacemente al potenziale e vale, perciò, la (1.11.17) in cui  $\Delta \mathcal{V}$  e  $|\vec{\mathcal{P}}|$  sono calcolati entrambi nello stesso punto  $P$ .

Mediante la (1.11.16) si può facilmente ottenere il campo elettrico di un doppio strato. Consideriamo il caso in cui esso è uniformemente distribuito su un cerchio di raggio  $R$  e calcoliamo il campo in un punto  $P$  situato lungo l'asse (vedi fig. (1.11.2)). Indicando con  $x$  la distanza tra  $P$  e il centro  $O$  del cerchio la (1.11.16) diventa<sup>(§§§)</sup>:

$$\mathcal{V}(P) = -|\vec{\mathcal{P}}| 2\pi (1 - \cos \vartheta) = -|\vec{\mathcal{P}}| 2\pi \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) \quad (1.11.18)$$

in cui  $\vartheta$  indica la semiapertura dell'angolo solido  $\omega_p$ .

(†††)



[n.d.c.].

$$^{(\S\S\S)} \omega_p = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\vartheta} \sin \alpha d\alpha = 2\pi (1 - \cos \vartheta) \quad [\text{n.d.c.}].$$

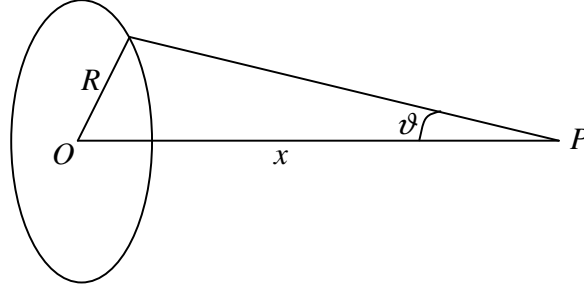


Fig. (1.11.2)

Per ovvie ragioni di simmetria il campo sarà diretto lungo l'asse del cerchio, cioè lungo l'asse  $x$ . Si ha perciò, applicando la (1.10.3):

$$\vec{E} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \vec{i} = -2\pi \vec{\mathcal{P}} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (1.11.19)$$

Quando il punto  $P$  coincide col centro  $O$  si ha semplicemente:

$$\vec{E} = -2\pi \frac{\vec{\mathcal{P}}}{R}. \quad (1.11.20)$$

Nei punti situati fuori dell'asse l'espressione del campo è notevolmente più complessa.

## 1.12 Legge di Biot e Savart - Principio di equivalenza

Il calcolo del campo magnetico statico, prodotto da correnti stazionarie, può essere eseguito partendo dall'equazione (1.7.22). Trattiamo dapprima il caso in cui  $\vec{j}$  è diverso da zero solo all'interno di un cilindro illimitato di raggio infinitesimo rispetto alla distanza dal punto in cui si vuole valutare il campo. Entro questo volume supponiamo che  $\vec{j}$  sia costante (vedi fig. (1.12.1)).

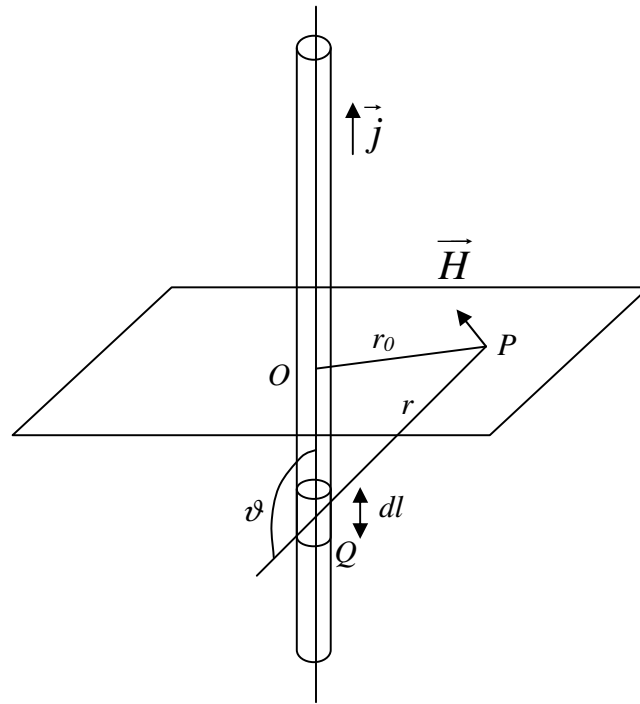


Fig. (1.12.1)

Consideriamo un elemento di cilindro di altezza infinitesima  $dl$ , indichiamone con  $\Delta S$  la sezione e con  $Q$  un punto in esso contenuto. Il campo magnetico nel punto  $P$  è<sup>(\*\*\*\*)</sup>:

$$d\vec{H} = \frac{1}{c} \Delta S \, dl \frac{(Q-P) \wedge \vec{j}}{r_{PQ}^3}. \quad (1.12.1)$$

(\*\*\*\*) Dalle (1.7.25), (1.2.20) [n.d.c.].

Da questa equazione risulta subito che, qualunque sia il punto  $Q$ ,  $d\vec{H}$  giace su un piano normale a  $\vec{j}$  ed è ortogonale alla direzione  $P - Q$ ; i contributi  $d\vec{H}$  dovuti a tutti gli elementi di cilindro sono perciò tra loro paralleli. Per calcolarne il modulo indichiamo con  $\vartheta$  l'angolo tra  $\vec{j}$  e  $Q - P$  e con  $r_0$  la distanza tra  $P$  e il punto  $O$  proiezione di  $Q$  sul piano normale a  $\vec{j}$  passante per  $P$ . Si ha:

$$l = r_0 \cotg \vartheta \quad (1.12.2)$$

dove  $l$  è l'ascissa di  $Q$  riferita all'origine  $O$ , e:

$$r_{PQ} = \frac{r_0}{\sin \vartheta}. \quad (1.12.3)$$

Mediante le (1.12.2) e (1.12.3) la (1.12.1) diventa:

$$\left| d\vec{H} \right| = -\frac{1}{c} \Delta S \, d\vartheta \frac{|\vec{j}|}{r_0} \sin \vartheta, \quad (1.12.4)$$

Da cui integrando per  $l$  variabile lungo tutto il cilindro, cioè  $\vartheta$  compreso tra  $\pi$  e  $0$ , si ottiene:

$$\left| \vec{H} \right| = \frac{2}{c} \frac{|\vec{j}| \Delta S}{r_0}, \quad (1.12.5)$$

ossia, ricordando la definizione (1.2.16) dell'intensità di corrente:

$$\left| \vec{H} \right| = \frac{2I}{cr_0} \quad (1.12.6)$$

che è la legge di Biot e Savart sul campo magnetico prodotto da una corrente stazionaria rettilinea. Le linee di forza di questo campo sono, per la (1.1.2.1), circonferenze di centro  $O$  giacenti nei piani normali a  $\vec{j}$ .

Nel caso in cui la sezione del cilindro è di dimensioni non trascurabili rispetto alla distanza dal punto in cui si considera  $\vec{H}$ , occorre eseguire l'integrazione della equazione (1.12.5) su tutti gli elementi di sezione  $dS$ . Ciò conduce in generale a dei



calcoli alquanto complicati, tuttavia per un cilindro a sezione circolare, di raggio  $R$ , è possibile, usando la relazione di Ampère (1.6.8), valutare il campo in modo molto semplice. Infatti, in questo caso il campo, per ovvie ragioni di simmetria, è costante in modulo lungo le circonferenze concentriche al cilindro e giacenti nel piano normale al suo asse. La circuitazione di  $\vec{H}$  su una di tali circonferenze è pertanto:

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi |\vec{H}| r_0 \quad (1.12.7)$$

dove  $r_0$  è il raggio del cerchio. Applicando la (1.6.8), in cui si sia posta uguale a zero la corrente di spostamento e supponendo  $r_0$  maggiore di  $R$  si riottiene la (1.12.6) in cui  $I$  indica la corrente che fluisce nell'intero cilindro. Quando invece  $r_0$  è minore di  $R$  si ottiene ancora la (1.12.6) salvo che in essa compare al secondo membro la frazione di corrente che fluisce attraverso l'area  $\pi r_0^2$ . Se  $\vec{j}$  è costante nel cilindro, questa frazione di corrente vale:  $I \frac{r_0^2}{R^2}$ . Si ha perciò, per  $r_0 < R$ :

$$|\vec{H}| = \frac{2Ir_0}{cR^2}. \quad (1.12.8)$$

Un altro caso di fondamentale importanza è quello in cui una corrente stazionaria circola su un percorso chiuso. Per calcolare il campo magnetico, supponiamo  $\vec{j}$  diverso da zero solo all'interno di un volumetto filiforme avente per asse la linea chiusa  $\gamma$ . Indicando con  $I$  la corrente attraverso la sezione normale a  $\gamma$  e ricordando la (1.7.23), il campo in un punto  $P$  risulta:

$$\vec{H}(P) = \frac{I}{c} \int_{\gamma} \frac{(Q-P) \wedge d\vec{l}}{r_{PQ}^3}. \quad (1.12.9)$$

Introduciamo una terna di assi cartesiani di riferimento arbitrariamente orientati; la componente  $x$  del campo vale:

$$H_x(P) = \frac{I}{c} \int_{\gamma} \frac{(Q-P) \wedge d\vec{l} \cdot \hat{i}}{r_{PQ}^3} \quad (1.12.10)$$

da cui, per la proprietà ciclica del prodotto misto di tre vettori:

$$H_x(P) = \frac{I}{c} \int_{\gamma} \frac{\hat{i} \wedge (Q-P)}{r_{PQ}^3} \cdot d\vec{l} . \quad (1.12.11)$$

Applicando alla (1.12.11) il teorema di Stokes si ha:

$$H_x(P) = \frac{I}{c} \int_S \text{rot}_Q \left[ \frac{\hat{i} \wedge (Q-P)}{r_{PQ}^3} \right] \cdot \vec{n} dS \quad (1.12.12)$$

dove  $S$  è una qualunque superficie avente per orlo la linea  $\gamma$ . Mediante la (9.3.21) il rotore che figura nella (1.12.12) può essere così trasformato:

$$\text{rot}_Q \left[ \frac{\hat{i} \wedge (Q-P)}{r_{PQ}^3} \right] = \hat{i} \text{div}_Q \frac{(Q-P)}{r_{PQ}^3} - (\hat{i} \cdot \text{grad}_Q) \frac{(Q-P)}{r_{PQ}^3} . \quad (1.12.13)$$

Applicando la (9.3.28) e la (9.3.31) si vede subito che il primo termine a secondo membro della (1.12.13) è nullo; infatti:

$$\text{div}_Q \frac{(Q-P)}{r_{PQ}^3} = -\text{div}_Q \text{grad}_Q \frac{1}{r_{PQ}} = -\Delta_{2Q} \frac{1}{r_{PQ}} = 0 . \quad (1.12.14)$$

Sostituendo la (1.12.13) nella (1.12.12) si trova così:

$$H_x(P) = -\frac{I}{c} \int_S \frac{\partial}{\partial x_Q} \left[ \frac{(Q-P)}{r_{PQ}^3} \right] \cdot \vec{n} dS . \quad (1.12.15)$$

Dato che la distanza tra i punti  $P$  e  $Q$  dipende da  $x_Q$  solo attraverso la differenza  $x_P - x_Q$ , possiamo trascrivere la (1.12.15) nella forma<sup>(††††)</sup>:

---

(††††)

Posto  $x_{PQ} = x_P - x_Q$  e  $\mathcal{F}(P) = \int_S f(x_{PQ}, \dots) dS$ , allora  $\frac{\partial f}{\partial x_Q} = \frac{\partial f}{\partial x_{PQ}} \frac{\partial x_{PQ}}{\partial x_Q} = -\frac{\partial f}{\partial x_{PQ}}$ ,

$$H_x(P) = \frac{\partial}{\partial x_P} \frac{I}{c} \int_S \frac{(Q-P)}{r_{PQ}^3} \cdot \vec{n} dS. \quad (1.12.16)$$

Applicando lo stesso procedimento alle componenti  $y$  e  $z$  si ottiene in definitiva:

$$\vec{H}(P) = -\text{grad}_P \mathcal{F}(P), \quad (1.12.17)$$

dove:

$$\mathcal{F}(P) = \frac{I}{c} \int_S \frac{(P-Q)}{r_{PQ}^3} \cdot \vec{n} dS. \quad (1.12.18)$$

Il campo magnetico risulta così espresso, analogamente al campo elettrico, come gradiente del potenziale scalare  $\mathcal{F}$ . Quest'ultimo ha la stessa forma del potenziale di un doppio strato elettrico uniforme (vedi equazione (1.11.14)) salvo la sostituzione del modulo della potenza con la quantità  $\frac{I}{c}$ . Ne segue che una linea chiusa  $\gamma$  percorsa da una corrente stazionaria equivale a un doppio strato magnetico, distribuito sulla superficie  $S$ , di potenza:

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{I}{c} \vec{n}. \quad (1.12.19)$$

Se si suppone che la superficie  $S$  tenda a zero e che la corrente  $I$  cresca in modo che l'equazione (1.5.18) sia verificata, la (1.12.18) assume la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_P} \mathcal{F}(P) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(P+\delta) - \mathcal{F}(P)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_S f(x_{PQ} + \delta, \dots) dS - \int_S f(x_{PQ}, \dots) dS}{\delta} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_S f(x_{PQ}, \dots) dS + \int_S \delta \frac{\partial}{\partial x_{PQ}} f(x_{PQ}, \dots) dS + \dots - \int_S f(x_{PQ}, \dots) dS}{\delta} = \\ &= \int_S \frac{\partial}{\partial x_{PQ}} f(x_{PQ}, \dots) dS = - \int_S \frac{\partial}{\partial x_Q} f(x_{PQ}, \dots) dS \end{aligned}$$

[n.d.c.].

$$\mathcal{F}(P) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{I}{c} \int_S \frac{(P-Q)}{r_{PQ}^3} \cdot \vec{n} dS = \frac{(P-O)}{r_{PO}^3} \cdot \lim_{S \rightarrow 0} \int_S \frac{I}{c} \vec{n} dS = \frac{(P-O) \cdot \vec{m}}{r_{PO}^3}, \quad (1.12.20)$$

dove  $O$  è un punto qualunque appartenente ad  $S$  ed  $\vec{m}$  il momento del dipolo magnetico associato alla corrente che circola lungo  $\gamma$ . È manifesta l'analogia tra questa equazione e la (1.11.7). Si può pertanto concludere che anche in questo caso è applicabile il teorema di equivalenza già incontrato nel paragrafo 1.5 a proposito del momento torcente con cui un campo magnetico esterno agisce sulla corrente che percorre  $\gamma$ . Questo teorema venne utilizzato da Ampère come legge fondamentale sull'effetto magnetico delle correnti stazionarie; di qui il nome di "principio di equivalenza" spesso usato nella letteratura. Da esso, in effetti, si potrebbe risalire, nel caso in cui la corrente di spostamento è nulla, alla equazione di Maxwell (1.6.1)<sup>(\*\*\*\*)</sup>.

Analogamente a quanto si è fatto nel paragrafo precedente riguardo al doppio strato elettrico, possiamo calcolare il campo in un punto  $P$  situato lungo l'asse di una circonferenza  $\gamma$  percorsa da corrente. Indicando con  $z$  la distanza di  $P$  dal centro  $O$  della circonferenza e con  $R$  il raggio, si ha, per confronto con la (1.11.18):

$$\mathcal{F}(P) = -\frac{I}{c} 2\pi \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right). \quad (1.12.21)$$

<sup>(\*\*\*\*)</sup> In modo del tutto analogo alla (1.11.18) abbiamo:  $\Delta \mathcal{F} = 4\pi \left| \overline{\mathcal{M}} \right| = \frac{4\pi}{c} I$ ; da questa e dalla

(1.12.17) è anche  $\Delta \mathcal{F} = \oint \text{grad}_Q \mathcal{F} d\vec{l} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$ . Ora, poiché  $\vec{j} \parallel d\vec{l}$ , abbiamo pure:

$\oint I d\vec{l} = \int \vec{j} dV = \int \vec{j} (d\vec{S} \cdot d\vec{l}) = \oint \left( \int \vec{j} \cdot d\vec{S} \right) \cdot d\vec{l}$ , da cui risulta:  $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$ . Dal teorema di

Stokes si ottiene infine:  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$ , che si può riscrivere come

$\int \left( \text{rot} \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) \cdot d\vec{S} = 0$ . Da quest'ultima, nell'ipotesi in cui la corrente di spostamento

$I_s = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  sia nulla, segue immediatamente la (1.6.1) per l'arbitrarietà della superficie

d'integrazione. Vedasi anche, ad esempio, la trattazione in "Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi" - Vol. III - Parte I - Hoepli - Milano 1967 - pagg. 372-3 e 408, basata sulla polidromia del potenziale magnetico [n.d.c.].

Il modulo del campo magnetico, che ovviamente è parallelo a  $(P-O)$ , vale di conseguenza:

$$|\vec{H}| = 2\pi \frac{I}{c} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (1.12.22)$$

e, per  $P$  coincidente con  $O$ :

$$|\vec{H}| = 2\pi \frac{I}{c} \frac{1}{R}. \quad (1.12.23)$$

Queste equazioni possono essere facilmente ritrovate usando direttamente la legge di Laplace<sup>(§§§§)</sup>.

Il calcolo del campo in un punto situato fuori dell'asse è alquanto più complicato: conviene, in questo caso, utilizzare il potenziale vettore  $\vec{A}$ . Partendo dalla (1.9.25) e ricordando la (1.2.20) si ha l'equazione:

$$\vec{A}(P) = \frac{I}{c} \oint_{\gamma} \frac{d\vec{l}_Q}{|P-Q|} \quad (1.12.24)$$

dove  $I$  è la corrente che circola lungo  $\gamma$ . Per valutare l'integrale introduciamo un sistema di coordinate cilindriche con origine nel centro di  $\gamma$ , il versore  $\vec{k}$  ortogonale al piano della circonferenza ed il versore  $\vec{i}$  giacente nel piano passante per  $\vec{k}$  e per il punto in cui si vuole determinare  $\vec{A}$  (vedi fig. (1.12.2)). È manifesto che nell'integrazione le componenti di  $d\vec{l}_Q$  parallele a  $\vec{i}$  si eliminano a vicenda per cui solo quelle parallele a  $\vec{j}$  danno un contributo non nullo (confronta nella figura i contributi delle componenti di  $d\vec{l}_Q$  e  $d\vec{l}_Q'$ ). Si ottiene perciò:

---

<sup>(§§§§)</sup> Dalla (1.7.25):

$$|\vec{H}| = |H_z| = \frac{I}{c} \oint \frac{R dl}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} d\vartheta = 2\pi \frac{I}{c} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad [\text{n.d.c.}].$$

$$\left. \begin{aligned} A_r = A_z = 0, \\ A_\varphi(P) = \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{R \cos \varphi d\varphi}{|P-Q|}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12.25)$$

Tenendo conto che la distanza  $|P-Q|$  è esprimibile mediante la relazione:

$$|P-Q| = \sqrt{(r-R\cos\varphi)^2 + R^2 \sin^2 \varphi + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi}, \quad (1.12.26)$$

L'espressione di  $A_\varphi$  diventa:

$$A_\varphi = \frac{IR}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{r^2 + z^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi}}. \quad (1.12.27)$$

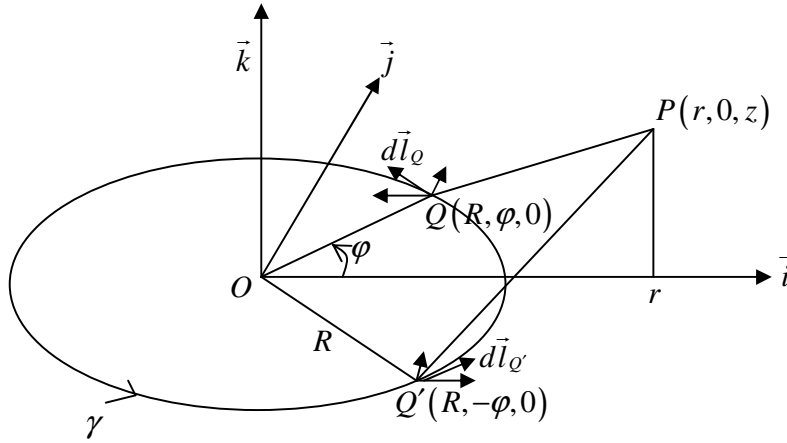


Fig. (1.12.2)

Ponendo:

$$\varphi = \pi + 2\vartheta \quad (1.12.28)$$

e cioè:

$$\cos \varphi = 2 \sin^2 \vartheta - 1; \quad (1.12.29)$$

si ha:

$$A_{\varphi}(P) = \frac{2IR}{c} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin^2 \vartheta - 1) d\vartheta}{\sqrt{(r+R)^2 + z^2 - 4rR \sin^2 \vartheta}}. \quad (1.12.30)$$

Introducendo la quantità:

$$k = \sqrt{\frac{4rR}{(r+R)^2 + z^2}} \quad (1.12.31)$$

ed osservando che  $\sin^2 \vartheta$  nell'intervallo da  $-\frac{\pi}{2}$  a  $+\frac{\pi}{2}$  è simmetrico attorno a  $\vartheta=0$ ,  
la (1.12.30) assume la forma:

$$A_{\varphi}(P) = \frac{2I}{c} \sqrt{\frac{R}{r}} k \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 \vartheta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta. \quad (1.12.32)$$

Mediante l'identità:

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \equiv \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} \right); \quad (1.12.33)$$

possiamo scrivere ancora:

$$A_{\varphi}(P) = \frac{4I}{ck} \sqrt{\frac{R}{r}} \left[ \left( 1 - \frac{k^2}{2} \right) \mathcal{J}_1(k) - \mathcal{J}_2(k) \right] \quad (1.12.34)$$

dove:

$$\mathcal{J}_1(k) = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \quad (1.12.35)$$

e:

$$\mathcal{J}_2(k) = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta \quad (1.12.36)$$

sono gli integrali ellittici di Legendre<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>.

Per calcolare le componenti del campo osserviamo, innanzitutto, che valgono le equazioni<sup>(†††††)</sup>:

$$\frac{d\mathcal{J}_1}{dk} = \frac{1}{k} \left( \frac{\mathcal{J}_2}{1-k^2} - \mathcal{J}_1 \right) \quad (1.12.37)$$

e:

$$\frac{d\mathcal{J}_2}{dk} = \frac{1}{k} (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1). \quad (1.12.38)$$

Inoltre, derivando la (1.12.31), rispetto a  $r$  e a  $z$ , si ha:

(\*\*\*\*\*) Vedi ad esempio E.T. Whittaker, G.N. Watson – A course of modern analysis – Cambridge 1952 – Cap. XXII.

(†††††) Si ha infatti:

$$\frac{d\mathcal{J}_1}{dk} = -\frac{1}{k} \mathcal{J}_1 + \frac{1}{k} \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}.$$

D'altra parte considerando l'identità:

$$\frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta}} \right) \equiv \sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{1-k^2}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}$$

ed integrandola tra  $0$  e  $\frac{\pi}{2}$  si ha la relazione:

$$\frac{1}{1-k^2} \mathcal{J}_2(k) = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(1-k^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}};$$

essa sostituita nell'espressione di  $\frac{d\mathcal{J}_1}{dk}$  fornisce subito la (1.12.37). La (1.12.38) può essere ottenuta direttamente derivando sotto il segno di integrale.



$$\frac{dk}{dr} = \frac{k}{2r} - \frac{k^3}{4} \frac{r+R}{rR}, \quad (1.12.39)$$

$$\frac{dk}{dz} = -\frac{k^3 z}{4rR}. \quad (1.12.40)$$

In questo modo, utilizzando la (1.8.1) e la (9.3.67) e procedendo con un calcolo un po' lungo ma diretto, si ottiene:

$$H_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{I}{c} \frac{kz}{r\sqrt{Rr}} \left[ -\mathcal{J}_1(k) + \frac{R^2 + r^2 + z^2}{(R-r)^2 + z^2} \mathcal{J}_2(k) \right], \quad (1.12.41)$$

$$H_\varphi = 0, \quad (1.12.42)$$

e:

$$H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} = \frac{I}{c} \frac{k}{\sqrt{Rr}} \left[ \mathcal{J}_1(k) + \frac{R^2 - r^2 - z^2}{(R-r)^2 + z^2} \mathcal{J}_2(k) \right]. \quad (1.12.43)$$

In fig. (1.12.3) sono rappresentate, in un piano passante per l'asse delle  $z$ , le linee di forza di  $\vec{H}$ ; è manifesta la somiglianza con l'andamento delle linee di forza del campo di un dipolo elettrico (confronta con fig. (1.11.1)). Lungo l'asse delle  $z$ , cioè per  $r=0$ , manifestamente si ha:

$$\left. \begin{aligned} k=0, \quad \frac{k}{\sqrt{r}} &= \frac{2\sqrt{R}}{\sqrt{R^2 + z^2}} \\ \mathcal{J}_1 &= \mathcal{J}_2 = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1.12.44)$$

e le relazioni precedenti diventano:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= H_\varphi = 0 \\ H_z &= 2\pi \frac{I}{c} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.12.45)$$

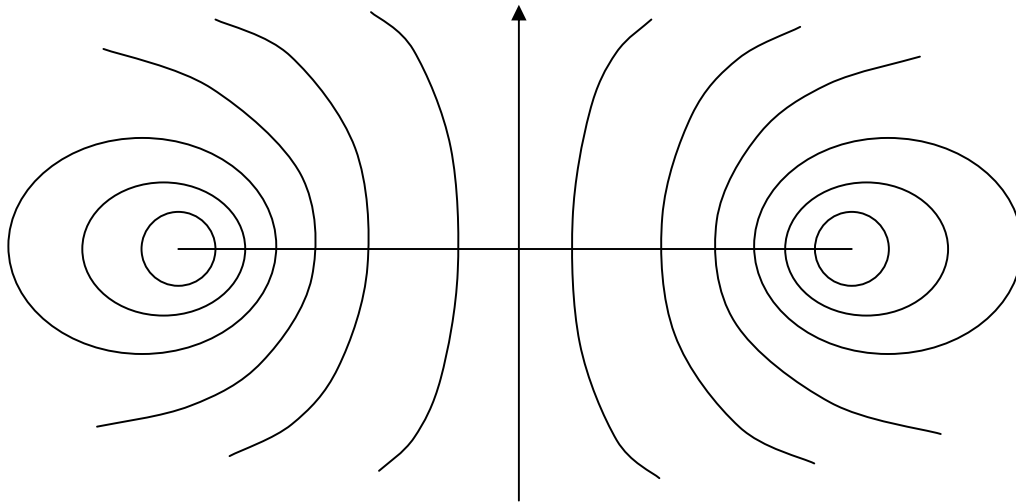


Fig. (1.12.3)

Si ritrova così la formola (1.12.22).

### 1.13 Sviluppo in serie di multipli del potenziale di una distribuzione di carica

Il problema di calcolare il potenziale di una distribuzione statica di carica è risolto in generale dall'equazione (1.10.12). Questa equazione, tuttavia, non permette di arrivare ad una espressione esplicita del potenziale salvo che in qualche caso particolare in cui la distribuzione possieda una speciale simmetria (vedi paragrafo 1.10). Vogliamo mostrare che è possibile, ciò non ostante, rappresentare il potenziale in modo esplicito mediante una serie che, nei punti non troppo prossimi alla distribuzione di carica, converge abbastanza rapidamente.

Per far questo consideriamo la distanza  $r_{PQ}$  fra il punto  $Q$  appartenente alla distribuzione di carica ed il punto  $P$  in cui si vuole ottenere il potenziale; scelta una origine  $O$  arbitraria, dal teorema di Carnot (9.2.32) si ottiene:

$$r_{PQ} = \sqrt{r_{PO}^2 + r_{QO}^2 - 2r_{PO}r_{QO} \cos \alpha}, \quad (1.13.1)$$

dove  $\alpha$  è l'angolo tra i vettori  $\vec{r}_{PO}$  ed  $\vec{r}_{QO}$  (vedi fig. (1.13.1)). Una nota relazione

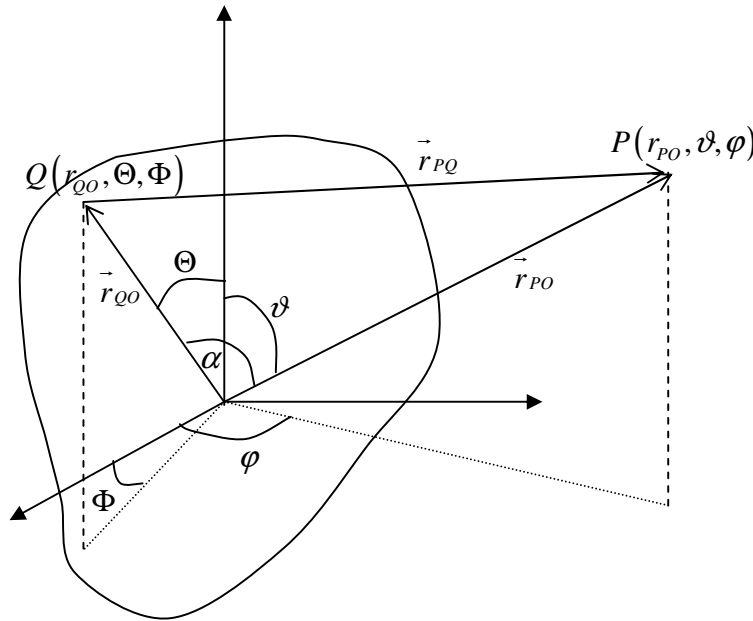


Fig. (1.13.1)

permette di esprimere la quantità  $r_{PQ}^{-1}$  mediante una serie di potenze del rapporto  $\frac{r_{PO}}{r_{QO}}$  o del rapporto inverso; questa relazione è:

$$\frac{1}{r_{PQ}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \alpha) \frac{r_a^k}{r_b^{k+1}}. \quad (1.13.2)$$

In essa  $r_a$  indica la minore tra le distanze  $r_{PO}$ ,  $r_{QO}$  ed  $r_b$  la maggiore, cioè:

$$r_a = r_{QO}, \quad r_b = r_{PO} \quad \text{se} \quad r_{PO} > r_{QO} \quad (1.13.3)$$

$$r_a = r_{PO}, \quad r_b = r_{QO} \quad \text{se} \quad r_{QO} > r_{PO}; \quad (1.13.4)$$

il coefficiente  $P_k(\cos \alpha)$  è il  $k$ -esimo polinomio di Legendre, cioè un polinomio di grado  $k$  calcolabile per derivazione mediante la seguente formola di Rodriguez:

$$P_k(\cos \alpha) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{d \cos \alpha^k} (\cos^2 \alpha - 1)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.13.5)$$

Introducendo le cosiddette funzioni associate di Legendre, ossia le funzioni:

$$P_k^{[n]}(\cos \alpha) = \sin^{[n]} \alpha \frac{d^{[n]} P_k(\cos \alpha)}{d \cos \alpha^{[n]}}, \quad |n| \leq k, \quad (1.13.6)$$

è possibile eliminare l'angolo  $\alpha$  dall'espressione di  $r_{PQ}^{-1}$  facendo intervenire in sua vece le coordinate polari  $\vartheta, \varphi$  e  $\Theta, \Phi$  rispettivamente dei punti  $P$  e  $Q$ . Vale infatti l'equazione:

$$P_k(\cos \alpha) = \sum_{n=-k}^{+k} \frac{(k-|n|)!}{(k+|n|)!} P_k^{[n]}(\cos \vartheta) P_k^{[n]}(\cos \Theta) e^{in(\Phi-\varphi)}; \quad (1.13.7)$$

mediante essa la (1.13.2) diventa:

$$\frac{1}{r_{PQ}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_a^k}{r_b^{k+1}} \sum_{n=-k}^{+k} \frac{(k-|n|)!}{(k+|n|)!} P_k^{[n]}(\cos \vartheta) P_k^{[n]}(\cos \Theta) e^{in(\Phi-\varphi)}. \quad (1.13.8)$$

Introducendo le funzioni sferiche di Laplace:

$$Y_{k,n}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi} \frac{(k-|n|)!}{(k+|n|)!}} P_k^{|n|}(\cos \vartheta) e^{in\varphi}, \quad (1.13.9)$$

la (1.13.8) può essere scritta più sinteticamente nella forma:

$$\frac{1}{r_{PQ}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^{+k} \frac{4\pi}{2k+1} \frac{r_a^k}{r_b^{k+1}} Y_{k,n}(\Theta, \Phi) Y_{k,-n}(\vartheta, \varphi). \quad (1.13.10)$$

Le dimostrazioni delle relazioni (1.13.2), (1.13.5), (1.13.7) sono facilmente reperibili nei trattati di analisi nei quali sono pure riportate le proprietà generali dei polinomi e delle funzioni associate di Legendre (vedi anche paragrafo 3.5). Non vale pertanto la pena di insistere su questo argomento; riportiamo, tuttavia, le espressioni esplicite delle prime funzioni  $Y_{k,n}$  in quanto esse ci saranno utili fra poco.

$$\begin{aligned} k=0) \quad & Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ k=1) \quad & \begin{cases} Y_{1,\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta \cdot e^{\pm i\varphi} \\ Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta \end{cases} \\ k=2) \quad & \begin{cases} Y_{2,\pm 2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta \cdot e^{\pm i2\varphi} \\ Y_{2,\pm 1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot e^{\pm i\varphi} \\ Y_{2,0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.13.11)$$

Inserendo la (1.13.10) nella (1.10.12) e tenendo conto che all'esterno della distribuzione di carica vale la (1.13.3), si ottiene:

$$\mathcal{V}(P) = 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^{+k} \frac{1}{2k+1} \left[ \int_V \rho(Q) r_{QO}^k Y_{k,n}(\Theta, \Phi) dV \right] \frac{Y_{k,-n}(\vartheta, \varphi)}{r_{PO}^{k+1}}. \quad (1.13.12)$$

Alle quantità:

$$q_{k,n} = \int_V \rho(Q) r_{QO}^k Y_{k,n}(\Theta, \Phi) dV, \quad (1.13.13)$$

che dipendono dalla forma della distribuzione di carica, si dà il nome di momenti di multipolo (precisamente di  $2k$ -polo); mediante essi la (1.13.12) diventa:

$$\mathcal{V}(P) = 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1) r_{PO}^{k+1}} \sum_{n=-k}^{+k} q_{k,n} Y_{k,-n}(\vartheta, \varphi). \quad (1.13.14)$$

È facile vedere che, inserendo le (1.13.11) nella (1.13.13) ed introducendo le coordinate cartesiane del punto  $Q$ , che le espressioni dei momenti di multipolo fino a  $k = 2$  sono:

$$q_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_V \rho(Q) dV, \quad (1.13.15)$$

$$q_{1,\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_V \rho(Q) (x_Q + iy_Q) dV,$$

$$q_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_V \rho(Q) z_Q dV,$$

$$q_{2,\pm 2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int_V \rho(Q) (x_Q + iy_Q)^2 dV,$$

$$q_{2,\pm 1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int_V \rho(Q) z_Q (x_Q + iy_Q) dV,$$

$$q_{2,0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int_V \rho(Q) (3z_Q^2 - r_{QO}^2) dV.$$

Con le equazioni (1.13.13), (1.13.14) e (1.13.15) il problema di calcolare esplicitamente il potenziale, in funzione delle coordinate di  $P$ , è virtualmente risolto.

Occorre ora esaminare il significato dei vari contributi che concorrono a formare l'espressione di  $\mathcal{V}(P)$ . Il primo, manifestamente, è il potenziale che la distribuzione di carica produrrebbe se essa fosse tutta concentrata nell'origine  $O$ . Il contributo successivo, tenendo conto delle (1.13.15) e delle (1.13.11) è:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^{(1)}(P) &= \frac{4\pi}{3} \frac{1}{r_{PO}^2} \sum_{n=-1}^1 q_{1,n} Y_{1,-n}(\vartheta, \varphi) = \\
&= \frac{1}{r_{PO}^2} \int_V \rho(Q) [x_Q \sin \vartheta \cos \varphi + y_Q \sin \vartheta \sin \varphi + z_Q \cos \vartheta] dV = \\
&= \frac{1}{r_{PO}^2} \int_V \rho(Q) \vec{r}_{QO} \cdot \vec{r}_{PO} dV.
\end{aligned} \tag{1.13.16}$$

Confrontando con la (1.11.7) si vede subito che esso corrisponde al potenziale di un dipolo di momento:

$$\vec{p} = \int_V \rho(Q) \vec{r}_{QO} dV; \tag{1.13.17}$$

questo termine, pertanto, assegna un momento di dipolo, concentrato nell'origine  $O$ , anche ad una distribuzione formata da cariche di eguale segno.

Il contributo per  $k=2$ , ossia il contributo di quadrupolo, è alquanto più complicato; procedendo come per la (1.13.16) si ha:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^{(2)}(P) &= \frac{4\pi}{5} \frac{1}{r_{PO}^3} \sum_{n=-2}^{+2} q_{2,n} Y_{2,-n}(\vartheta, \varphi) = \\
&= \frac{1}{r_{PO}^3} \left\{ \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta \operatorname{Re} \left[ (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 \int_V \rho(Q) (x_Q - iy_Q)^2 dV \right] + \right. \\
&\quad + 3 \sin \vartheta \cos \vartheta \operatorname{Re} \left[ (\cos \varphi + i \sin \varphi) \int_V \rho(Q) z_Q (x_Q - iy_Q) dV \right] + \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \int_V \rho(Q) (3z_Q^2 - r_{QO}^2) dV \right\} = \\
&= \frac{1}{r_{PO}^3} \left\{ \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta \left[ (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \int_V \rho(Q) (x_Q^2 - y_Q^2) dV + \right. \right. \\
&\quad + 4 \sin \varphi \cos \varphi \int_V \rho(Q) x_Q y_Q dV \left. \right] + \\
&\quad + 3 \sin \vartheta \cos \vartheta \left[ \cos \varphi \int_V \rho(Q) z_Q x_Q dV + \sin \varphi \int_V \rho(Q) z_Q y_Q dV \right] + \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \int_V \rho(Q) (3z_Q^2 - r_{QO}^2) dV \right\}.
\end{aligned} \tag{1.13.18}$$

Introducendo le coordinate cartesiane del punto  $P$  e riordinando i termini, la precedente espressione diventa:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}^{(2)}(P) &= \frac{1}{r_{PO}^5} \left[ \frac{3}{4} (x_P^2 - y_P^2) \int_V \rho(Q) (x_Q^2 - y_Q^2) dV + \right. \\
 &+ 3x_P y_P \int_V \rho(Q) x_Q y_Q dV + 3z_P x_P \int_V \rho(Q) z_Q x_Q dV + \\
 &+ 3z_P y_P \int_V \rho(Q) z_Q y_Q dV + \left. \frac{1}{4} (3z_P^2 - r_{PO}^2) \int_V \rho(Q) (3z_Q^2 - r_{QO}^2) dV \right] = \quad (1.13.19) \\
 &= \frac{1}{2r_{PO}^5} \left[ 3 \sum_{i,j=1}^3 x_{P_i} x_{P_j} \int_V \rho(Q) x_{Q_i} x_{Q_j} dV - \right. \\
 &\left. - (x_P^2 + y_P^2 + z_P^2) \int_V \rho(Q) r_{QO}^2 dV \right],
 \end{aligned}$$

dove  $x_{P_i}, x_{Q_i}$  ( $i=1,2,3$ ) indicano le tre coordinate cartesiane rispettivamente dei punti  $P$  e  $Q$ . Introducendo le quantità:

$$Q_{ij} = \int_V \rho(Q) (3x_{Q_i} x_{Q_j} - \delta_{ij} r_{QO}^2) dV, \quad (1.13.20)$$

in cui  $\delta_{ij}$  è il simbolo di Kroenecker, si ottiene infine:

$$\mathcal{V}^{(2)}(P) = \frac{1}{2r_{PO}^5} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} x_{P_i} x_{P_j}. \quad (1.13.21)$$

Quest'ultima relazione mostra che il termine di quadripolo può essere scritto come prodotto scalare tra il tensore simmetrico (vedi paragrafo 9.6) di componenti  $Q_{ij}$  e il tensore  $x_{P_i} x_{P_j}$ . Dalla (1.13.20) risulta subito che la traccia di  $Q_{ij}$  è nulla, cioè:

$$\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = 0; \quad (1.13.22)$$



ne segue, riducendo il tensore ai suoi assi principali<sup>(+++++)</sup> (il che lo si ottiene mediante una opportuna sostituzione ortogonale di assi, vedi equazione (9.6. )), che le componenti indipendenti di  $Q_{ij}$  sono solamente due.

Per ottenere il campo elettrico dovuto al contributo di quadripolo basta applicare la (1.10.3) alla (1.13.21); tenendo conto che:

$$\frac{\partial(x_{P_i}x_{P_j})}{\partial x_{P_k}} = \delta_{ik}x_{P_j} + \delta_{jk}x_{P_i}, \quad (1.13.23)$$

si ha:

$$\vec{E}^{(2)} = -\text{grad}_P \mathcal{V}^{(2)}(P) = \frac{1}{2r_{PO}^5} \left[ \frac{5}{r_{PO}^2} \left( \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij}x_i x_j \right) \cdot \vec{r}_{PO} - 2 \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 Q_{ki}x_i \right) \vec{i}_k \right]. \quad (1.13.24)$$

Abbiamo così stabilito che il campo  $\vec{E}^{(2)}$ , dovuto al quadripolo, decresce con la quarta potenza della distanza, il potenziale invece varia secondo la terza potenza. Ciò dimostra che lo sviluppo ottenuto mediante la relazione (1.13.10) converge con tanta maggiore rapidità quanto più il punto  $P$  è lontano dall'origine  $O$ . Il successivo contributo, ossia quello di ottupolo, darebbe un potenziale ed un campo decrescenti rispettivamente con la quarta e la quinta potenza di  $r_{PO}$ .

Nel caso particolare in cui la distribuzione di cariche possieda simmetria cilindrica attorno a un determinato asse conviene scegliere la direzione come asse delle  $z$ ; in questo modo si avrà<sup>(§§§§§)</sup>:

---

(+++++) Per il teorema spettrale è sempre possibile trovare un sistema di coordinate cartesiane (ortogonali) rispetto al quale ogni tensore simmetrico di secondo ordine può essere ridotto ai suoi assi principali. Detta  $R$  la matrice di trasformazione del sistema di coordinate  $R: X \rightarrow X'$ , il tensore si riduce ai soli elementi della diagonale principale:  $Q \rightarrow RQR^{-1}$ . Gli autovettori  $e'_1, e'_2, e'_3$  di  $Q$  sono le righe della matrice  $R$  e definiscono gli assi principali, gli autovalori sono gli elementi diagonali  $Q_{ii}$  del tensore  $Q$ , ordinabili nella sequenza:  $Q_{11} \leq Q_{22} \leq Q_{33}$ ; essi si ottengono risolvendo l'equazione secolare  $\det(Q - \lambda I) = 0$ . Risolvendo il sistema  $Qe'_j = Q_{ii}e'_j$  si ottengono infine gli autovettori di  $R$  [n.d.c.].

$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = 0 \quad (1.13.25)$$

ed, utilizzando la (1.13.22):

$$Q_{11} = Q_{22} = -\frac{Q_{33}}{2}. \quad (1.13.26)$$

Il contributo del termine del quadrupolo diventa pertanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{(2)}(P) &= \frac{1}{2r_{PO}^5} Q_{33} \left( -\frac{1}{2} x_P^2 - \frac{1}{2} y_P^2 + z_P^2 \right) = \\ &= \frac{Q_{33}}{4r_{PO}^5} (3z_P^2 - r_{PO}^2) = \frac{Q_{33}}{4r_{PO}^3} (3\cos^2 \vartheta - 1); \end{aligned} \quad (1.13.27)$$

questo stesso risultato può essere ottenuto anche direttamente dal secondo membro della (1.13.19)<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>.

(§§§§§) Infatti osservando la (1.13.20) si vede che in questo caso, quando  $i \neq j$ , per ogni elemento di volume  $dV_Q$  nell'integrale ne esiste sempre un altro  $dV_{Q'}$  che dà un contributo di segno opposto al primo [n.d.c.].

(\*\*\*\*\*) Si vede subito che per  $i \neq j$  si annullano tutti i termini della  $\sum_{i,j=1}^3 x_{P_i} x_{P_j} \cdots$  nella (1.13.19) e ri-

mane:

$$\begin{aligned} &3 \sum_{i,j=1}^3 x_{P_i} x_{P_j} \int_V \rho(Q) x_{Q_i} x_{Q_j} dV - (x_P^2 + y_P^2 + z_P^2) \int_V \rho(Q) r_{QO}^2 dV = \\ &= x_P^2 \int_V \rho(Q) \cdot 3x_Q^2 dV + y_P^2 \int_V \rho(Q) \cdot 3y_Q^2 dV + z_P^2 \int_V \rho(Q) \cdot 3z_Q^2 dV - \\ &- x_P^2 \int_V \rho(Q) r_{QO}^2 dV - y_P^2 \int_V \rho(Q) r_{QO}^2 dV - z_P^2 \int_V \rho(Q) r_{QO}^2 dV = \\ &= x_P^2 \int_V \rho(Q) (3x_Q^2 - r_{QO}^2) dV + y_P^2 \int_V \rho(Q) (3y_Q^2 - r_{QO}^2) dV + z_P^2 \int_V \rho(Q) (3z_Q^2 - r_{QO}^2) dV = \\ &= x_P^2 Q_{11} + y_P^2 Q_{22} + z_P^2 Q_{33} = x_P^2 \left( -\frac{1}{2} Q_{33} \right) + y_P^2 \left( -\frac{1}{2} Q_{33} \right) + z_P^2 Q_{33} = Q_{33} \left( -\frac{1}{2} x_P^2 - \frac{1}{2} y_P^2 + z_P^2 \right) \\ &[\text{n.d.c.}]. \end{aligned}$$

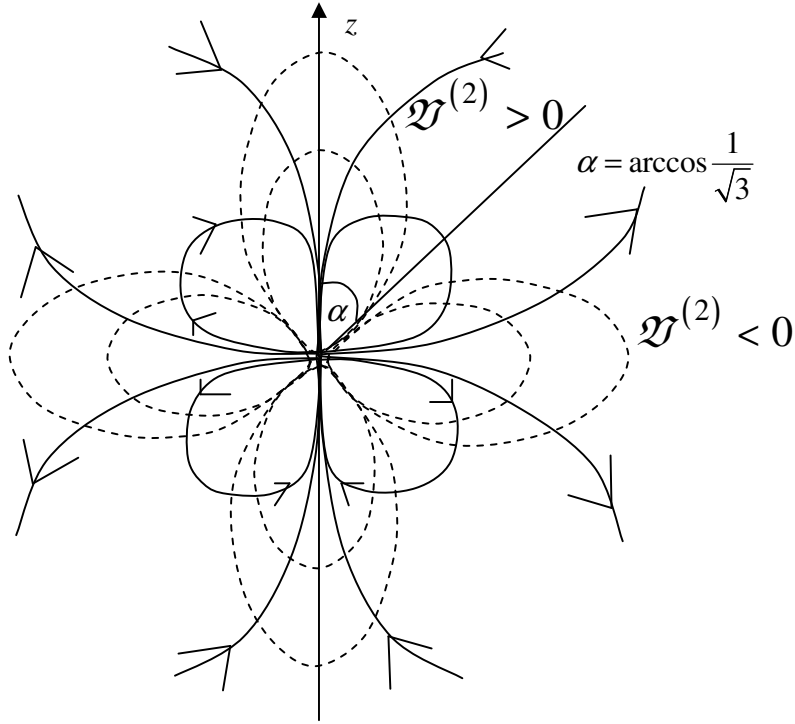


Fig. (1.13.2)

In fig. (1.13.2) è riportato l'andamento delle superfici equipotenziali all'intersezione con un piano contenente l'asse  $z$  (curve tratteggiate). Da essa appare chiaro che esistono due insiemi di superfici corrispondenti rispettivamente a valori positivi e negativi del potenziale; essi sono separati dal cono di asse  $z$  e di apertura  $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

L'espressione del campo, utilizzando la (1.13.24) e le (1.13.25), (1.13.26) risulta essere invece:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}^{(2)} &= \frac{5}{4} \frac{Q_{33}}{r_{PO}^5} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \vec{r}_{PO} - \frac{1}{r_{PO}^5} \sum_{k=1}^3 Q_{kk} x_k \vec{i}_k = \\
 &= \frac{Q_{33}}{r_{PO}^5} \left\{ \left[ \frac{5}{4} (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \frac{1}{2} \right] \vec{r}_{PO} + \frac{3}{2} r_{PO} \cos \vartheta \vec{k} \right\}.
 \end{aligned} \tag{1.13.28}$$

La fig. (1.13.2) mostra anche le linee di forza di  $\vec{E}^{(2)}$  (curve continue); in essa si è scelto  $Q_{33}$  positivo, ciò corrisponde, come è evidente dalla (1.13.20), a una distribuzione di carica allungata nella direzione dell'asse  $z$ .



## Capitolo 2. Proprietà energetiche e inerziali del campo elettromagnetico

### 2.1 Il metodo variazionale – Potenziale di Schwarzschild

Nel precedente capitolo abbiamo visto come, assegnato il movimento di una carica elettrica, si arrivi a valutarne il campo elettromagnetico mediante il quale determinare la forza che agisce su una seconda carica, pure essa in movimento. Considerando questa seconda carica come sorgente del campo, si può inversamente valutare la forza che agisce sulla prima. In questo modo la mutua azione tra campo elettromagnetico e cariche elettriche viene rappresentata attraverso due differenti aspetti; ossia le cariche vengono considerate da un lato come sorgenti del campo elettromagnetico, dall'altro come enti suscettibili di subire azioni dinamiche da parte di esso. Ciò appare in realtà alquanto dissimmetrico; è infatti preferibile formulare l'elettromagnetismo in modo che la mutua azione tra campo e cariche risulti descritta da una sola legge capace di comprendere entrambi gli aspetti testé menzionati. Una simile formulazione venne trovata nel 1903 da K. Schwarzschild; essa è analoga alla nota formulazione variazionale della dinamica secondo la quale data una opportuna funzione, detta lagrangiana meccanica, si costruisce un integrale, detto integrale di azione, e gli si impone di essere stazionario. Si deducono così le equazioni newtoniane per il moto delle masse che costituiscono il sistema meccanico. Poiché, come abbiamo visto nel paragrafo 1.2, queste masse sono generalmente associate a delle cariche elettriche, è necessario introdurre nella lagrangiana meccanica un termine che rappresenti l'azione del campo elettromagnetico sulle cariche. Questo termine viene detto potenziale di Schwarzschild. D'altra parte, generalizzando il procedimento variazionale al caso di equazioni alle derivate parziali, si riesce a costruire una opportuna lagrangiana elettromagnetica mediante la quale si ottengono le equazioni di Maxwell in assenza di carica, ossia nel caso in cui  $\rho$  e  $\vec{j}$  sono nulle. Se tuttavia a questa lagrangiana si associa il potenziale di Schwarzschild, il procedimento variazionale dà luogo alle equazioni di Maxwell complete dei termini di sorgente. Il potenziale di Schwarzschild, pertanto, risolve il problema di descrivere in modo unificato l'interazione tra il campo e le cariche.

Benché la discussione del caso meccanico non sia a rigore compito di questa trattazione, la riportiamo ugualmente per completezza. Consideriamo pertanto un sistema di  $N$  oggetti materiali puntiformi, dotati di massa  $m_i$  e carica  $q_i$ ; usando un sistema di coordinate cartesiane il problema che ci proponiamo di risolvere consiste nel determinare le  $3N$  funzioni  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$ ,  $z_i(t)$ , ossia le coordinate degli  $N$  oggetti in funzione del tempo. Introduciamo la lagrangiana:

$$L(t) = L[x_i(t), y_i(t), z_i(t); \dot{x}_i(t), \dot{y}_i(t), \dot{z}_i(t); t], \quad (2.1.1)$$

in essa, come usuale in meccanica, si sono indicate con un punto le derivazioni rispetto al tempo. L'integrale di azione è:

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_1} L(t) dt, \quad (2.1.2)$$

dove  $t_0$  e  $t_1$  sono due istanti, arbitrariamente fissati, in corrispondenza dei quali sono assegnate le coordinate degli  $N$  oggetti. Il postulato della minima azione, dovuto ad Hamilton, stabilisce che la forma delle funzioni  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$ ,  $z_i(t)$  deve essere scelta in modo da rendere minimo  $\mathcal{J}$ , cioè:

$$\delta \mathcal{J} = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(t) dt = 0. \quad (2.1.3)$$

In questa equazione il simbolo  $\delta$  indica la variazione rispetto alla forma delle suddette funzioni. Sviluppiamo ora il secondo membro della (2.1.3); si ha:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J} = \delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial L}{\partial z_i} \delta z_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i + \right. \\ \left. + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \delta \dot{y}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \delta \dot{z}_i \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Osserviamo che, scambiando l'ordine con cui sono eseguite la variazione  $\delta$  e la derivazione temporale, si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{x}_i &= \frac{d}{dt} \delta x_i, \\
 \delta \dot{y}_i &= \frac{d}{dt} \delta y_i, \\
 \delta \dot{z}_i &= \frac{d}{dt} \delta z_i.
 \end{aligned}
 \tag{2.1.5}$$

Ne segue, integrando per parti:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \delta \dot{y}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \delta \dot{z}_i \right) dt &= \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \delta y_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \delta z_i \right) \right]_{t_0}^{t_1} - \\
 &- \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) \delta z_i \right] dt,
 \end{aligned}
 \tag{2.1.6}$$

dove, essendo assegnati in corrispondenza di  $t_0$  e  $t_1$  i valori delle  $3N$  coordinate, le variazioni  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$ ,  $\delta z_i$  sono, per  $t = t_0, t_1$ , nulle. Rimane, quindi, nella (2.1.6) solo il secondo termine a secondo membro. Sostituendo la (2.1.6) nella (2.1.4) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{J} &= - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left\{ \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right] \delta x_i + \right. \\
 &\left. \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} \right] \delta y_i + \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_i} \right] \delta z_i \right\} dt = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.1.7}$$

Poiché, in corrispondenza del minimo di  $\mathcal{J}$ , l'integrale che compare nella (2.1.7) deve essere nullo per valori arbitrari delle variazioni  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$ ,  $\delta z_i$ , i coefficienti di queste quantità devono andare a zero, cioè:



$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0, \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} &= 0, \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_i} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Queste ultime sono le equazioni di Eulero-Lagrange associate, mediante il principio variazionale (2.1.3), alla funzione lagrangiana (2.1.1).

Occorre ora rendere esplicita la forma di questa funzione; ciò verrà fatto nel caso in cui le forze in gioco sono quelle elettromagnetiche date dall'espressione (1.4.11) della legge di Lorentz. Consideriamo pertanto la funzione:

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - q_i \mathcal{V}(P_i) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{q_i}{c} [\dot{x}_i A_x(P_i) + \dot{y}_i A_y(P_i) + \dot{z}_i A_z(P_i)] \right\} = \\
&= \sum_{i=1}^N \left\{ T_i - q_i \left[ \mathcal{V}(P_i) - \frac{1}{c} \vec{v}_i \cdot \vec{A}(P_i) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

dove  $m_i$  e  $T_i$  indicano rispettivamente la massa e l'energia cinetica dell' $i$ -esimo oggetto e  $P_i$  è il punto di coordinate  $x_i, y_i, z_i$ . Sostituiamo la (2.1.9) nella prima delle (2.1.8); essa diventa:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left[ m_i \dot{x}_i + \frac{q_i}{c} A_x(P_i) \right] + q_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i} - \\
 & - \frac{q_i}{c} \left( \dot{x}_i \frac{\partial A_x}{\partial x_i} + \dot{y}_i \frac{\partial A_y}{\partial x_i} + \dot{z}_i \frac{\partial A_z}{\partial x_i} \right) = m_i \ddot{x}_i + \\
 & + \frac{q_i}{c} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial A_x}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial A_x}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) + \frac{q_i}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \\
 & + q_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i} - \frac{q_i}{c} \left( \dot{x}_i \frac{\partial A_x}{\partial x_i} + \dot{y}_i \frac{\partial A_y}{\partial x_i} + \dot{z}_i \frac{\partial A_z}{\partial x_i} \right) = m_i \ddot{x}_i + \\
 & + q_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i} + \frac{q_i}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{q_i}{c} \left[ \dot{y}_i \left( \frac{\partial A_y}{\partial x_i} - \frac{\partial A_x}{\partial y_i} \right) - \dot{z}_i \left( \frac{\partial A_x}{\partial z_i} - \frac{\partial A_z}{\partial x_i} \right) \right] = 0,
 \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

ossia:

$$m_i \ddot{x}_i = q_i \left( -\text{grad} \mathcal{V} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)_x + \frac{q_i}{c} \left( \vec{v}_i \wedge \text{rot} \vec{A} \right)_x. \tag{2.1.11}$$

Ricordando le (1.8.1) e (1.8.4) e tenendo conto delle analoghe equazioni per le altre due componenti, si trova infine:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = q_i \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}_i \wedge \vec{H} \right). \tag{2.1.12}$$

La lagrangiana (2.1.9) corrisponde dunque ad un insieme di  $N$  cariche immerse in un campo elettromagnetico. In essa, oltre al termine di energia cinetica, appare il termine di energia potenziale:

$$U = \sum_{i=1}^N q_i \left[ \mathcal{V}(P_i) - \frac{1}{c} \vec{v}_i \cdot \vec{A}(P_i) \right] \tag{2.1.13}$$

che è appunto il potenziale di Schwarzschild.

Supponiamo ora che il sistema di cariche sia abbastanza fitto da essere assimilabile ad una distribuzione continua e consideriamo nell'intorno del punto  $P_i$  un piccolo volume  $\Delta V_j$  tale che in esso i potenziali  $\mathcal{V}$  ed  $\vec{A}$  siano praticamente costanti. La

(2.1.13), analogamente a quanto si era fatto per la (1.4.12), può essere scritta nella forma:

$$U = \sum_{\Delta V_j} \sum_{i=1}^{n(\Delta V_j)} q_i \left[ \mathcal{V}(P_i) - \frac{1}{c} \vec{v}_i \cdot \vec{A}(P_i) \right]; \quad (2.1.14)$$

in essa la somma su  $i$  involge le cariche contenute in  $\Delta V_j$ , quella su  $\Delta V_j$  tutti i volumetti in cui abbiamo suddiviso la intera distribuzione. Tenendo conto che entro  $\Delta V_j$  possiamo assumere costanti i potenziali e usando le (1.2.8), (1.2.12), la (2.1.14) diventa:

$$U = \sum_{\Delta V_j} \left[ \rho(P_j) \mathcal{V}(P_j) - \frac{1}{c} \vec{j}(P_j) \cdot \vec{A}(P_j) \right] \Delta V_j, \quad (2.1.15)$$

e cioè, utilizzando la definizione di integrale:

$$U = \int_V \left( \rho \mathcal{V} - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} \right) dV. \quad (2.1.16)$$

La (2.1.16) rappresenta il potenziale di Schwarzschild per una distribuzione continua di cariche. Come abbiamo rilevato nel paragrafo 1.2, quando la distribuzione di carica è legata alla materia si ha effettivamente un grande numero di cariche anche in un volume molto piccolo e si può di conseguenza usare la (2.1.16). Se tuttavia si avesse a che fare con un numero limitato di cariche, anche una sola, basta applicare le (1.2.11), (1.2.13) per verificare che la (2.1.16) coincide con la (2.1.13). Possiamo perciò considerare la (2.1.16) come la più generale espressione del potenziale di Schwarzschild.

## 2.2 La lagrangiana elettromagnetica

Occupiamoci ora del campo elettromagnetico; evidentemente occorre generalizzare il metodo variazionale in modo da ottenere delle equazioni alle derivate parziali. Consideriamo pertanto una lagrangiana dipendente da un certo numero di funzioni del posto e del tempo, dalle loro derivate parziali prime, oltreché, esplicitamente, dal posto e dal tempo medesimi. Indicando con  $\Psi_\sigma(x, y, z, t)$  queste funzioni, la lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\Psi_\sigma; \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x}, \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial y}, \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial z}, \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial t}; x, y, z, t\right), \quad (2.2.1)$$

ovviamente si suppone che in essa intervengano tutte le funzioni  $\Psi_\sigma$  in questione. L'integrale d'azione è in questo caso:

$$\mathcal{I} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V dxdydz \mathcal{L}, \quad (2.2.2)$$

dove  $t_0$  e  $t_1$  sono istanti assegnati e  $V$  un dato volume di integrazione. Supporremo, analogamente al caso meccanico, che agli istanti  $t_0$  e  $t_1$  i valori delle funzioni  $\Psi_\sigma$  siano fissati in tutto lo spazio, inoltre supporremo che ad ogni istante questi valori siano fissati sul contorno del volume  $V$ . Il principio variazionale si scrive, analogamente alla (2.1.3):

$$\delta \mathcal{I} = 0, \quad (2.2.3)$$

dove il simbolo  $\delta$  indica, questa volta, la variazione rispetto alla dipendenza dal posto e dal tempo delle funzioni  $\Psi_\sigma$ . La (2.2.3), mediante le (2.2.2) e (2.2.1), diventa:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{I} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V dxdydz \sum_\sigma \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\sigma} \delta \Psi_\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x}\right)} \delta \left(\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial y}\right)} \delta \left(\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial y}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial z}\right)} \delta \left(\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial z}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial t}\right)} \delta \left(\frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial t}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Trasformiamo l'integrando della (2.2.4); si può scrivere, procedendo come per le (2.1.5):

$$\delta\left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \delta\Psi_\sigma; \quad (2.2.5)$$

analoghe formule valgono per i termini contenenti le derivate rispetto a  $y$  e  $z$ . Osserviamo, poi, che applicando il lemma di Gauss (vedi equazioni (9.3.35)) al prodotto di due funzioni  $f$  e  $g$  si ha:

$$\int_V \left( f \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} g \right) dx dy dz = \int_S f g n_x dS; \quad (2.2.6)$$

dove  $S$  è la superficie che limita il volume  $V$ . Usando la (2.2.5) e la (2.2.6) abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x}\right)} \delta\left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x}\right) dx dy dz = \\ - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x}\right)} \right] \delta\Psi_\sigma dx dy dz + \int_S \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial x}\right)} \delta\Psi_\sigma n_x dS. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

In questa relazione, per le ipotesi fatte sul comportamento delle funzioni  $\Psi_\sigma$  sul contorno  $S$ , l'ultimo integrale è nullo; analoghe relazioni si hanno per le componenti  $y$  e  $z$ . Consideriamo il termine in cui intervengono le derivate temporali; integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial t}\right)} \delta\left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial t}\right) dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial t}\right)} \right] \delta\Psi_\sigma dt + \\ + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial\Psi_\sigma}{\partial t}\right)} \delta\Psi_\sigma \right|_{t_0}^{t_1}. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Anche questa volta il secondo termine a secondo membro è nullo per le condizioni al contorno. Mediante la (2.2.7) e analoghe e usando la (2.2.8), la (2.2.4) diventa:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_V dx dy dz \sum_{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi_{\sigma}}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi_{\sigma}}{\partial y} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi_{\sigma}}{\partial z} \right)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi_{\sigma}}{\partial t} \right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\sigma}} \right\} \delta \Psi_{\sigma} = 0. \quad (2.2.9)$$

Da essa discendono, come nel caso meccanico, le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi_{\sigma}}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi_{\sigma}}{\partial y} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi_{\sigma}}{\partial z} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi_{\sigma}}{\partial t} \right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\sigma}} = 0. \quad (2.2.10)$$

Il procedimento ora svolto è del tutto generale; esso è suscettibile di tutti gli sviluppi possibili nel caso meccanico. In particolare vedremo che è possibile ricavare una funzione, detta hamiltoniana, che rappresenta l'energia del campo.

Utilizziamo questo formalismo in modo da ricavare le equazioni di Maxwell. Per far questo partiamo dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{E} - \vec{H} \cdot \vec{H}) - \rho \mathcal{V} + \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} \quad (2.2.11)$$

nella quale  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  si suppongono definiti in funzione delle derivate delle tre componenti di  $\vec{A}$  e di  $\mathcal{V}$  mediante le equazioni (1.8.1) e (1.8.4); queste quattro funzioni nel caso attuale si identificano perciò con le  $\Psi_{\sigma}$ . L'equazione relativa alla componente  $A_x$  risulta essere, applicando la (2.2.10):

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)} \right] - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)} \right] + \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial \left( \frac{\partial A_x}{\partial t} \right)} \right] - \frac{1}{c} j_x = 0, \quad (2.2.12)$$

ossia, usando le (1.8.1) e (1.8.4):

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{1}{c} j_x = 0. \quad (2.2.13)$$

Si è ottenuta così la componente  $x$  dell'equazione vettoriale (1.6.1); le due analoghe equazioni relative ad  $A_y$  e  $A_z$  completano la (1.6.1). L'equazione per  $\mathcal{V}$  è invece:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right)} \right] + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right)} \right] + \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right)} \right] + \rho = 0, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

che, per mezzo della (1.8.1), diventa:

$$-\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \rho = 0 \quad (2.2.15)$$

la quale coincide con la (1.6.2). Abbiamo in questo modo dimostrato che le equazioni di Eulero-Lagrange relative alle funzioni  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  e  $\mathcal{V}$  si identificano con le due equazioni elettromagnetiche inhomogenee (1.6.1) e (1.6.2). Le equazioni omogenee, invece, sono immediata conseguenza delle equazioni (1.8.1) e (1.8.4) stesse, le quali, secondo l'attuale punto di vista, altro non sono che la definizione di  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$ . Si ha infatti applicando l'operazione di rotore alla (1.8.4):

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.2.16)$$

da cui, invertendo le derivazioni spaziali con quella temporale e ricordando la (1.8.1), si ricava la (1.6.3). La (1.8.1), poi, mediante l'operazione di divergenza e usando la (9.3.18), ci dà subito la (1.6.4).

Possiamo così riassumere i risultati fin qui ottenuti. Esiste una lagrangiana complessiva delle cariche e del campo elettromagnetico la cui espressione è:

$$L_{\text{tot}}(t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \int_V \left( \rho \mathcal{V} - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} \right) dV + \frac{1}{8\pi} \int_V \left( \vec{E}^2 - \vec{H}^2 \right) dV, \quad (2.2.17)$$

in cui  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  sono dati dalle (1.8.1) e (1.8.4); le equazioni elettromagnetiche e quelle dinamiche sono simultaneamente definite dal principio variazionale:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L_{tot}(t) dt = 0. \quad (2.2.18)$$

Con questa formulazione non solo si è riusciti a sintetizzare, nel potenziale di Schwarzschild l'interazione tra il campo elettromagnetico e il sistema meccanico delle cariche, ma si è anche unificato il modo di trattarli. Si badi che alla lagrangiana (2.2.11) conviene dare, più propriamente, il nome di densità di lagrangiana in quanto solo integrandola sul volume essa costituisce il contributo del campo elettromagnetico e dell'interazione delle cariche alla lagrangiana totale (2.2.17). In seguito useremo di tutte e tre le formulazione dell'elettromagnetismo fin qui sviluppate; la scelta dell'una o dell'altra sarà fatta unicamente in base a ragioni di opportunità. In fig. (2.2.1) è riportata una tabella che contiene il riassunto delle tre formulazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n(\Delta V)} q_i \\ \vec{j} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n(\Delta V)} q_i \vec{v}_i \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \quad \text{div} \vec{E} = 4\pi \rho \\ \text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0; \quad \text{div} \vec{H} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \\ q_i \vec{E} - \frac{q_i}{c} \vec{v}_i \wedge \vec{H} \\ i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \Delta_2 \mathcal{V} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \rho \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\text{grad} \mathcal{V} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ L_{tot}(t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \int_V \left( \rho \mathcal{V} - \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} \right) dV + \\ + \frac{1}{8\pi} \int_V (\vec{E}^2 - \vec{H}^2) dV; \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} L_{tot}(t) dt = 0 \end{array} \right. \\ \vec{H} = \text{rot} \vec{A} \end{array} \right.$$

Fig. (2.2.1) – Riassunto delle leggi elettrodinamiche nelle loro tre forme.



## 2.3 L'energia del campo elettromagnetico. Il vettore di Poynting

Dimostreremo ora che il campo elettromagnetico possiede dell'energia; precisamente faremo vedere che è possibile associare al campo esistente in un dato volume  $V$  una quantità di energia che risulta dipendente dai valori di  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  e dall'estensione di  $V$ . Per far questo consideriamo un sistema di  $N$  cariche puntiformi sottoposte all'azione del campo elettromagnetico da esse stesse generato. Tenendo conto della espressione (1.4.11) della forza di Lorentz, il lavoro fatto dal campo sull' $i$ -esima carica nel tempo  $dt$  è:

$$dL_i = q_i \vec{E} \cdot \vec{v}_i dt; \quad (2.3.1)$$

il lavoro totale risulta essere pertanto:

$$dL = \sum_{i=1}^N \vec{E} \cdot q_i \vec{v}_i dt. \quad (2.3.2)$$

Procedendo come già si è fatto nella (2.1.13) per il potenziale di Schwarzschild, cioè supponendo che l'insieme delle cariche sia continuo e ricordando la definizione (1.2.12) di densità di corrente, si ottiene:

$$dL = \sum_{\Delta V_j} \Delta V_j \vec{E}(P_j) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n(\Delta V_j)} q_i \vec{v}_i}{\Delta V_j} dt = \sum_{\Delta V_j} \Delta V_j \vec{E}(P_j) \cdot \vec{j}(P_j) dt. \quad (2.3.3)$$

Ne segue che la (2.3.3) può essere scritta nella forma:

$$dL = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV dt. \quad (2.3.4)$$

Questa equazione, d'altra parte, purché si tenga conto della definizione (1.2.13) di  $\vec{j}$  è valida anche per una distribuzione discreta. Eliminando  $\vec{j}$  mediante la (1.6.1) la (2.3.4) diventa:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int_V \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} dV. \quad (2.3.5)$$

Sostituendo nella (2.3.5) l'identità (vedi equazione (9.3.17)):

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H}, \quad (2.3.6)$$

si ha:

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{c}{4\pi} \int_V \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) dV + \frac{c}{4\pi} \int_V \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV, \quad (2.3.7)$$

ossia, applicando il teorema della divergenza (9.3.37) ed eliminando  $\text{rot} \vec{E}$  mediante la (1.6.3):

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{c}{4\pi} \int_S (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV, \quad (2.3.8)$$

dove  $S$  è la superficie che limita il volume  $V$  ed  $\vec{n}$  la normale ad  $S$  orientata all'esterno di  $V$ . Introducendo il vettore:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H}, \quad (2.3.9)$$

La (2.3.8) assume la forma:

$$\frac{dL}{dt} = -\int_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS - \frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_V (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) dV. \quad (2.3.10)$$

Si badi che nel prodotto esterno a secondo membro della (2.3.9) compare il campo magnetico che è un vettore assiale (vedi paragrafo 1.4); di conseguenza  $\vec{S}$ , pur essendo definito mediante un prodotto esterno, è un vettore polare. Esso prende il nome di vettore di Poynting. Trasformiamo ulteriormente l'equazione (2.3.10); osservando che il lavoro del campo è esprimibile mediante il teorema dell'energia cinetica, ossia con l'equazione:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2, \quad (2.3.11)$$

si ottiene infine:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 + \frac{d}{dt} \int_V \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} dV \right\} = - \int_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS. \quad (2.3.12)$$

Per chiarire il risultato testè ottenuto, supponiamo che le  $N$  cariche siano tutte contenute in una parte limitata del volume  $V$ . Ammettiamo inoltre che il loro movimento sia tale che  $\vec{j}$  e  $\rho$  rimangano costanti nel tempo fino ad un determinato istante  $t_0$  dopo del quale essi iniziano a variare e quindi a generare un campo propagativo. Se si suppone il volume  $V$  illimitato, e quindi la superficie  $S$  situata a distanza infinita dalla zona occupata dalle cariche, è ovvio che su di essa il contributo del campo propagativo è nullo. Esso, infatti, nel tempo  $t - t_0$  percorre la distanza finita  $c(t - t_0)$  e non arriva a raggiungere  $S$ . Ciò non accade invece per il contributo del campo statico; tuttavia, essendosi ammesso che la distribuzione di cariche e correnti occupi un volume limitato, sia  $\vec{E}$  che  $\vec{H}$  decrescono almeno come  $r^{-2}$  e il vettore  $\vec{S}$ , di conseguenza, almeno come  $r^{-4}$  ( $r$  essendo la distanza da un generico punto interno alla distribuzione di carica). Poiché l'estensione della superficie invece aumenta secondo  $r^2$ , si conclude che anche il contributo del campo statico è nullo e che l'integrale a secondo membro della (2.3.12), quando  $V$  tende ad infinito, vale zero. Ne segue perciò:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 + \frac{d}{dt} \int_V \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} dV = \text{cost.} \quad (2.3.13)$$

Non è difficile stabilire il significato fisico di questa equazione; a questo scopo supponiamo dapprima che  $N$  oggetti non posseggano carica elettrica e che quindi il campo elettromagnetico sia nullo. In queste condizioni l'energia del sistema si riduce alla sola energia cinetica, ed essa, come risulta dalla (2.3.13) ponendovi  $\vec{E} = \vec{H} = 0$ , si conserva costante nel tempo. In presenza di cariche, invece, interviene anche il termine dipendente dal campo elettromagnetico ed esso forma con l'energia cinetica una quantità costante. È dunque ovvio concludere che questo termine rappresenta l'energia del campo elettromagnetico. Possiamo perciò introdurre la densità di energia elettromagnetica:

$$w = \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi}, \quad (2.3.14)$$

il suo integrale su un volume  $V$  rappresenta l'energia associata al campo contenuto in  $V$ ; avremo cioè, indicando con  $W$  questa energia:

$$W = \int_V \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} dV. \quad (2.3.15)$$

Quando, invece,  $V$  è limitato il primo membro della (2.3.12) rappresenta la variazione per unità di tempo dell'energia totale contenuta in  $V$ ; ad essa corrisponde, a secondo membro, un flusso di energia uscente attraverso  $S$ . Resta così chiarito che il vettore di Poynting rappresenta la densità di flusso dell'energia elettromagnetica. È utile, anche scrivere la (2.3.12) in modo leggermente diverso. Per far questo osserviamo che si ha, inserendo la (2.3.4) nella (2.3.10):

$$-\frac{d}{dt} \int_V \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} dV = \int_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS + \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV. \quad (2.3.16)$$

Questa relazione stabilisce che la diminuzione per unità di tempo dell'energia elettromagnetica contenuta in  $V$  è pari al flusso di energia uscente da  $V$  aumentato della potenza dissipata in  $V$  dal campo elettrico. Mediante un procedimento consueto, utilizzando il teorema della divergenza e la (2.3.14), la (2.3.16) può essere sostituita dalla relazione differenziale equivalente:

$$\text{div} \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (2.3.17)$$

La (2.3.17) è formalmente analoga all'equazione di continuità delle cariche e delle correnti, salvo la presenza, a secondo membro, di un termine che rappresenta una "sorgente", eventualmente negativa, di energia elettromagnetica.

Nel caso in cui il volume  $V$  sia illimitato e il campo elettromagnetico sia costante nel tempo è possibile sostituire alla (2.3.15) una espressione che fa intervenire esplicitamente le densità di carica e di corrente. Per ottenerla supponiamo i potenziali  $\mathcal{V}$  ed  $\vec{A}$  costanti rispetto al tempo; ricordando le (1.8.1) e (1.8.4) è allora possibile scrivere la (2.3.15) nella forma seguente:

$$W_s = \frac{1}{8\pi} \int_V \left\{ -\vec{E} \cdot \text{grad} \mathcal{V} + \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A} \right\} dV. \quad (2.3.18)$$

Utilizzando le identità (vedi equazioni (9.3.16) e (9.3.17)):

$$-\vec{E} \cdot \text{grad} \mathcal{V} = \mathcal{V} \text{div} \vec{E} - \text{div}(\mathcal{V} \vec{E}), \quad (2.3.19)$$

$$\vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A} = \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{H}) + \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H}, \quad (2.3.20)$$

la (2.3.18) diventa:

$$W_s = \frac{1}{8\pi} \int_V \left\{ \mathcal{V} \text{div} \vec{E} - \text{div}(\mathcal{V} \vec{E}) + \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{H}) + \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} \right\} dV. \quad (2.3.21)$$

È facile vedere, applicando il teorema della divergenza e tenendo conto del comportamento all'infinito del campo elettromagnetico e dei potenziali, che il secondo e il terzo termine a secondo membro della (2.3.21) sono nulli quando il volume di integrazione è illimitato. Inserendo nella (2.3.21) l'equazione (1.6.2) e la (1.6.1) in cui si sia posto  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ , si ottiene perciò:

$$W_s = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathcal{V} dV + \frac{1}{2c} \int_V \vec{j} \cdot \vec{A} dV. \quad (2.3.22)$$

Questa relazione, nel caso di un campo statico dovuto ad una distribuzione stazionaria di cariche e correnti, equivale, quando  $V$  è illimitato, alla (2.3.15).

A titolo di esempio, applichiamo la (2.3.22) al calcolo dell'energia elettrostatica di una sfera contenente una distribuzione uniforme di carica. Esprimendo il potenziale all'interno della sfera mediante al (1.10.22) ed annullando la distribuzione di corrente, dalla (2.3.22) si ha:

$$W_s = \pi \rho^2 \int_V \left( R^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) dV, \quad (2.3.23)$$

dove  $V$  è il volume della sfera. Utilizzando coordinate polari si ottiene:

$$W_s = 4\pi^2 \rho^2 \int_0^R \left( R^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) r^2 dr = \frac{(4\pi\rho)^2}{15} R^5. \quad (2.3.24)$$

Questo risultato, tenuto conto che la carica contenuta all'interno della sfera è data dalla relazione:

$$q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho, \quad (2.3.25)$$

può essere scritto nella forma:

$$W_s = \frac{3}{5} \frac{q^2}{R}. \quad (2.3.26)$$

Appare evidente, da questa equazione, che quando la carica  $q$  è concentrata entro una sfera il cui raggio  $R$  tende a zero, l'energia della distribuzione diventa infinita. Pertanto, per evitare l'apparizione di divergenze ossia di contributi tendenti ad infinito nell'espressione dell'energia, occorre considerare solo distribuzioni estese di carica. È questa una delle più fondamentali peculiarità dell'elettrodinamica classica.

## 2.4 Energia di un sistema stazionario di cariche e di correnti. Coefficienti di Induzione

Nel paragrafo precedente abbiamo stabilito due differenti equazioni adatte ad esprimere l'energia di un campo elettromagnetico statico. Nella prima, cioè nella (2.3.15) interviene solo il campo attraverso i vettori  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$ ; nella seconda, cioè nella (2.3.22), il campo interviene attraverso i potenziali  $\mathcal{V}$  ed  $\vec{A}$ , assieme alla distribuzione di  $\rho$  e di  $\vec{j}$ . Vogliamo ora mostrare che è possibile dedurre una terza relazione in cui intervengono solo le quantità  $\rho$  e  $\vec{j}$ , mentre il campo elettromagnetico non compare più. Da questa relazione apparirà chiaramente la impossibilità di considerare l'esistenza sia di cariche puntiformi quanto di correnti lineari. Entrambi questo tipi di distribuzione di  $\rho$  e di  $\vec{j}$  infatti farebbero comparire delle divergenze nell'espressione dell'energia. In questo modo il risultato ottenuto nel paragrafo precedente, circa l'energia di una distribuzione puntiforme di carica, verrà esteso al caso più generale di un insieme di cariche e di correnti.

Consideriamo, pertanto, l'equazione (2.3.22) e supponiamo che la distribuzione di carica sia costituita da un insieme di cariche puntiformi  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , quella di corrente da un insieme di linee chiuse  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ , percorse, rispettivamente, da correnti stazionarie di intensità  $I_1, I_2, \dots, I_m$ . In queste condizioni, utilizzando le equazioni (1.2.11) e (1.2.20), si ottiene:

$$W_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \mathcal{V}(P_i) + \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^m I_j \oint_{\gamma_j} \vec{A}(P_j) \cdot d\vec{l}_j, \quad (2.4.1)$$

dove  $P_i$  è il punto occupato dall' $i$ -esima carica e  $P_j$  è un qualsiasi punto della  $j$ -esima linea. Applicando la (1.10.6) all'insieme delle  $n$  cariche si ha:

$$\mathcal{V}(P_i) = \sum_{h=1}^n \frac{q_h}{r_{ih}}; \quad (2.4.2)$$

analogamente facendo uso della (1.2.20) ed applicando la (1.9.25) all'insieme delle  $m$  spire percorse da corrente si ottiene:

$$\vec{A}(P_j) = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^m I_k \oint_{\gamma_k} \frac{d\vec{l}_k}{r_{jk}}. \quad (2.4.3)$$

Sostituendo queste equazioni nella (2.4.1) si ha:

$$W_s = \frac{1}{2} \sum_{i,h=1}^n \frac{q_i q_h}{r_{ih}} + \frac{1}{2c^2} \sum_{j,k=1}^m I_j I_k \oint_{\gamma_j} \oint_{\gamma_k} \frac{d\vec{l}_k \cdot d\vec{l}_j}{r_{jk}}. \quad (2.4.4)$$

Introducendo le quantità:

$$L_{kj} = \frac{1}{c} \oint_{\gamma_j} \oint_{\gamma_k} \frac{d\vec{l}_k \cdot d\vec{l}_j}{r_{jk}}, \quad (2.4.5)$$

la (2.4.4) diventa semplicemente:

$$W_s = \frac{1}{2} \sum_{i,h=1}^n \frac{q_i q_h}{r_{ih}} + \frac{1}{2c} \sum_{j,k=1}^m L_{kj} I_k I_j. \quad (2.4.6)$$

Questa espressione dell'energia elettromagnetica statica è appunto il risultato che si voleva ottenere; in essa, come si era enunciato, compaiono soltanto le cariche e le correnti. La (2.4.5) è conosciuta sotto il nome di formola di Neumann e le quantità  $L_{kj}$  vengono dette coefficienti di induzione; precisamente per  $k \neq j$  si hanno i coefficienti di mutua induzione, per  $k = j$  i coefficienti di autoinduzione. Dalla (2.4.5) appare immediatamente che i coefficienti in questione sono simmetrici, cioè:

$$L_{jk} = L_{kj}. \quad (2.4.7)$$

Si deve notare, considerando i termini dipendenti dalle cariche, che quando gli indici  $i$  e  $h$  assumono eguali valori, compaiono nella (2.4.6) dei contributi divergenti. Lo stesso accade per i termini dipendenti dalle correnti, in cui i coefficienti di autoinduzione  $L_{kk}$  divergono logicamente. Questa difficoltà, come si è accennato all'inizio di questo paragrafo, può essere superata solo escludendo l'esistenza fisica di cariche puntiformi e di correnti lineari; in questo modo, infatti, tutti i termini diventano finiti. Nel capitolo 4 la questione verrà studiata dal punto di vista della teoria classica delle particelle elementari, alle quali si troverà essere necessario attribuire delle



dimensioni finite. In particolare si dimostrerà che il raggio dell'elettrone è circa  $2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ .

È possibile sostituire alla (2.4.5) una differente definizione dei coefficienti di induzione che si presta meglio all'uso pratico. A questo scopo consideriamo il termine dell'energia magnetica:

$$W_{s,m} = \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^m I_j \oint_{\gamma_j} \vec{A}(P_j) \cdot d\vec{l}_j. \quad (2.4.8)$$

Mediante il teorema di Stokes (9.3.41) e ricordando la (1.8.1) si ottiene:

$$W_{s,m} = \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^m I_j \int_{S_j} \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n}_j dS_j = \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^m I_j \int_{S_j} \vec{H} \cdot \vec{n}_j dS_j, \quad (2.4.9)$$

ossia, utilizzando la definizione (1.6.10) di flusso magnetico:

$$W_{s,m} = \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^m I_j \Phi_{\vec{H}_j}. \quad (2.4.10)$$

Confrontando il secondo termine della (2.4.6) con l'espressione ora trovata si ha:

$$W_{s,m} = \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^m I_j \Phi_{\vec{H}_j} = \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^m I_j \sum_{k=1}^m L_{kj} I_k \quad (2.4.11)$$

da cui, per l'arbitrarietà dei valori di  $I_j$ :

$$\Phi_{\vec{H}_j} = \sum_{k=1}^m L_{kj} I_k. \quad (2.4.12)$$

Introducendo i flussi parziali  $\Phi_{\vec{H}_{jk}}$ , cioè il flusso attraverso il  $j$ -esimo circuito dovuto alla corrente che circola nel  $k$ -esimo, si ha:

$$\Phi_{\vec{H}_{jk}} = L_{kj} I_k; \quad (2.4.13)$$

se in particolare sono presenti solo due circuiti:

$$\Phi_{\bar{H}_{12}} = L_{21} I_2 \quad (2.4.14)$$

e:

$$\Phi_{\bar{H}_{21}} = L_{12} I_1. \quad (2.4.15)$$

Ne segue, pertanto, che il coefficiente di mutua induzione esprime il rapporto tra il flusso concatenato con uno dei due circuiti e la corrente che circola nell'altro. Il coefficiente di autoinduzione, invece, esprime il rapporto tra la corrente che circola in un circuito ed il flusso con esso stesso concatenato; si ha cioè:

$$\Phi_{\bar{H}_{11}} = L_{11} I_1. \quad (2.4.16)$$

A titolo di esempio applichiamo la formola (2.4.5) al calcolo del coefficiente di mutua induzione nel caso in cui  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono due cerchi coassiali di raggi  $R_1$  ed  $R_2$ , giacenti in due piani paralleli distanti  $d$ . Usando un opportuno sistema di riferi-

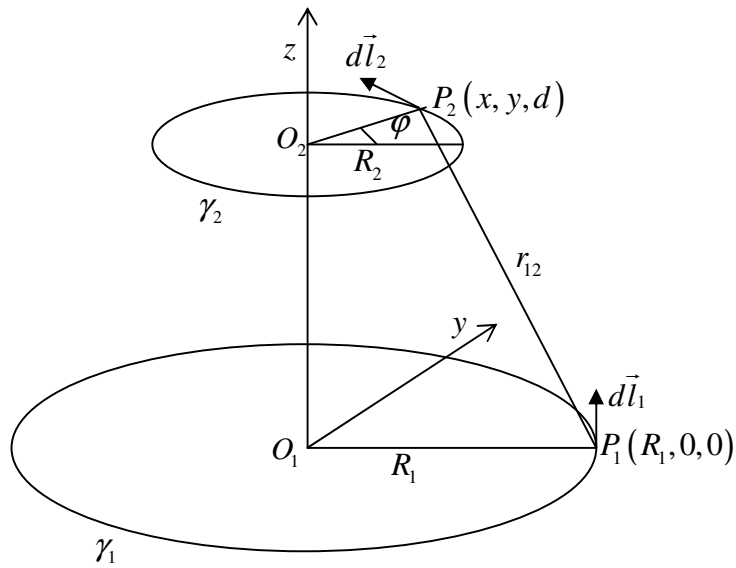


Fig. (2.4.1)

mento cartesiano (vedi fig. (2.4.1)) la distanza tra i punti  $P_1$  e  $P_2$  è esprimibile colla relazione<sup>(†††††)</sup>:

$$r_{12} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + d^2 - 2R_1x}. \quad (2.4.17)$$

Introducendo l'angolo  $\varphi$  tra la direzione dell'asse delle  $x$  ed il vettore  $P_2 - O_2$  si ha:

$$x = R_2 \cos \varphi \quad (2.4.18)$$

e:

$$d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 = dl_1 R_2 \cos \varphi d\varphi; \quad (2.4.19)$$

mediante la (2.4.5) si ottiene pertanto:

$$L_{12} = \frac{1}{c} \oint_{\gamma_j} dl_1 \int_0^{2\pi} \frac{R_2 \cos \varphi d\varphi}{(R_1^2 + R_2^2 + d^2 - 2R_1 R_2 \cos \varphi)^{1/2}} \quad (2.4.20)$$

ossia, eseguendo l'integrazione lungo  $\gamma_1$ :

$$L_{12} = \frac{2\pi R_1 R_2}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(R_1^2 + R_2^2 + d^2 - 2R_1 R_2 \cos \varphi)}}. \quad (2.4.21)$$

Il calcolo dell'integrale su  $\varphi$  può essere eseguito in modo analogo a quanto fatto per l'equazione (1.12.27). Ponendo:

$$k = \sqrt{\frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2 + d^2}} \quad (2.4.22)$$

si ottiene:

$$^{(\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger)} P_2 - P_1 = (x - R_1, y, d),$$

$$r_{12} = \sqrt{(x - R_1)^2 + y^2 + d^2} = \sqrt{R_1^2 + (x^2 + y^2) + d^2 - 2R_1x} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + d^2 - 2R_1x}.$$

$$L_{12} = \frac{8\pi}{c} \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{k} \left[ \left( 1 - \frac{k^2}{2} \right) \mathcal{J}_1(k) - \mathcal{J}_2(k) \right] \quad (2.4.23)$$

dove  $\mathcal{J}_1$  ed  $\mathcal{J}_2$  sono le funzioni ellittiche definite dalle (1.12.35), (1.12.36). Mediante le tabelle<sup>(\*\*\*\*\*)</sup> che danno i valori di queste funzioni si possono ottenere i valori di  $L_{12}$  in relazione a quelli dei parametri  $R_1$ ,  $R_2$  e  $d$ . Tuttavia quando:

$$R_1 = R_2 = R \quad (2.4.24)$$

e:

$$d \ll R, \quad (2.4.25)$$

cioè:

$$k \simeq 1 \quad (2.4.26)$$

è possibile ottenere un'espressione in forma finita di  $L_{12}$ . Sostituendo  $\vartheta$  con  $\frac{\pi}{2} - \vartheta$  ed introducendo un angolo  $\varepsilon$  infinitesimo si ha infatti:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta}} \equiv \int_0^{\varepsilon} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \vartheta}} + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \vartheta}}. \quad (2.4.27)$$

Identificando  $k$  con l'unità nel secondo integrale e sviluppando in serie  $\cos^2 \vartheta$  nel primo si ha approssimativamente:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta}} &\simeq \int_0^{\varepsilon} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2+k^2\vartheta^2}} + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{\frac{k\varepsilon}{\sqrt{1-k^2}}} \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} = \\ &= \frac{1}{k} \ln \left[ \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \left( k\varepsilon + \sqrt{1-k^2+k^2\varepsilon^2} \right) \right] - \ln \tan \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

---

(\*\*\*\*\*) E. Jahnke-F. Emde – Tables of functions – Teubner – Leipzig, Berlin 1933 -

Ponendo  $k=1$  dappertutto salvo che nel termine  $\sqrt{1-k^2}$  ed approssimando  $\tan \frac{\varepsilon}{2}$  con  $\frac{\varepsilon}{2}$ , l'integrale assume infine la forma:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta}} \simeq \ln \left[ \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-k^2}} \cdot \frac{2}{\varepsilon} \right] = \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}}, \quad (2.4.29)$$

ossia, ricordando la (2.4.22) e la (2.4.24):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta}} \simeq \ln \frac{8R}{d}. \quad (2.4.30)$$

Analogamente, per  $k \simeq 1$ , si ha:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta \simeq 1, \quad (2.4.31)$$

per cui la (2.4.23) diventa:

$$L_{12} = \frac{4\pi}{c} R \left( \ln \frac{8R}{d} - 2 \right) \quad (2.4.32)$$

che è appunto l'espressione che si voleva ottenere. Da essa risulta che quando la distanza  $d$  dei due circuiti tende a zero, la mutua induzione diverge logicamente.

## 2.5 Hamiltoniana meccanica ed elettromagnetica

Per chiarire ulteriormente le proprietà energetiche delle cariche e del campo elettromagnetico è utile considerare la funzione hamiltoniana del sistema meccanico costituito dalle cariche in movimento; essa è definita in generale dalla relazione:

$$H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \dot{y}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i \right) - L \quad (2.5.1)$$

È facile vedere che, in forza delle equazioni del moto (2.1.8),  $H$  dipende dal tempo solo se esso compare esplicitamente nella lagrangiana. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \dot{x}_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \dot{y}_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) \dot{z}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \ddot{z}_i \right] - \\ & - \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial L}{\partial z_i} \dot{z}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \ddot{z}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

da cui, tenendo conto delle (2.1.8):

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.5.3)$$

Ne segue che quando:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (2.5.4)$$

l'hamiltoniana è indipendente dal tempo.

Sostituendo la (2.1.9) nella (2.5.1) la forma esplicita di  $H$  risulta essere:

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{i=1}^N \left[ \left( m_i \dot{x}_i + \frac{q_i}{c} A_x \right) \dot{x}_i + \left( m_i \dot{y}_i + \frac{q_i}{c} A_y \right) \dot{y}_i + \left( m_i \dot{z}_i + \frac{q_i}{c} A_z \right) \dot{z}_i \right] - \\
&- \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - q_i \mathcal{V}(P_i) + \frac{q_i}{c} (\dot{x}_i A_x + \dot{y}_i A_y + \dot{z}_i A_z) \right] = \quad (2.5.5) \\
&= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 + q_i \mathcal{V}(P_i) \right].
\end{aligned}$$

Così pure partendo dalla (2.1.9) e tenendo conto della sua dipendenza esplicita da  $t$  si ottiene:

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \left[ q_i \frac{\partial \mathcal{V}(P_i)}{\partial t} - \frac{q_i}{c} \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{A}(P_i)}{\partial t} \right]. \quad (2.5.6)$$

Di conseguenza, quando  $\mathcal{V}$  ed  $\vec{A}$  non dipendono dal tempo, ossia quando il campo elettromagnetico è statico, anche l'hamiltoniana (2.5.5) è costante nel tempo.

È importante osservare a questo punto che l'hamiltoniana (2.5.5) corrisponde ad un sistema meccanico di cariche che si muovono in un modo qualsiasi; ciò implica che i potenziali  $\mathcal{V}$  ed  $\vec{A}$  da esse prodotti siano, in generale, funzione di  $t$ . L'hamiltoniana (2.5.5), d'altra parte, tiene conto solo dell'azione del campo elettromagnetico sulle cariche e non del fatto che queste a loro volta intervengono come sorgenti del campo. Ciò equivale a dire che i potenziali che compaiono nella (2.5.5) possono essere scelti in modo arbitrario. Pertanto se vogliamo che la (2.5.4) sia verificata, occorre inserire a secondo membro nell'equazione (2.5.6) non i potenziali dovuti alle  $N$  cariche  $q_i$ , ma i potenziali statici dovuti ad una distribuzione stazionaria di cariche e correnti esterna al sistema considerato. Indicando con  $\mathcal{V}_e$  il potenziale dovuto a questa distribuzione, possiamo scrivere:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 + q_i \mathcal{V}_e(P_i) \right] = \text{cost.} \quad (2.5.7)$$

Ponendo:

$$H = \sum_{i=1}^N q_i \mathcal{V}_e(P_i) = W_e, \quad (2.5.8)$$

risulta subito dalla (2.5.7) che  $W_e$  rappresenta l'energia potenziale del sistema di cariche immerso in un campo statico; esso infatti forma con l'energia cinetica una quantità costante nel tempo. Inoltre, dato che nella (2.5.8) il potenziale  $\vec{A}$  e quindi il campo magnetico non intervengono,  $W_e$  corrisponde all'energia elettrostatica del sistema. Quando la distribuzione di cariche è continua, tenendo conto della (1.2.8) o della (1.2.11), l'espressione di  $W_e$  diventa:

$$W_e = \int \rho \mathcal{V}_e dV. \quad (2.5.9)$$

Le equazioni (2.5.8) e (2.5.9) stabiliscono il significato energetico del potenziale scalare  $\mathcal{V}$ . Il potenziale vettore  $\vec{A}$ , invece, non possiede un analogo significato energetico immediato; esso, tuttavia, nel caso non statico interviene nell'espressione del lavoro del campo elettrico. Sostituendo le (2.5.5) e (2.5.6) nella (2.5.3) si ottiene infatti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) + \sum_{i=1}^N \left( q_i \text{grad}_{P_i} \mathcal{V} \cdot \vec{v}_i + q_i \frac{\partial \mathcal{V}(P_i)}{\partial t} \right) = \\ = \sum_{i=1}^N \left[ q_i \frac{\partial \mathcal{V}(P_i)}{\partial t} - \frac{q_i}{c} \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{A}(P_i)}{\partial t} \right], \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

ossia, ricordando la (1.8.4):

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) = \sum_{i=1}^N q_i \vec{E} \cdot \vec{v}_i, \quad (2.5.11)$$

che è l'espressione del teorema delle forze vive.

Completato lo studio dell'hamiltoniana meccanica, facciamo vedere che, in base al formalismo lagrangiano sviluppato nel paragrafo precedente, è possibile costruire un'hamiltoniana totale che tiene conto, oltreché delle cariche, anche del campo elettromagnetico. Essa è definita dalla relazione:

$$H_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \dot{y}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i \right) + \int_V \sum_{\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi_{\sigma}}{\partial t} \right)} \frac{\partial \Psi_{\sigma}}{\partial t} dV - L_{\text{tot}} \quad (2.5.12)$$



dove  $L_{\text{tot}}$  è la lagrangiana delle cariche e del campo data dalla (2.2.17) ed  $\mathcal{L}$  la densità di lagrangiana del campo data dalla (2.2.11). Utilizzando queste equazioni ed esprimendo il potenziale di Schwarzschild nella forma (2.1.13), la (2.5.12) diventa:

$$\begin{aligned} H_{\text{tot}} &= \sum_{i=1}^N \left[ m_i \vec{v}_i^2 + \frac{q_i}{c} \vec{v}_i \cdot \vec{A}(P_i) \right] + \frac{1}{4\pi} \int_V \left( \vec{E} \cdot \text{grad} \mathcal{V} + \vec{E}^2 \right) dV - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^2 + \sum_{i=1}^N q_i \left[ \mathcal{V}(P_i) - \frac{1}{c} \vec{v}_i \cdot \vec{A}(P_i) \right] - \frac{1}{8\pi} \int_V \left( \vec{E}^2 - \vec{H}^2 \right) dV = \quad (2.5.13) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 + q_i \mathcal{V}(P_i) \right] + \int_V \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} dV + \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{E} \cdot \text{grad} \mathcal{V} dV. \end{aligned}$$

Questa espressione, supponendo il volume  $V$  illimitato, può essere scritta in forma più semplice; per far ciò consideriamo l'identità (vedi equazione (9.3.16)):

$$\text{div}(\vec{E} \mathcal{V}) = \mathcal{V} \text{div} \vec{E} + \vec{E} \cdot \text{grad} \mathcal{V}, \quad (2.5.14)$$

da essa, ricordando la (1.6.2) ed applicando il teorema della divergenza (9.3.37) si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{E} \cdot \text{grad} \mathcal{V} dV &= \int_V \text{div}(\mathcal{V} \vec{E}) dV - 4\pi \int_V \rho \mathcal{V} dV = \\ &= \int_S \mathcal{V} \vec{E} \cdot \vec{n} dS - 4\pi \int_V \rho \mathcal{V} dV. \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Quando  $V$  è illimitato, a causa del comportamento all'infinito di  $\mathcal{V}$  ed  $\vec{E}$ , la relazione precedente si riduce a:

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \vec{E} \cdot \text{grad} \mathcal{V} dV = - \int_V \rho \mathcal{V} dV. \quad (2.5.16)$$

Sostituendo nella (2.5.13) e tenendo conto dell'equivalenza delle espressioni (2.5.8) e (2.5.9) di  $W_e$  si arriva infine a scrivere:

$$H_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 + \int_V \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} dV. \quad (2.5.17)$$

Questa espressione stabilisce che  $H_{\text{tot}}$  rappresenta l'energia totale, cioè meccanica ed elettromagnetica del sistema; essa, come risulta dalla (2.3.13), si conserva costante nel tempo. Benché questo risultato non sia essenziale per lo sviluppo dell'elettrodinamica classica, esso è importante perché permette di estendere al formalismo hamiltoniano l'analogia tra la descrizione dei sistemi meccanici e quella dei campi elettromagnetici già introdotta nel paragrafo precedente con le funzioni lagrangiane.

In conclusione: nel caso statico l'energia del campo elettromagnetico dipende dai potenziali  $\vec{A}$  e  $\mathcal{V}$  e dalla distribuzione di carica e di corrente attraverso le equazioni (2.3.22) e (2.4.6); in generale, per campi variabili nel tempo, l'energia è data in funzione di  $\vec{E}$  e di  $\vec{H}$  dalla equazione (2.3.15). Il potenziale  $\mathcal{V}$ , inoltre, determina attraverso le equazioni (2.5.8) e (2.5.9) l'energia di una distribuzione di carica immersa in un campo elettromagnetico esterno.

Un'importante applicazione della (2.5.8) concerne l'energia di un dipolo immerso in un campo elettrico. Consideriamo, come nel paragrafo 1.5, due cariche  $-q$  e  $+q$  collocate rispettivamente nei punti  $Q$  e  $Q + \Delta\vec{Q}$ ; la loro energia, ricordando la definizione (1.5.1) di dipolo, risulta essere:

$$W_e = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \left[ q\mathcal{V}_e(Q + \Delta\vec{Q}) - q\mathcal{V}_e(Q) \right] = |\vec{p}| \frac{d\mathcal{V}_e}{|d\vec{Q}|}. \quad (2.5.18)$$

Procedendo come per l'equazione (1.11.5) si verifica subito che:

$$\frac{d\mathcal{V}_e}{|d\vec{Q}|} = \text{grad}_Q \mathcal{V}_e \cdot \frac{d\vec{Q}}{|d\vec{Q}|}, \quad (2.5.19)$$

di conseguenza, osservando che il versore di  $\vec{p}$  coincide proprio con  $\frac{d\vec{Q}}{|d\vec{Q}|}$ , la (2.5.18)

diventa:

$$W_e = \vec{p} \cdot \text{grad}_Q \mathcal{V}_e. \quad (2.5.20)$$

Utilizzando l'espressione (1.10.3) del campo elettrico per il caso statico, si ha pertanto:

$$W_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad (2.5.21)$$

dove  $\vec{E}$  rappresenta, appunto, il campo elettrico esterno.

Se il campo  $\vec{E}$  a sua volta è dovuto ad un dipolo, basta sostituire la (1.11.9) nella (2.5.21) per ottenere l'energia di interazione di due dipoli. Indicando con  $W$  questa energia si ha:

$$W = \frac{1}{r_{12}^3} \left[ \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_{12})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r}_{12})}{r_{12}^2} \right] \quad (2.5.22)$$

dove  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  sono i momenti dei dipoli ed  $\vec{r}_{12}$  la loro distanza. Risulta subito che l'espressione di  $W$ , come d'altronde ci si deve aspettare, è simmetrica rispetto allo scambio dei due dipoli.

## 2.6 Espressione dell'hamiltoniana meccanica mediante i momenti coniugati – Significato dei termini dipendenti dal campo magnetico

Abbiamo dimostrato, nel paragrafo 2.4, che l'energia di un sistema meccanico di cariche in movimento non dipende da alcun contributo dovuto al campo magnetico; il campo elettrico, invece, interviene col termine  $W_e$ . Faremo ora vedere che introducendo in sostituzione delle velocità  $\dot{x}_i$ ,  $\dot{y}_i$ ,  $\dot{z}_i$  degli opportuni parametri  $p_{ix}$ ,  $p_{iy}$ ,  $p_{iz}$ , detti momenti coniugati, rispettivamente delle coordinate  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ , è possibile dare all'hamiltoniana, ossia alla espressione dell'energia, una forma in cui il campo magnetico interviene esplicitamente. In questo modo, inoltre, le  $3N$  equazioni lagrangiane (2.1.8), del secondo ordine nelle derivate di  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ , vengono sostituite da  $6N$  equazioni del primo ordine. Questa trattazione sarà di particolare utilità per le applicazioni alle proprietà magnetiche della materia che in seguito svilupperemo.

Definiamo nel seguente modo i momenti coniugati:

$$p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}; \quad p_{iy} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}; \quad p_{iz} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}; \quad (2.6.1)$$

risulta subito, sostituendo queste espressioni nelle equazioni lagrangiane (2.1.8) che le loro derivate temporali sono:

$$\dot{p}_{ix} = \frac{\partial L}{\partial x_i}; \quad \dot{p}_{iy} = \frac{\partial L}{\partial y_i}; \quad \dot{p}_{iz} = \frac{\partial L}{\partial z_i}. \quad (2.6.2)$$

Mediante le (2.6.1) l'hamiltoniana (2.5.1) assume la forma:

$$H = \sum_{i=1}^N (p_{ix} \dot{x}_i + p_{iy} \dot{y}_i + p_{iz} \dot{z}_i) - L; \quad (2.6.3)$$

da essa, calcolando il differenziale totale, si possono facilmente ottenere le nuove equazioni del moto. Si ha infatti:

$$dH = \sum_{i=1}^N \left( p_{ix} d\dot{x}_i + p_{iy} d\dot{y}_i + p_{iz} d\dot{z}_i + \dot{x}_i dp_{ix} + \dot{y}_i dp_{iy} + \dot{z}_i dp_{iz} \right) - \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial L}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial L}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} d\dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} d\dot{y}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} d\dot{z}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.6.4)$$

Tenendo conto delle (2.6.1) i termini proporzionali a  $d\dot{x}_i$ ,  $d\dot{y}_i$ ,  $d\dot{z}_i$  possono essere eliminati, si ottiene così:

$$dH = \sum_{i=1}^N \left( \dot{x}_i dp_{ix} + \dot{y}_i dp_{iy} + \dot{z}_i dp_{iz} - \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial L}{\partial y_i} dy_i - \frac{\partial L}{\partial z_i} dz_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (2.6.5)$$

ossia, ricordando le (2.6.2):

$$dH = \sum_{i=1}^N \left( \dot{x}_i dp_{ix} + \dot{y}_i dp_{iy} + \dot{z}_i dp_{iz} - \dot{p}_{ix} dx_i - \dot{p}_{iy} dy_i - \dot{p}_{iz} dz_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.6.6)$$

Poiché  $H$  deve essere ora considerata funzione delle coordinate e dei momenti coniugati, altroché eventualmente del tempo, i coefficienti di  $dp_{ix}$ ,  $dx_i$  ecc. e di  $dt$  devono essere eguagliati alle corrispondenti derivate di  $H$ ; si ha perciò:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_{ix}}; \quad \dot{y}_i = \frac{\partial H}{\partial p_{iy}}; \quad \dot{z}_i = \frac{\partial H}{\partial p_{iz}}; \quad (2.6.7)$$

$$\dot{p}_{ix} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; \quad \dot{p}_{iy} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \dot{p}_{iz} = -\frac{\partial H}{\partial z_i}; \quad (2.6.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.6.9)$$

Le (2.6.7), (2.6.8) costituiscono, rispetto alle variabili  $x_i$ ,  $p_{ix}$  ecc. un sistema di  $3N$  equazioni del primo ordine. Questo appunto è il risultato a cui si voleva arrivare.

Scriviamo l'espressione di  $H$  mediante i momenti coniugati. Ricordando la (2.1.9) si ottiene dalle (2.6.1):

$$\begin{aligned}
 p_{ix} &= m_i \dot{x}_i + \frac{q_i}{c} A_x(P_i), \\
 p_{iy} &= m_i \dot{y}_i + \frac{q_i}{c} A_y(P_i), \\
 p_{iz} &= m_i \dot{z}_i + \frac{q_i}{c} A_z(P_i),
 \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

ossia in forma vettoriale:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i + \frac{q_i}{c} \vec{A}(P_i). \tag{2.6.11}$$

Ricavando  $\vec{v}_i$  e sostituendolo nella (2.5.7) si ha:

$$H = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2m_i} \left[ \vec{p}_i - \frac{q_i}{c} \vec{A}(P_i) \right]^2 + q_i \mathcal{V}_e(P_i) \right\} \tag{2.6.12}$$

che è l'espressione richiesta.

Trasformiamo ulteriormente l'hamiltoniana facendo intervenire in essa il campo elettromagnetico in modo esplicito. A questo scopo supponiamo, per semplicità, che  $\vec{H}$  sia costante rispetto al posto e al tempo; è facile vedere che si può scrivere in questo caso:

$$\vec{A}(P_i) = \frac{1}{2} \vec{H} \wedge \vec{r}_i, \tag{2.6.13}$$

dove  $\vec{r}_i$  è la distanza del punto  $P_i$  da un'origine  $O$  arbitrariamente scelta. Infatti, applicando alla (2.6.13) l'operazione di rotore si ha:

$$\text{rot} \vec{A} = \frac{1}{2} \left[ \vec{H} \text{div} \vec{r}_i - (\vec{H} \cdot \text{grad}) \vec{r}_i \right] = \frac{1}{2} [3\vec{H} - \vec{H}] = \vec{H}. \tag{2.6.14}$$

Sostituendo la (2.6.13) nella (2.6.12) si ottiene:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \left[ \vec{p}_i - \frac{q_i}{2c} \vec{H} \wedge \vec{r}_i \right]^2 + q_i \mathcal{V}_e(P_i) \quad (2.6.15)$$

ossia, svolgendo il quadrato ed eseguendo alcune trasformazioni:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} - \frac{q_i}{2m_i c} \vec{p}_i \cdot (\vec{H} \wedge \vec{r}_i) + \frac{1}{2m_i} \left( \frac{q_i}{2c} \right)^2 (\vec{H} \wedge \vec{r}_i)^2 \right] + \sum_{i=1}^N q_i \mathcal{V}_e(P_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} - \frac{1}{2c} \vec{H} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i + \frac{1}{8c^2} \sum_{i=1}^N \frac{q_i^2}{m_i} \left[ \vec{H}^2 r_i^2 - (\vec{H} \cdot \vec{r}_i)^2 \right] + \sum_{i=1}^N q_i \mathcal{V}_e(P_i). \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

Ponendo:

$$\vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = \vec{L}_i \quad (2.6.17)$$

e:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{\parallel i} + \vec{r}_{\perp i} \quad (2.6.18)$$

dove  $\vec{r}_{\parallel i}$  e  $\vec{r}_{\perp i}$  indicano le componenti di  $\vec{r}_i$  rispettivamente parallela ed ortogonale ad  $\vec{H}$ , si può scrivere infine:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} - \frac{1}{2c} \vec{H} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} \vec{L}_i + \frac{\vec{H}^2}{8c^2} \sum_{i=1}^N \frac{q_i^2}{m_i} r_{\perp i}^2 + \sum_{i=1}^N q_i \mathcal{V}_e(P_i). \quad (2.6.19)$$

Questa espressione dell'hamiltoniana richiede alcune precisazioni. Si deve osservare, innanzitutto, che quando il campo magnetico è nullo, il momento  $\vec{p}_i$  coincide con la quantità di moto meccanica della  $i$ -esima particella e il vettore  $\vec{L}_i$  si identifica con il momento angolare della quantità di moto rispetto all'origine  $O$ ; in questo caso il primo termine a secondo membro della (2.6.19) rappresenta l'energia cinetica. Se  $\vec{H}$ , invece, non è nullo l'energia cinetica dipende anche dai due termini successivi in cui interviene  $\vec{H}$ ; la dipendenza da  $\vec{H}$ , tuttavia, è fittizia in quanto ottenuta introducendo i momenti  $\vec{p}_i$ . Ciò nonostante, in vista delle successive applicazioni, è utile considerare separatamente i due termini della (2.6.19) dipendenti da  $\vec{H}$  ed in modo

particolare il secondo che, contenendo a fattore la quantità  $c^{-1}$  contro  $c^{-2}$  che compare nel terzo è il preponderante.

A questo scopo supponiamo che  $N$  cariche muovano lungo un percorso chiuso  $\gamma$  rimanendo sempre all'interno di un sottile tubo di flusso e producendo una corrente solenoidale. Una situazione di questo tipo l'abbiamo già incontrata nei paragrafi 1.5 e 1.12. Indicando con  $H'_m$  il termine dell'hamiltoniana proporzionale ad  $\vec{H}$  e ricordando la (2.6.16) si ha:

$$H'_m = -\frac{1}{2c} \vec{H} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i; \quad (2.6.20)$$

tenendo conto della (2.6.11) e trascurando i termini proporzionali a  $c^{-2}$  possiamo scrivere:

$$H'_m = -\frac{1}{2c} \vec{H} \cdot \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i. \quad (2.6.21)$$

Suddividendo, vedi fig. (2.6.1), il volume del tubo di flusso in elementi  $\Delta V_i$  di lunghezza infinitesima e supponendo il vettore  $\vec{r}_i$  costante per tutte le cariche contenute in  $\Delta V_i$ , si ha:

$$H'_m = -\frac{1}{2c} \vec{H} \cdot \sum_{\Delta V_i} \vec{r}_i \wedge \sum_{j=1}^{n(\Delta V_i)} q_j \vec{v}_j. \quad (2.6.22)$$

Assumendo che le cariche siano in numero tale da formare una distribuzione continua e ricordando le (1.2.12), (1.2.18), questa equazione con successive trasformazioni diventa:

$$H'_m = -\frac{1}{2c} \vec{H} \cdot \sum_{\Delta V_i} \vec{r}_i \wedge \vec{j} \Delta V_i = -\frac{1}{2c} \vec{H} \cdot \int_V \vec{r} \wedge \vec{j} dV = -\frac{1}{2c} \vec{H} \cdot \oint \vec{r} \wedge d\vec{l}. \quad (2.6.23)$$

Il risultato ottenuto, d'altra parte, se si tiene conto della (1.2.13), è di validità generale. Osserviamo ora che l'area del triangolo infinitesimo di base  $d\vec{l}$  e di vertice il punto  $O$  vale:



$$dS = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge d\vec{l}|; \quad (2.6.24)$$

essendo inoltre il prodotto  $\vec{r} \wedge d\vec{l}$  normale alla superficie di questo triangolo, si può

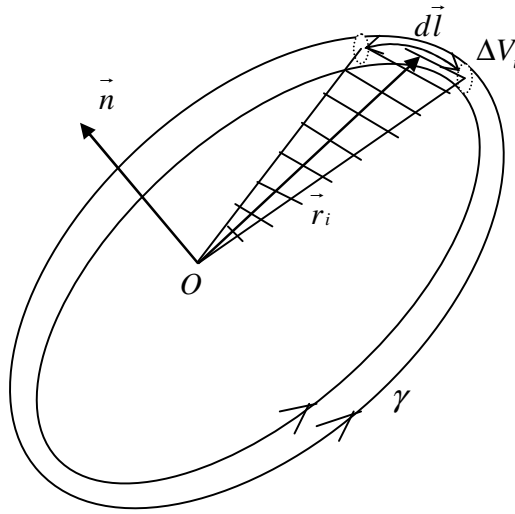


Fig. (2.6.1)

scrivere:

$$\vec{r} \wedge d\vec{l} = 2\vec{n}dS. \quad (2.6.25)$$

Mediante la (2.6.25) l'espressione di  $H'_m$  diventa:

$$H'_m = -\vec{H} \cdot \frac{I}{c} \int_S \vec{n}dS, \quad (2.6.26)$$

Da cui, ricordando la (1.5.18), otteniamo infine:

$$H'_m = -\vec{H} \cdot \vec{m}, \quad (2.6.27)$$

dove  $\vec{m}$  è il momento del dipolo magnetico associato alla corrente che circola lungo  $\gamma$ . Questa relazione è formalmente paragonabile all'equazione (2.5.21) che esprime la energia di un dipolo elettrico immerso in un campo elettrico uniforme. Non è però

corretto ritenere che il teorema di equivalenza di Ampère sia valido anche per quanto riguarda le proprietà energetiche delle correnti; infatti, come si è testé fatto notare, la dipendenza da  $\vec{H}$  dell'hamiltoniana (2.6.19) è solo apparente e il campo magnetico non produce in realtà alcun effetto sull'energia.

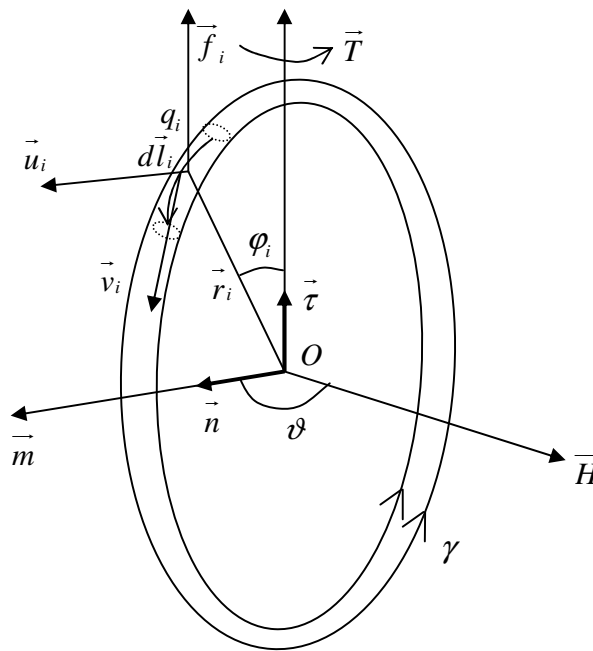


Fig. (2.6.2)

Questo risultato appare, a prima vista, paradossale. Il campo magnetico, infatti, determina sulla corrente che circola lungo  $\gamma$  il momento torcente  $\vec{T}$  dato dall'equazione (1.5.19); di conseguenza al ruotare di  $\gamma$  attorno ad un asse  $\vec{\tau}$  parallelo alla direzione di  $\vec{T}$  si ottiene<sup>(§§§§§§)</sup> del lavoro meccanico. Parrebbe ovvio associare a questo lavoro

---

(§§§§§§) Si ottiene sempre lavoro positivo (vedi più avanti) qualunque sia il verso della corrente che circola lungo  $\gamma$ : il momento torcente, dovuto all'effetto del campo magnetico sulla corrente (vedi equazione (1.5.19)), fa ruotare  $\gamma$  intorno all'asse  $\vec{\tau}$  producendo lavoro a spese dell'energia cinetica delle

l'energia di  $H'_m$ . Più precisamente: indicando con  $\vartheta$  l'angolo tra la direzione di  $\vec{m}$  e quella di  $\vec{H}$  ed applicando un noto teorema di meccanica<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>, il lavoro eseguito dal momento torcente risulta essere:

$$dL_m = \vec{T} \cdot \vec{\tau} d\vartheta = |\vec{T}| d\vartheta = |\vec{m}| |\vec{H}| \sin \vartheta d\vartheta. \quad (2.6.28)$$

È da notare che questa equazione fornisce un lavoro positivo; di conseguenza il segno di  $\sin \vartheta$  deve sempre coincidere con quello di  $d\vartheta$ . Ciò corrisponde al fatto che capovolgendo il verso di  $\vec{m}$ , cioè cambiando il segno di  $\sin \vartheta$ , si inverte pure il senso di rotazione e quindi il segno di  $d\vartheta$ . Integrando la (2.6.28) a partire da  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , si ottiene<sup>(+++++)</sup>:

$$L_m = |\vec{m}| |\vec{H}| \cos \vartheta = \vec{m} \cdot \vec{H}. \quad (2.6.29)$$

Ammettendo l'esistenza di un'energia potenziale associata alla giacitura di  $\vec{m}$ , essa dovrebbe valere  $-L_m$  e coinciderebbe, pertanto, proprio con l'espressione (2.6.27) di  $H'_m$ . Il campo magnetico recherebbe così un contributo alla energia potenziale.

cariche circolanti lungo  $\mathcal{V}$ ; invertendo la corrente si inverte  $\vec{\tau}$  e con esso la rotazione di  $\mathcal{V}$ , ma il lavoro rimane positivo, ottenuto ancora a spese dell'energia cinetica delle cariche (ora circolanti in verso opposto al precedente) [n.d.c.].

<sup>(\*\*\*\*\*)</sup> Il lavoro del momento torcente di un insieme di forze  $\vec{f}_i$ , applicate nei punti  $P_i$  di un corpo rigido girevole attorno all'asse  $\vec{\tau}$  passante per l'origine  $O$ , può essere calcolato mediante la solita relazione:

$$dL = \sum_i \vec{f}_i \cdot d\vec{P}_i$$

in cui si ponga:

$$d\vec{P}_i = \vec{\tau} \wedge (P_i - O) d\vartheta.$$

Si ha, infatti, usando la proprietà ciclica del prodotto misto di tre vettori (vedi equazione (9.3.5)):

$$dL = \sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{\tau} \wedge (P_i - O) d\vartheta = \vec{\tau} \cdot \sum_i (P_i - O) \wedge \vec{f}_i d\vartheta = \vec{\tau} \cdot \vec{T} d\vartheta.$$

<sup>(+++++)</sup> Partendo da  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , per  $\vartheta$  positivi decrescenti, il prodotto  $\sin \vartheta d\vartheta$  sarebbe sempre negativo; di conseguenza, per ottenere un lavoro positivo si dovrebbe integrare la (2.6.28) a partire da  $\vartheta$  ( $\int_{\vartheta}^{\frac{\pi}{2}} \dots$ ) oppure si dovrebbe prendere il prodotto, sempre positivo,  $\sin \vartheta \cdot (-d\vartheta)$  [n.d.c.].

Per chiarire questo paradosso studiamo in dettaglio i fenomeni che avvengono durante la rotazione della linea  $\gamma$ . Supponiamo, per rendere più semplice il calcolo, che essa sia una circonferenza di raggio  $R$  e centro  $O$  in modo che l'asse di rotazione  $\vec{\tau}$ , parallelo a  $\vec{T}$ , coincida con uno dei diametri (vedi fig. (2.6.2)). Consideriamo una carica  $q_i$  in moto con velocità  $\vec{v}_i$  lungo  $\gamma$ ; al ruotare di  $\gamma$  sotto l'azione del momento torcente  $\vec{T}$  essa acquista una velocità  $\vec{u}_i$ , ortogonale a  $\vec{v}_i$ , data dalla relazione:

$$\vec{u}_i = \dot{\vartheta} \vec{\tau} \wedge \vec{r}_i = \dot{\vartheta} R \sin \varphi_i \vec{n}. \quad (2.6.30)$$

Dove  $\varphi_i$  è l'angolo tra  $\vec{\tau}$  ed  $\vec{r}_i$  ed  $\vec{n}$  la normale al cerchio sotteso da  $\gamma$ . Procedendo come nel paragrafo 1.6 (vedi fig. (1.6.3)), valutiamo il lavoro compiuto dalla forza di Lorentz associata alla velocità  $\vec{u}_i$  durante il moto di  $q_i$ . Questo lavoro vale:

$$\begin{aligned} dL_i &= \frac{q_i}{c} \vec{u}_i \wedge \vec{H} \cdot \vec{v}_i dt = \frac{q_i}{c} d\vartheta R \sin \varphi_i \vec{n} \wedge \vec{H} \cdot \vec{v}_i = \\ &= \frac{q_i}{c} d\vartheta R \sin \varphi_i \left| \vec{H} \right| \sin \vartheta \vec{\tau} \cdot \vec{v}_i; \end{aligned} \quad (2.6.31)$$

osservando che, analogamente alla (1.6.18):

$$\vec{\tau} \cdot \vec{v}_i = -\sin \varphi_i \left| \vec{v}_i \right|, \quad (2.6.32)$$

si ha:

$$dL_i = -\frac{q_i}{c} d\vartheta R \left| \vec{H} \right| \sin \vartheta \left| \vec{v}_i \right| \sin^2 \varphi_i. \quad (2.6.33)$$

Poiché si è stabilito, mediante la (2.6.28) che il prodotto  $\sin \vartheta d\vartheta$  è positivo, risulta, da questa equazione, che la quantità  $dL_i$  è negativa, ossia che il lavoro sulla carica  $q_i$  è frenante. Ciò corrisponde al fatto che la componente tangente a  $\gamma$  della forza  $\vec{f}_i$  associata ad  $\vec{u}_i$  (vedi fig. (2.6.2)) è sempre opposta a  $\vec{v}_i$ . Tenendo conto di tutte le cariche si ottiene il lavoro totale:

$$dL = -\frac{1}{c} \left| \vec{H} \right| R \sin \vartheta d\vartheta \sum_{i=1}^N \sin^2 \varphi_i q_i \left| \vec{v}_i \right|. \quad (2.6.34)$$

Per eseguire la somma occorre trasformare l'espressione che figura a secondo membro. A questo scopo osserviamo, innanzitutto, che essendo  $\vec{v}_i$  parallela all'elemento  $d\vec{l}_i$  di  $\gamma$  si può scrivere:

$$|\vec{v}_i| = \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{l}_i}{|d\vec{l}_i|}. \quad (2.6.35)$$

Mediante un procedimento consueto ed utilizzando le (1.2.12), (1.2.20), ne segue:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sin^2 \varphi_i q_i |\vec{v}_i| &= \sum_{\Delta V_j} \sin^2 \varphi_j \frac{\sum_{i=1}^{n(\Delta V_j)} q_i \vec{v}_i}{\Delta V_j} \cdot \frac{d\vec{l}_j}{|d\vec{l}_j|} \Delta V_j = \\ &= \int_V \sin^2 \varphi \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{|d\vec{l}|} dV = \oint_{\gamma} \sin^2 \varphi I \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}}{|d\vec{l}|} = \\ &= I \oint_{\gamma} \sin^2 \varphi |d\vec{l}| = IR \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi IR. \end{aligned} \quad (2.6.36)$$

In questo modo, l'espressione del lavoro frenante diventa:

$$dL = -|\vec{H}| \pi R^2 \frac{I}{c} \sin \vartheta d\vartheta, \quad (2.6.37)$$

ossia, ricordando la (1.5.21) ed applicando la (1.5.20) all'intera area del cerchio:

$$dL = -|\vec{m}| |\vec{H}| \sin \vartheta d\vartheta. \quad (2.6.38)$$

A questo lavoro, evidentemente, corrisponde un decremento dell'energia cinetica di tutte le cariche che circolano lungo  $\gamma$ ; si ha cioè:

$$d\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2\right) = -|\vec{m}| |\vec{H}| \sin \vartheta d\vartheta \quad (2.6.39)$$

da cui, confrontando con la (2.6.28), si ottiene finalmente:

$$dL_m = -d\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2\right). \quad (2.6.40)$$

Si può concludere, pertanto, che il lavoro  $L_m$  è ottenuto a spese dell'energia cinetica e non di un'eventuale energia magnetica potenziale, che in realtà non esiste. Di conseguenza, al ruotare di  $\gamma$  attorno a  $\vec{\tau}$ , diminuisce la corrente  $I$  e quindi il momento  $\vec{m}$  ad essa associato.

Resta così confermato che il teorema di equivalenza di Ampère non è applicabile quando sono in gioco le proprietà energetiche delle cariche in movimento. Tuttavia, se una qualunque causa intervenisse a mantenere costante il movimento delle cariche il teorema di equivalenza apparirebbe valido. Una situazione di questo genere si verifica, ad esempio, quando lungo il percorso delle cariche è inserita una sorgente di energia (pila o altro); l'energia magnetica richiesta dal principio di equivalenza è allora fornita da questa sorgente.

Per quanto riguarda il termine della (2.6.19) proporzionale a  $c^{-2}$  ci limitiamo ad osservare che esso, nel caso delle correnti che circolano lungo un percorso chiuso  $\gamma$ , può essere interpretato come l'effetto di una deformazione della linea  $\gamma$  dovuta al campo magnetico e ad esso proporzionale. Si ottiene così un contributo al momento  $\vec{m}$  proporzionale ad  $\vec{H}$ ; tale contributo inserito in una relazione analoga alla (2.6.27) dà luogo proprio alla dipendenza da  $\vec{H}^2$  che si riscontra nel terzo termine della (2.6.19) <sup>(\*\*\*\*\*)</sup>.

---

(\*\*\*\*\*) Dalla proprietà ciclica del prodotto misto (9.3.5) e dalla (9.3.6) del doppio prodotto vettoriale si ottiene:  $(\vec{H} \wedge \vec{r}_i)^2 = (\vec{H} \wedge \vec{r}_i) \cdot (\vec{H} \wedge \vec{r}_i) = \vec{H} \cdot \vec{r}_i \wedge (\vec{H} \wedge \vec{r}_i) = \vec{H} \cdot [\vec{r}_i^2 \vec{H} - (\vec{r}_i \cdot \vec{H}) \vec{r}_i]$ ; sostituendo questa espressione nella (2.6.16) i termini proporzionali a  $c^{-1}$  e  $c^{-2}$  diventano:  $H'_m + H''_m = -\frac{1}{2c} \vec{H} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} \left\{ \vec{L}_i - \frac{q_i}{4c} [\vec{r}_i^2 \vec{H} - (\vec{r}_i \cdot \vec{H}) \vec{r}_i] \right\}$ . Ricordando inoltre che la relazione  $\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} \vec{L}_i$  esprime il momento magnetico della linea non deformata (quando  $\vec{H} = 0$ ) il contributo al momento magnetico dovuto alla deformazione, proporzionale ad  $\vec{H}$ , risulta:

## 2.7 Il tensore degli sforzi elettromagnetici

Abbiamo stabilito nel paragrafo 2.3 che il vettore di Poynting rappresenta il flusso dell'energia elettromagnetica; dimostreremo ora, nel presente e nel successivo paragrafo, che al flusso di energia è associata una quantità di moto. A questo scopo consideriamo un sistema di cariche contenute in un volume finito  $V$ ; assumendo che le cariche formino una distribuzione continua la forza elettromagnetica che agisce su di esse è data, sotto forma di integrale di volume, dalla (1.4.14). Eliminando da questa equazione la densità di carica e di corrente, per mezzo della (1.6.1) e (1.6.2), si ottiene:

$$\vec{f} = \int_V \left( \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{H} \right) dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \left( \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \wedge \vec{H} \right] dV. \quad (2.7.1)$$

L'espressione sotto integrale può essere trasformata in modo che in essa il campo elettrico e quello magnetico figurino simmetricamente. Per far ciò basta aggiungere all'integrando i primi membri delle equazioni omogenee (1.6.3) e (1.6.4) moltiplicati vettorialmente rispettivamente per  $\vec{E}$  e per  $\vec{H}$ ; si ha così:

$$\begin{aligned} \vec{f} = \frac{1}{4\pi} \int_V & \left[ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{H} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \wedge \vec{H} + (\operatorname{rot} \vec{E}) \wedge \vec{E} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge \vec{H} - \frac{1}{c} \vec{E} \wedge \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] dV. \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Ricordando l'espressione (2.3.9) del vettore di Poynting, questa equazione diventa:

---


$$\vec{m}_H = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{m_i} \left\{ -\frac{q_i}{4c} \left[ r_i^2 \vec{H} - (\vec{r}_i \cdot \vec{H}) \vec{r}_i \right] \right\}. \text{ Inserito nella relazione } H_m'' = -\vec{H} \cdot \vec{m}_H, \text{ analoga}$$

alla (2.6.27), tale contributo dà infine la dipendenza da  $\vec{H}^2$  cercata:  $H_m'' = \frac{\vec{H}^2}{8c^2} \sum_{i=1}^N \frac{q_i^2}{m_i} r_{\perp i}^2$  [n.d.c.].

$$\begin{aligned} \vec{f} = & \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + (\operatorname{rot} \vec{E}) \wedge \vec{E} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{H} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \wedge \vec{H} \right] dV - \\ & - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} dV. \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

Per trasformare ulteriormente l'integrale osserviamo che, per la componente  $x$  del termine dipendente da  $\vec{E}$  vale l'identità:

$$\begin{aligned} \left[ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + (\operatorname{rot} \vec{E}) \wedge \vec{E} \right]_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z); \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

per le rimanenti componenti possono essere scritte delle relazioni analoghe, ottenibili dalla precedente mediante permutazione circolare degli indici. Di conseguenza ponendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2} (H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) &= -4\pi T_{xx}, \\ \frac{1}{2} (E_y^2 - E_z^2 - E_x^2) + \frac{1}{2} (H_y^2 - H_z^2 - H_x^2) &= -4\pi T_{yy}, \\ \frac{1}{2} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) + \frac{1}{2} (H_z^2 - H_x^2 - H_y^2) &= -4\pi T_{zz}, \\ E_x E_y + H_x H_y &= -4\pi T_{xy} = -4\pi T_{yx}, \\ E_x E_z + H_x H_z &= -4\pi T_{xz} = -4\pi T_{zx}, \\ E_y E_z + H_y H_z &= -4\pi T_{yz} = -4\pi T_{zy}, \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

e tenendo conto che delle relazioni analoghe alla (2.7.4) possono essere scritte per le componenti del termine dipendente da  $\vec{H}$  nella (2.7.3), si trova:

$$\begin{aligned} \left[ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + (\operatorname{rot} \vec{E}) \wedge \vec{E} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{H} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \wedge \vec{H} \right]_x &= \\ = -4\pi \left( \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.7.6)$$



Corrispondenti relazioni valgono per le componenti  $y$  e  $z$ . La componente  $x$  della forza  $\vec{f}$  diventa pertanto:

$$f_x = -\int_V \left( \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) dV - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_V S_x dV, \quad (2.7.7)$$

da essa, utilizzando il teorema della divergenza, si ha:

$$f_x = -\int_S (T_{xx}n_x + T_{xy}n_y + T_{xz}n_z) dS - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_V S_x dV, \quad (2.7.8)$$

dove  $S$  è la superficie che limita il volume  $V$ ; analogamente per  $f_y$  ed  $f_z$ . Le nove quantità  $T_{xx}$ ,  $T_{xy}$  ecc. costituiscono le componenti di un tensore simmetrico del secondo ordine (vedi paragrafo 9.6). Ciò è provato dal fatto che la (2.7.8) e le corrispondenti equazioni per  $f_y$ ,  $f_z$ , impongono alle tre quantità  $\sum_{i=1}^3 T_{ji}n_i$  di trasformarsi

come le rispettive componenti di un vettore. Indicando semplicemente con  $\vec{T}$  questo tensore ed introducendo il vettore:

$$\vec{\varphi} = -\int_S \vec{T} \cdot \vec{n} dS \quad (2.7.9)$$

l'espressione finale di  $\vec{f}$  è:

$$\vec{f} = \vec{\varphi} - \frac{d}{dt} \int_V \frac{\vec{S}}{c^2} dV. \quad (2.7.10)$$

D'altra parte, confrontando la (2.7.7) e le analoghe espressioni per  $f_y$  e  $f_z$  con l'espressione di  $\vec{f}$  in termini di  $\rho$  e  $\vec{j}$  data dalla (2.7.1), si ottiene:

$$\int_V \left( \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{H} + \text{div} \vec{T} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \right) dV = 0 \quad (2.7.11)$$

da cui, mediante il solito procedimento:

$$\operatorname{div} \vec{T} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{S}}{c^2} \right) = - \left( \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{H} \right). \quad (2.7.12)$$

Per chiarire il significato fisico dei risultati ora ottenuti è necessaria una analisi che richiede una certa attenzione. A questo scopo consideriamo dapprima il caso statico in cui il termine dipendente da  $\vec{S}$  non interviene e la (2.7.10) si riduce a:

$$\vec{f} = \vec{\varphi}. \quad (2.7.13)$$

Questa eguaglianza stabilisce che la forza elettromagnetica che agisce sulla distribuzione di carica contenuta nel volume  $V$  può essere espressa mediante i valori che il tensore  $\vec{T}$  assume sulla superficie  $S$  che limita  $V$ . È da notare che ad un risultato analogo si arriva nello studio dell'elasticità di un mezzo continuo; si può infatti dimostrare che le forze elastiche che agiscono sulle masse contenute in un volume  $V$  dipendono dai valori che il cosiddetto tensore elastico degli sforzi assume sul contorno di  $V$ . Per questa ragione  $\vec{T}$  prende il nome di tensore degli sforzi elettromagnetici.

A titolo di esempio valutiamo, mediante  $\vec{T}$ , la forza con cui due distribuzioni uniformi di carica su piani paralleli illimitati si attraggono. Precisamente consideriamo (vedi fig. (2.7.1)) due distribuzioni piane di densità rispettivamente  $+\sigma$  e  $-\sigma$  e

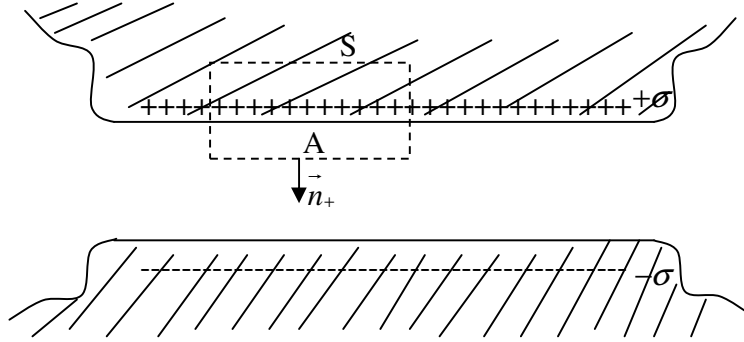


Fig. (2.7.1)

calcoliamo la forza con cui la distribuzione positiva esistente sull'area  $A$  è attratta dalla distribuzione negativa. Per far ciò scegliamo come superficie  $S$  la superficie del cilindro ottenuto spostando l'area  $A$  parallelamente a se stessa all'interno ed

all'esterno dello spazio compreso fra i due piani carichi. Risulta subito dall'equazione (1.10.32) che il campo elettrico esistente nello spazio esterno ai piani è nullo mentre quello interno vale:

$$\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}_+, \quad (2.7.14)$$

dove  $\vec{n}_+$  è la normale orientata dal piano positivo a quello negativo. Assumendo  $\vec{n}_+$  come versore dell'asse  $z$  ed applicando le (2.7.5), le componenti non nulle di  $\vec{T}$  sono:

$$\begin{aligned} T_{zz} &= -\frac{1}{8\pi} E_z^2 = -2\pi\sigma^2, \\ T_{xx} = T_{yy} &= \frac{1}{8\pi} E_z^2 = 2\pi\sigma^2, \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

il tensore  $\vec{T}$  è quindi diagonale. Occorre ora sostituire questi valori nella (2.7.9) e procedere all'integrazione. È facile vedere che solo la base del cilindro interna ai piani interviene nell'integrale. La parte esterna di  $S$ , infatti, non dà contributo perché su di essa si annulla  $\vec{E}$  e quindi anche  $\vec{T}$ ; sulla superficie laterale, invece, i contributi  $\vec{T} \cdot \vec{n}$  dovuti ad elementi di area situati da bande opposte rispetto all'asse del cilindro si annullano a vicenda. Rimane perciò:

$$\vec{\phi} = -\int_A T_{zz} \vec{n}_+ dS = 2\pi\sigma^2 A \vec{n}_+. \quad (2.7.16)$$

A questo stesso risultato si può anche arrivare considerando l'energia elettrica contenuta nello spazio tra i piani; variandone la distanza la forza  $\vec{\phi}$  interviene ad esprimere il lavoro, pari alla variazione dell'energia elettrica, che può essere ottenuto<sup>(§§§§§§§)</sup>.

(§§§§§§§) Dalla (2.3.15):  $dW = \frac{E_z^2}{8\pi} dV = \frac{E_z^2}{8\pi} A dz = 2\pi\sigma^2 A dz$ , da cui segue subito:

$$\phi_z = -\frac{dW}{dz} = -2\pi\sigma^2 A, \text{ ovvero la (2.7.16) essendo } \vec{n}_+ = (0, 0, -1) \text{ [n.d.c.]}$$

## 2.8 Quantità di moto elettromagnetica. Pressione della radiazione

Per stabilire il significato della (2.7.10) nel caso non statico, introduciamo in essa la quantità di moto meccanica delle masse contenute nel volume  $V$ . Ponendo:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \vec{Q}, \quad (2.8.1)$$

in cui la somma è estesa a tutte le masse contenute in  $V$  e ricordando la (1.4.1), l'espressione della forza  $\vec{f}$  diventa:

$$\vec{f} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \right) = \frac{d\vec{Q}}{dt}. \quad (2.8.2)$$

Ne segue che la (2.7.10) può essere scritta nella forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{Q} + \int_V \frac{\vec{S}}{c^2} dV \right) = \vec{\phi}; \quad (2.8.3)$$

questa equazione stabilisce che agli sforzi elettromagnetici applicati alla superficie  $S$  corrisponde la variazione, per unità di tempo, della quantità di moto meccanica delle masse presenti in  $S$  aumentata, però, di un termine dipendente dal campo elettromagnetico. In altre parole l'inerzia del sistema dipende, oltreché dalle masse, anche dal campo attraverso la grandezza:

$$\vec{G} = \int_V \frac{\vec{S}}{c^2} dV; \quad (2.8.4)$$

essa, per questa ragione, prende il nome di quantità di moto elettromagnetica. Si riserva invece il nome di densità di quantità di moto all'integrando che compare nella (2.8.4), cioè alla grandezza:

$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{H}}{4\pi c}. \quad (2.8.5)$$

È ovvio che la (2.8.3), applicata ad un volume limitato da una superficie sulla quale il tensore  $\vec{T}$  sia nullo, stabilisce la conservazione della quantità di moto complessiva contenuta in questo volume. La (2.7.12), invece, stabilisce la continuità della quantità di moto elettromagnetica mediante un'equazione in cui il tensore  $\vec{T}$  fornisce il termine di divergenza e la forza di Lorentz quello di sorgente. I risultati ora ottenuti, come constateremo attraverso i successivi sviluppi, sono della massima importanza; essi fra l'altro ci permetteranno di render conto della apparente violazione del terzo principio della dinamica contenuta nella legge di Ampère (1.3.3) sull'azione a distanza tra cariche in movimento.

Tenendo conto del significato energetico ed inerziale del vettore di Poynting, è possibile stabilire una importante relazione tra l'energia e la quantità di moto del campo elettromagnetico. A questo scopo consideriamo un elemento di area  $\Delta S$  ortogonale alla direzione di  $\vec{S}$ ; risulta subito, dal secondo membro della (2.3.12) che l'energia che attraversa  $\Delta S$  nel tempo  $\Delta t$  è:

$$W = |\vec{S}| \Delta S \Delta t. \quad (2.8.6)$$

D'altra parte le formole (1.9.25) e (1.9.26) stabiliscono che i potenziali e quindi anche il campo elettromagnetico si propagano con velocità  $c$ ; di conseguenza nel tempo  $\Delta t$  la propagazione procederà nella direzione di  $\vec{S}$  del tratto  $c\Delta t$ . Entro il volumetto  $\Delta S c \Delta t$ , interessato dalla propagazione, è contenuta la quantità di moto elettromagnetica:

$$\vec{G} = \frac{\vec{S}}{c^2} \Delta S c \Delta t. \quad (2.8.7)$$

Prendendo il modulo e confrontando colla (2.8.6) si ottiene subito:

$$|\vec{G}| = \frac{W}{c}, \quad (2.8.8)$$

che è appunto il risultato cui si voleva arrivare. La relazione (2.8.8) non trova riscontro nel caso meccanico in cui la relazione tra la quantità di moto  $\vec{Q}$  e l'energia cinetica  $\mathcal{T}$  di una massa in moto con velocità  $v$  è:

$$|\vec{Q}| = \frac{2\mathcal{E}}{v}. \quad (2.8.9)$$

La (2.8.8) peraltro, stabilisce la corretta relazione tra la quantità di moto e l'energia del fotone. Essa infatti, purché si assuma l'energia elettromagnetica  $W$  coincidente con quella di un singolo quanto, coincide con la (1.1.2). Quest'ultima equazione va quindi considerata conseguenza della (1.1.1).

È interessante notare che l'equazione (2.8.8) implica l'esistenza di una massa associata all'energia elettromagnetica. Infatti il rapporto tra il modulo della quantità di moto e la velocità  $c$ , con cui l'energia elettromagnetica si propaga, risulta essere:

$$\frac{|\vec{G}|}{c} = \frac{W}{c^2}. \quad (2.8.10)$$

Se, in analogia al caso meccanico, si attribuisce a tale rapporto il significato di massa inerziale, si avrà:

$$m = \frac{W}{c^2}. \quad (2.8.11)$$

Il risultato ora ottenuto ha valore più che altro euristico, il suo significato e la sua importanza fisica verranno stabiliti in seguito quando tratteremo la teoria della relatività.

Un'altra importante conseguenza della relazione (2.8.5) è l'esistenza di una pressione con cui il campo elettromagnetico agisce sugli ostacoli capaci di alterarne la propagazione. Una esauriente discussione di questo fenomeno richiederebbe, tuttavia, lo studio della propagazione in presenza del mezzo materiale che costituisce l'ostacolo. Poiché questo studio verrà eseguito solo nei capitoli 5 e 6, ci limitiamo, per ora, ad assumere l'effetto del mezzo materiale sulla propagazione come dato del problema deducendone la conseguente pressione elettromagnetica.

A questo scopo consideriamo, dapprima, il caso in cui l'effetto consiste nell'assorbimento totale dell'energia elettromagnetica. Supponiamo inoltre, per semplificare il calcolo, che l'ostacolo sia costituito da un oggetto abbastanza piccolo da poter supporre, in un volume di estensione paragonabile alle sue dimensioni, il vettore di Poynting costante rispetto al posto. A causa del teorema di conservazione della quantità di moto, la quantità di moto meccanica  $\Delta\vec{Q}$  che l'oggetto acquista nel tempo  $\Delta t$  deve essere pari a quella persa dal campo elettromagnetico. Quest'ultima, indicata

con  $\Delta S$  l'area della proiezione dell'oggetto sul piano ortogonale a  $\vec{S}$  (vedi fig. (2.8.1)), è data dall'equazione (2.8.7). Si deve avere perciò:

$$\Delta \vec{Q} = \frac{\vec{S}}{c} \Delta S \Delta t. \quad (2.8.12)$$

D'altra parte, supposto  $\Delta t$  piccolo a piacere, dalla legge fondamentale della dinamica (vedi equazione (2.8.1)) si ha:

$$\Delta \vec{Q} = \vec{f} \Delta t \quad (2.8.13)$$

dove  $\vec{f}$  è la risultante delle forze che agiscono sull'oggetto nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ . Confrontando le (2.8.12), (2.8.13) si ottiene pertanto:

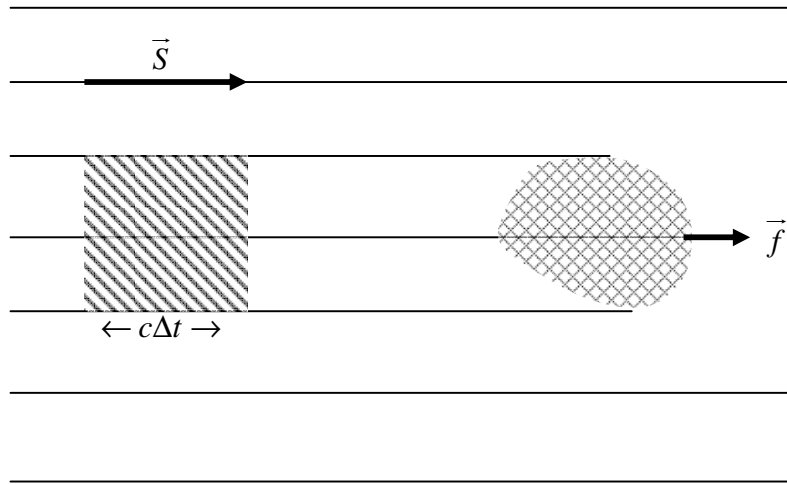


Fig. (2.8.1)

$$\frac{\vec{f}}{\Delta S} = \frac{\vec{S}}{c}. \quad (2.8.14)$$

Questa equazione, nel caso in cui la superficie dell'oggetto sia ortogonale ad  $\vec{S}$ , può essere scritta nella forma:

$$p = \frac{|\vec{S}|}{c}, \quad (2.8.15)$$

la quale determina la pressione della radiazione elettromagnetica su di un ostacolo perfettamente assorbente.

In modo analogo si possono studiare situazioni più complesse in cui l'energia elettromagnetica è assorbita solo in parte. Consideriamo, ad esempio, il caso in cui il vettore di Poynting incontra la superficie piana di un oggetto formando con la normale un angolo  $\vartheta$  e l'effetto sulla propagazione consiste in una riflessione accompagnata da un assorbimento parziale. Supponiamo, cioè, che il vettore  $\vec{S}$  venga deviato di un angolo  $2\vartheta$  nel piano passante per la normale e che dell'energia incidente la frazione  $\alpha$  venga assorbita. Manifestamente l'energia che incide nel tempo  $\Delta t$  su di un elemento di superficie  $\Delta S$  investito dalla propagazione è:

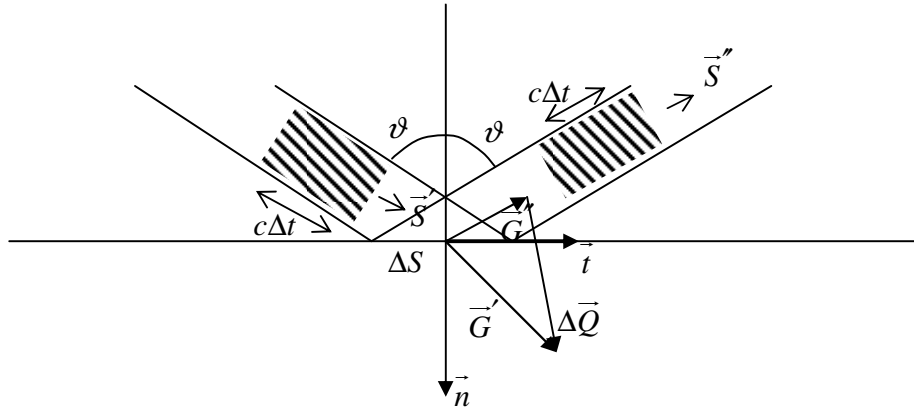


Fig. (2.8.2)

$$W_i = |\vec{S}| \Delta S \cos \vartheta \Delta t, \quad (2.8.16)$$

analogamente quella riflessa vale:

$$W_r = |\vec{S}''| \Delta S \cos \vartheta \Delta t, \quad (2.8.17)$$



dove  $\vec{S}'$  ed  $\vec{S}''$  sono i vettori di Poynting prima e dopo la riflessione. In base alle ipotesi fatte si ha:

$$W_r = (1 - \alpha)W_i. \quad (2.8.18)$$

Di conseguenza, tenendo conto della (2.8.8), le quantità di moto  $\vec{G}'$  e  $\vec{G}''$  prima e dopo la riflessione soddisfano alla relazione:

$$\left| \vec{G}'' \right| = (1 - \alpha) \left| \vec{G}' \right|. \quad (2.8.19)$$

D'altra parte, indicata con  $\Delta\vec{Q}$  la quantità di moto trasmessa all'elemento di superficie  $\Delta S$ , si ha (vedi fig. (2.8.2)):

$$\Delta\vec{Q} = \vec{G}' - \vec{G}''; \quad (2.8.20)$$

pertanto le componenti di  $\Delta\vec{Q}$  rispettivamente tangenziale e normale alla superficie  $\Delta S$  sono:

$$\Delta Q_t = \left( \left| \vec{G}' \right| - \left| \vec{G}'' \right| \right) \sin \vartheta, \quad (2.8.21)$$

$$\Delta Q_n = \left( \left| \vec{G}' \right| + \left| \vec{G}'' \right| \right) \sin \vartheta. \quad (2.8.22)$$

Da queste equazioni, utilizzando la (2.8.19), la (2.8.8) e le (2.8.16), (2.8.17), si ottiene con successivi passaggi:

$$\Delta Q_t = \alpha \left| \vec{G}' \right| \sin \vartheta = \alpha \frac{W_i}{c} \sin \vartheta = \alpha \frac{\left| \vec{S}' \right|}{c} \sin \vartheta \cos \vartheta \Delta S \Delta t \quad (2.8.23)$$

e:

$$\Delta Q_n = (2 - \alpha) \left| \vec{G}' \right| \cos \vartheta = -(2 - \alpha) \frac{W_i}{c} \cos \vartheta = -(2 - \alpha) \frac{\left| \vec{S}' \right|}{c} \cos^2 \vartheta \Delta S \Delta t. \quad (2.8.24)$$

Applicando la (2.8.13) si deduce l'esistenza di una forza le cui componenti secondo  $\vec{t}$  ed  $\vec{n}$  sono date dalle relazioni:

$$\frac{f_t}{\Delta S} = \alpha \frac{\left| \vec{S}' \right|}{c} \sin \vartheta \cos \vartheta \quad (2.8.25)$$

e:

$$p = \frac{f_n}{\Delta S} = (2 - \alpha) \frac{\left| \vec{S}' \right|}{c} \cos^2 \vartheta. \quad (2.8.26)$$

La (2.8.26) stabilisce che la pressione di radiazione diminuisce rapidamente al crescere dell'angolo  $\vartheta$ ; per incidenza normale (cioè  $\vartheta = 0$ ), e per un mezzo totalmente assorbente (cioè  $\alpha = 1$ ) essa si identifica con la (2.8.15), inoltre, per un mezzo riflettente (cioè  $\alpha = 0$ ) la pressione risulta doppia rispetto al caso dell'assorbimento completo. La (2.8.25), invece, stabilisce, per un mezzo almeno parzialmente assorbente (cioè  $\alpha \neq 0$ ), l'esistenza di una forza tangenziale alla superficie  $\Delta S$  la quale assume il suo massimo valore per  $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ .

In pratica la pressione elettromagnetica, a causa del fattore  $c$  che compare a denominatore delle equazioni (2.8.15), (2.8.25) e (2.8.26) è sempre molto piccola salvo i casi in cui  $\left| \vec{S}' \right|$  assuma un valore eccezionalmente grande. Ciò accade, ad esempio, all'interno delle stelle in cui esiste una fortissima pressione di radiazione che interviene in modo essenziale a determinarne l'equilibrio. Per la radiazione elettromagnetica del sole al limite dell'atmosfera terrestre,  $\left| \vec{S}' \right|$  risulta essere circa 2 calorie per centimetro quadro e per minuto, pari a  $1,4 \cdot 10^6 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ . Mediante la (2.8.15) ciò corrisponde ad una pressione di circa 0,5 milligrammi per metro quadrato. Questa pressione, benché piccola può dar luogo, nel caso di oggetti di dimensioni molto ri-

dotte, ad una forza superiore a quella dovuta all'attrazione gravitazionale del sole. Ciò accade, ad esempio, per delle sferette di densità  $\rho_m$  e raggio  $r$  tale che<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>:

$$r < \frac{3|\vec{S}|}{4c\rho_m g_s} = \frac{6 \cdot 10^{-5} g \cdot cm^{-2}}{\rho_m}, \quad (2.8.27)$$

in cui  $g_s (= 0,6dine \cdot g^{-1}$  alla distanza della terra) è il campo gravitazionale del sole. Il fatto che le comete rivolgano la coda sempre nella direzione opposta a quella del sole è dovuto precisamente ad un effetto di questo genere.

---


$$^{(*)} \rho_m \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) g_s < p \cdot \pi r^2 = \frac{|\vec{S}|}{c} \pi r^2 \Rightarrow r < \dots [n.d.c.].$$

## 2.9 Momento angolare del campo elettromagnetico

I risultati del precedente paragrafo, relativi alla quantità di moto elettromagnetica, manifestamente implicano l'esistenza di un momento angolare associato all'inerzia del campo. Per stabilire questo fatto in modo quantitativo consideriamo, come abbiamo fatto nei paragrafi 2.1 e 2.3, un insieme di  $N$  cariche puntiformi  $q_i$  associate a degli oggetti di masse  $m_i$ . Il momento angolare meccanico dell'insieme è definito dalla relazione<sup>(††††††††)</sup>:

$$\vec{L}_m = \sum_{i=1}^N (\vec{P}_i - \vec{O}) \wedge m_i \vec{v}_i \quad (2.9.1)$$

dove  $\vec{v}_i$  è la velocità dell' $i$ -esima carica,  $\vec{P}_i$  il punto da essa occupato ed  $\vec{O}$  un'origine arbitraria. Tenendo conto dell'equazione fondamentale della dinamica, la derivata di  $\vec{L}_m$  rispetto al tempo vale:

$$\frac{d\vec{L}_m}{dt} = \sum_{i=1}^N (\vec{P}_i - \vec{O}) \wedge \frac{dm_i \vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N (\vec{P}_i - \vec{O}) \wedge \vec{f}_i, \quad (2.9.2)$$

ossia, inserendo l'espressione (1.4.11) della forza di Lorentz:

$$\frac{d\vec{L}_m}{dt} = \sum_{i=1}^N (\vec{P}_i - \vec{O}) \wedge \left[ q_i \vec{E}(\vec{P}_i) + \frac{1}{c} q_i \vec{v}_i \wedge \vec{H}(\vec{P}_i) \right] \quad (2.9.3)$$

Supponendo che le  $N$  cariche formino una distribuzione continua la (2.9.3), in analogia a quanto fatto per la (2.1.13), assume la forma:

$$\frac{d\vec{L}_m}{dt} = \int_V \vec{r} \wedge \left( \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{H} \right) dV \quad (2.9.4)$$

dove la distanza  $\vec{r}$  è riferita, ancora, all'origine  $\vec{O}$ . Mediante la (2.7.12) questa equazione diventa:

---

<sup>(††††††††)</sup> Per le notazioni vedi le equazioni (9.2.40).

$$\frac{d\vec{L}_m}{dt} = - \int_V \vec{r} \wedge \left[ \text{div} \vec{\vec{T}} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{S}}{c^2} \right) \right] dV, \quad (2.9.5)$$

dove  $\vec{\vec{T}}$  è il tensore elettromagnetico definito dalle (2.7.5).

Occorre ora trasformare il secondo membro della (2.9.5) in modo da farvi comparire il contributo di un integrale esteso alla superficie  $S$  che limita il volume  $V$ . Così facendo sarà possibile scrivere una equazione di conservazione formalmente analoga alla (2.7.12). A questo scopo osserviamo che essendo le variabili  $x, y, z$  tra di loro indipendenti si ha:

$$\begin{aligned} \left( \vec{r} \wedge \text{div} \vec{\vec{T}} \right)_x &= y \left( \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) - z \left( \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (yT_{zx} - zT_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y} (yT_{zy} - zT_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (yT_{zz} - zT_{yz}) + T_{yz} - T_{zy}. \end{aligned} \quad (2.9.6)$$

Tenendo conto che il tensore  $\vec{\vec{T}}$  è simmetrico e ponendo:

$$\left. \begin{aligned} M_{yzx} &= yT_{zx} - zT_{yx}, \\ M_{zyy} &= yT_{zy} - zT_{yy}, \\ M_{yzz} &= yT_{zz} - zT_{yz}, \end{aligned} \right\} \quad (2.9.7)$$

la (2.9.6) diventa semplicemente:

$$\left( \vec{r} \wedge \text{div} \vec{\vec{T}} \right)_x = \frac{\partial M_{yzx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{zyy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{yzz}}{\partial z}. \quad (2.9.8)$$

Considerando le altre componenti del vettore  $\vec{r} \wedge \text{div} \vec{\vec{T}}$  e procedendo come per la (2.9.6), appare manifesto che è opportuno introdurre le quantità:

$$M_{jkl} = x_j T_{kl} - x_k T_{jl}, \quad (2.9.9)$$

dove  $x_j, x_k$  e  $T_{kl}, T_{jl}$  indicano, rispettivamente, due generiche coordinate cartesiane e due qualunque componenti di  $\vec{\vec{T}}$ . In questo modo si può scrivere in generale:

$$\left(\vec{r} \wedge \text{div} \vec{T}\right)_i = \frac{\partial M_{jkx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{jky}}{\partial y} + \frac{\partial M_{jkz}}{\partial z} \quad (2.9.10)$$

dove gli indici  $i, j, k$  formano una permutazione circolare. Le quantità  $M_{jkl}$  possono essere considerate le componenti di un tensore del terzo ordine (vedi paragrafo 9.0); essendo, tuttavia, questo tensore antisimmetrico, cioè:

$$M_{jkl} = -M_{kjl}, \quad (2.9.11)$$

la prima coppia di indici dà luogo solamente a tre determinazioni distinte di  $M_{jkl}$ . Tenendo conto anche del primo indice, ne risulta che il tensore possiede complessivamente nove sole componenti distinte anziché ventisette. Possiamo quindi sostituire la coppia di indici  $j, k$ , con l'indice  $i$ , ossia possiamo porre:

$$M_{jkl} = M_{il}. \quad (2.9.12)$$

In questo modo la (2.9.9) può essere espressa sinteticamente sotto forma di prodotto esterno, cioè:

$$\vec{r} \wedge \vec{T} = \vec{M} \quad (2.9.13)$$

e la (2.9.10) diventa:

$$\vec{r} \wedge \text{div} \vec{T} = \text{div} \vec{M}. \quad (2.9.14)$$

Dalle equazioni (2.9.9) e (2.9.13) appare evidente che  $\vec{M}$  costituisce un tensore del secondo ordine del tipo assiale-polare<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>, che appunto per questo motivo, abbiamo sopralineato con due frecce, una semplice e l'altra doppia.

Mediante la (2.9.14) possiamo ora trasformare il primo termine a secondo membro della (2.9.5); si ha infatti, usando il teorema della divergenza (vedi equazione (9.3.37)):

---

(\*\*\*\*\*)  $M_{il}$  assiale rispetto a  $i$ , polare rispetto a  $l$  [n.d.c.].

$$\int_V \vec{r} \wedge \text{div} \vec{T} dV = \int_V \text{div} \vec{M} dV = \int_S \vec{M} \cdot \vec{n} dS. \quad (2.9.15)$$

D'altra parte, osservando che dal punto di vista elettromagnetico le coordinate spaziali e il tempo costituiscono quattro variabili indipendenti, possiamo scrivere:

$$\int_V \vec{r} \wedge \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{S}}{c^2} \right) \right] dV = \frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \wedge \frac{\vec{S}}{c^2} dV, \quad (2.9.16)$$

ossia, usando la (2.8.5):

$$\int_V \vec{r} \wedge \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{S}}{c^2} \right) \right] dV = \frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \wedge \vec{g} dV. \quad (2.9.17)$$

Introducendo il momento angolare  $\vec{L}_{elm}$  della quantità di moto elettromagnetica, cioè ponendo:

$$\int_V \vec{r} \wedge \vec{g} dV = \vec{L}_{elm} \quad (2.9.18)$$

ed utilizzando le (2.9.15), (2.9.17) la (2.9.5) diventa:

$$-\frac{d}{dt} (\vec{L}_m + \vec{L}_{elm}) = \int_S \vec{M} \cdot \vec{n} dS. \quad (2.9.19)$$

Il significato fisico di questa equazione può essere chiarito mediante considerazioni simili a quelle svolte a proposito della (2.3.12). Infatti, ammettendo che le cariche occupino una porzione limitata del volume  $V$  e separando i contributi del campo statico e di quello propagativi, si arriva a concludere che quando la superficie  $S$  va all'infinito l'integrale a secondo membro della (2.9.19) è nullo. In questo caso la (2.9.19) stabilisce semplicemente che il momento angolare totale, meccanico ed elettromagnetico, si conserva invariato nel tempo. Quando invece la superficie  $S$  è situata al finito, l'integrale a secondo membro della (2.9.19) rappresenta il flusso del momento angolare uscente attraverso ad  $S$ . Il tensore  $\vec{M}$  rappresenta, pertanto, la densità di flusso del momento angolare. È anche possibile esprimere questo risultato in forma differenziale. Per far ciò basta sostituire il primo membro della (2.9.5) con la (2.9.4) ed il secondo con le (2.9.14) e (2.9.17); si ottiene così:

$$\int_V \left[ \operatorname{div} \vec{\vec{M}} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{r} \wedge \vec{g}) \right] dV = - \int_V \vec{r} \wedge \left( \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{H} \right) dV, \quad (2.9.20)$$

ossia:

$$\operatorname{div} \vec{\vec{M}} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{r} \wedge \vec{g}) = - \vec{r} \wedge \left( \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{H} \right). \quad (2.9.21)$$

Questa equazione, che è analoga alla (2.3.17) e alla (2.7.12), stabilisce la continuità del momento angolare elettromagnetico. A secondo membro compare un termine di sorgente dipendente dal momento meccanico della forza di Lorentz; nei punti in cui non esistono cariche né correnti questo termine è nullo ed il momento angolare elettromagnetico è conservato.

Con il risultato testé discusso abbiamo completato lo studio delle proprietà energetiche ed inerziali del campo elettromagnetico; nella tabella (2.9.1) sono riassunte le principali equazioni relative all'argomento ottenute in questo e nei precedenti paragrafi.

Tab. (2.9.1) – Elenco delle equazioni relative alle proprietà energetiche ed inerziali del campo elettromagnetico.

Equazioni energetiche -

$w = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$ $W = \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV$	Espressioni generali della densità di energia e dell'e- nergia elettromagnetica
$W_s = \int_V \left( \frac{1}{2} \rho \mathcal{V} + \frac{1}{2c} \vec{j} \cdot \vec{A} \right) dV$	Energia elettromagnetica associata ad una distribuzione stazionaria di carica e di corrente -
$W_s = \sum_{i,h=1}^n \frac{q_i q_h}{r_{ih}} + \frac{1}{2c} \sum_{j,k=1}^m L_{kj} I_k I_j$	Energia di una distribuzione discreta e stazionaria di carica e di corrente -
$W_e = \int_V \rho \mathcal{V}_e dV$ $W_e = \sum_{i=1}^N q_i \mathcal{V}(P_i)$	Energia di una distribuzione (continua o discreta) di cariche immerse in un campo esterno -



Flussi -

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H} - \text{Vettore di Poynting}$$

$$\int_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS - \text{Flusso di energia elettromagnetica}$$

$$\vec{T}, \left\{ T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[ E_i E_j + H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + H^2) \right] \right\}$$

Tensore degli sforzi elettromagnetici

$$\vec{\phi} = - \int_S \vec{T} \cdot \vec{n} dS - \text{Forza elettromagnetica che agisce attraverso la superficie } S \text{ sulle cariche in essa contenute}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{T} - \text{Tensore del momento angolare elettromagnetico -}$$

$$\int_S \vec{M} \cdot \vec{n} dS - \text{Flusso del momento angolare elettromagnetico uscente dalla superficie } S -$$

Equazioni di continuità -

$$\text{div} \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = - \vec{E} \cdot \vec{j} - \text{Conservazione dell'energia elettromagnetica}$$

$$\text{div} \vec{T} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = - \left( \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{H} \right) - \text{Bilancio della quantità di moto elettromagnetica}$$

$$\text{div} \vec{M} + \frac{\partial (\vec{r} \wedge \vec{g})}{\partial t} = - \vec{r} \wedge \left( \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{H} \right) - \text{Conservazione del momento angolare elettromagnetico -}$$

# Capitolo 3. Onde elettromagnetiche

## 3.1 La propagazione delle onde elettromagnetiche – Onde piane

Nel paragrafo (1.9) abbiamo dimostrato, mediante la formola di Kirchhoff (1.9.18) e le formole dei potenziali ritardati (1.9.25) e (1.9.26), che i valori dei potenziali  $\mathcal{V}$  ed  $\vec{A}$  in un punto  $P$  dipendono dalla situazione in un punto  $Q$ , collocato alla distanza  $\vec{r}$  da  $P$ , con un ritardo  $|\vec{r}|/c$ . Ciò, come già si è fatto rilevare, significa che il campo elettromagnetico si propaga tra  $P$  e  $Q$  con velocità finita  $c$ . D'altra parte il teorema relativo al vettore di Poynting, dimostrato nel paragrafo 2.3, implica anche esso che il campo elettromagnetico si propaghi, benché in questo caso non sia evidente con quale velocità. Lo scopo del presente paragrafo è di studiare con maggiore dettaglio il fenomeno della propagazione. Ci limitiamo a considerare, per ora, uno spazio vuoto da cariche elettriche; esse possono intervenire a scambiare energia col campo elettromagnetico o anche semplicemente a cambiare le modalità della propagazione. Questi effetti verranno esaminati in seguito, nel capitolo 5, quando studieremo le proprietà elettromagnetiche della materia.

Per trattare matematicamente il problema occorre innanzi tutto ricavare delle equazioni in cui il campo elettrico e quello magnetico intervengano separatamente. Per far ciò seguiamo un procedimento analogo a quello usato nel paragrafo 1.7. Applicando alla (1.6.1) l'operazione di rotore, ricordando la (1.7.1) e scambiando le derivate spaziali con quella temporale, si ha:

$$\text{grad div } \vec{H} - \Delta_2 \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}. \quad (3.1.1)$$

Ossia, usando la (1.6.3) e la (1.6.4):

$$\Delta_2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}, \quad (3.1.2)$$

in cui, appunto, figura solamente  $\vec{H}$ . Analogamente, applicando il rotore alla (1.6.3), si ottiene:

$$\text{grad div } \vec{E} - \Delta_2 \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = 0, \quad (3.1.3)$$

da essa, mediante le (1.6.1) e (1.6.2), si ha:

$$\Delta_2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 4\pi \left( \text{grad } \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right). \quad (3.1.4)$$

Le (3.1.2), (3.1.4) sono le equazioni richieste: esse generalizzano le (1.7.2), (1.7.3). È da notare che esprimendo il campo elettromagnetico mediante i potenziali (vedi equazioni (1.8.1), (1.8.4) e tenendo conto delle (1.8.13), (1.8.14), le (3.1.2), (3.1.4) risultano identicamente verificate. In assenza di cariche e di correnti, cioè per  $\rho = 0$  e  $\vec{j} = 0$  esse si riducono a:

$$\square_2 \vec{H} = 0 \quad (3.1.5)$$

e:

$$\square_2 \vec{E} = 0, \quad (3.1.6)$$

che sono le equazioni da cui dipende la propagazione nello spazio vuoto.

Esiste una soluzione banale di queste equazioni, essa corrisponde al caso in cui  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  sono costanti sia rispetto al posto che al tempo. Prescindendo da questa soluzione che, ovviamente, non rappresenta una propagazione, ed integrando le (3.1.2) e (3.1.4) otterremo in generale per le componenti di  $\vec{E}$  e di  $\vec{H}$  sei funzioni del posto e del tempo a priori tra loro indipendenti. Tenendo conto che le equazioni di propagazione sono ottenute da quelle di Maxwell attraverso un procedimento di eliminazione, risulta, però, che queste funzioni devono essere tra loro collegate. Lo studio del fenomeno di propagazione rende pertanto necessaria la risoluzione di due problemi: integrare le equazioni (3.1.2), (3.1.4) e determinare le relazioni che intercorrono tra le componenti del campo elettromagnetico. Il primo di questi problemi non comporta particolari difficoltà e può essere risolto in modo affatto generale; il secondo, invece, richiede che venga imposto al fenomeno un dato tipo di simmetria. I casi

più interessanti sono quelli della simmetria piana e di quella cilindrica. In presente paragrafo e quello successivo sono dedicati alla trattazione completa del caso della simmetria piana, che fra i due è il più importante. I paragrafi 3.3, 3.4 e 3.5, invece, riguardano le soluzioni generali delle equazioni di propagazione; il paragrafo 3.6, infine, contiene lo studio completo della propagazione nel caso della simmetria cilindrica.

Cominciamo col trattare la simmetria piana; essa corrisponde al caso in cui i vettori  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  dipendono da un'unica ascissa variabile lungo una retta parallela ad un dato versore  $\vec{\tau}$ .  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  sono, cioè, costanti sui piani ortogonali a  $\vec{\tau}$  e di conseguenza non si propagano parallelamente ad essi; la direzione di  $\vec{\tau}$  coincide quindi con la direzione di propagazione. Scegliamo la terna di riferimento in modo che il versore dell'asse  $x$  coincida con  $\vec{\tau}$ ; si abbia, cioè:

$$x = \vec{r} \cdot \vec{\tau}. \quad (3.1.7)$$

Con questa scelta tutte le derivate rispetto ad  $y, z$ , sono nulle; perciò, posto  $\rho = 0$ , si ricava, dalla (1.6.2) e dalla (1.6.4):

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0. \quad (3.1.8)$$

Risultano inoltre nulle le componenti  $x$  di  $\text{rot}\vec{E}$  e  $\text{rot}\vec{H}$ ; dalla (1.6.1), scritta per  $\vec{j} = 0$ , e dalla (1.6.3), si ottiene pertanto:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0. \quad (3.1.9)$$

Le equazioni (3.1.8) e (3.1.9) stabiliscono che le componenti di  $\vec{E}$  e di  $\vec{H}$  parallele a  $\vec{\tau}$  sono costanti, ossia non si propagano. Poiché, noi, viceversa, siamo interessati unicamente alla parte del campo elettromagnetico che si propaga, possiamo scrivere:

$$\vec{E} \cdot \vec{\tau} = 0, \quad \vec{H} \cdot \vec{\tau} = 0. \quad (3.1.10)$$

Le (3.1.10) impongono che il campo elettrico e quello magnetico siano trasversali alla direzione di propagazione; esse costituiscono delle condizioni restrittive a cui le soluzioni delle equazioni di propagazione devono sottostare<sup>(§§§§§§§§)</sup>. Considereremo perciò nelle (3.1.5) e (3.1.6) solo le componenti  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_y$ ,  $H_z$ ; ciascuna di esse obbedisce a un'equazione della forma:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (3.1.11)$$

Per integrare la (3.1.11), che prende il nome di equazione di D'Alembert, eseguiamo il cambiamento di variabili:

$$\xi = x + ct, \quad (3.1.12)$$

$$\eta = x - ct. \quad (3.1.13)$$

Si ha di conseguenza:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad (3.1.14)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad (3.1.15)$$

e la (3.1.11) diventa:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (3.1.16)$$

Dalla (3.1.16) si deduce immediatamente che  $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$  è costante rispetto a  $\xi$  e può quindi essere funzione solo di  $\eta$ , cioè:

---

<sup>(§§§§§§§§)</sup> Onde di questo tipo vengono indicate con la sigla TEM che appunto denota che sia  $\vec{E}$  quanto  $\vec{H}$  sono ortogonali a  $\vec{\tau}$ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = k(\eta). \quad (3.1.17)$$

Indicando con  $f$  un integrale indefinito di  $k(\eta)$  si ottiene:

$$\varphi = f(\eta) + g(\xi), \quad (3.1.18)$$

in cui  $g(\xi)$  rappresenta la costante che interviene integrando la (3.1.17) rispetto ad  $\eta$ ; essa non dipende da  $\eta$  ma può essere in generale funzione di  $\xi$ . L'integrale generale dell'equazione di D'Alembert, ricordando le (3.1.12) e (3.1.13), può quindi essere scritto nella forma:

$$\varphi = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (3.1.19)$$

È facile vedere che la funzione  $f(x - ct)$  rappresenta un fenomeno che si sposta nel verso positivo dell'asse  $x$  con velocità costante  $c$ . Infatti il valore di questa funzione all'istante  $t_1$  ed all'ascissa  $x_1$  coincide con quello che essa assume

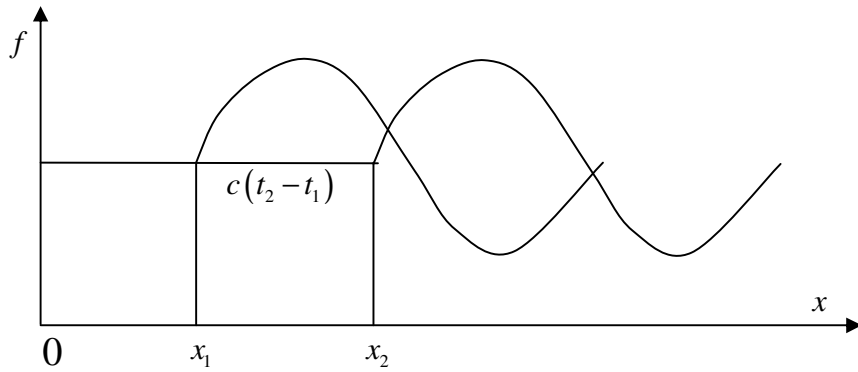


Fig. (3.1.1)

all'istante  $t_2$  ed all'ascissa  $x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1)$  (vedi fig. (3.1.1)). Poiché ciò è vero per tutti i valori di  $x_1$ , la funzione  $f$  descrive effettivamente una propagazione lungo l'asse  $x$ . Analogamente anche la funzione  $g(x + ct)$  corrisponde ad una propagazione lungo  $x$ , ma nel verso opposto. Si suole dire che  $f(x - ct)$  rappresenta le onde progressive

mentre  $g(x+ct)$  quelle regressive. Il campo elettromagnetico propagativo, nel caso della simmetria piana, è pertanto esprimibile mediante le relazioni:

$$E_y = f_1(x-ct) + g_1(x+ct), \quad (3.1.20)$$

$$E_z = f_2(x-ct) + g_2(x+ct), \quad (3.1.21)$$

$$H_y = f_3(x-ct) + g_3(x+ct), \quad (3.1.22)$$

$$H_z = f_4(x-ct) + g_4(x+ct), \quad (3.1.23)$$

dove ciascuna delle otto funzioni  $f$  e  $g$  è del tutto arbitraria.

Nulla può essere stabilito a priori circa queste funzioni. La loro forma, infatti, dipende dal comportamento della distribuzione di carica e di corrente che dà origine al campo elettromagnetico; ossia essa dipende dal fenomeno di emissione e non da quello di propagazione. A suo tempo questa questione verrà trattata un dettaglio; tuttavia possiamo anticipare che particolarmente importanti, anche dal punto di vista applicativo, sono le onde sinusoidali. Ciò è dovuto al fatto che qualunque siano i movimenti che le cariche compiono all'interno di una sorgente stazionaria di onde elettromagnetiche, essi devono, necessariamente, essere periodici e pertanto riconducibili a dei moti di tipo sinusoidale. In queste condizioni, manifestamente, anche le onde emesse non possono essere che sinusoidali per cui le funzioni  $f$  devono essere esprimibili nella forma:

$$f(x, t) = f_0 \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) + \alpha \right]. \quad (3.1.24)$$

Espressioni analoghe, salvo la sostituzione di  $-c$  con  $+c$ , valgono per le funzioni  $g$ . Nella (3.1.24)  $\alpha$  indica una costante di fase e  $\lambda$  il periodo rispetto alla coordinata spaziale;  $\lambda$  rappresenta perciò la lunghezza d'onda. La quantità:

$$T = \frac{\lambda}{c} \quad (3.1.25)$$

rappresenta invece il periodo rispetto alla coordinata temporale; introducendo la frequenza  $\nu$ , ossia il reciproco di  $T$ , si può scrivere:

$$\lambda \nu = c. \quad (3.1.26)$$

Questa relazione stabilisce che il prodotto  $\lambda\nu$  è invariante per le onde sinusoidali che si propagano nel vuoto. È pure utile far uso della quantità:

$$\omega = 2\pi\nu, \quad (3.1.27)$$

ossia:

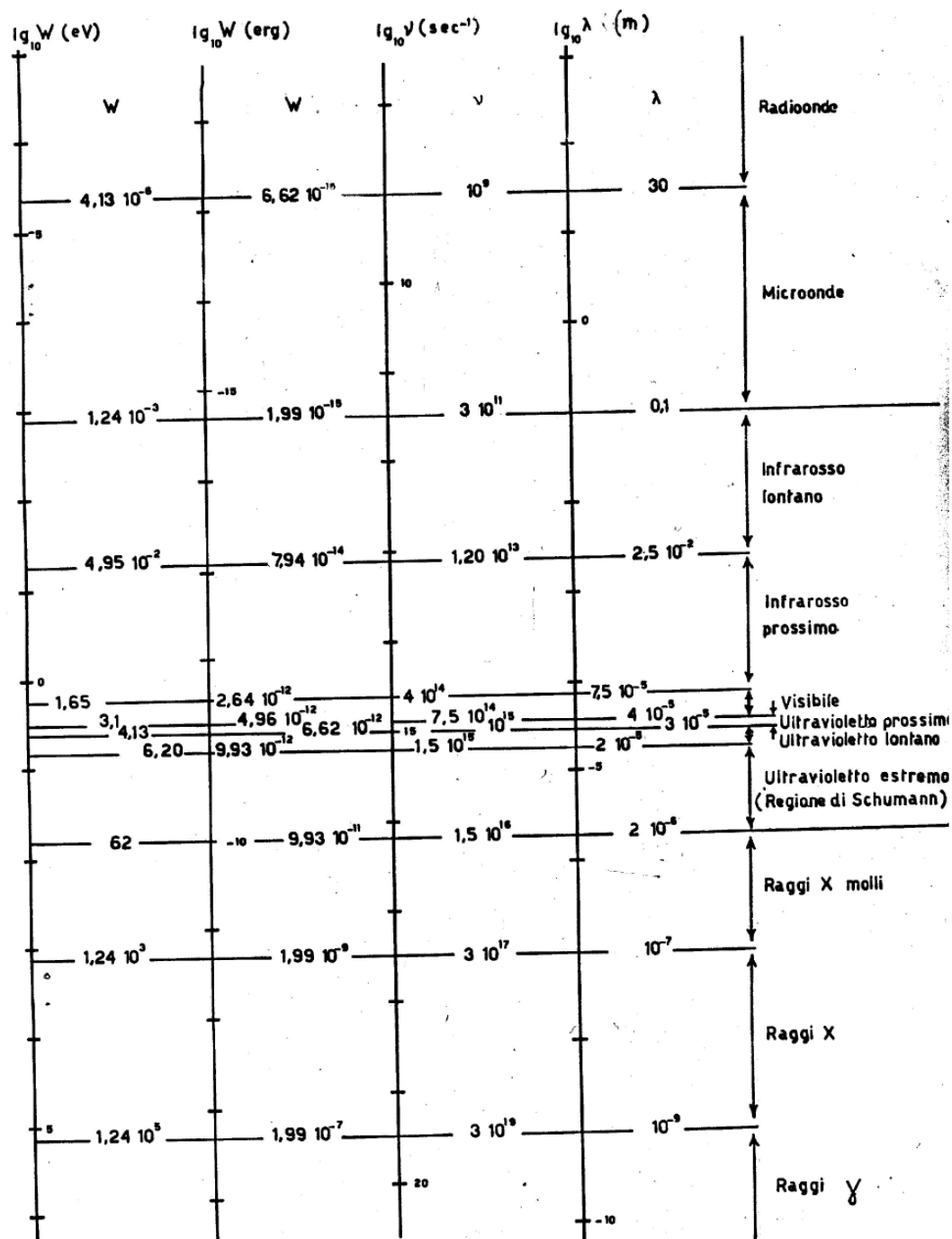
$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}; \quad (3.1.28)$$

essa prende il nome di frequenza angolare.

È consuetudine classificare le onde elettromagnetiche in relazione al valore di  $\lambda$ . Ciò a causa del fatto che le proprietà delle radiazioni elettromagnetiche ed il tipo di fenomeni a cui esse danno luogo sono strettamente connesse con la lunghezza d'onda. La tabella (3.1.1) riporta la suddetta classificazione. Essa distingue fondamentalmente tre intervalli; quello delle radioonde ( $\lambda > 10^{-1} \text{ cm}$ ), quello delle radiazioni ottiche ( $10^{-1} \text{ cm} > \lambda > 2 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$ ) e quello dei raggi X e dei raggi  $\gamma$  ( $2 \cdot 10^{-6} \text{ cm} > \lambda$ ). Nella tabella sono anche indicate le frequenze e le energie che ad esse possono essere associate mediante la relazione di Planck (1.1.1). I valori delle energie sono espressi in unità C.G.S. ed in  $eV$ . Questa unità di misura corrisponde all'energia che un elettrone acquisisce quando viene accelerato attraverso alla differenza di potenziale unitaria M.K.S. (vedi paragrafo 9.1) cioè un Volt; un  $eV$  equivale perciò a  $1,602 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$ . Ciascuno degli intervalli citati a sua volta viene diviso in sottointervalli come indicato nella tabella. In particolare la regione tra  $7,5 \cdot 10^{-5}$  e  $4 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ , che corrisponde alle onde di luce ossia alle radiazioni percettibili dalla retina dell'occhio umano, prende il nome di intervallo visibile. In esso è possibile identificare, in relazione alla percezione della retina umana, almeno sei colori distinti. Le loro lunghezze d'onda, frequenze ed energie sono riportate nella tabella (3.1.2) in cui, come di solito viene fatto per le radiazioni visibili, le lunghezze d'onda sono misurate in  $\text{\AA}$  che è un'unità pari a  $10^{-8} \text{ cm}$ . Naturalmente la classificazione qui riportata ha un valore più che altro indicativo in quanto non esiste nessun criterio preciso per stabilire il confine tra una regione e quelle contigue. Così pure arbitrarie sono le scelte delle lunghezze d'onda corrispondenti ai colori delle radiazioni visibili.



Tab.(301.1) CLASSIFICAZIONE DELLE RADIAZIONI ELETTROMAGNETICHE



Nei prossimi capitoli ed in special modo nel capitolo 6 si vedrà quale sia effettivamente l'utilità della presente classificazione: è tuttavia opportuno segnalare fin da ora che per le radiazioni dell'intervallo al disotto di  $2 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$ , ossia per i raggi X ed i raggi  $\gamma$ , gli effetti quantistici, a cui si è accennato nel paragrafo 1.1, acquistano in pratica un'importanza determinante. Il contrario succede invece per le radio onde.

$w, \text{ eV}$	$w, \text{ erg}$	$\nu, \text{ sec}^{-1}$	$\lambda, \text{ \AA}$	<i>Colore</i>
1,77	$2,84 \cdot 10^{-12}$	$4,28 \cdot 10^{15}$	7.000	Rosso
2,08	$3,33 \cdot 10^{-12}$	$5,02 \cdot 10^{15}$	5.970	Arancio
2,13	$3,42 \cdot 10^{-12}$	$5,16 \cdot 10^{15}$	5.810	Giallo
2,35	$3,76 \cdot 10^{-12}$	$5,68 \cdot 10^{15}$	5.280	Verde
2,62	$4,20 \cdot 10^{-12}$	$6,34 \cdot 10^{15}$	4.730	Bleu
3,06	$4,89 \cdot 10^{-12}$	$7,39 \cdot 10^{15}$	4.060	Violetto

Tabella (3.1.2) – Radiazioni visibili

### 3.2 Polarizzazione

Approfittando del fatto che nelle (3.1.20) ÷ (3.1.23) intervengono delle funzioni  $f$  e  $g$  arbitrarie, supponiamo, per il momento, che le funzioni  $g$  siano nulle, ossia consideriamo solo onde progressive. Facciamo vedere, in questo caso, che delle quattro componenti  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  due sole sono indipendenti. Infatti ricordando che tutte le derivate rispetto ad  $y$  e  $z$  sono nulle e ponendo:

$$E_y = f_1(x - ct), \quad (3.2.1)$$

la componente  $y$  dell'equazione (1.6.1), scritta per  $\vec{j} = 0$  diventa:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = f_1'(x - ct), \quad (3.2.2)$$

dove l'apice indica la derivazione rispetto all'argomento della funzione  $f$ . Così pure, utilizzando la componente  $z$  della (1.6.3):

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -c \frac{\partial E_y}{\partial x} = -cf_1'(x - ct). \quad (3.2.3)$$

Il differenziale totale di  $H_z$  vale pertanto:

$$dH_z = \frac{\partial H_z}{\partial x} dx + \frac{\partial H_z}{\partial t} dt = f_1'(x - ct) d(x - ct). \quad (3.2.4)$$

Tenendo conto che nella (3.2.4) compare il differenziale dell'argomento della funzione  $f$ , integrando si ottiene:

$$H_z = f_1(x - ct) = E_y. \quad (3.2.5)$$

In modo analogo, usando le componenti  $z$  e  $y$  rispettivamente delle equazioni (1.6.1) e (1.6.3), si ha:

$$H_y = -E_z. \quad (3.2.6)$$

Le (3.2.5) e (3.2.6) corrispondono all'equazione vettoriale:

$$\vec{H} = \vec{\tau} \wedge \vec{E}, \quad (3.2.7)$$

da essa, ricordando la (9.3.8) si ottiene:

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = 0; \quad (3.2.8)$$

risulta inoltre che:

$$|\vec{E}| = |\vec{H}|. \quad (3.2.9)$$

L'equazione (3.2.7) e le relazioni:

$$E_{\parallel} = H_{\parallel} = 0, \quad (3.2.10)$$

$$E_{\perp} = H_{\perp} = f(\vec{r} \cdot \vec{\tau} - ct), \quad (3.2.11)$$

in cui i simboli  $\parallel$  e  $\perp$  indicano rispettivamente le componenti parallele ed ortogonali a  $\vec{\tau}$ , riassumono i risultati ottenuti circa la propagazione di onde piane progressive. Quando le onde sono sinusoidali la (3.2.11) assume la forma:

$$E_{\perp} = E_{\perp 0} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{r} \cdot \vec{\tau} - ct) + \alpha \right]. \quad (3.2.12)$$

Per le onde regressive valgono ancora le (3.2.10) e (3.2.11) ma, come si può facilmente verificare scrivendo nella (3.2.1)  $g(x+ct)$  anziché  $f(x-ct)$  e procedendo come per le onde progressive, il campo magnetico risulta opposto a quello dato dalla (3.2.7). Di conseguenza, tenendo conto della (2.3.9), il vettore di Poynting è parallelo alla direzione di propagazione  $\vec{\tau}$  per le onde progressive, mentre è antiparallelo per quelle regressive. Ciò è appunto quanto ci si deve attendere in base al significato fisico del vettore  $\vec{S}$ . Naturalmente, a causa della linearità delle (3.1.2), (3.1.4), la più generale propagazione di onde risulterà dalla sovrapposizione di onde progressive e regressive con tutte le possibili scelte per la giacitura del piano dei vettori  $\vec{\tau}$  ed  $\vec{E}$ . Questo piano prende il nome di “piano di vibrazione” mentre il piano di  $\vec{\tau}$  ed  $\vec{H}$ , ad esso ortogonale, viene chiamato “piano di polarizzazione”. Quando esiste una sola giacitura per il piano di vibrazione, le onde vengono dette “polarizzate”.

Fra tutte le possibili sovrapposizioni di onde sinusoidali ne esiste una che dà luogo al fenomeno detto della “polarizzazione rotatoria”. Ecco in cosa esso consiste. Consideriamo due onde polarizzate in piani ortogonali, indichiamo i vettori elettrici ad esse associati con  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  e con  $E_y$ ,  $E_z$  le componenti di questi vettori lungo le loro rispettive direzioni, che assumiamo coincidenti con quelle degli assi  $y$  e  $z$ . Supponiamo che le costanti di fase delle onde sinusoidali corrispondenti alla propagazione di  $E_y$  ed  $E_z$  siano rispettivamente  $\pi/2$  e  $0$ , mentre ampiezze e lunghezze d'onda coincidano. Si ha di conseguenza, usando la (3.2.12):

$$E_y = E_{\perp 0} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct), \quad (3.2.13)$$

$$E_z = E_{\perp 0} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct). \quad (3.2.14)$$

Il modulo del campo elettrico risultante vale perciò:

$$|\vec{E}_1 + \vec{E}_2| = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = E_{\perp 0}, \quad (3.2.15)$$

ossia esso è costante sia rispetto al posto che al tempo. Viceversa, dato un piano ortogonale a  $\vec{\tau}$  di equazione:

$$x = \vec{r} \cdot \vec{\tau} = \text{cost}. \quad (3.2.16)$$

la direzione del campo risultante ruota in questo piano nel verso orario e con velocità angolare  $\omega$ . Infatti per le (3.2.13) e (3.2.14), le sue componenti  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$  variano, nel piano (3.2.16), di moto armonico con differenza di fase  $\frac{\pi}{2}$ . D'altra parte, assegnato un istante  $t_0$ , il punto estremo del vettore elettrico descrive, al variare di  $x$  un'elica cilindrica destrorsa di passo  $\lambda$  (vedi fig. (3.2.2)). Di conseguenza, considerando il fenomeno sia rispetto al posto che al tempo, possiamo concludere che il campo elettrico si comporta come un'elica cilindrica destrorsa che scorra lungo il suo asse senza ruotare, oppure, in modo equivalente, che ruoti in senso orario attorno al suo asse senza scorrere. Scegliendo  $\alpha = -\pi/2$  si ha a secondo membro della (3.2.13) un cambiamento di segno e si giunge alle stesse conclusioni salvo il verso di rotazione che, in questo caso, è antiorario. È interessante rilevare che sovrapponendo due onde polarizzate circolarmente in senso opposto, ma di eguali caratteristiche, si ottiene un'onda polarizzata linearmente. Infatti le componenti  $\vec{E}_2$  di queste onde, il cui modulo è dato

dalla (3.2.14), coincidono; le componenti  $\vec{E}_1$ , invece, il cui modulo è dato dalla (3.2.13), sono opposte e si eliminano a vicenda. Rimane perciò appunto un'onda polarizzata linearmente con ampiezza  $2E_{\perp 0}$ .

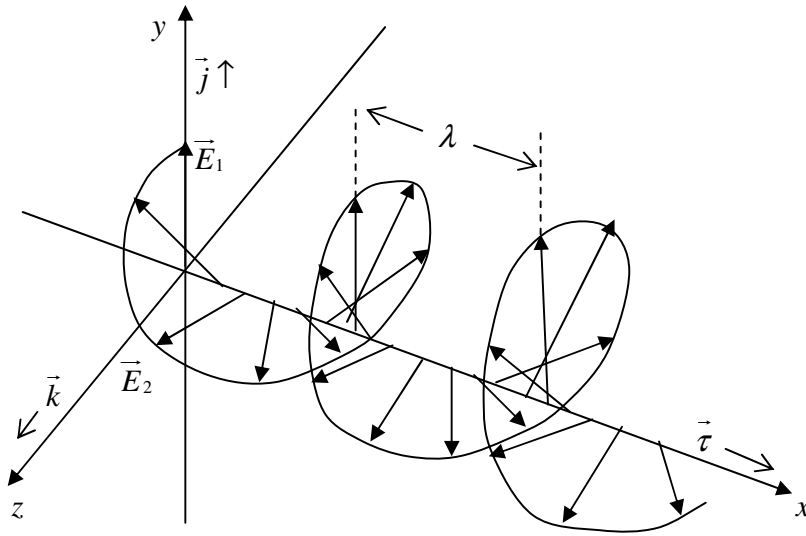


Fig. (3.2.2)

Dalle precedenti considerazioni risulta che lo studio della sovrapposizione di onde piane sinusoidali è in definitiva riconducibile al problema della composizione di moti armonici; di conseguenza è evidente che si possono avere, anche, onde a polarizzazione ellittica. In questo caso le (3.2.13), (3.2.14) devono essere sostituite dalle relazioni più generali:

$$E_y = E_{y0} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) + \alpha_y \right], \quad (3.2.17)$$

$$E_z = E_{z0} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) + \alpha_z \right], \quad (3.2.18)$$

dove  $E_{y0}$ ,  $E_{z0}$  ed  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  sono due ampiezze e due fasi arbitrarie. Le precedenti relazioni, con un semplice calcolo, danno:

$$\sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) = \frac{1}{\sin(\alpha_z - \alpha_y)} \left( \frac{E_y}{E_{y0}} \sin \alpha_z - \frac{E_z}{E_{z0}} \sin \alpha_y \right), \quad (3.2.19)$$

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) = \frac{1}{\sin(\alpha_z - \alpha_y)} \left( -\frac{E_y}{E_{y0}} \cos \alpha_z + \frac{E_z}{E_{z0}} \cos \alpha_y \right) \quad (3.2.20)$$

da cui, quadrando e sommando e ponendo:

$$\alpha_z - \alpha_y = \delta, \quad (3.2.21)$$

si ottiene:

$$\left( \frac{E_y}{E_{y0}} \right)^2 + \left( \frac{E_z}{E_{z0}} \right)^2 - 2 \left( \frac{E_y}{E_{y0}} \right) \left( \frac{E_z}{E_{z0}} \right) \cos \delta = \sin^2 \delta, \quad (3.2.22)$$

che è, rispetto alle variabili  $E_y$ ,  $E_z$ , l'equazione di una conica. Nelle precedenti relazioni le ampiezze  $E_{y0}$ ,  $E_{z0}$  sono supposte positive; il vettore elettrico, di conseguenza, ruota in verso antiorario od orario a seconda che lo sfasamento  $\delta$  è positivo o negativo. Per studiare le proprietà della conica (3.2.22), calcoliamone gli invarianti fondamentali<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>; essi sono il discriminante  $A$ :

(\*\*\*\*\*) Data l'equazione della conica nella forma più generale:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

si dimostra (vedi ad esempio G. Fano e A. Terracini "Lezioni di geometria analitica e proiettiva" (n. 284) Paravia – Torino 1948) che le quantità:

$$A = \text{Det} |a_{ik}|, \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$I = a_{11} + a_{22},$$

sono invarianti rispetto ad una qualunque trasformazione ortogonale degli assi.

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{E_{y0}^2} & -\frac{\cos \delta}{E_{y0}E_{z0}} & 0 \\ -\frac{\cos \delta}{E_{y0}E_{z0}} & \frac{1}{E_{z0}^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sin^2 \delta \end{vmatrix} = -\frac{\sin^4 \delta}{E_{y0}^2 E_{z0}^2}, \quad (3.2.23)$$

il suo minore  $A_{33}$ :

$$A_{33} = \begin{vmatrix} \frac{1}{E_{y0}^2} & -\frac{\cos \delta}{E_{y0}E_{z0}} \\ -\frac{\cos \delta}{E_{y0}E_{z0}} & \frac{1}{E_{z0}^2} \end{vmatrix} = \frac{\sin^2 \delta}{E_{y0}^2 E_{z0}^2}, \quad (3.2.24)$$

e la quantità:

$$I = \frac{1}{E_{y0}^2} + \frac{1}{E_{z0}^2}. \quad (3.2.25)$$

Il fatto che  $A_{33}$  risulti positivo, o al più, nullo, permette di concludere, innanzitutto, che la conica (3.2.22) è un'ellisse. Passando, mediante una opportuna rotazione degli assi, dalle variabili  $E_y$ ,  $E_z$  alle nuove variabili  $E_\eta$ ,  $E_\xi$  la (3.2.22) può essere scritta nella forma:

$$\frac{E_\eta^2}{b^2} + \frac{E_\xi^2}{c^2} = a^2, \quad (3.2.26)$$

dove le quantità  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , sono determinate in funzione degli invarianti dalle relazioni:

$$\frac{\sin^4 \delta}{E_{y0}^2 E_{z0}^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2} = A, \quad (3.2.27)$$

$$\frac{\sin^2 \delta}{E_{y0}^2 E_{z0}^2} = \frac{1}{b^2 c^2} = A_{33}, \quad (3.2.28)$$

$$\frac{1}{E_{y0}^2} + \frac{1}{E_{z0}^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = I. \quad (3.2.29)$$

Dividendo la (3.2.27) per la (3.2.28) si ha:



$$a^2 = \sin^2 \delta, \quad (3.2.30)$$

analogamente, dividendo la (3.2.29) per la (3.2.27) si ottiene:

$$\sin^2 \delta (b^2 + c^2) = E_{y0}^2 + E_{z0}^2. \quad (3.2.31)$$

Quest'ultima relazione, la (3.2.28) e la (3.2.30), permettono di ricavare, a meno dei segni, i parametri  $a, b, c$ , in funzione delle ampiezze  $E_{y0}, E_{z0}$  e dello sfasamento  $\delta$ . Conviene tuttavia, introdurre i due nuovi parametri:

$$E_{\eta 0} = ab, \quad E_{\xi 0} = ac; \quad (3.2.32)$$

essi, approfittando dell'arbitrarietà dei segni di  $a, b, c$ , possono essere supposti sempre positivi. Mediante le (3.2.32) e tenendo conto della (3.2.30), le (3.2.26), (3.2.31) e (3.2.28) diventano rispettivamente:

$$\frac{E_{\eta}^2}{E_{\eta 0}^2} + \frac{E_{\xi}^2}{E_{\xi 0}^2} = 1, \quad (3.2.33)$$

$$E_{\eta 0}^2 + E_{\xi 0}^2 = E_{y0}^2 + E_{z0}^2, \quad (3.2.34)$$

$$E_{\eta 0}^2 E_{\xi 0}^2 = \sin^2 \delta E_{y0}^2 E_{z0}^2. \quad (3.2.35)$$

Dalla (3.2.33) risulta che  $E_{\eta 0}, E_{\xi 0}$  rappresentano la lunghezza dei semiassi

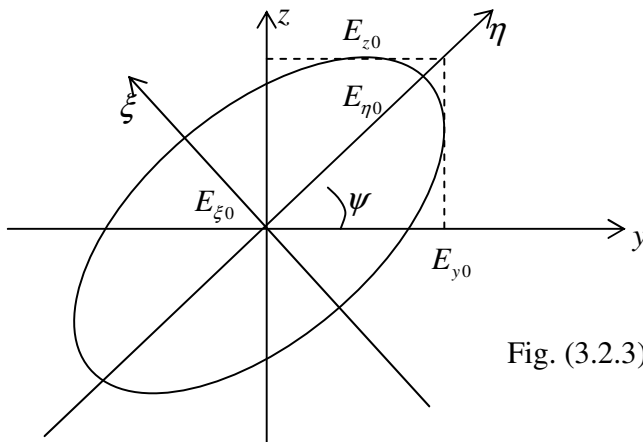


Fig. (3.2.3)

dell'ellisse (vedi fig. (3.2.3)); queste quantità, pertanto, possono essere determinate

mediante le equazioni (3.2.34), (3.2.35). Il loro rapporto può essere caratterizzato mediante un opportuno angolo  $\chi$  definito dalla relazione:

$$\pm \operatorname{tg} \chi = \frac{E_{\xi 0}}{E_{\eta 0}}, \quad (3.2.36)$$

in cui il segno è scelto coincidente con quello di  $\sin \delta$ . Ne segue che  $\chi$  è positivo o negativo a seconda che il vettore elettrico ruoti nel verso antiorario o in quello orario. Utilizzando la definizione di  $\chi$  si ha:

$$\frac{2E_{\eta 0}E_{\xi 0}}{E_{\eta 0}^2 + E_{\xi 0}^2} = \pm 2 \sin \chi \cos \chi = \pm \sin 2\chi; \quad (3.2.37)$$

d'altra parte, mediante la (3.2.34), (3.2.35) si ottiene:

$$\frac{E_{\eta 0}E_{\xi 0}}{E_{\eta 0}^2 + E_{\xi 0}^2} = \pm \sin \delta \frac{E_{y 0}E_{z 0}}{E_{y 0}^2 + E_{z 0}^2}, \quad (3.2.38)$$

in cui il segno deve essere scelto in modo che  $\pm \sin \delta$  sia positivo. Di conseguenza, ponendo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_{y 0}}{E_{z 0}} \left( 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.2.39)$$

e confrontando le (3.2.37), (3.2.38), si arriva alla relazione:

$$\sin 2\chi = \sin \delta \sin 2\alpha, \quad (3.2.40)$$

la quale determina direttamente  $\chi$  mediante le ampiezze  $E_{y 0}$ ,  $E_{z 0}$  e lo sfasamento  $\delta$ . Da essa risulta anche che  $\sin 2\chi$  può assumere tutti i valori compresi tra -1 e +1, per cui deve valere la disuguaglianza:

$$-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq +\frac{\pi}{4}. \quad (3.2.41)$$

Resta da calcolare l'angolo  $\psi$  che i semiassi dell'ellisse formano con gli assi cartesiani  $y$  e  $z$  (vedi fig.(3.2.3)). A questo scopo osserviamo che valgono le relazioni:

$$E_y = \cos \psi E_\eta - \sin \psi E_\xi, \quad (3.2.42)$$

$$E_z = \sin \psi E_\eta + \cos \psi E_\xi; \quad (3.2.43)$$

esse, introdotte nella (3.2.22) la devono trasformare nella (3.2.33). Deve pertanto mancare il termine proporzionale al prodotto  $E_\eta E_\xi$ ; si deve avere cioè:

$$\left[ -\sin 2\psi \left( \frac{1}{E_{y0}^2} - \frac{1}{E_{z0}^2} \right) - \frac{2 \cos 2\psi \cos \delta}{E_{y0} E_{z0}} \right] E_\eta E_\xi = 0; \quad (3.2.44)$$

da cui:

$$\operatorname{tg} 2\psi = -2 \frac{E_{y0} E_{z0}}{E_{z0}^2 - E_{y0}^2} \cos \delta, \quad (3.2.45)$$

ossia, ricordando la (3.2.39):

$$\operatorname{tg} 2\psi = -\operatorname{tg} 2\alpha \cos \delta. \quad (3.2.46)$$

In conclusione: le oscillazioni (3.2.17), (3.2.18) danno luogo ad un vettore elettrico la cui estremità descrive la ellisse (3.2.33); i semiassi di questa ellissi sono caratterizzati dalle equazioni (3.2.34), (3.2.35) o semplicemente, per quanto ne riguarda il mutuo rapporto e l'orientazione, dalle (3.2.40), (3.2.46). Nella (3.2.40), inoltre, il segno di  $\chi$  determina il verso di rotazione. Evidentemente, come nel caso speciale della polarizzazione rotatoria il movimento lungo l'ellisse è simultaneo allo scorrimento con velocità  $c$  lungo l'asse  $x$ . Il vettore elettrico, pertanto, descrive un'elica ellittica la quale per  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  e  $\delta = \frac{\pi}{2}$  diventa circolare, mentre per  $\alpha = 0$  e  $\delta = 0$  degenera in una sinusoide piana.

Una questione della massima importanza è il calcolo del flusso di energia associato alla propagazione delle onde piane. Come si è visto nel paragrafo 2.3, tale flusso è dato dal flusso del vettore di Poynting; valutiamo perciò  $\vec{S}$ . Ricordando le (2.3.9), (3.2.7) e la formola (9.3.6) si ha:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge (\vec{\tau} \wedge \vec{E}) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{\tau}, \quad (3.2.47)$$

da cui, usando la (3.2.12):

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} E_{\perp 0}^2 \sin^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{\tau} \cdot \vec{r} - ct) + \alpha \right]. \quad (3.2.48)$$

Nel caso in cui la lunghezza d'onda  $\lambda$  sia molto piccola, e quindi, per la (3.1.25), il periodo  $T$  sia molto breve, è conveniente esprimere la densità di flusso dell'energia elettromagnetica mediante il valore medio di  $\vec{S}$  fatto su un periodo. Supponendo  $T$  piccolo rispetto all'unità di tempo, tale valor medio, che prende il nome di “intensità di radiazione”, corrisponde effettivamente all'energia che si è propagata per unità di tempo attraverso alla superficie unitaria normale a  $\vec{\tau}$ . Indicando con  $\mathcal{J}$  l'intensità di radiazione si ha:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| dt = \frac{c}{4\pi T} \int_0^T E_{\perp 0}^2 \sin^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{\tau} \cdot \vec{r} - ct) + \alpha \right] dt \quad (3.2.49)$$

da cui, eseguendo l'integrale:

$$\mathcal{J} = \frac{c E_{\perp 0}^2}{8\pi}. \quad (3.2.50)$$

Risulta dunque che l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza. Quando la polarizzazione è rotatoria od ellittica, dalla relazione:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) \wedge [\vec{\tau} \wedge (E_y \vec{j} + E_z \vec{k})] = \frac{c}{4\pi} (E_y^2 + E_z^2) \vec{\tau}, \quad (3.2.51)$$

usando le (3.2.17), (3.2.18) e procedendo come per la (3.2.47) risulta subito:

$$\mathcal{J} = \frac{c}{8\pi} (E_{y0}^2 + E_{z0}^2); \quad (3.2.52)$$

ossia, ricordando la (3.2.34):

$$\mathcal{J} = \frac{c}{8\pi} (E_{\eta 0}^2 + E_{\xi 0}^2). \quad (3.2.53)$$

Queste equazioni esprimono, in modo più generale della (3.2.50), l'intensità di radiazione di un'onda piana.

### 3.3 Integrazione dell'equazione delle onde per separazione delle variabili – Coordinate cartesiane

Per studiare, in casi differenti da quello della simmetria piana, la propagazione di onde elettromagnetiche è necessario, innanzitutto, sviluppare un metodo generale per integrare l'equazione:

$$\Delta_2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (3.3.1)$$

Dedichiamo, pertanto, il presente paragrafo alla risoluzione di questo problema matematico. A rigore una soluzione dell'equazione (3.3.1) è già nota; si constata infatti, ponendo  $F = 0$  nelle equazioni (1.9.1) e (1.9.18), che la formola di Kirchhoff fornisce la richiesta funzione  $f(P, t)$  sotto forma di integrale di superficie. Tuttavia l'applicazione di questa formola non è all'atto pratico molto opportuna specie quando occorra tenere  $f(P, t)$  in forma esplicita. Pertanto non useremo la formola di Kirchhoff, ma bensì un procedimento che permette di integrare la (3.3.1) mediante quattro equazioni alle derivate totali rispettivamente per la variabile tempo e le tre variabili di posizione. Questo procedimento, che viene detto per separazione delle variabili, richiede l'uso di coordinate ortogonali; noi lo svilupperemo, con un certo dettaglio, nel caso delle coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche.

Consideriamo dunque l'equazione alle derivate parziali (3.3.1); occorre determinarne le soluzioni sotto forma di funzioni del posto e del tempo finite e regolari (cioè continue e ad un solo valore) entro il dominio di integrazione prescelto. Per far ciò cominciamo col decomporre la  $f$  nel prodotto di due funzioni rispettivamente del posto e del tempo, cioè:

$$f(P, t) = \psi(P) \chi(t). \quad (3.3.2)$$

Sostituendo questa espressione nella (3.3.1) e dividendo membro a membro per  $f$ , si ottiene:

$$c^2 \frac{\Delta_2 \psi}{\psi} = \frac{1}{\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2}. \quad (3.3.3)$$

Poiché il primo membro è funzione solo del posto e il secondo solo del tempo, ciascuno di essi deve essere eguale a una costante a priori arbitraria, che verrà indicata con  $\pm\omega^2$ . È evidente che solo il segno meno è accettabile; infatti scegliendo il segno positivo, l'equazione:

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = \pm\omega^2\chi \quad (3.3.4)$$

fornisce per il fattore temporale delle funzioni esponenziali variabili monotonicamente, le quali diventano infinite quando la variabile  $t$  assume dei valori positivi o negativi arbitrariamente grandi. Viceversa, la scelta del segno meno corrisponde a delle funzioni periodiche che, per comodità, scriveremo mediante esponenziali immaginari cioè:

$$\chi_\omega(t) = \chi_\omega^{(0)} e^{-i\omega t}, \quad (3.3.5)$$

dove  $\chi_\omega^{(0)}$  è una costante complessa di scelta arbitraria. Combinando linearmente questa funzione colla complessa coniugata, che verifica essa pure la (3.3.4) si possono ottenere delle soluzioni reali fisicamente significative. Oppure, seguendo un procedimento molto comune in elettromagnetismo, si può prendere come fattore temporale la parte reale, o il coefficiente dell'unità immaginaria, della soluzione (3.3.5). In ogni modo l'equazione per la parte spaziale diventa:

$$\Delta_2\psi + \frac{\omega^2}{c^2}\psi = 0; \quad (3.3.6)$$

Sostituendo l'integrale  $\psi_\omega$  della (3.3.6) e l'espressione (3.3.4) di  $\chi_\omega$  nella (3.3.2), si otterrà un integrale particolare  $f_\omega$  dell'equazione (3.3.1). Sovrapponendo gli integrali corrispondenti ai vari valori di  $\omega$  si otterrà, a causa della linearità della (3.3.1), l'integrale generale richiesto. In particolare se le costanti  $\omega$  formano una progressione aritmetica, la funzione  $f$  risulterà espressa mediante una serie di Fourier.

Occorre ora determinare gli integrali della (3.3.6). Ciò può essere fatto abbastanza facilmente se l'operatore laplaciano è espresso mediante coordinate ortogonali; in questo modo, infatti, la (3.3.6) si decompone in tre equazioni separate, una per ogni coordinata. Cominciamo dal caso delle coordinate cartesiane che fra tutti è il più semplice. Ponendo:

$$\psi(P) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (3.3.7)$$

e dividendo per  $\psi$ , la (3.3.6) diventa:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}. \quad (3.3.8)$$

Introduciamo tre costanti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  soddisfacenti alla relazione:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.3.9)$$

e consideriamo le equazioni:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 Y, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\gamma^2 Z, \quad (3.3.10)$$

i loro integrali, evidentemente, forniscono, se sono sostituiti nella (3.3.7), un integrale particolare della (3.3.6). Procedendo in analogia a quanto fatto in precedenza per il fattore temporale, gli integrali richiesti possono pertanto essere scritti nella forma:

$$X_\alpha(x) = X_\alpha^{(0)} e^{i\alpha x}, \quad Y_\beta(y) = Y_\beta^{(0)} e^{i\beta y}, \quad Z_\gamma(z) = Z_\gamma^{(0)} e^{i\gamma z}. \quad (3.3.11)$$

Introducendo il vettore:

$$\vec{\tau}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{c}{\omega} (\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}), \quad (3.3.12)$$

il cui modulo, come risulta dalla (3.3.9), è unitario, avremo:

$$\psi_{\alpha, \beta, \gamma} = \psi_{\alpha, \beta, \gamma}^{(0)} e^{i \frac{\omega}{c} \vec{r} \cdot \vec{\tau}(\alpha, \beta, \gamma)}, \quad (3.3.13)$$

da cui tenendo conto della (3.3.2):

$$f_{\alpha, \beta, \gamma}(x, y, z, t) = f_{\alpha, \beta, \gamma}^{(0)} e^{i \frac{\omega}{c} [\vec{r} \cdot \vec{\tau}(\alpha, \beta, \gamma) - ct]}. \quad (3.3.14)$$



Nella (3.3.13) si è indicato con  $\psi_{\alpha,\beta,\gamma}^{(0)}$  il prodotto delle tre costanti che compaiono a secondo membro nelle (3.3.11); così pure nella (3.3.14) si è scritto  $f_{\alpha,\beta,\gamma}^{(0)}$  al posto del prodotto  $\psi_{\alpha,\beta,\gamma}^{(0)} \chi_{\omega}^{(0)}$ . Si deve tener conto che queste costanti e quindi anche il coefficiente  $f_{\alpha,\beta,\gamma}^{(0)}$  sono in generale delle quantità complesse. La (3.3.14) è paragonabile alla (3.2.11), essa rappresenta in forma complessa un'onda piana di tipo sinusoidale che si propaga lungo la direzione  $\vec{\tau}$ . Ed è anche evidente che la  $\omega$  è legata alla frequenza  $\nu$  dalla relazione (3.1.27), mentre la lunghezza d'onda  $\lambda$  risulta espressa in funzione di  $T$  dalla (3.1.25). È possibile poi, scegliendo diversamente i segni nelle (3.3.5) e (3.3.10) ottenere soluzioni corrispondenti ad onde regressive. Abbiamo così riottenuto, col metodo della separazione delle variabili, il risultato cui eravamo pervenuti nel paragrafo precedente mediante l'equazione di D'Alembert. Tuttavia, nel caso attuale, la direzione di  $\vec{\tau}$  non è più fissata in quanto, salvo la condizione (3.3.9), che stabilisce l'unitarietà del modulo di  $\vec{\tau}$ , le costanti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sono arbitrarie. L'integrale generale della (3.3.1) lo si otterrà, sotto forma di serie (o di integrale di Fourier) (vedi paragrafo 9.5), sommando (o integrando) la (3.3.14) su tutte le direzioni di  $\vec{\tau}$  e su tutti i valori di  $\omega$ , cioè:

$$f(x, y, z, t) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} f_{\alpha,\beta,\gamma}^{(0)} e^{i \frac{\omega}{c} [\vec{r} \cdot \vec{\tau} (\alpha, \beta, \gamma) - ct]} = \sum_{\vec{\tau}, \omega} f_{\vec{\tau}, \omega}^{(0)} e^{i \frac{\omega}{c} (\vec{r} \cdot \vec{\tau} - ct)}. \quad (3.3.15)$$

Evidentemente da questa relazione, che rappresenta una propagazione di tipo qualsiasi come sovrapposizione di onde piane, si riduce al caso particolare della simmetria piana quando i coefficienti  $f_{\alpha,\beta,\gamma}^{(0)}$  con indici  $\beta$  e  $\gamma$  differenti da zero sono nulli, ossia quando esiste una sola orientazione di  $\vec{\tau}$ .

Nel caso di un'onda piana sinusoidale le componenti del vettore elettrico possono dunque essere espresse nella forma:

$$\left. \begin{aligned} E_x(x, y, z, t) &= E_{x0} e^{i \left[ \frac{\omega}{c} (\vec{r} \cdot \vec{\tau} - ct) + \alpha_x \right]} \\ E_y(x, y, z, t) &= E_{y0} e^{i \left[ \frac{\omega}{c} (\vec{r} \cdot \vec{\tau} - ct) + \alpha_y \right]} \\ E_z(x, y, z, t) &= E_{z0} e^{i \left[ \frac{\omega}{c} (\vec{r} \cdot \vec{\tau} - ct) + \alpha_z \right]} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.16)$$

dove le costanti reali  $E_{x0}$ ,  $E_{y0}$ ,  $E_{z0}$  e  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  sono rispettivamente i moduli e gli argomenti del coefficiente  $f_{\alpha,\beta,\gamma}^{(0)}$  relativo a ciascuna delle componenti di  $\vec{E}$ . Per il vettore  $\vec{H}$  valgono delle relazioni del tutto analoghe. Ovviamente le (3.3.16) e le corrispondenti equazioni per il campo magnetico devono soddisfare alla condizione (3.1.10) che impone ai vettori  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  di essere trasversali alla direzione di propagazione. Non facendo riferimento alla terna di assi, le relazioni (3.3.16) possono essere sostituite dalla:

$$E_{\perp}(x, y, z, t) = E_{\perp 0} e^{i \left[ \frac{\omega}{c} (\vec{r} \cdot \vec{r} - ct) + \alpha \right]} \quad (3.3.17)$$

che è analoga alla (3.2.12).

È utile notare che, nel caso in cui si scelga l'equazione complessa (3.3.17) per rappresentare la propagazione di un'onda piana periodica, conviene sostituire alla definizione (3.2.49) dell'intensità di radiazione la seguente altra espressione:

$$\mathcal{I} = \frac{c}{8\pi} |E_{\perp}|^2. \quad (3.3.18)$$

In questo modo, infatti, si ottiene direttamente l'equazione (3.2.50) che fornisce il valore di  $\mathcal{I}$ , senza dover separare parte reale e parte immaginaria del campo propagativo.

### 3.4 Integrazione per separazione delle variabili – Coordinate cilindriche

Consideriamo ora il caso delle coordinate cilindriche. Ponendo:

$$\psi(P) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z) \quad (3.4.1)$$

esplicitando, mediante la relazione (9.3.66), il laplaciano e dividendo membro a membro per  $\psi$ , la (3.3.6) diventa:

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2}. \quad (3.4.2)$$

Poiché il primo membro dipende solo da  $r$  e  $\varphi$  mentre il secondo solo da  $z$ , ciascuno dei due membri deve essere costante rispetto alle coordinate; possiamo perciò separare le variabili ponendo:

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = -a_1, \quad (3.4.3)$$

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = a_1, \quad (3.4.4)$$

dove  $a_1$  è una costante arbitraria. La (3.4.4) può essere riscritta nella forma:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - a_1 \right) r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \quad (3.4.5)$$

da cui appare evidente che è ancora possibile separare le variabili  $r$  e  $\varphi$  mediante le due equazioni:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -a_2, \quad (3.4.6)$$

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - a_1 \right) r^2 = a_2, \quad (3.4.7)$$

dove  $a_2$  è un'altra costante arbitraria. L'integrazione della (3.3.6) è così ricondotta a quella delle equazioni (3.4.3), (3.4.6) e (3.4.7) ossia delle equazioni alle derivate totali:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + a_1 Z = 0, \quad (3.4.8)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + a_2 \Phi = 0, \quad (3.4.9)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - a_1 - \frac{a_2}{r^2} \right) R = 0. \quad (3.4.10)$$

Dalla (3.4.8) otteniamo per il fattore  $Z$  una espressione di tipo esponenziale o periodico a seconda che la costante  $a_1$  è negativa o positiva. Poiché al crescere del modulo di  $z$  la funzione esponenziale diventa nulla o infinita, essa non è fisicamente accettabile, dato che il valore di  $\psi$  deve rimanere dappertutto finito. Escludendo il caso, non interessante per i nostri scopi, in cui il dominio di integrazione è limitato, concludiamo che la costante  $a_1$  deve essere scelta positiva. Di conseguenza, ponendo:

$$a_1 = h^2, \quad (3.4.11)$$

in cui  $h$  è una costante reale, di dimensioni pari al reciproco di una lunghezza, avremo:

$$Z_h(z) = Z_h^{(0)} e^{ihz}. \quad (3.4.12)$$

Mediante la (3.4.12) e la sua coniugata, che sono degli integrali particolari, possiamo costruire l'integrale generale della (3.4.8).

Considerando la (3.4.9) è facile vedere che la costante  $a_2$  deve essere scelta eguale al quadrato di un numero intero. In questo caso, infatti, la funzione  $\Phi$  avrà carattere periodico con periodo  $2\pi$ ; ciò evidentemente è richiesto dalla condizione che  $\Phi$  sia continua per  $\varphi = 0$ . Ponendo:

$$a_2 = n^2, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.4.13)$$

otteniamo dalla (3.4.9) l'integrale particolare:

$$\Phi_n(\varphi) = \Phi_n^{(0)} e^{in\varphi}, \quad (3.4.14)$$

dove il fattore costante  $\Phi_n^{(0)}$  è, come per la (3.4.12), complesso. L'integrale generale, anche questa volta, risulterà dalla (3.4.14) e dalla sua coniugata.

Tenendo conto della (3.4.11) e della (3.4.13) e introducendo al posto di  $r$  la variabile ausiliaria:

$$\xi = r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - h^2}, \quad (3.4.15)$$

L'equazione radiale (3.4.10) diventa:

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR}{d\xi} + \left(1 - \frac{n^2}{\xi^2}\right) R = 0, \quad (3.4.16)$$

che è l'equazione di Bessel, di ordine  $n$ . Essa ammette due integrali indipendenti, la funzione di Bessel  $J_n(\xi)$  e la funzione di Neumann  $N_n(\xi)$  <sup>(+++++)</sup>. La più generale soluzione della (3.4.16) sarà quindi esprimibile mediante una combinazione lineare di queste due funzioni. Per  $\xi = 0$ , tuttavia, la funzione di Neumann è infinita <sup>(+++++)</sup>;

<sup>(+++++)</sup> Vedi: G.N. Watson "A treatise on the theory of Bessel Functions" 2<sup>nd</sup> Edition – Cambridge, 1962.

<sup>(+++++)</sup> Essa si comporta nell'intorno di  $\xi = 0$  secondo le equazioni:

$$N_0(\xi) \simeq -\frac{2}{\pi} \lg \frac{2}{\gamma \xi}$$

e:

essa non può quindi intervenire per rappresentare un campo finito per  $r=0$ , cioè lungo l'asse  $z$ . Escludendo questo asse dal dominio di integrazione, possiamo assumere come integrali indipendenti della (3.4.16) due combinazioni lineari, di forma complessa, di  $J_n$  ed  $H_n$ ; ossia la funzione:

$$H_n(\xi) = J_n(\xi) + iN_n(\xi) \quad (3.4.17)$$

e la sua coniugata. La forma esplicita di  $H_n$ , che prende il nome di funzione di Hankel, può essere ottenuta mediante le espressioni di  $J_n$  e  $H_n$ . La  $J_n$  è sviluppabile mediante la seguente serie di Taylor:

$$J_n(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(n+s+1)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+2s}; \quad (3.4.18)$$

essa, come si può facilmente verificare con metodi generali, converge per tutti i valori finiti di  $\xi$ . La funzione di Neumann  $N_n$  è ottenibile da quella di Bessel mediante la relazione:

$$N_n(\xi) = \frac{J_n(\xi) \cos n\pi - J_{-n}(\xi)}{\sin n\pi}. \quad (3.4.19)$$

La (3.4.19) vale in generale per valori qualsiasi di  $n$ ; tuttavia quando  $n$  è intero, tenendo conto che:

$$J_{-n}(\xi) = (-1)^n J_n(\xi), \quad (3.4.20)$$

essa diventa eguale al rapporto di due quantità nulle. In questo caso useremo la seguente espressione di  $N_n$ :

$$N_n(\xi) \simeq -\frac{(n-1)!}{\pi} \cdot \left(\frac{2}{\xi}\right)^n,$$

dove  $\gamma = 1,78107 \dots$  è legato alla costante di Eulero dalla relazione:

$$\lg \gamma = C.$$

$$N_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_n(\xi)}{\partial n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-n}(\xi)}{\partial n} \right]; \quad (3.4.21)$$

essa può essere dedotta dalla (3.4.19) derivando numeratore e denominatore e passando al limite per  $n$  intero. Per grandi valori di  $\xi$  conviene tuttavia rappresentare le funzioni  $J_n$ ,  $N_n$  ed  $H_n$  mediante i seguenti sviluppi asintotici:

$$\begin{aligned} J_n(\xi) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{2n+1}{4}\pi\right), \\ N_n(\xi) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \sin\left(\xi - \frac{2n+1}{4}\pi\right), \\ H_n(\xi) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \exp i\left(\xi - \frac{2n+1}{4}\pi\right), \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

validi per  $|\xi| \gg 1$  e  $|\xi| \gg n$ . Ricordando l'equazione (3.4.15), il fattore radiale risulta espresso mediante le funzioni di Hankel nella forma:

$$R_{\omega,n,h,\alpha}(r) = R_{\omega,n,h,\alpha}^{(0)} H_n^{(\alpha)} \left( r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - h^2} \right). \quad (3.4.23)$$

In questa relazione si è introdotto un indice  $\alpha$  suscettibile di assumere i valori 1 e 2; esso serve a distinguere la funzione  $H_n$  dalla sua coniugata.

Riassumendo, ne segue che la funzione  $f$ , soluzione generale della (3.3.1), è data in coordinate cilindriche dallo sviluppo:

$$f(r, \varphi, z; t) = \sum_{\omega,n,h,\alpha} R_{\omega,n,h,\alpha}^{(0)} \Phi_n^{(0)} Z_h^{(0)} \chi_\omega^{(0)} H_n^{(\alpha)} \left( r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - h^2} \right) e^{i(n\varphi + hz - \alpha t)}. \quad (3.4.24)$$

Scegliendo opportunamente i valori delle costanti  $R_{\omega,n,h,\alpha}^{(0)}$ ,  $\Phi_n^{(0)}$ ,  $Z_h^{(0)}$  e  $\chi_\omega^{(0)}$  la (3.4.24) rappresenta, come già accadeva per la (3.3.15), onde di forma qualsiasi che si propagano in un dominio esteso a tutto lo spazio salvo l'asse  $z$ . Ad esempio, suppo-

nendo che tutte le costanti siano nulle eccetto quelle corrispondenti ad una assegnata determinazione di  $\omega$  ed ai valori degli indici  $n = 0$ ,  $h = \frac{\omega}{c}$  e ponendo:

$$R_{\omega,0,\frac{\omega}{c},1}^{(0)} = R_{\omega,0,\frac{\omega}{c},2}^{(0)}, \quad (3.4.25)$$

avremo:

$$f(r, \varphi, z; t) = R_{\omega,0,\frac{\omega}{c},1}^{(0)} \Phi_0^{(0)} Z_{\frac{\omega}{c}}^{(0)} \chi_{\omega}^{(0)} \left[ H_0^{(1)}(0) + H_0^{(2)}(0) \right] e^{i\frac{\omega}{c}(z-ct)}. \quad (3.4.26)$$

Osservando che mediante le (3.4.17), (3.4.18) si ha:

$$H_0^{(1)}(0) + H_0^{(2)}(0) = 2J_0(0) = 2. \quad (3.4.27)$$

La (3.4.26) diventa:

$$f(r, \varphi, z; t) = 2R_{\omega,0,\frac{\omega}{c},1}^{(0)} \Phi_0^{(0)} Z_{\frac{\omega}{c}}^{(0)} \chi_{\omega}^{(0)} e^{i\frac{\omega}{c}(z-ct)} \quad (3.4.28)$$

che è, in forma complessa, un'onda piana progressiva, che si propaga parallelamente all'asse  $z$ .



### 3.5 Integrazione per separazione delle variabili – Coordinate sferiche

Il caso delle coordinate polari è del tutto simile a quello delle coordinate cilindriche; di conseguenza la sua trattazione può essere eseguita sulla traccia di quella testè svolta. Ci limitiamo, pertanto, alle equazioni essenziali.

La (3.4.1), evidentemente, va sostituita dalla:

$$\psi(P) = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi), \quad (3.5.1)$$

con che, usando l'espressione del laplaciano in coordinate polari (vedi equazione (9.3.58)) e separando le variabili mediante le costanti arbitrarie  $a_1$  ed  $a_2$ , si arriva alle seguenti equazioni:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + a_2\Phi = 0 \quad (3.5.2)$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin\vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left( a_1 - \frac{a_2}{\sin^2\vartheta} \right) \Theta = 0 \quad (3.5.3)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{a_1}{r^2} \right) R = 0 \quad (3.5.4)$$

che sono le analoghe delle (3.4.8), (3.4.9) e (3.4.10).

La (3.5.2), anzi, è identica alla (3.4.9), la sua soluzione, quindi, anche questa volta è data dalla (3.4.14). Si usa, tuttavia, nel caso delle coordinate polari, scegliere il fattore costante, in modo che la funzione  $\Phi_n$  sia normalizzata all'unità, ossia in modo che l'integrale del quadrato del suo modulo, esteso da 0 a  $2\pi$  valga 1. Si ha di conseguenza:

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}. \quad (3.5.5)$$

La (3.5.3), in cui va sostituito il valore (3.4.13) della costante  $a_2$ , è un'equazione i cui coefficienti presentano per  $\vartheta=0$ , una singolarità non essenziale. I suoi integrali, quindi, come stabilisce la teoria matematica di queste equazioni, non

sono in generale regolari per  $\vartheta = 0$ . Fa eccezione il caso in cui la costante  $a_1$  assuma particolari valori; precisamente per:

$$a_1 = k(k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.5.6)$$

esiste un integrale regolare ossia finito e quindi fisicamente accettabile. Esso è dato dalle funzioni associate di Legendre (vedi paragrafo 1.13) le quali sono calcolabili per derivazione mediante le formole (1.13.5), (1.13.6). Avremo pertanto:

$$\Theta(\vartheta) = CP_k^{|n|}(\cos \vartheta), \quad (3.5.7)$$

dove  $C$  è una costante arbitraria. Dalla (1.13.6) risulta evidente che quando la condizione:

$$|n| \leq k \quad (3.5.8)$$

non è verificata la funzione  $\Theta(\vartheta)$  si annulla. Conviene, come già si è fatto per la funzione  $\Phi(\varphi)$  normalizzare ad uno  $\Theta(\vartheta)$ , ossia scegliere il fattore  $C$  in modo che

$$\int_0^\pi [\Theta(\cos \vartheta)]^2 \sin \vartheta d\vartheta = \int_{-1}^1 [\Theta(\cos \vartheta)]^2 d \cos \vartheta = 1. \quad (3.5.9)$$

Tenendo conto che vale la relazione:

$$\int_{-1}^{+1} [P_k^{|n|}(\cos \vartheta)]^2 d \cos \vartheta = \frac{2}{2k+1} \frac{(k+|n|)!}{(k-|n|)!} \quad (3.5.10)$$

si ottiene perciò:

$$C = \sqrt{\frac{2k+1}{2} \frac{(k-|n|)!}{(k+|n|)!}}. \quad (3.5.11)$$

Di conseguenza, per valori assegnati di  $n$  e  $k$  e ricordando la (3.5.5), la parte angolare della (3.5.1) sarà esprimibile nella forma:

$$\Theta_{k,n}(\vartheta)\Phi_n(\varphi) = \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi} \frac{(k-|n|)!}{(k+|n|)!}} P_k^{|n|}(\cos \vartheta) e^{in\varphi}, \quad (3.5.12)$$

ossia:

$$\Theta_{k,n}(\vartheta)\Phi_n(\varphi) = Y_{k,n}(\vartheta, \varphi). \quad (3.5.13)$$

Si ritrovano così le funzioni sferiche di Laplace già incontrate nel paragrafo 1.13; la loro più importante proprietà, la cui dimostrazione è reperibile assieme a quella della (3.5.10) negli appositi trattati (vedi paragrafo 1.13 dopo la formola (1.13.10)), è quella della ortogonalità. Valgono cioè le relazioni:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 Y_{k,n}^* Y_{k',n'} d(\cos \vartheta) = \delta_{k,k'} \delta_{n,n'} \quad (3.5.14)$$

dove  $\delta$  è il simbolo di Kroenecker (vedi paragrafo 1.6). Si può inoltre mostrare che le  $Y_{k,n}$  costituiscono un sistema completo di funzioni, ossia che è possibile mediante esse sviluppare una arbitraria funzione analitica di  $\vartheta$  e  $\varphi$ .

Resta da integrare l'equazione (3.5.4) per il fattore radiale; essa, ponendo:

$$R = \frac{u}{\sqrt{r}}, \quad r = \frac{c}{\omega} \xi \quad (3.5.15)$$

e ricordando la (3.5.6), diventa:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{du}{d\xi} + \left[ 1 - \frac{(k + \frac{1}{2})^2}{\xi^2} \right] u = 0, \quad (3.5.16)$$

che è un'equazione di Bessel di ordine  $k + \frac{1}{2}$ . Analogamente al caso delle coordinate cilindriche, l'integrale della (3.5.16) è dato dalla funzione di Hankel  $H_{k+\frac{1}{2}}(\xi)$ . Risulta perciò che l'integrale della (3.3.1) è espresso, in coordinate sferiche, dallo sviluppo:

$$f(r, \vartheta, \varphi; t) = \sum_{\omega, n, k, \alpha} R_{\omega, k, \alpha}^{(0)} \Phi_n^{(0)} \cdot \Theta_{k, n}^{(0)} \chi_{\omega}^{(0)} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} H_{k+\frac{1}{2}}^{(\alpha)}\left(\frac{\omega}{c} r\right) Y_{k, n}(\vartheta, \varphi) \cdot e^{-i\omega t}, \quad (3.5.17)$$

dove  $R_{\omega, k, \alpha}^{(0)}$ ,  $\Phi_n^{(0)}$ ,  $\Theta_{k, n}^{(0)}$  sono dei coefficienti costanti arbitrari, analoghi a quelli che compaiono nella (3.4.24). La (3.5.17), come già la (3.3.15) e la (3.4.24), rappresenta la più generale propagazione di onde nello spazio.

Un caso particolare che presenta un certo interesse è quello in cui la propagazione ha simmetria sferica, ossia la funzione  $f$  è indipendente da  $\vartheta$  e  $\varphi$ . In questo caso, necessariamente, si deve avere:

$$R_{\omega, k, \alpha} = 0 \quad \text{per } k \neq 0 \quad (3.5.18)$$

e:

$$\Theta_{k, n} = 0 \quad \text{per } k, n \neq 0 \quad (3.5.19)$$

e la (3.5.17) diventa:

$$f(r; t) = \sum_{\omega, \alpha} R_{\omega, 0, \alpha}^{(0)} \Phi_0^{(0)} \Theta_{0, 0}^{(0)} \chi_{\omega}^{(0)} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} H_{\frac{1}{2}}^{(\alpha)}\left(\frac{\omega}{c} r\right) \cdot e^{-i\omega t}. \quad (3.5.20)$$

Di conseguenza un'onda monocromatica a simmetria sferica può essere espressa in forma complessa mediante la relazione:

$$f(r; t) = K \frac{H_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega}{c} r\right)}{\sqrt{r}} e^{-i\omega t}, \quad (3.5.21)$$

dove  $K$  è una costante arbitraria. Per grandi valori di  $r$ , utilizzando la terza delle equazioni asintotiche (3.4.22), la (3.5.21) diventa semplicemente:

$$f(r; t) = A \frac{e^{i\frac{\omega}{c}(r-ct)}}{r}, \quad (3.5.22)$$

dove:

$$A = -iK\sqrt{\frac{2c}{\pi\omega}} \quad (3.5.23)$$

ancora rappresenta una costante arbitraria. Dalla (3.5.22) appare manifesto che l'intensità di radiazione, che è proporzionale a  $f^2$ , decresce col quadrato della distanza quando ci si allontana dal centro della sfera.

### 3.6 Propagazione di onde a simmetria cilindrica

Utilizzando i risultati dei precedenti paragrafi, possiamo ora riprendere lo studio della propagazione delle onde elettromagnetiche, iniziato nel paragrafo 3.1 colle onde piane. Appare subito che le soluzioni dell'equazione (3.3.1) assumono una forma particolarmente semplice se si impone alla funzione  $f(P, t)$  la simmetria sferica o quella cilindrica. Nel caso della simmetria cilindrica, infatti,  $f(P, t)$  non dipende da  $\varphi$ , mentre in quello della simmetria sferica essa è indipendente da  $\varphi$  e da  $\vartheta$ . La simmetria sferica, tuttavia, non è compatibile con la propagazione di un'onda elettromagnetica. Ciò è dovuto al fatto che un campo vettoriale possiede simmetria sferica solo quando il vettore del campo ha, in ogni punto, direzione radiale. Ne segue che i campi elettrico e magnetico dovrebbero essere entrambi radiali e quindi tra di loro paralleli. Ciò è in contrasto con quanto stabilisce l'equazione (3.2.8); basta considerare, infatti, che a grande distanza dall'origine le onde a simmetria sferica che si propagano in una data direzione si riducono ad onde piane in cui  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$ , appunto per la (3.2.8), sono tra loro ortogonali. La simmetria cilindrica, viceversa, è senz'altro compatibile colla (3.2.8); essa pertanto costituisce un caso in cui è possibile studiare in modo semplice le peculiarità fisiche della propagazione. D'altra parte lo studio dell'irraggiamento dell'energia elettromagnetica, che verrà eseguito nei prossimi paragrafi, ci condurrà a considerare proprio la propagazione di onde a simmetria cilindrica. Supponiamo, dunque, che il fenomeno di propagazione abbia simmetria cilindrica, cioè che sia indipendente dalla coordinata  $\varphi$ . Inoltre supponiamo che esso sia indipendente anche da  $z$ . Ciò non costituisce una sostanziale restrizione; abbiamo visto, infatti, nel paragrafo precedente (vedi equazione (3.4.26)), che lungo la coordinata  $z$  la propagazione può avvenire solo sotto forma di onde piane e ciò attualmente non ha interesse per i nostri scopi. Con queste ipotesi e usando le coordinate cilindriche le equazioni del campo (1.6.1), (1.6.2), (1.6.3) e (1.6.4) possono essere scritte nella forma:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t} = 0, \quad (3.6.1)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = 0, \quad (3.6.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0, \quad (3.6.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) = 0, \quad (3.6.4)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial H_r}{\partial t} = 0, \quad (3.6.5)$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0, \quad (3.6.6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) + \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \quad (3.6.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) = 0, \quad (3.6.8)$$

dove  $E_r$ ,  $E_z$ ,  $E_\varphi$  sono le componenti cilindriche del campo elettrico e  $H_r$ ,  $H_z$ , e  $H_\varphi$  quelle del campo magnetico. Risulta subito da queste equazioni che  $E_r$  ed  $H_r$  non possono propagarsi; le (3.6.1) e (3.6.5), infatti, stabiliscono che esse sono costanti nel tempo, le (3.6.4) e (3.6.8) che possono variare in funzione di  $r$  solo con legge iperbolica. Noi pertanto, essendo interessati solo alle componenti che si propagano, assumiamo  $E_r$  ed  $H_r$  nulle.

Consideriamo ora le equazioni (3.1.2) e (3.1.4) ed esprimiamole mediante le componenti cilindriche di  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$ . Tenendo conto che il laplaciano del campo magnetico è (vedi equazioni (9.3.68) e (9.3.66)):

$$\begin{aligned} \Delta_2 \vec{H} = \Delta_2 H_r \vec{i}_r + \Delta_2 H_\varphi \vec{i}_\varphi + \Delta_2 H_z \vec{i}_z - \frac{1}{r^2} (H_r \vec{i}_r + H_\varphi \vec{i}_\varphi) - \\ - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_\varphi \vec{i}_r - H_r \vec{i}_\varphi), \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

dove  $\vec{i}_r$ ,  $\vec{i}_\varphi$ ,  $\vec{i}_z$  sono i versori delle linee coordinate, e che vale per il campo elettrico una relazione analoga, le (3.1.2), (3.1.4), diventano:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} H_\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.6.10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0, \quad (3.6.11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} E_\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.6.12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0, \quad (3.6.13)$$

in cui ovviamente è stata considerata solo la dipendenza dalla coordinata  $r$ . Le (3.6.10), (3.6.12) a differenza delle (3.6.11) e (3.6.13) non sono della forma (3.3.1) e quindi la loro integrazione costituisce un problema non ancora risolto; tuttavia ricavando dalle (3.6.11), (3.6.13)  $H_z$  ed  $E_z$  possiamo sostituirne le espressioni nelle equazioni del campo ottenendone  $E_\varphi$  ed  $H_\varphi$ . Ne segue che l'integrazione delle (3.6.10) e (3.6.12) è superflua.

Ponendo nella (3.4.24)  $n=0$ ,  $h=0$  essa fornisce gli integrali, indipendenti da  $\varphi$  e  $z$ , delle (3.6.11) e (3.6.13); possiamo inoltre scegliere le costanti che intervengono nella (3.4.24) in modo che:

$$H_z = 0, \quad (3.6.14)$$

e:

$$E_z = E_z^{(0)} H_0^{(1)} \left( r \frac{\omega}{c} \right) e^{-i\omega t}. \quad (3.6.15)$$

Ciò, evidentemente, equivale a supporre il campo magnetico polarizzato lungo la direzione del vettore  $\vec{i}_\varphi$ . Sostituendo la (3.6.14) nelle (3.6.2) e (3.6.7), risulta che la componente  $E_\varphi$  è costante rispetto al tempo ed al posto; di conseguenza, d'accordo con la (3.1.6), la parte del campo elettrico che si propaga si riduce alla componente



$E_z$ . Calcoliamo ora  $H_\varphi$ ; sostituiamo la (3.6.15) nella (3.6.6) e tenendo conto della relazione:

$$\frac{dH_0^{(1)}(\xi)}{d\xi} = -H_1^{(1)}(\xi), \quad (3.6.16)$$

si ha:

$$-E_z^{(0)} \omega H_1^{(1)}\left(r \frac{\omega}{c}\right) e^{-i\omega x} = \frac{\partial H_\varphi}{\partial t}, \quad (3.6.17)$$

da cui integrando si ottiene:

$$H_\varphi = -E_z^{(0)} H_1^{(1)}\left(r \frac{\omega}{c}\right) i e^{-i\omega x} = E_z^{(0)} H_1^{(1)}\left(r \frac{\omega}{c}\right) e^{-i\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (3.6.18)$$

È facile constatare che questa espressione di  $H_\varphi$  verifica anche la (3.6.3); il primo termine, infatti, sostituendovi la (3.6.18) diventa:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = -E_z^{(0)} i e^{-i\omega x} \cdot \left[ \frac{H_1^{(1)}\left(r \frac{\omega}{c}\right)}{r} + \frac{\partial H_1^{(1)}\left(r \frac{\omega}{c}\right)}{\partial r} \right]. \quad (3.6.19)$$

Utilizzando la seguente formola di ricorrenza tra le funzioni  $H_0^{(1)}$  e  $H_1^{(1)}$ :

$$\xi \frac{dH_1^{(1)}(\xi)}{d\xi} + H_1^{(1)}(\xi) = \xi H_0^{(1)}(\xi) \quad (3.6.20)$$

abbiamo dalla (3.6.19):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = \frac{1}{c} E_z^{(0)} H_0^{(1)}\left(r \frac{\omega}{c}\right) e^{-i\omega x} (-i\omega) \quad (3.6.21)$$

ossia, ricordando la (3.6.15):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (3.6.22)$$

che è appunto quanto si voleva stabilire.

Scegliendo diversamente le costanti nella (3.4.24) possiamo ottenere, in luogo delle equazioni (3.6.15) e (3.6.18), una seconda soluzione in cui le direzioni del campo elettrico e magnetico sono scambiate, cioè il campo elettrico è diretto lungo  $\vec{i}_\varphi$  e quello magnetico lungo  $\vec{i}_z$ . La combinazione di queste due soluzioni ci permetterebbe di rappresentare il più generale stato di polarizzazione; la soluzione particolare da noi considerata, tuttavia, è sufficiente per chiarire le modalità della propagazione con simmetria cilindrica. Essa inoltre è interessante perché corrisponde al caso in cui il campo magnetico (vedi fig. (3.6.1)) è generato da una corrente non stazionaria che percorre un filo rettilineo illimitato disposto lungo l'asse  $z$ . Studiamo, pertanto, le proprietà del campo elettromagnetico rappresentato dalle (3.6.15) e (3.6.18). Per far

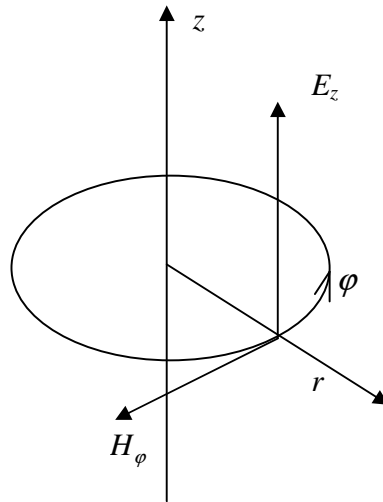


Fig. (3.6.1)

questo supponiamo che si abbia:

$$r \gg \frac{c}{\omega}, \quad (3.6.23)$$

ossia che la distanza dall'asse cilindrico sia grande rispetto al tratto percorso da un'onda elettromagnetica che si propaghi per il tempo  $1/\omega$ . Mediante queste ipotesi e ricordando la (3.4.22), le (3.6.15) e (3.6.18) diventano:

$$E_z \simeq E_z^{(0)} \sqrt{\frac{2c}{\pi\omega r}} e^{i\left[\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)-\frac{\pi}{4}\right]} \quad (3.6.24)$$

$$H_\varphi \simeq -E_z^{(0)} \sqrt{\frac{2c}{\pi\omega r}} e^{i\left[\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)-\frac{\pi}{4}\right]} \quad (3.6.25)$$

Come già si è visto nel paragrafo 3.3, da queste soluzioni complesse possiamo ottenere quelle reali, fisicamente significative, prendendo la parte reale o il coefficiente dell'unità immaginaria; possiamo perciò scrivere:

$$E_z \simeq E_z^{(0)} \sqrt{\frac{2c}{\pi\omega r}} \sin\left[\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)-\frac{\pi}{4}\right] \quad (3.6.26)$$

$$H_\varphi \simeq -E_z^{(0)} \sqrt{\frac{2c}{\pi\omega r}} \sin\left[\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)-\frac{\pi}{4}\right]. \quad (3.6.27)$$

Queste equazioni stabiliscono che il campo elettromagnetico si propaga con velocità  $c$  sotto forma di onde la cui ampiezza decresce al crescere della distanza dall'asse  $z$ .

Studiamo ora le proprietà energetiche della propagazione a simmetria cilindrica; il vettore di Poynting (equazione (2.3.9)) associato alle espressioni asintotiche (3.6.26) e (3.6.27) del campo è:

$$\vec{S} = \frac{c^2}{2\pi^2\omega} E_z^{(0)2} \frac{1}{r} \sin^2\left[\omega\left(\frac{r}{c}-t\right)-\frac{\pi}{4}\right] \vec{i}_r, \quad (3.6.28)$$

mentre la corrispondente intensità di radiazione vale pertanto:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| \cdot dt = \frac{c^2 E_z^{(0)2}}{4\pi^2 \omega r}. \quad (3.6.29)$$

Risulta così che l'energia elettromagnetica si propaga in direzione radiale con densità di flusso inversamente proporzionale a  $r$ . Si vede subito, inoltre, che il flusso di energia è costante attraverso a tutte le superfici cilindriche con asse  $z$  e altezza  $h$  assegnata; si ha infatti:

$$\int_S \mathcal{I} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^h \mathcal{I} r d\varphi dz = \frac{c^2 h}{2\pi\omega} E_z^{(0)2}, \quad (3.6.29)$$

che è appunto una quantità indipendente da  $r$ . Questa equazione può essere interpretata supponendo che la sorgente di energia sia uniformemente distribuita lungo l'asse  $z$ ; è ovvio, in tal modo, che il flusso energetico sia costante attraverso a tutte le superfici  $S$ .

### 3.7 Onde quasi sinusoidali – Matrice di coerenza

Nei paragrafi 3.2 e 3.3 abbiamo considerato la propagazione di onde sinusoidali studiandone la polarizzazione e le proprietà energetiche. Vogliamo ora stabilire cosa accade quando un'onda piana si allontana di poco dalla forma sinusoidale ed è, di conseguenza, rappresentabile in forma complessa mediante le equazioni:

$$E_y = E_{y0}(x-ct)e^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\alpha_y(x-ct)\right]}, \quad (3.7.1)$$

$$E_z = E_{z0}(x-ct)e^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\alpha_z(x-ct)\right]}, \quad (3.7.2)$$

dove  $E_{y0}$ ,  $E_{z0}$ ,  $\alpha_y$  ed  $\alpha_z$  sono delle funzioni di  $x-ct$  a variazione non monotona ed abbastanza lenta da rimanere praticamente costanti nel tempo  $\frac{\lambda}{c}$ . Chiaramente se queste funzioni fossero del tutto costanti le equazioni (3.7.1) e (3.7.2) coinciderebbero con le (3.2.17), (3.2.18) e la propagazione sarebbe quella di un'onda a polarizzazione ellittica. Viceversa la lenta variazione delle ampiezze e delle fasi fa sì che l'orientazione e la lunghezza dei semiassi dell'ellisse fluttuino nel tempo, per cui il fenomeno di propagazione assume caratteristiche nuove. È da notare, a questo riguardo, che i parametri  $\lambda$  ed  $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda}$  non rappresentano nel caso attuale lunghezza d'onda e frequenza angolare, dato che queste grandezze non possono essere definite a rigore per un'onda non periodica. Nei paragrafi 3.9. e 3.10 dimostreremo, mediante la teoria delle serie di Fourier, che qualunque forma d'onda, e quindi anche quella data dalle (3.7.1), (3.7.2), equivale ad una sovrapposizione di onde sinusoidali. Di conseguenza le (3.7.1), (3.7.2), che rappresentano delle onde quasi sinusoidali, equivalgono ad una sovrapposizione in cui intervengono solo onde di frequenza molto prossima a  $\omega_0$ . Si può dire, in altre parole, che le equazioni (3.7.1) e (3.7.2) corrispondono ad una radiazione elettromagnetica quasi monocromatica.

Ovviamente le variazioni delle ampiezze e delle fasi, nelle equazioni (3.7.1) e (3.7.2), dipendono dal comportamento della sorgente da cui provengono le onde. Di conseguenza si possono avere situazioni molto differenti a seconda del valore della lunghezza d'onda, ossia del tipo di radiazione (vedi paragrafo 3.1). Nel caso delle radioonde si può pensare ad una sorgente costituita da due dipoli indipendenti paralleli agli assi  $y$  e  $z$  i cui momenti oscillano con lo stesso periodo ma con ampiezze e fasi

non rigorosamente costanti. Le proprietà di una simile sorgente risulteranno chiare in base al contenuto del paragrafo 3.12 in cui verrà discussa la produzione di onde elettromagnetiche da parte di un dipolo oscillante. Per le radiazioni luminose la situazione è molto più complicata. Occorre tenere conto, innanzitutto, che la sorgente, in questo caso, consiste di un insieme di atomi eccitati, come ad esempio quelli di un gas riscaldato ad alta temperatura. Pertanto non esiste propriamente un'unica sorgente, ma bensì un insieme di sorgenti costituite dai singoli atomi. Ciascuno di questi irradia in modo discontinuo sotto forma di fotoni (vedi paragrafo 1.7), ossia di singoli impulsi di radiazione emessi in modo casuale. È pertanto comprensibile che, nella onda elettromagnetica risultante dalla somma di tutti i processi elementari di emissione, ampiezza e fase fluttuino.

Ciò premesso, osserviamo che la situazione nel piano  $x=0$  all'istante  $t$  è identica a quella nel piano di ascissa  $x$ , differente da zero, all'istante  $t+x/c$ . È quindi sufficiente studiare quanto avviene nel piano passante per l'origine. Poniamo pertanto:

$$\left. \begin{aligned} E_{0y}(-ct) &= a_y(t), \\ E_{0z}(-ct) &= a_z(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.7.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_y(-ct) &= \delta_y(t), \\ \alpha_z(-ct) &= \delta_z(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.7.4)$$

In questo modo le (3.7.1), (3.7.2), diventano:

$$E_y = a_y(t) e^{-i[\omega_0 t - \delta_y(t)]}, \quad (3.7.5)$$

$$E_z = a_z(t) e^{-i[\omega_0 t - \delta_z(t)]}. \quad (3.7.6)$$

Consideriamo ora il seguente problema: introdotto nella componente  $E_z$  uno sfasamento  $\varepsilon$  rispetto alla componente  $E_y$ , calcolare l'intensità della radiazione associata alla componente del campo che oscilla lungo una direzione facente un angolo  $\vartheta$  con

l'asse delle  $y$  (vedi fig. (3.7.1)). Indicando con  $E_{\vartheta}$  il modulo di questa componente, si ha per definizione<sup>(§§§§§§§§)</sup>:

$$E_{\vartheta} = E_y \cos \vartheta + E_z e^{i\varepsilon} \sin \vartheta. \quad (3.7.7)$$

Per esprimere l'intensità  $\mathcal{J}(\vartheta, \varepsilon)$  dell'onda utilizziamo la relazione (3.3.18) in cui,

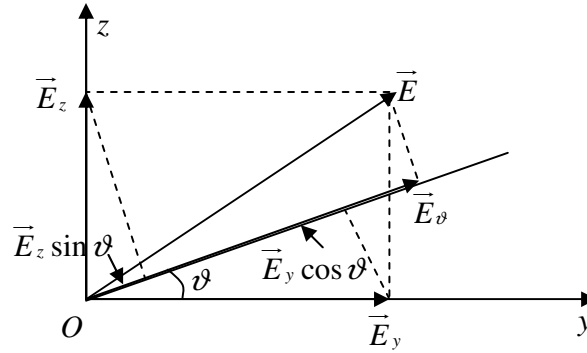


Fig. (3.7.1)

però, a causa della non esatta periodicità di  $E_{\vartheta}$ , il valore medio è preso su un intervallo di tempo infinito, cioè:

$$\mathcal{J}(\vartheta, \varepsilon) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{c}{8\pi t_0} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{+\frac{t_0}{2}} |E_{\vartheta}|^2 dt. \quad (3.7.8)$$

Si ha, mediante le (3.7.5), (3.7.6) e (3.7.7):

$$\mathcal{J}(\vartheta, \varepsilon) = \frac{c}{8\pi} \left[ J_{11} \cos^2 \vartheta + J_{22} \sin^2 \vartheta + \text{Re}(J_{12} e^{-i\varepsilon}) \sin 2\vartheta \right] \quad (3.7.9)$$

dove<sup>(§§§§§§§§)</sup>:

---


$$(\text{§§§§§§§§}) \quad E_{\vartheta} = E \cos \left( \arccos \frac{E_y}{E} - \vartheta \right) = E \left( \frac{E_y}{E} \cos \vartheta + \frac{E_z e^{i\varepsilon}}{E} \sin \vartheta \right) = \dots [\text{n.d.c.}].$$

$$\left. \begin{aligned} J_{11} &= \langle E_y E_y^* \rangle = \langle a_y^2(t) \rangle, \\ J_{22} &= \langle E_z E_z^* \rangle = \langle a_z^2(t) \rangle, \\ J_{12} &= J_{21}^* = \langle E_y E_z^* \rangle = \langle a_y(t) a_z(t) e^{i[\delta_y(t) - \delta_z(t)]} \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.10)$$

Sono gli elementi della matrice hermitiana<sup>(††††††††††)</sup>, detta matrice di coerenza:

$$\|J\| = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix}. \quad (3.7.11)$$

Una delle sue principali proprietà riguarda il valore del determinante. Si può infatti dimostrare che esso è una quantità definita positiva, cioè:

$$\text{Det}\|J\| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \geq 0. \quad (3.7.12)$$

Infatti, utilizzando la disuguaglianza di Schwartz<sup>(††††††††††)</sup>, si può scrivere:

$$\int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} |a_y(t) e^{i\delta_y(t)}|^2 dt \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} |a_z(t) e^{i\delta_z(t)}|^2 dt \geq \left| \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} a_y(t) e^{i\delta_y(t)} a_z(t) e^{-i\delta_z(t)} dt \right|^2, \quad (3.7.13)$$

(\*\*\*\*\*) In queste equazioni le parentesi  $\langle \rangle$  indicano l'operazione di valore medio definita dalla (3.7.8).

(††††††††††) Una matrice complessa  $\|M_{ij}\|$  è detta hermitiana quando i suoi elementi sono legati dalle relazioni:

$$M_{ij} = M_{ji}^*$$

le quali impongono agli elementi simmetrici rispetto alla diagonale di essere tra loro coniugati e a quelli ad essa appartenenti di essere reali.

(††††††††††) La disuguaglianza di Schwartz è espressa dalla relazione:

$$\int_a^b f(x) g^*(x) dx \int_a^b f^*(x) g(x) dx \leq \int_a^b f(x) f^*(x) dx \int_a^b g(x) g^*(x) dx,$$

dove  $f$  e  $g$  sono due funzioni arbitrarie integrabili nell'intervallo  $[a, b]$ . Vedi ad esempio: H. Margenau, G.M. Murphy, The mathematics of physics and chemistry, pag. 131. D. van Nostrand Co. New York 1947-



da cui, dividendo per  $t_0$ , passando al limite per  $t_0$  tendente ad infinito e confrontando con la (3.7.10), si trova la (3.7.12). Tenendo conto che gli elementi  $J_{11}$ ,  $J_{22}$  per definizione sono reali e positivi ed introducendo la quantità:

$$\mu_{12} = \frac{J_{12}}{\sqrt{J_{11}J_{22}}} \quad (3.7.14)$$

dalla (3.7.12) si ottiene la disuguaglianza:

$$|\mu_{12}| \leq 1, \quad (3.7.15)$$

che è ad essa equivalente. Un'altra importante proprietà della matrice (3.7.11) riguarda la traccia cioè la somma dei termini diagonali:

$$Tr \|J\| = J_{11} + J_{22}; \quad (3.7.16)$$

essa rappresenta, a meno di una costante, l'intensità totale della radiazione elettromagnetica. Infatti, procedendo come per la (3.7.8) e utilizzando le (3.7.5), (3.7.6) e la (3.7.10), si ottiene:

$$\mathcal{J} = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{c}{8\pi t_0} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{+\frac{t_0}{2}} (|E_y|^2 + |E_z|^2) dt = \frac{c}{8\pi} Tr \|J\|. \quad (3.7.17)$$

Per chiarire il significato delle equazioni testè ottenute, è utile, innanzitutto, calcolare la matrice  $\|J\|$  nel caso in cui i parametri  $a_y$ ,  $a_z$  e  $\delta_y$ ,  $\delta_z$  sono costanti e quindi, ricordando quanto stabilito nel paragrafo 3.2, l'onda descritta dalle (3.7.5), (3.7.6) è polarizzata ellitticamente. In questo caso si ha:

$$\|J\| = \begin{vmatrix} a_y^2 & a_y a_z e^{i(\delta_y - \delta_z)} \\ a_z a_y e^{-i(\delta_y - \delta_z)} & a_z^2 \end{vmatrix} \quad (3.7.18)$$

e valgono le relazioni:

$$Det \|J\| = 0 \quad (3.7.19)$$

e:

$$\mu_{12} = e^{i(\delta_y - \delta_z)}, \quad (3.7.20)$$

da cui:

$$|\mu_{12}| = 1, \quad (3.7.21)$$

che equivale alla (3.7.19). La matrice di coerenza per onde a polarizzazione circolare e lineare può essere ottenuta dalla (3.7.18) specializzando i valori dei parametri  $a_y$ ,  $a_z$  e  $\delta_y$ ,  $\delta_z$  mediante i risultati del paragrafo (3.2). Ad esempio, per un'onda a polarizzazione circolare destrorsa, essendo  $a_y = a_z = a$  e  $\delta_y - \delta_z = \frac{\pi}{2}$ , si ha:

$$\|J\| = a^2 \begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.7.22)$$

Nel caso invece in cui i parametri varino nel tempo, può accadere che:

$$|\mu_{12}| = 0 \quad (3.7.23)$$

e:

$$J_{11} = J_{22}. \quad (3.7.24)$$

Se si suppone assegnata l'intensità totale di radiazione e quindi la somma  $J_{11} + J_{22}$  il determinante di  $\|J\|$ , che per le (3.7.14), (3.7.23) e (3.7.24) si riduce a  $J_{11}^2$ , assume, in questo caso, il suo massimo valore. Questa situazione, per quanto riguarda i valori di  $|\mu_{12}|$  e  $\text{Det}\|J\|$ , può pertanto essere considerata opposta a quella dell'onda polarizzata. In queste condizioni, d'altra parte, come risulta dalla (3.7.9), l'intensità  $\mathcal{J}(\vartheta, \varepsilon)$  è indipendente sia da  $\vartheta$  che da  $\varepsilon$ . In altre parole: le oscillazioni elettriche sugli assi  $y$  e  $z$  sono completamente scorrelate tra di loro, per cui, qualunque sia  $\varepsilon$ , l'intensità di radiazione  $\mathcal{J}(\vartheta, \varepsilon)$  è indipendente dalla giacitura del piano di vibrazione. Né è possibile riscontrare in essa, qualunque sia  $\vartheta$ , alcun effetto dello sfasamento  $\varepsilon$ . La quantità  $|\mu_{12}|$  che in questo caso è nulla, riceve pertanto il nome di grado di coerenza; un'onda che soddisfi a queste proprietà viene detta naturale.

Evidentemente la radiazione avrà, in generale, caratteristiche intermedie tra le due estreme ora considerate. Vogliamo dimostrare che la matrice  $\|J\|$ , corrispondentemente, può essere decomposta in due parti di cui una relativa ad un'onda polarizzata e l'altra ad un'onda naturale. Per far ciò è necessario dimostrare che è possibile determinare cinque parametri  $m, p, q, r, r^*$  tali che:

$$\begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & r \\ r^* & q \end{vmatrix} \quad (3.7.25)$$

e:

$$\text{Det} \begin{vmatrix} p & r \\ r^* & q \end{vmatrix} = 0. \quad (3.7.26)$$

In questo modo, infatti, la matrice:

$$\|J^{(1)}\| = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \quad (3.7.27)$$

soddisfa alle equazioni (3.7.23) e (3.7.24) e rappresenta, pertanto, un'onda naturale, la matrice:

$$\|J^{(2)}\| = \begin{vmatrix} p & r \\ r^* & q \end{vmatrix} \quad (3.7.28)$$

soddisfa, per ipotesi, alla (3.7.19) e corrisponde ad un'onda polarizzata. Occorre pertanto risolvere il sistema:

$$m + p = J_{11} \quad (3.7.29)$$

$$r = J_{12} \quad (3.7.30)$$

$$r^* = J_{21} \quad (3.7.31)$$

$$m + q = J_{22} \quad (3.7.32)$$

$$pq - rr^* = 0 \quad (3.7.33)$$

Manifestamente, essendo  $\|J\|$  una matrice hermitiana, le (3.7.30), (3.7.31) coincidono e ci forniscono il valore di  $r$  ed  $r^*$ ; sostituendoli nella (3.7.33) assieme ai valori di  $p$  e  $q$ , ottenuti dalle (3.7.29), (3.7.32) si ha:

$$(J_{11} - m)(J_{22} - m) - |J_{12}|^2 = 0. \quad (3.7.34)$$

Risolvendo si ottiene:

$$m = \frac{1}{2} \left[ \text{Tr} \|J\| \pm \sqrt{(\text{Tr} \|J\|)^2 - 4 \text{Det} \|J\|} \right]; \quad (3.7.35)$$

sostituendo il valore di  $m$  così ottenuto nelle (3.7.29) e (3.7.32), si ha:

$$p = \frac{1}{2} \left[ J_{11} - J_{22} \mp \sqrt{(\text{Tr} \|J\|)^2 - 4 \text{Det} \|J\|} \right], \quad (3.7.36)$$

$$q = \frac{1}{2} \left[ J_{22} - J_{11} \mp \sqrt{(\text{Tr} \|J\|)^2 - 4 \text{Det} \|J\|} \right]. \quad (3.7.37)$$

Tenendo conto che manifestamente vale la disuguaglianza:

$$(\text{Tr} \|J\|)^2 - 4 \text{Det} \|J\| \equiv (J_{11} - J_{22})^2 + 4 |J_{12}|^2 \geq (J_{11} - J_{22})^2 \quad (3.7.38)$$

risulta subito che occorre scegliere nella (3.7.36), e quindi anche nelle (3.7.35), (3.7.37), il segno inferiore. In questo modo abbiamo univocamente:

$$\|J^{(1)}\| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \text{Tr} \|J\| - \sqrt{(\text{Tr} \|J\|)^2 - 4 \text{Det} \|J\|} & 0 \\ 0 & \text{Tr} \|J\| - \sqrt{(\text{Tr} \|J\|)^2 - 4 \text{Det} \|J\|} \end{vmatrix} \quad (3.7.39)$$

$$\|J^{(2)}\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} \left[ J_{11} - J_{22} \mp \sqrt{(Tr\|J\|)^2 - 4Det\|J\|} \right] & J_{12} \\ J_{21} & \frac{1}{2} \left[ J_{22} - J_{11} \mp \sqrt{(Tr\|J\|)^2 - 4Det\|J\|} \right] \end{array} \right\|. \quad (3.7.40)$$

Che effettivamente la decomposizione della matrice  $\|J\|$  corrisponda ad una decomposizione dell'onda in due distinte componenti, risulta dalle seguenti considerazioni. Data un'onda costituita dalla sovrapposizione di due onde indipendenti, cioè:

$$E_y = E_y^{(1)} + E_y^{(2)}, \quad (3.7.41)$$

$$E_z = E_z^{(1)} + E_z^{(2)}, \quad (3.7.42)$$

si ha in generale:

$$J_{ik} = \langle E_i E_k^* \rangle = \langle E_i^{(1)} E_k^{(1)*} \rangle + \langle E_i^{(2)} E_k^{(2)*} \rangle + \langle E_i^{(1)} E_k^{(2)*} \rangle + \langle E_i^{(2)} E_k^{(1)*} \rangle, \quad (3.7.43)$$

dove, a secondo membro, gli indici  $i, k$ , servono a distinguere due qualunque delle componenti del campo. Essendo le due onde indipendenti, le quantità  $\langle E_i^{(1)} E_k^{(2)*} \rangle$  e  $\langle E_i^{(2)} E_k^{(1)*} \rangle$  che rappresentano la correlazione tra le due onde sono nulle, sicché:

$$J_{ik} = J_{ik}^{(1)} + J_{ik}^{(2)}. \quad (3.7.44)$$

Ciò prova che alla somma di due onde tra loro indipendenti è associata una matrice di coerenza pari alla somma delle matrici corrispondenti a ciascuna delle due onde.

Possiamo ora confrontare l'intensità della componente polarizzata con l'intensità totale. Al mutuo rapporto di queste quantità, cioè al rapporto:

$$P = \frac{Tr\|J^{(2)}\|}{Tr\|J\|}, \quad (3.7.45)$$

si dà il nome di grado di polarizzazione; ovviamente esso è un numero compreso tra zero e uno. Mediante la (3.7.40) si ottiene immediatamente:

$$P = \sqrt{1 - 4 \frac{\text{Det} \|J\|}{(\text{Tr} \|J\|)^2}}. \quad (3.7.46)$$

Se l'onda elettromagnetica è completamente incoerente, cioè se  $\mu_{12}$  e quindi  $J_{12}$  sono nulli, la (3.7.46) si riduce a:

$$P = \frac{J_{11} - J_{22}}{J_{11} + J_{22}}; \quad (3.7.47)$$

ossia, indicando con  $\mathcal{J}_x$  ed  $\mathcal{J}_y$  le intensità associate alle due componenti del campo:

$$P = \frac{\mathcal{J}_x - \mathcal{J}_y}{\mathcal{J}_x + \mathcal{J}_y}. \quad (3.7.48)$$

Avremo, in seguito, occasione di utilizzare queste formole.

### 3.8 I parametri di Stokes

La precedente descrizione delle proprietà di coerenza e di polarizzazione di un'onda elettromagnetica può venire sostituita da un'altra equivalente, suscettibile di una semplice interpretazione geometrica. Per ottenerla introduciamo quattro parametri  $s_0, s_1, s_2, s_3$ , detti parametri di Stokes, legati alla matrice  $\|J\|$  dalle relazioni:

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= J_{11} + J_{22} \\ s_1 &= J_{11} - J_{22} \\ s_2 &= J_{12} + J_{21} \\ s_3 &= i(J_{21} - J_{12}) \end{aligned} \right\}. \quad (3.8.1)$$

Da esse, risolvendo rispetto agli elementi di  $\|J\|$  si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} J_{11} &= \frac{1}{2}(s_0 + s_1) \\ J_{22} &= \frac{1}{2}(s_0 - s_1) \\ J_{12} &= \frac{1}{2}(s_2 + is_3) \\ J_{21} &= \frac{1}{2}(s_2 - is_3) \end{aligned} \right\}. \quad (3.8.2)$$

Introducendo le matrici<sup>(§§§§§§§§§§)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \|\sigma_0\| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, & \|\sigma_1\| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \\ \|\sigma_2\| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, & \|\sigma_3\| &= \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (3.8.3)$$

---

(§§§§§§§§§§) Le matrici (3.8.3) coincidono, salvo la differente numerazione, con le matrici introdotte da Pauli per rappresentare il momento angolare degli elettroni.

le (3.8.2) possono venire espresse più sinteticamente nella forma:

$$\|J\| = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 s_k \|\sigma_k\|. \quad (3.8.4)$$

Mediante queste relazioni le proprietà della matrice  $\|J\|$  possono essere trascritte mediante i parametri  $s_k$ . Ricordando la (3.7.17) e la prima delle (3.8.1), appare subito che l'intensità di radiazione dipende da  $s_0$  secondo la relazione:

$$\mathcal{I} = \frac{c}{8\pi} s_0. \quad (3.8.5)$$

Sostituendo le (3.8.2) nella (3.7.12) si ha:

$$\begin{aligned} \text{Det}\|J\| &= \frac{1}{4} (s_0 + s_1)(s_0 - s_1) - \frac{1}{4} (s_2 + is_3)(s_2 - is_3) = \\ &= \frac{1}{4} [s_0^2 - (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)] \geq 0, \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

cioè:

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \leq s_0^2, \quad (3.8.7)$$

in cui, come risulta dalla (3.7.19), il segno di eguaglianza corrisponde ad un'onda a polarizzazione ellittica. Il grado di coerenza  $|\mu_{12}|$  analogamente diventa:

$$|\mu_{12}| = \sqrt{\frac{s_2^2 + s_3^2}{s_0^2 - s_1^2}}. \quad (3.8.8)$$

Inoltre, mediante le (3.7.46) e (3.8.1), (3.8.6), il grado di polarizzazione può essere espresso nella forma:

$$P = \sqrt{1 - \frac{s_0^2 - (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)}{s_0^2}} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0}; \quad (3.8.9)$$



da questa relazione, tenendo conto della (3.8.7), è manifesto che  $P$  è sempre compreso tra zero e uno.

Tenendo conto che le relazioni tra i parametri di Stokes e gli elementi della matrice  $\|J\|$  sono lineari, si deduce che alla decomposizione di  $\|J\|$  in  $\|J^{(1)}\|, \|J^{(2)}\|$  corrisponde un'analogha decomposizione di questi parametri; avremo pertanto:

$$s_k = s_k^{(1)} + s_k^{(2)}, \quad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (3.8.10)$$

in cui  $s_k^{(1)}$  ed  $s_k^{(2)}$  sono associati mediante le relazioni (3.8.1) a  $\|J^{(1)}\|$  e  $\|J^{(2)}\|$ . Utilizzando le (3.7.39), (3.7.40) e le (3.8.2) i parametri parziali  $s_k^{(1)}, s_k^{(2)}$  possono essere espressi in funzione di quelli totali. Si ha infatti:

$$s_0^{(1)} = 2J_{11}^{(1)} = s_0 - \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \quad (3.8.11)$$

e:

$$s_k^{(1)} = 0, \quad \text{per } k = 0, 1, 2, 3; \quad (3.8.12)$$

inoltre:

$$s_0^{(2)} = J_{11}^{(2)} + J_{22}^{(2)} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}, \quad (3.8.13)$$

$$s_1^{(2)} = J_{11}^{(2)} - J_{22}^{(2)} = J_{11} - J_{22} = s_1, \quad (3.8.14)$$

e:

$$s_k^{(2)} = s_k, \quad \text{per } k = 2, 3. \quad (3.8.15)$$

Ovviamente i parametri  $s_k^{(1)}$  ed  $s_k^{(2)}$  rappresentano rispettivamente la parte naturale e quella a polarizzazione ellittica dell'onda elettromagnetica. Per questi ultimi vale la relazione:

$$\left(s_1^{(2)}\right)^2 + \left(s_2^{(2)}\right)^2 + \left(s_3^{(2)}\right)^2 = \left(s_0^{(2)}\right)^2. \quad (3.8.16)$$

Ciò posto esprimiamo i parametri  $s_k^{(2)}$  mediante le ampiezze costanti  $E_{y0}^{(2)}$ ,  $E_{z0}^{(2)}$  delle componenti a polarizzazione ellittica del campo elettrico. Utilizzando le relazioni (3.8.1) e ricordando la definizione (3.7.10) della matrice di coerenza, si ha:

$$s_0^{(2)} = \langle E_y^{(2)} E_y^{(2)*} \rangle + \langle E_z^{(2)} E_z^{(2)*} \rangle = E_{y0}^{(2)2} + E_{z0}^{(2)2} \quad (3.8.17)$$

$$s_1^{(2)} = \langle E_y^{(2)} E_y^{(2)*} \rangle - \langle E_z^{(2)} E_z^{(2)*} \rangle = E_{y0}^{(2)2} - E_{z0}^{(2)2} \quad (3.8.18)$$

$$s_2^{(2)} = \langle E_y^{(2)} E_z^{(2)*} \rangle + \langle E_z^{(2)} E_y^{(2)*} \rangle = 2E_{y0}^{(2)} E_{z0}^{(2)} \cos \delta^{(2)} \quad (3.8.19)$$

$$s_3^{(2)} = i \left( \langle E_z^{(2)} E_y^{(2)*} \rangle - \langle E_y^{(2)} E_z^{(2)*} \rangle \right) = 2E_{y0}^{(2)} E_{z0}^{(2)} \sin \delta^{(2)} \quad (3.8.20)$$

dove  $\delta^{(2)}$  è la differenza tra le fasi costanti  $\alpha_z^{(2)}$  e  $\alpha_y^{(2)}$  dell'onda polarizzata ellitticamente. Tenendo conto che al campo di componenti  $E_y^{(2)}$ ,  $E_z^{(2)}$  sono applicabili i risultati del paragrafo 3.2, possiamo scrivere, usando l'equazione (3.2.39):

$$\frac{s_3^{(2)}}{s_0^{(2)}} = \frac{2E_{y0}^{(2)} E_{z0}^{(2)} \sin \delta^{(2)}}{E_{y0}^{(2)2} + E_{z0}^{(2)2}} = \frac{2tg\alpha \sin \delta^{(2)}}{tg^2\alpha + 1} \quad (3.8.21)$$

e cioè, mediante la (3.2.40):

$$s_3^{(2)} = s_0^{(2)} \sin 2\chi. \quad (3.8.22)$$

Analogamente la (3.2.45) conduce alla relazione:

$$\frac{s_2^{(2)}}{s_1^{(2)}} = \frac{2E_{y0}^{(2)} E_{z0}^{(2)} \cos \delta^{(2)}}{E_{y0}^{(2)2} - E_{z0}^{(2)2}} = tg 2\psi. \quad (3.8.23)$$

Eliminando  $s_2^{(2)}$  ed  $s_3^{(2)}$  dalla (3.8.16), si ha:

$$\left( s_1^{(2)} \right)^2 + \left( s_1^{(2)} \right)^2 tg^2 2\psi + \left( s_0^{(2)} \right)^2 \sin^2 2\chi = \left( s_0^{(2)} \right)^2, \quad (3.8.24)$$

da cui:

$$s_1^{(2)} = s_0^{(2)} \cos 2\chi \cos 2\psi. \quad (3.8.25)$$

Questo risultato sostituito nella (3.8.23) dà:

$$s_2^{(2)} = s_0^{(2)} \cos 2\chi \sin 2\psi. \quad (3.8.26)$$

L'equazione (3.8.16) e le (3.8.22), (3.8.25) e (3.8.26) possono essere interpretate geometricamente nel seguente modo. Si abbia una terna di assi cartesiani ortogonali  $s_1^{(2)}$ ,  $s_2^{(2)}$ ,  $s_3^{(2)}$  e si consideri la sfera di raggio  $s_0^{(2)}$  definita dall'equazione (3.8.16) (vedi fig. (3.8.1)). A questa sfera, che viene detta sfera di Poincaré<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>, corri-

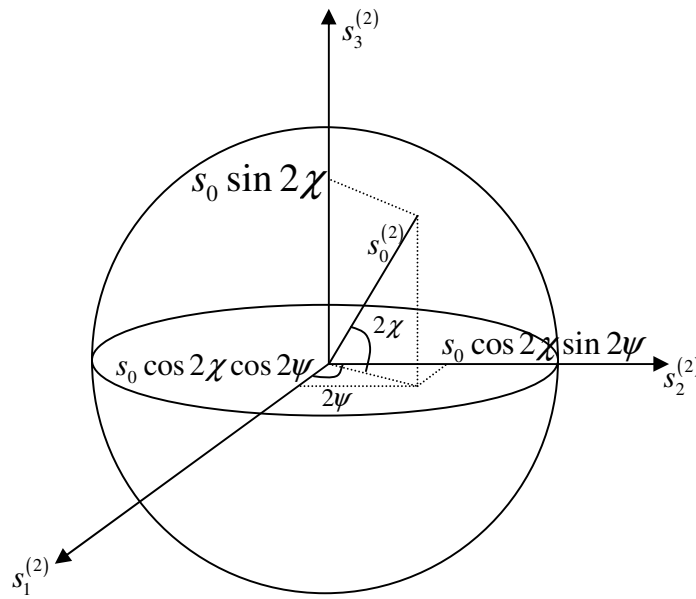


Fig. (3.8.1)

sponde

un'onda di intensità assegnata il cui stato di polarizzazione è determinato dalla posizione che su di essa occupa il punto di coordinate  $s_0^{(2)} \cos 2\chi \cos 2\psi$ ,

---

(\*\*\*\*\*) H. Poincaré "Teorie mathematique de la lumiere" – Vol. 2 - Cap. 12 – Paris 1892 -

$s_0^{(2)} \cos 2\chi \sin 2\psi$ ,  $s_0^{(2)} \sin 2\chi$ ; la latitudine  $2\chi$  e la longitudine  $2\psi$  di questo punto definiscono, infatti (vedi equazioni (3.2.26), (3.2.42), (3.2.43)), il rapporto dei semiassi e la loro orientazione rispetto agli assi  $y$  e  $z$ . In particolare ai punti giacenti sull'equatore della sfera di Poincaré (per i quali  $\chi = 0$ ) corrispondono radiazioni a polarizzazione rettilinea; ai poli della sfera (per i quali  $\chi = \pm \frac{\pi}{4}$ ) corrispondono le due onde a polarizzazione circolare. È questo appunto il significato fisico dei parametri di Stokes, cui si è accennato all'inizio di questo paragrafo.

È da notare infine che le equazioni (3.8.22) e (3.8.23), che determinano gli angoli  $\chi$  e  $\psi$  in funzione dei parametri di Stokes parziali  $s_k^{(2)}$ , possono essere trasformate facendovi intervenire i parametri  $s_k$ . Si ha infatti, ricordando le (3.8.9), (3.8.10) e (3.8.11):

$$\sin 2\chi = \frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}. \quad (3.8.27)$$

e:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{s_2}{s_1}. \quad (3.8.28)$$

Tenendo conto delle (3.8.1) e della (3.8.3) queste relazioni diventano:

$$\sin 2\chi = \frac{2 \operatorname{Im} J_{12}}{\sqrt{\operatorname{Tr} \|J\|^2 - 4 \operatorname{Det} \|J\|}} \quad (3.8.29)$$

e:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2 \operatorname{Re} J_{12}}{J_{11} - J_{22}}. \quad (3.8.30)$$

Le precedenti formole forniscono, in modo esplicito, le caratteristiche della parte polarizzata di un'onda elettromagnetica mediante i parametri  $s_k$  o, in modo equivalente, mediante gli elementi della matrice di coerenza.

### 3.9 Onde di forma arbitraria. Spettro di frequenze

Dopo aver studiato le proprietà delle onde piane sinusoidali e quasi sinusoidali, consideriamo ora la propagazione di onde piane sinusoidali. Precisamente vogliamo dimostrare che qualunque forma d'onda è sempre riconducibile ad una sovrapposizione di onde sinusoidali di differenti frequenze. A ciascuna di queste onde corrisponde un vettore elettrico di una determinata ampiezza a cui è associata una determinata intensità di radiazione. Alla dipendenza dell'ampiezza o dell'intensità dalla frequenza si dà il nome di spettro di frequenze. Il nostro proposito è appunto quello di valutare lo spettro di un'onda rappresentabile con la più generale funzione di  $x - ct$ . Questo problema, ovviamente, non riguarda in modo diretto le proprietà di polarizzazione e di coerenza dell'onda, per cui ci limitiamo a considerare onde polarizzate linearmente. Lo strumento matematico necessario per lo studio che dovremo eseguire sono le serie e gli integrali di Fourier; le loro più importanti proprietà sono riportate nel paragrafo 9.5. Anche nel presente paragrafo, per brevità, i calcoli vengono sviluppati col metodo degli esponenziali complessi.

Supposto il fenomeno periodico ed utilizzando le (9.5.2), (9.5.4) e (9.5.14), la dipendenza dal tempo della componente propagativa del campo elettrico può essere scritta nella forma:

$$E_{\perp}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{-i\omega_m t}. \quad (3.9.1)$$

Introducendo la quantità:

$$A_m = \frac{c_m}{\sqrt{T}} e^{-i\frac{\omega_m}{c}x}, \quad (3.9.2)$$

la (3.9.1) diventa:

$$E_{\perp}(x - ct) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{i\frac{\omega_m}{c}(x - ct)}. \quad (3.9.3)$$

Analogamente dalla (9.5.19) si ha:

$$E_{\perp}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.9.4)$$

per cui, ponendo:

$$A(\omega) = K(\omega) e^{-i\frac{\omega}{c}x}, \quad (3.9.5)$$

si ottiene:

$$E_{\perp}(x-ct) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \cdot e^{i\frac{\omega}{c}(x-ct)} d\omega; \quad (3.9.6)$$

quest'ultima equazione è applicabile anche quando il campo non è periodico. Le equazioni (3.9.3), (3.9.6) esprimono il campo propagativi sotto forma di una serie o di un integrale di Fourier. Le quantità  $A_m$  ed  $A(\omega)$  sono rispettivamente l'ampiezza e la densità di ampiezza (ossia l'ampiezza per intervallo unitario di  $\omega$ ) dello spettro di onde sinusoidali mediante le quali si è rappresentato il campo.

Prima di calcolare le ampiezze  $A_m$  ed  $A(\omega)$  corrispondenti alle varie forme d'onda è importante stabilirne in generale le proprietà energetiche. A questo scopo osserviamo che mediante la (3.9.2) ed il teorema (9.5.31) si ha:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |A_m|^2 = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |E_{\perp}(t)|^2 dt. \quad (3.9.7)$$

Ricordando la definizione (3.3.18) di intensità, la definizione (2.3.9) del vettore  $\vec{S}$  e l'equazione (3.2.7), si ottiene:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |\vec{S}(t)| \cdot dt = \frac{c}{8\pi T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |\vec{E}_{\perp}(t)|^2 \cdot dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{c}{8\pi} |A_m|^2. \quad (3.9.8)$$

Si può porre pertanto:

$$\frac{c}{8\pi} |A_m|^2 = \mathcal{J}_m \quad (3.9.9)$$

col che la (3.9.8) diventa:

$$\mathcal{I} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}_m, \quad (3.9.10)$$

la quale semplicemente stabilisce che l'intensità totale di radiazione è uguale alla somma delle intensità delle singole componenti sinusoidali. Nel caso di uno spettro continuo di frequenze, la situazione è analoga; dall'equazione (3.9.5) e dal teorema (9.5.34) si deduce:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_{\perp}(t)|^2 dt. \quad (3.9.11)$$

Ponendo:

$$w(\omega) = \frac{c}{2} |A(\omega)|^2, \quad (3.9.12)$$

come prima si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{S}(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\omega) d\omega. \quad (3.9.13)$$

Da questa equazione risulta che la quantità  $w(\omega)$  rappresenta l'energia (per unità di frequenza e di superficie) associata alla propagazione, nell'intervallo da  $t = -\infty$  a  $t = +\infty$ , dell'onda di frequenza angolare  $\omega$ . Non è possibile, per un fenomeno non periodico, attribuire un significato energetico allo spettro considerando l'energia che si propaga nell'unità di tempo. In un intervallo di tempo limitato, infatti, non sono definiti né la trasformata di Fourier del campo (vedi equazione (9.5.20) né, di conseguenza, lo spettro di frequenze.

Ciò premesso ricaviamo, in alcuni casi particolarmente significativi, lo spettro di frequenze. Cominciamo considerando la propagazione di un pacchetto di onde, ossia supponiamo che il campo elettrico sia dato dall'equazione:

$$E_{\perp}(x-ct) = E_{\perp 0} f(x-ct) e^{i \frac{\omega_0}{c}(x-ct-x_0)} \quad (3.9.14)$$

dove:

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{per } |\xi| < l \\ 0 & \text{per } |\xi| > l \end{cases} \quad (3.9.15)$$

In fig. (3.9.1) è mostrato l'andamento di  $E_{\perp}$  all'istante  $t = 0$  (in essa, precisamente, è rappresentata la parte reale di  $E_{\perp}(x - ct)$ ). Si può pensare di ottenere in pratica una

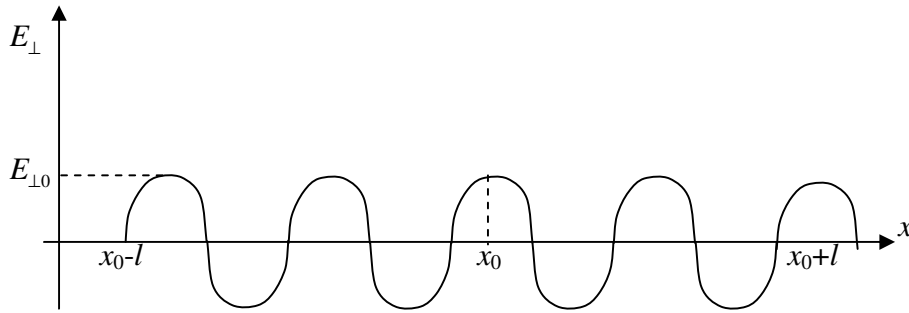


Fig. (3.9.1)

simile situazione intercettando un'onda piana mediante un diaframma mobile opaco alla radiazione elettromagnetica. Allontanando il diaframma durante l'intervallo di tempo  $\frac{2l}{c}$ , si ottiene appunto l'onda rappresentata dalle equazioni (3.9.14) e (3.9.15).

Per dedurre la composizione spettrale applichiamo l'equazione (9.5.20), da essa si ha:

$$K(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} E_{\perp 0} f(x - ct) e^{\frac{i\omega}{c}(x - ct - x_0)} dt. \quad (3.9.16)$$

Tenendo conto che dalla disuguaglianza:

$$-l < x - ct - x_0 < l \quad (3.9.17)$$

si ottiene:

$$\frac{1}{c}(x - x_0 - l) < t < \frac{1}{c}(x - x_0 + l), \quad (3.9.18)$$

l'espressione di  $K(\omega)$  diventa:



$$K(\omega) = \frac{E_{\perp 0}}{2\pi} e^{i\frac{\omega_0}{c}(x-x_0)} \int_{\frac{1}{c}(x-x_0-l)}^{\frac{1}{c}(x-x_0+l)} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt = \frac{E_{\perp 0}}{\pi} e^{i\frac{\omega}{c}(x-x_0)} \frac{\sin\left[(\omega-\omega_0)\frac{l}{c}\right]}{\omega-\omega_0}. \quad (3.9.19)$$

Ricordando la (3.9.5), l'espressione della densità di ampiezza risulta essere pertanto:

$$A(\omega) = \frac{E_{\perp 0}}{\pi} e^{-i\frac{\omega}{c}x_0} \frac{\sin\left[(\omega-\omega_0)\frac{l}{c}\right]}{\omega-\omega_0}, \quad (3.9.20)$$

da cui:

$$w(\omega) = \frac{cE_{\perp 0}^2}{2\pi^2} \frac{\sin^2\left[(\omega-\omega_0)\frac{l}{c}\right]}{(\omega-\omega_0)^2}. \quad (3.9.21)$$

In fig. (3.9.2) è riportato l'andamento di  $w(\omega)$ ; appare evidente che la massima ampiezza corrisponde a  $\omega = \omega_0$ . Sostituendo ad  $\omega$  i valori:

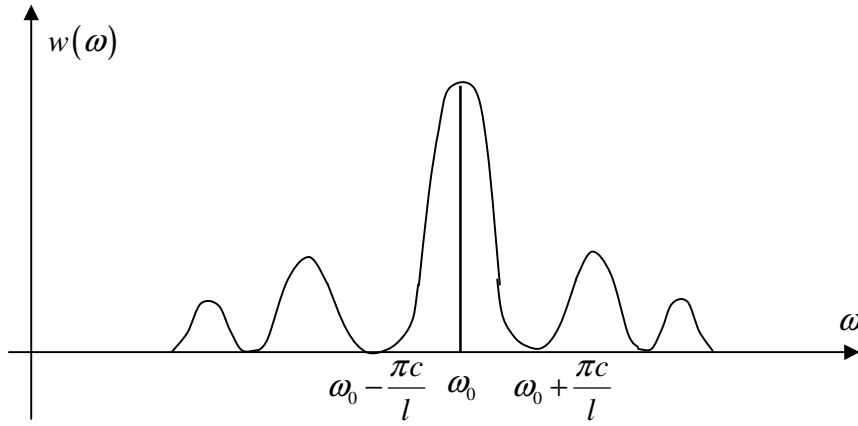


Fig. (3.9.2)

$$\omega = \omega_0 + n \frac{\pi c}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.9.22)$$

$w(\omega)$  risulta nulla; a valori intermedi di  $\omega$  corrispondono invece dei massimi secondari di importanza tanto più piccola quanto più ci si allontana da  $\omega_0$ . Si può sintetizzare questa situazione dicendo che lo spettro di frequenza è costituito da una banda di larghezza:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi c}{l}. \quad (3.9.23)$$

Un caso analogo è quello in cui il campo elettrico è determinato dall'equazione:

$$E_{\perp}(x-ct) = E_{\perp 0} e^{-\left(\frac{x-ct-x_0}{2l}\right)^2} e^{i\frac{\omega_0}{c}(x-ct-x_0)} \quad (3.9.24)$$

la cui parte reale è rappresentata, per  $t=0$ , in fig. (3.9.3). L'equazione (3.9.24) rap-

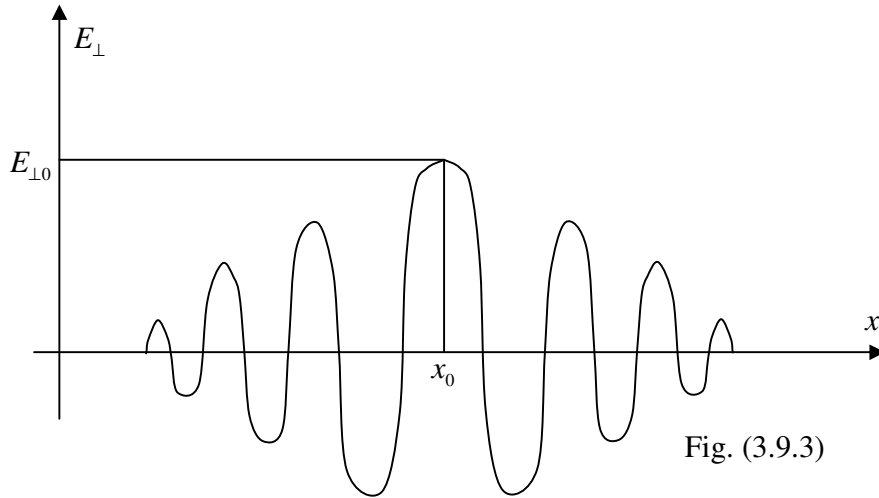


Fig. (3.9.3)

presenta un'onda sinusoidale la cui ampiezza decresce secondo una legge Gaussiana a partire dal massimo valore  $E_{\perp 0}$ . Si tratta perciò di un pacchetto d'onde a contorni sfumati. Il parametro  $l$  rappresenta il momento secondo<sup>(††††††††††)</sup> della distribuzione

---

<sup>(††††††††††)</sup> Il momento secondo di una funzione  $f(x)$  è dato, per definizione, dall'equazione:



$$A(\omega) = \frac{E_{\perp 0} e^{-i\frac{\omega}{c}x_0}}{\sqrt{2\pi c}} l e^{-\left(\frac{\omega_0 - \omega}{c}l\right)^2}, \quad (3.9.26)$$

da cui applicando la (3.9.12):

$$w(\omega) = \frac{E_{\perp 0}^2}{4\pi c} l^2 e^{-2\left(\frac{\omega_0 - \omega}{c}l\right)^2}. \quad (3.9.27)$$

Si conclude pertanto che lo spettro di frequenze ha anche esso forma gaussiana e il suo momento secondo  $\Delta\omega$  è dato dall'equazione:

$$\Delta\omega = \frac{c}{2l}. \quad (3.9.28)$$

Questo risultato coincide sostanzialmente con l'equazione (3.9.23). Introducendo la lunghezza d'onda  $\lambda$  mediante la (3.1.28), risulta subito che:

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)l = \frac{1}{4\pi}, \quad (3.9.29)$$

ossia:

$$(x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta, \quad dx dy = \rho d\rho d\vartheta, \quad 0 \leq \rho \leq \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi),$$

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\infty e^{-\rho^2(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} \rho d\rho = 2\pi \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi \int_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho^2 = -\pi \left[ e^{-\rho^2} \right]_0^\infty = \pi.$$

$$\text{Osserviamo poi che posto } \xi = ct - x + x_0, \quad d\xi = c dt, \quad \alpha = \frac{1}{4l^2}, \quad \beta = \frac{\omega_0 - \omega}{c},$$

$$A(\omega) = \frac{E_{\perp 0} e^{-i\frac{\omega}{c}x_0}}{2\pi} \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha\xi^2 + i\beta\xi)} d\xi = \frac{E_{\perp 0} e^{-i\frac{\omega}{c}x_0}}{2\pi} \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha}\xi + i\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} d\xi; \text{ e posto ancora}$$

$$\zeta = \sqrt{\alpha}\xi + i\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}, \quad d\zeta = \sqrt{\alpha}d\xi,$$

$$A(\omega) = \frac{E_{\perp 0} e^{-i\frac{\omega}{c}x_0}}{2\pi} \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}}{c\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{E_{\perp 0} e^{-i\frac{\omega}{c}x_0}}{2\pi} \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}}{c\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi} = \frac{E_{\perp 0} e^{-i\frac{\omega}{c}x_0}}{\sqrt{2\pi c}} l e^{-\left(\frac{\omega_0 - \omega}{c}l\right)^2} \quad [\text{n.d.c.}].$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{4\pi l}, \quad (3.9.30)$$

che stabilisce in altra forma la relazione tra la larghezza di banda e l'estensione del pacchetto. Per il pacchetto rappresentato dalla (3.9.14) la situazione è del tutto analoga<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>. In pratica si può dire che tra la semiampiezza spaziale del pacchetto e la semiampiezza dello spettro in essa contenuto intercorre la relazione:

$$\Delta\lambda \simeq \frac{\lambda^2}{l}. \quad (3.9.31)$$

A titolo di esempio supponiamo che una sorgente sia capace di emettere della luce monocromatica con lunghezza d'onda di 5000 Å; se la sua radiazione, intercettata da uno schermo viene lasciata propagare durante l'intervallo di tempo di  $10^{-9}$  sec. si otterrà un treno d'onda lungo 30 cm. a cui, per la (3.9.31), corrisponde un intervallo spettrale di 0,0167 Å<sup>(+++++)</sup>.

L'equazione (3.9.29) trova riscontro, con altro significato, in elettrodinamica quantistica. Supponiamo infatti che il treno d'onde contenga una quantità di energia talmente piccola da essere costituito da un solo fotone; moltiplicando la (3.9.29) per la costante di Planck  $h$  e tenendo conto delle (1.1.1), (1.1.2) si ottiene:

$$\Delta p_x \Delta x = \frac{h}{4\pi} \quad (3.9.32)$$

in cui si è scritto  $\Delta x$  al posto di  $l$  per indicare la semiampiezza del tratto dell'asse  $x$  lungo il quale si trova distribuita l'energia del fotone. L'interpretazione quantistica della (3.9.32) è la seguente: l'impulso del fotone è affetto da una indeterminazione  $\Delta p_x$ , il prodotto delle due indeterminazioni è costante e vale  $h/4\pi$ . Questo precisamente è l'enunciato del principio di indeterminazione di Heisenberg, nel caso in cui una particella muova lungo l'asse  $x$ . Una esauriente discussione su questo argomento

(\*\*\*\*\*)  $\Delta\omega = \frac{\pi c}{l}$ ,  $\Delta x = l$ , da cui  $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2l}$  [n.d.c.].

(+++++) Essendo  $\Delta\lambda$  la semiampiezza spettrale, l'ampiezza è dalla (3.9.31)

$$2\Delta\lambda \simeq 2 \frac{\lambda^2}{l} = 2 \frac{(5000\text{Å})^2}{30 \cdot 10^8 \text{Å}} = \frac{50 \cdot 10^6}{30 \cdot 10^8} \text{Å} = 0,01666... \text{Å} \text{ [n.d.c.]}$$

---

esula dagli scopi della presente trattazione. È opportuno, tuttavia, sottolineare che inserendo nell'elettrodinamica classica l'ipotesi dell'esistenza del fotone essa ne stabilisce le proprietà cinematiche in accordo con le leggi quantistiche.

### 3.10 Onde modulate

Continuando lo studio iniziato nel precedente paragrafo, vogliamo ora determinare lo spettro di frequenze di onde sinusoidali modulate, ossia di onde in cui l'ampiezza, o la frequenza, o la fase, sono funzioni periodiche di  $x - ct$ . In pratica il caso più importante è quello in cui queste funzioni sono, a loro volta, di forma sinusoidale ed il loro periodo è grande rispetto a quello dell'onda non modulata. D'altra parte, verificheremo che la variazione della frequenza equivale sostanzialmente ad una variazione di fase, per cui è sufficiente per i nostri scopi considerare i due casi della modulazione sinusoidale di ampiezza e della modulazione sinusoidale di frequenza.

Si abbia dunque un'onda sinusoidale modulata in ampiezza, ossia un'onda definita dall'equazione:

$$E_{\perp}(x-ct) = E_{\perp 0} \sin \frac{\Omega}{c}(x-ct) e^{i \frac{\omega_0}{c}(x-ct)}; \quad (3.10.1)$$

il suo andamento è mostrato, per  $t = 0$  ed  $\Omega \ll \omega_0$ , in fig. (3.10.1).

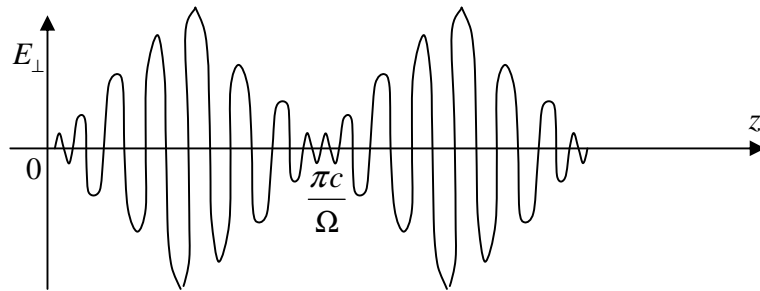


Fig. (3.10.1)

Le frequenze  $\omega_0$  ed  $\Omega$  prendono rispettivamente il nome di frequenza portante e di frequenza di modulazione. Allo scopo di ottenere lo spettro applichiamo l'equazione (9.5.20); si ha:

$$K(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} E_{\perp 0} \sin \frac{\Omega}{c}(x-ct) e^{\frac{i\omega_0}{c}(x-ct)} dt \quad (3.10.2)$$

ossia, esprimendo il seno mediante la formola di Eulero:

$$K(\omega) = \frac{E_{\perp 0}}{4\pi i} \left[ e^{\frac{i\omega_0 + \Omega}{c}x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[\omega - (\omega_0 + \Omega)]t} dt - e^{\frac{i\omega_0 - \Omega}{c}x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[\omega - (\omega_0 - \Omega)]t} dt \right]. \quad (3.10.3)$$

Utilizzando la (9.5.38) questa relazione diventa:

$$K(\omega) = \frac{E_{\perp 0}}{2i} \left\{ e^{\frac{i\omega_0 + \Omega}{c}x} \delta[\omega - (\omega_0 + \Omega)] - e^{\frac{i\omega_0 - \Omega}{c}x} \delta[\omega - (\omega_0 - \Omega)] \right\} \quad (3.10.4)$$

per cui, sostituendola nella (3.9.4) e tenendo conto della (9.5.36):

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= \frac{E_{\perp 0}}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{\frac{i\omega_0 + \Omega}{c}x} \delta[\omega - (\omega_0 + \Omega)] - e^{\frac{i\omega_0 - \Omega}{c}x} \delta[\omega - (\omega_0 - \Omega)] \right\} e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{E_{\perp 0}}{2} \left\{ e^{i\left[\frac{\omega_0 + \Omega}{c}(x-ct) - \frac{\pi}{2}\right]} + e^{i\left[\frac{\omega_0 - \Omega}{c}(x-ct) + \frac{\pi}{2}\right]} \right\}. \end{aligned} \quad (3.10.5)$$

Questa equazione stabilisce che l'onda modulata (3.10.1) è costituita da due onde si-

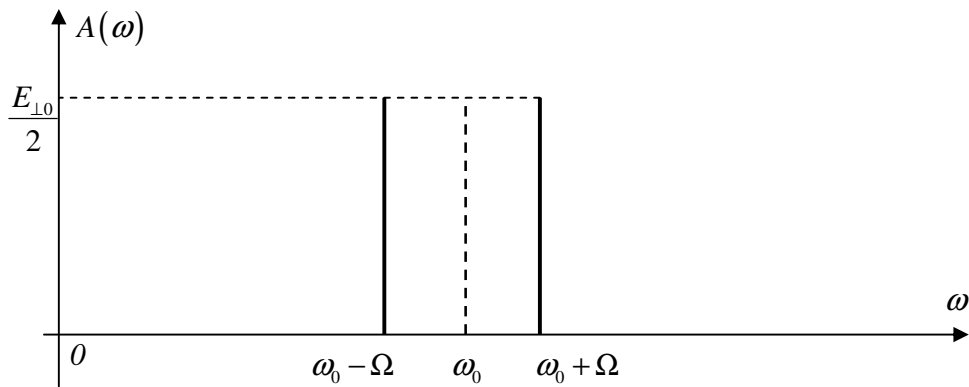


Fig. (3.10.2)



sinusoidali di ampiezze  $\frac{E_{\perp 0}}{2}$  di frequenze angolari  $\omega_0 + \Omega$  ed  $\omega_0 - \Omega$  e di fasi rispettive  $-\frac{\pi}{2}$  e  $+\frac{\pi}{2}$ . Lo spettro è perciò quello riportato nella fig. (3.10.2). Naturalmente nel caso di una onda parzialmente modulata in ampiezza, ossia di ampiezza pari alla somma di un termine costante e del termine  $E_{\perp 0} \sin \frac{\Omega}{c}(x - ct)$ , interverrebbe nello spettro anche una componente alla frequenza  $\omega_0$ .

Particolarmente interessanti sono le onde a modulazione di frequenza. Per chiarire di cosa si tratti, consideriamo l'oscillazione elettrica nel punto da cui supponiamo essa prenda origine, cioè per  $x = 0$  e  $t = t'$ . Il campo elettrico in questo punto è dato in generale dalla relazione:

$$E_{\perp}(t') = E_{\perp 0} e^{-i\varphi(t')}, \quad (3.10.6)$$

dove  $\varphi$  è un angolo di fase variabile nel tempo. Si ha modulazione di frequenza quando la velocità di variazione della fase, ossia la frequenza angolare, non è costante nel tempo, cioè:

$$\frac{d\varphi}{dt'} = \omega(t'). \quad (3.10.7)$$

Se si assume nulla la fase all'istante  $t' = 0$ , integrando questa equazione si ottiene:

$$\varphi(t') = \int_0^{t'} \omega(\theta) d\theta, \quad (3.10.8)$$

dove  $\theta$  è una variabile ausiliaria. Naturalmente la forma della funzione  $\omega(t')$  è del tutto arbitraria; il caso più significativo è quello in cui essa è data dalla relazione:

$$\omega(t') = \omega_0 + \delta\omega \cos \Omega t', \quad (3.10.9)$$

ossia quando la frequenza è uguale alla somma di un termine costante  $\omega_0$  e di un termine sinusoidale di ampiezza  $\delta\omega$ . Le frequenze  $\omega_0$  ed  $\Omega$ , analogamente al caso della modulazione di ampiezza, prendono il nome rispettivamente di frequenza portante e frequenza di modulazione. Inserendo la (3.10.9) nella (3.10.8) si ha:

$$\varphi(t') = \omega_0 t' + \frac{\delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t', \quad (3.10.10)$$

di conseguenza il campo elettrico diventa:

$$E_{\perp}(t') = E_{\perp 0} e^{-i\left(\omega_0 t' + \frac{\delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t'\right)}. \quad (3.10.11)$$

Ricordando la (1.9.21) il campo all'istante  $t$  nel punto di ascissa  $x$  sarà esprimibile nella forma:

$$E_{\perp}(x-ct) = E_{\perp 0} e^{i\left(\frac{\omega_0}{c}(x-ct) + \frac{\delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega}{c}(x-ct)\right)}. \quad (3.10.12)$$

Un'onda di questo tipo viene detta modulata in frequenza benché essa differisca da un'onda non modulata per il termine proporzionale a  $\sin \frac{\Omega}{c}(x-ct)$  che sostanzialmente è una fase. Il coefficiente  $\frac{\delta\omega}{\Omega}$  prende il nome di indice di modulazione. In fig. (3.10.3) è riportato l'andamento per  $t = 0$  del campo elettrico espresso dall'equazione (3.10.12).

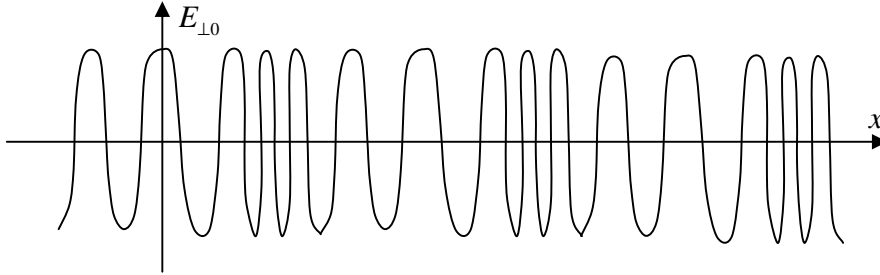


Fig. (3.10.3)

Per ricavare lo spettro di frequenza non conviene in questo caso ricorrere ai teoremi sulle serie di Fourier; basta infatti usare la nota formola (vedi Watson "A treatise on the theory of Bessel functions" cap. II pag. 16):

$$e^{\frac{1}{2}z\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi^n J_n(z) \quad (3.10.13)$$

in cui  $J_n$  è la funzione di Bessel di ordine  $n$  della quale, nel paragrafo 3.4, già abbiamo dato la definizione (vedi equazione (3.4.18)). Ponendo nella (3.10.13):

$$\xi = e^{i\frac{\Omega}{c}(x-ct)}, \quad z = \frac{\delta\omega}{\Omega}, \quad (3.10.14)$$

si ha:

$$e^{i\frac{\delta\omega}{\Omega}\sin\frac{\Omega}{c}(x-ct)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{n\Omega}{c}(x-ct)} J_n\left(\frac{\delta\omega}{\Omega}\right) \quad (3.10.15)$$

per cui, sostituendo nella (3.10.12), lo sviluppo del campo propagativi risulta essere:

$$E_{\perp}(x-ct) = E_{\perp 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{\delta\omega}{\Omega}\right) e^{i\frac{\omega_0+n\Omega}{c}(x-ct)}. \quad (3.10.16)$$

Lo spettro è pertanto costituito da infinite onde con frequenze angolari:

$$\omega_n = \omega_0 + n\Omega \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.10.17)$$

ed ampiezze:

$$A_n = E_{\perp 0} J_n\left(\frac{\delta\omega}{\Omega}\right); \quad (3.10.18)$$

questo spettro è riportato in fig. (3.10.4):

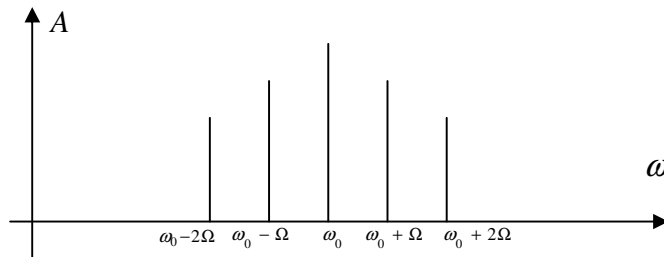


Fig. (3.10.4)

È da notare che quando l'indice di modulazione  $\frac{\delta\omega}{\Omega}$  è una quantità piccola, dalla (3.4.18) si ottiene:

$$J_n\left(\frac{\delta\omega}{\Omega}\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\delta\omega}{2\Omega}\right)^n \left[1 - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\delta\omega}{2\Omega}\right)^2 + \dots\right]. \quad (3.10.19)$$

Questa equazione stabilisce che la componente a frequenza portante è contenuta nello spettro con l'ampiezza:

$$A_0 = E_{\perp 0} \left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\delta\omega}{\Omega}\right)^2 + \dots\right] \approx E_{\perp 0} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\delta\omega}{\Omega}\right)^2}; \quad (3.10.20)$$

al crescere di  $n$  le ampiezze delle successive componenti diminuiscono molto rapidamente, in pratica come i termini di una serie esponenziale.

Vogliamo ora considerare un particolare metodo per produrre onde a modulazione di frequenza. Precisamente vogliamo dimostrare che quando una sorgente di onde non modulate si sposta con movimento oscillatorio lungo una data direzione, le onde che si propagano in questa direzione sono modulate in frequenza. A questo scopo occorre stabilire innanzitutto quale è l'effetto del moto della sorgente sulla lunghezza delle onde che essa emette. Supponiamo, pertanto, che la sorgente emettendo onde progressive lungo l'asse  $x$  si muova nella direzione positiva con velocità  $v$ . Evidentemente le onde assumono una lunghezza minore di quella che si avrebbe se la sorgente fosse in quiete. Precisamente, indicando con  $\lambda_0$  la lunghezza d'onda per  $v = 0$ , si ha:

$$\lambda = \lambda_0 - vT, \quad (3.10.21)$$

dove  $T$  è il periodo di oscillazione che, per la (3.1.25) è legato a  $\lambda_0$  dalla relazione:

$$T = \frac{\lambda_0}{c}. \quad (3.10.22)$$

La fig. (3.10.5), in cui è riportato l'andamento del campo  $E_{\perp}$  per  $t = 0$ , illustra schematicamente questa situazione. Possiamo scrivere pertanto:

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 - \frac{v}{c} \right). \quad (3.10.23)$$

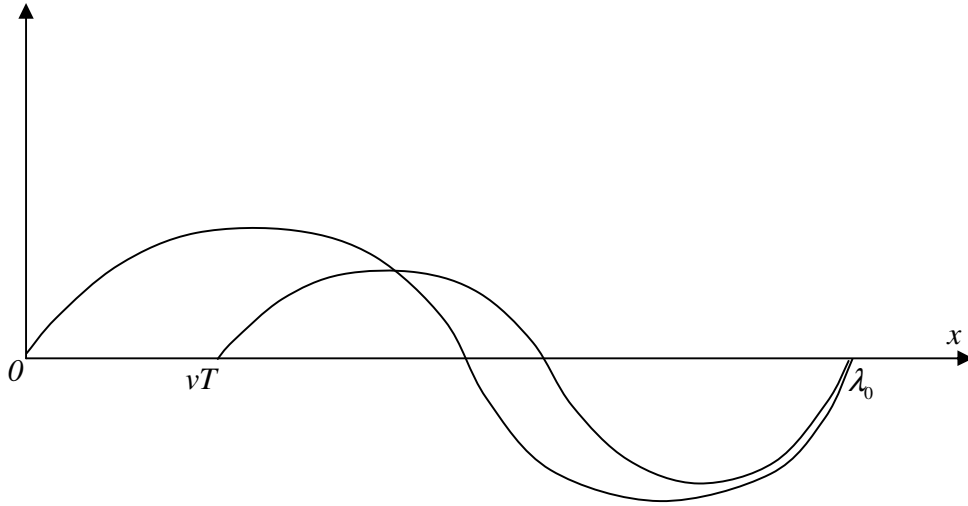


Fig. (3.10.5)

Questa relazione tra  $\lambda$  e  $\lambda_0$  è conosciuta sotto il nome di effetto Doppler ed è peculiare di tutti i fenomeni di propagazione anche di tipo non elettromagnetico; essa verrà discussa esaurientemente, dal punto di vista relativistico, nel paragrafo 7.9. Introducendo le frequenze angolari  $\omega$  ed  $\omega_0$ , la (3.10.23) diventa:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda_0 \left( 1 - \frac{v}{c} \right)} = \omega_0 \left( 1 + \frac{v}{c} + \dots \right) \quad (3.10.24)$$

in cui, supponendo piccola rispetto a  $c$  la velocità della sorgente, abbiamo trascurato le potenze di  $\frac{v}{c}$  di ordine superiore al primo. Ammettiamo ora che il moto della sorgente sia armonico, ossia rappresentabile con l'equazione:

$$x(t') = x_0 \sin \Omega t'; \quad (3.10.25)$$

da essa, derivando rispetto al tempo per ottenere la velocità e sostituendo nella (3.10.24), si ha:

$$\omega(t') = \omega_0 + \frac{\omega_0 \Omega x_0}{c} \cos \Omega t'. \quad (3.10.26)$$

Confrontando con la (3.10.9), si constata che ciò corrisponde ad una modulazione di frequenza con indice di modulazione:

$$\frac{\delta\omega}{\Omega} = \frac{\omega_0 x_0}{c} = \frac{2\pi x_0}{\lambda_0}. \quad (3.10.27)$$

Inserendo questa equazione nella (3.10.20) ed utilizzando la (3.9.9) risulta che l'intensità  $\mathcal{J}_0$  della componente con frequenza  $\omega_0$  è legata alla corrispondente intensità  $\frac{cE_{\perp 0}^2}{8\pi}$ , relativa ad una sorgente in quiete, dalla relazione:

$$\mathcal{J}_0 = \frac{c}{8\pi} E_{\perp 0}^2 e^{-\left(\frac{\pi x_0}{\lambda_0}\right)^2}. \quad (3.10.28)$$

Le equazioni testè ottenute sono applicabili allo studio della radiazione (vedi paragrafo 3.1) emessa dal nucleo di un atomo facente parte di un reticolo cristallino. Per effetto dell'agitazione termica, gli atomi del reticolo compiono delle oscillazioni armoniche di ampiezza tanto maggiore quanto più è alta la temperatura. Di conseguenza ogni radiazione monocromatica dà luogo allo spettro previsto dall'equazione (3.10.18). Tuttavia la presenza nello spettro di onde a frequenza  $\omega_0$ , pari a quella che si avrebbe per nuclei in quiete, permette di eseguire lo studio dell'emissione dei  $\gamma$  in condizioni ideali, senza cioè che il movimento dovuto all'agitazione termica del reticolo intervenga a recare disturbo. Questo risultato prende il nome di effetto Mössbauer; esso, come appare dall'equazione (3.10.28), è tanto più importante quanto più grande è la lunghezza d'onda e quanto più è piccola l'elongazione  $x_0$ .

Un'altra questione che è importante discutere riguarda l'applicabilità della relazione (3.9.29) alle onde modulate. Si deve notare, infatti, che tanto nel caso della modulazione di ampiezza quanto in quello della modulazione di frequenza si può attribuire un certo qual grado di impacchettamento alle onde elettromagnetiche. È sufficiente, per convincersi di ciò, osservare le figure (3.10.1) e (3.10.3). Nel caso della modulazione di ampiezza la semiestensione spaziale della zona impacchettata è:

$$\Delta x = \frac{\pi c}{2\Omega}, \quad (3.10.29)$$

mentre il semiintervallo spettrale può essere assunto eguale ad  $\Omega$ , cioè:

$$\Delta\omega = \Omega. \quad (3.10.30)$$

Tenendo conto dell'equazione (3.1.28), si ottiene<sup>(\*\*\*\*\*†)</sup>:

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Delta x' = \frac{1}{4\pi}, \quad (3.10.31)$$

che coincide con la (3.9.29). Per la modulazione di frequenza valgono sostanzialmente le stesse formule<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>. Si può concludere, pertanto, che anche per le onde modulate la larghezza della banda spettrale è da mettere in relazione con la distribuzione spaziale dell'ampiezza del vettore elettrico e quindi dell'energia elettromagnetica. In ogni caso la banda è tanto più stretta quanto minore è l'impacchettamento.

I risultati testè ottenuti ci permettono di chiarire, almeno in modo qualitativo, quanto enunciato all'inizio del paragrafo 3.7 circa la quasi monocromaticità dell'onda elettromagnetica rappresentata dalle equazioni (3.7.1) e (3.7.2). Abbiamo infatti stabilito, considerando la propagazione di un pacchetto d'onde o di un'onda modulata in ampiezza, che un'onda con ampiezza lentamente variabile corrisponde ad una stretta banda spettrale. Così pure, considerando la modulazione di frequenza, siamo arrivati al risultato che una lenta variazione della fase produce lo stesso risultato. Ora nelle equazioni (3.7.1), (3.7.2), si suppone, appunto, che ampiezza e fase siano delle quantità lentamente variabili, sebbene con una legge irregolare non definibile a priori. Di conseguenza si otterrà una banda di forma imprecisata, ma certamente molto sottile,

<sup>(\*\*\*\*\*†)</sup> Dalle (3.10.1), (3.10.5):  $\Delta x = \frac{\pi c}{2\Omega}$ ,  $\Delta\omega = \Omega$ ; si ottiene perciò, tenendo conto dell'equazione (3.1.28) e ponendo  $\Delta x' = \frac{\Delta x}{\pi}$ :  $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Delta x' = \frac{1}{4\pi}$ , coincidente con la (3.9.29) [n.d.c.].

<sup>(\*\*\*\*\*)</sup> Dalle (3.10.12), (3.10.20):  $\Delta x = \frac{\pi c}{2\Omega}$ ,  $\Delta\omega \approx 2\Omega$ ; si ottiene perciò, tenendo conto dell'equazione (3.1.28) e ponendo  $\Delta x' = \frac{\Delta x}{2\pi}$ :  $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Delta x' \approx \frac{1}{4\pi}$ , coincidente con la (3.9.29) [n.d.c.].

se ampiezza e fase variano di poco nel tempo  $\frac{\lambda}{c}$ . In questo senso è giustificato parlare di radiazioni quasi monocromatiche.



### 3.11 Fenomeni di interferenza

Vogliamo ora studiare cosa accade quando due o più onde elettromagnetiche si propagano sovrapposte. Il risultato di questa sovrapposizione costituisce il fenomeno detto di interferenza. Dal punto di vista storico esso è di primaria importanza in quanto permise di stabilire, all'inizio del secolo scorso, la natura ondulatoria delle radiazioni luminose.

Cominciamo considerando delle onde monocromatiche; in generale le componenti del vettore elettrico, associato alle varie onde che partecipano alla sovrapposizione, possono essere scritte nella forma:

$$\begin{aligned} E_{ix} &= E_{ix0}(\vec{r})e^{i[f_{ix}(\vec{r})-\omega t]} \\ E_{iy} &= E_{iy0}(\vec{r})e^{i[f_{iy}(\vec{r})-\omega t]} \\ E_{iz} &= E_{iz0}(\vec{r})e^{i[f_{iz}(\vec{r})-\omega t]} \end{aligned} \quad (3.11.1)$$

In queste equazioni  $E_{ix0}$ ,  $E_{iy0}$ ,  $E_{iz0}$ ,  $f_{ix}$ ,  $f_{iy}$ ,  $f_{iz}$  sono delle quantità reali e l'indice  $i$  assume tanti valori quante sono le onde sovrapposte. Nel caso delle onde piane, ricordando la (3.3.16), risulta subito, infatti, che sono applicabili le (3.11.1) in cui si ponga:

$$\begin{aligned} f_{ix}(\vec{r}) &= \frac{\omega}{c} \vec{r} \cdot \vec{\tau}_i + \alpha_{ix} \\ f_{iy}(\vec{r}) &= \frac{\omega}{c} \vec{r} \cdot \vec{\tau}_i + \alpha_{iy} \\ f_{iz}(\vec{r}) &= \frac{\omega}{c} \vec{r} \cdot \vec{\tau}_i + \alpha_{iz} \end{aligned} \quad (3.11.2)$$

mentre le ampiezze  $E_{ix0}$ ,  $E_{iy0}$ ,  $E_{iz0}$ , sono delle quantità costanti. Nel caso delle onde cilindriche, utilizzando l'espressione (3.6.24) del campo elettrico, si ha invece:

$$\begin{aligned}
E_{ix0} &= E_{iy0} = 0 \\
E_{iz0} &= E_z^{(0)} \sqrt{\frac{2c}{\pi\omega r}} \\
f_{iz} &= \frac{\omega}{c}r - \frac{\pi}{4}
\end{aligned} \tag{3.11.3}$$

In entrambi i casi il campo magnetico, quello elettrico e la direzione di propagazione sono mutuamente ortogonali e vale la relazione (3.2.7). Possiamo pertanto assumere in generale, che l'intensità di radiazione corrispondente alla sovrapposizione delle onde sia data dalla relazione:

$$\mathcal{I} = \frac{c}{4\pi T} \int_0^T (\text{Re } \vec{E})^2 dt \tag{3.11.4}$$

in cui  $\vec{E}$  è il campo elettrico totale. Questa relazione è analoga alla (3.2.49). Supponendo, per semplicità, che due sole onde siano sovrapposte, si ha:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \frac{c}{4\pi T} \int_0^T \left[ \text{Re}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \right]^2 dt = \frac{c}{4\pi T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*) \right]^2 dt = \\
&= \frac{c}{16\pi T} \int_0^T \left[ (\vec{E}_1)^2 + (\vec{E}_2)^2 + (\vec{E}_1^*)^2 + (\vec{E}_2^*)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 + \vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_2^*) + 2(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1^* + \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_2) \right] dt
\end{aligned} \tag{3.11.5}$$

Essendo  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$  periodici, eseguendo l'integrazione<sup>(\*)</sup> si ottiene:

---

(\*) Posto  $E_{jk} = E_{jk0} e^{i(f_{jk} - \omega t)}$  ( $j = 1, 2; k = x, y, z$ ), per la periodicità di  $\vec{E}_j$  vale  $E_{jk}(T) = E_{jk}(0) = E_{jk0} e^{f_{jk}}$ , che si traduce in  $e^{-i\omega T} = e^{-i\omega 0} = 1$ , da cui integrando:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_{12} \quad (3.11.6)$$

dove:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \frac{c}{8\pi} \left| \vec{E}_{10} \right|^2 \\ \mathcal{J}_2 &= \frac{c}{8\pi} \left| \vec{E}_{20} \right|^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.11.7)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dt &= \int_0^T \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dt = \int_0^T \left( \sum_k E_{1k} \cdot E_{2k} \right) dt = \int_0^T \left[ \sum_k E_{1k0} e^{i(f_{1k} - \omega t)} \cdot E_{2k0} e^{i(f_{2k} - \omega t)} \right] dt = \\ &= \sum_k \left[ E_{1k0} E_{2k0} e^{i(f_{1k} + f_{2k})} \right] \int_0^T e^{-2i\omega t} dt = \sum_k E_{1k0} E_{2k0} e^{i(f_{1k} + f_{2k})} \cdot \frac{e^{-2i\omega T} - e^{-2i\omega \cdot 0}}{-2i\omega} = \\ &= \sum_k E_{1k0} E_{2k0} e^{i(f_{1k} + f_{2k})} \cdot \frac{e^{-2i\omega T} - e^{-2i\omega \cdot 0}}{-2i\omega} = \sum_k E_{1k0} E_{2k0} e^{i(f_{1k} + f_{2k})} \cdot \frac{(e^{-i\omega T})^2 - (e^{-i\omega \cdot 0})^2}{-2i\omega} = \\ &= \sum_k E_{1k0} E_{2k0} e^{i(f_{1k} + f_{2k})} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

e analogamente per  $\vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_2^*, (\vec{E}_1)^2, (\vec{E}_2)^2, (\vec{E}_1^*)^2, (\vec{E}_2^*)^2$

$$\begin{aligned} \int_0^T \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1^* dt &= \int_0^T \left( \sum_k E_{1k} \cdot E_{1k}^* \right) dt = \int_0^T \left[ \sum_k E_{1k0} e^{i(f_{1k} - \omega t)} \cdot E_{1k0} e^{-i(f_{1k} - \omega t)} \right] dt = \\ &= \sum_k \left[ E_{1k0}^2 e^{i(f_{1k} - f_{1k})} \right] \int_0^T e^{-i(\omega - \omega)t} dt = \sum_k E_{1k0}^2 T = \left| \vec{E}_{10} \right|^2 T \end{aligned}$$

e analogamente per  $\vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2^*$

$$\begin{aligned} \int_0^T \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_2 dt &= \int_0^T \left( \sum_k E_{1k} E_{2k}^* + E_{1k}^* E_{2k} \right) dt = \\ &= \sum_k E_{1k0} E_{2k0} \left[ e^{i(f_{1k} - f_{2k})} + e^{-i(f_{1k} - f_{2k})} \right] \int_0^T e^{-i(\omega - \omega)t} dt = \\ &= \sum_k E_{1k0} E_{2k0} \left[ e^{i(f_{1k} - f_{2k})} + e^{-i(f_{1k} - f_{2k})} \right] \int_0^T e^{-i0t} dt = \\ &= \sum_k E_{1k0} E_{2k0} \left[ e^{i(f_{1k} - f_{2k})} + e^{-i(f_{1k} - f_{2k})} \right] \cdot T = \left( \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_2 \right) \cdot T \end{aligned}$$

[n.d.c.].

e:

$$\mathcal{I}_2 = \frac{c}{8\pi} (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* + \vec{E}_1^* \cdot \vec{E}_2) \quad (3.11.8)$$

Le quantità  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ , che sono espresse da relazioni di forma eguale alla (3.2.50), manifestamente rappresentano la intensità di radiazione di ciascuna delle due onde. La quantità  $\mathcal{I}_2$ , che prende il nome di termine di interferenza, dipende dalla simultanea presenza dei vettori  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$  e rappresenta pertanto l'effetto della sovrapposizione. Mediante le (3.11.1), la (3.11.8) diventa:

$$\mathcal{I}_2 = \frac{c}{4\pi} [E_{1x0}E_{2x0} \cos(f_{1x} - f_{2x}) + E_{1y0}E_{2y0} \cos(f_{1y} - f_{2y}) + E_{1z0}E_{2z0} \cos(f_{1z} - f_{2z})], \quad (3.11.9)$$

che è una espressione dipendente da  $\vec{r}$ . Quando essa non è nulla l'intensità complessiva è differente dalla somma delle due onde separate; si dice, in questo caso, che le due onde interferiscono. È interessante notare che la scoperta di fenomeni di questo tipo, avvenuta ad opera di T. Young nel 1801, fu decisiva per chiarire la natura ondulatoria della luce. Infatti la teoria emissiva proposta da Newton, secondo la quale le radiazioni luminose dovevano consistere in particelle lanciate dalla sorgente, non poteva certamente spiegare in modo plausibile l'effetto di interferenza. La relazione (3.11.9) è applicabile in generale ad onde monocromatiche di qualsiasi tipo; tuttavia il caso delle onde piane polarizzate linearmente è il più interessante. Supponiamo, dunque, che due onde piane si propaghino lungo l'asse  $x$  e che le fasi di ciascuna delle due componenti dei vettori  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$  coincidano; si abbia cioè:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}_2 = \vec{i} \quad (3.11.10)$$

e:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1y} &= \alpha_{1z} = \alpha_1 \\ \alpha_{2y} &= \alpha_{2z} = \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.11.11)$$

Sostituendo questi valori nelle (3.11.2) la (3.11.9) diventa:

$$\mathcal{Y}_{12} = \frac{c}{4\pi} (E_{1y0}E_{2y0} + E_{1z0}E_{2z0}) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (3.11.12)$$

e cioè:

$$\mathcal{Y}_{12} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (3.11.13)$$

Da questa equazione appare evidente che quando due onde che si propagano nella stessa direzione sono polarizzate in piani ortogonali, cioè:

$$\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} = 0, \quad (3.11.14)$$

il termine di interferenza è nullo. Fu proprio in base a questo fatto, riscontrato sperimentalmente da Fresnel ed Arago nel 1816, che Young poté stabilire il carattere trasversale delle oscillazioni luminose. Quando invece la (3.11.14) non è verificata, confrontando le (3.11.7) colla (3.11.13) ed indicando con  $\vartheta_{12}$  l'angolo tra i vettori  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$ , si ha:

$$\mathcal{Y}_{12} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_{10}| |\vec{E}_{20}| \cos \vartheta_{12} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\sqrt{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2} \cos \vartheta_{12} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (3.11.15)$$

e la (3.11.6) diventa:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + 2\sqrt{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2} \cos \vartheta_{12} \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (3.11.16)$$

Questa relazione stabilisce che l'intensità complessiva  $\mathcal{I}$  al variare delle fasi  $\alpha_1, \alpha_2$  oscilla tra i due valori estremi:

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + 2\cos \vartheta_{12} \sqrt{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}, \quad (3.11.17)$$

per:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad 2\pi, \quad 4\pi, \quad \dots \quad (3.11.18)$$

e:

$$\mathcal{I}'' = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 - 2 \cos \vartheta_{12} \sqrt{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}, \quad (3.11.19)$$

per:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pi, \quad 3\pi, \quad 5\pi, \quad \dots \quad (3.11.20)$$

In particolare quando:

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 \quad (3.11.21)$$

e  $\vartheta_{12}$  è nullo si ha:

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{I}' = 4\mathcal{I} \\ \mathcal{I}'' = 0 \end{array} \right\} \quad (3.11.22)$$

Benché le equazioni testè ottenute possano essere applicate a radiazioni elettromagnetiche di qualunque tipo, il caso in pratica più importante è quello delle radiazioni luminose. Tuttavia solo eccezionalmente è possibile disporre di sorgenti luminose perfettamente monocromatiche, in generale si ha a che fare con sorgenti di luce quasi monocromatica, cioè non perfettamente coerente. Consideriamo, pertanto, cosa accade quando due onde piane quasi monocromatiche si propagano lungo la stessa direzione che assumiamo coincidente con quella dell'asse  $x$ . Si possono ancora usare le relazioni (3.11.1) e (3.11.2) salvo tenere conto, come abbiamo fatto nel paragrafo 3.7, che in esse le ampiezze e le fasi sono delle funzioni fluttuanti di  $x - ct$ . Inoltre, nella (3.11.4) occorre eseguire la media su di un intervallo di tempo  $t_0$  tendente ad infinito o comunque comprendente un grande numero di periodi. È facile vedere che in queste condizioni le espressioni (3.11.7) di  $\mathcal{I}_1$  ed  $\mathcal{I}_2$  vengono sostituite dalle analoghe relazioni:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \frac{c}{8\pi} \left\langle \left| \vec{E}_{10} \right|^2 \right\rangle \\ \mathcal{I}_2 &= \frac{c}{8\pi} \left\langle \left| \vec{E}_{20} \right|^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (3.11.23)$$

mentre il termine di interferenza diventa:

$$\mathcal{I}_{12} = \frac{c}{4\pi} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{+\frac{t_0}{2}} \left\{ E_{1y0}(x-ct) E_{2y0}(x-ct) \cos[\alpha_{1y}(x-ct) - \alpha_{2y}(x-ct)] + \right. \\ \left. + E_{1z0}(x-ct) E_{2z0}(x-ct) \cos[\alpha_{1z}(x-ct) - \alpha_{2z}(x-ct)] \right\} dt. \quad (3.11.24)$$

Quando le due onde provengono da due differenti sorgenti di luce naturale esse, ovviamente, non sono tra di loro correlate, ossia gli sfasamenti  $\alpha_{1y} - \alpha_{2y}$  e  $\alpha_{1z} - \alpha_{2z}$  variano in modo casuale ed i fattori  $\cos(\alpha_{1y} - \alpha_{2y})$  e  $\cos(\alpha_{1z} - \alpha_{2z})$ , oscillando tra +1 e -1 rendono nullo l'integrale. In questo caso l'intensità di radiazione complessiva è uguale alla somma delle intensità  $\mathcal{I}_1$  ed  $\mathcal{I}_2$  e non si osserva alcun effetto di interferenza. È tuttavia possibile sovrapporre, ad esempio mediante un opportuno gioco di riflessioni, due onde che provengono dalla stessa sorgente dopo aver seguito dei percorsi di differente lunghezza. Si può, in altre parole, fare in modo che:

$$\vec{E}_2(x-ct) = k \vec{E}_1(x + \Delta x - ct) \quad (3.11.25)$$

dove  $k$  è un fattore costante dipendente dalle riflessioni e  $\Delta x$  la differenza tra le lunghezze dei due percorsi. In queste condizioni l'espressione del termine di interferenza diventa:

$$\mathcal{I}_{12} = \frac{c}{4\pi} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{k}{t_0} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{+\frac{t_0}{2}} \left\{ E_{1y0}(x-ct) E_{1y0}(x + \Delta x - ct) \cdot \right. \\ \cdot \cos \left[ \alpha_{1y}(x-ct) - \alpha_{1y}(x + \Delta x - ct) - \frac{\omega}{c} \Delta x \right] + \\ \left. + E_{1z0}(x-ct) E_{1z0}(x + \Delta x - ct) \cdot \right. \\ \left. \cdot \cos \left[ \alpha_{1z}(x-ct) - \alpha_{1z}(x + \Delta x - ct) - \frac{\omega}{c} \Delta x \right] \right\} dt. \quad (3.11.26)$$

Essendo le ampiezze e le fasi delle funzioni a variazione molto lenta di  $x-ct$ , può accadere che la differenza  $\Delta x$  sia abbastanza piccola che esse rimangano costanti nel tempo  $\frac{\Delta x}{c}$ . Se ciò accade si ha:

$$\mathcal{I}_{12} = \frac{c}{4\pi} k \left[ \langle E_{1y0}^2 \rangle + \langle E_{1z0}^2 \rangle \right] \cos \left( \frac{\omega}{c} \Delta x \right), \quad (3.11.27)$$

ossia, tenendo conto della (3.11.21):

$$\mathcal{I}_{12} = 2k\mathcal{I}_1 \cos \frac{\omega}{c} \Delta x. \quad (3.11.28)$$

D'altra parte dalla (3.11.25) e dalle (3.11.23) si ottiene:

$$\mathcal{I}_2 = k^2 \mathcal{I}_1, \quad (3.11.29)$$

Per cui la (3.11.27) diventa:

$$\mathcal{I}_{12} = 2\sqrt{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2} \cos \frac{\omega}{c} \Delta x, \quad (3.11.30)$$

che è una espressione del tutto analoga alla (3.11.15). Sostituendo lo sfasamento  $\alpha_1 - \alpha_2$  con la quantità  $\frac{\omega}{c} \Delta x$  valgono, pertanto, anche in questo caso, le equazioni (3.11.17) ÷ (3.11.20) e si hanno gli effetti di interferenza.

Per ottenere in pratica un simile risultato si possono usare varie disposizioni sperimentali. Una delle più semplici è quella conosciuta sotto il nome di specchi di Fresnel (vedi fig. (3.11.1)). Una coppia di piani riflettenti  $R_1$  ed  $R_2$  formanti un diedro

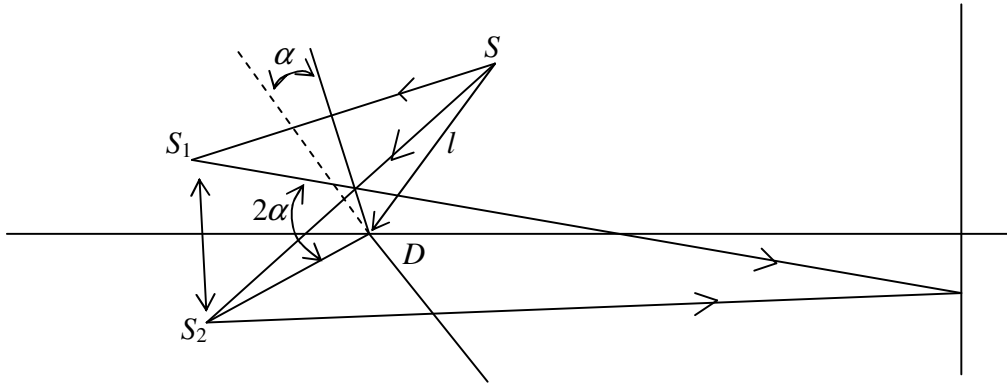


Fig. (3.11.1)

di spigolo  $D$  produce due immagini virtuali  $S_1$  ed  $S_2$  di una sorgente  $S$ . Se  $\alpha$  è l'angolo diedro formato dai piani di  $R_1$  ed  $R_2$  manifestamente l'angolo  $S_1 \hat{D} S_2$  vale



$2\alpha^{(\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger)}$ , per cui, indicando con  $2a$  la distanza tra  $S_1$  ed  $S_2$  e con  $l$  quella tra  $S$  e  $D$  si ha:

$$a = l \sin \alpha \quad (3.11.31)$$

Consideriamo poi (vedi fig. (3.11.2)), un piano  $(O, \xi, \eta)$  ortogonale alla bisettrice dell'angolo  $S_1 \hat{D} S_2$  e distante  $d$  dal piano di  $S_1$  ed  $S_2$  e scegliamo l'asse  $\eta$  parallelo al vettore  $S_1 - S_2$ . Ovviamente le lunghezze dei percorsi  $r_1$  ed  $r_2$  che la luce emessa rispettivamente da  $S_1$  ed  $S_2$  compie per arrivare in un generico punto  $P(\xi, \eta)$  del piano sono:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\xi^2 + (\eta - a)^2 + d^2} \\ r_2 &= \sqrt{\xi^2 + (\eta + a)^2 + d^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.11.32)$$

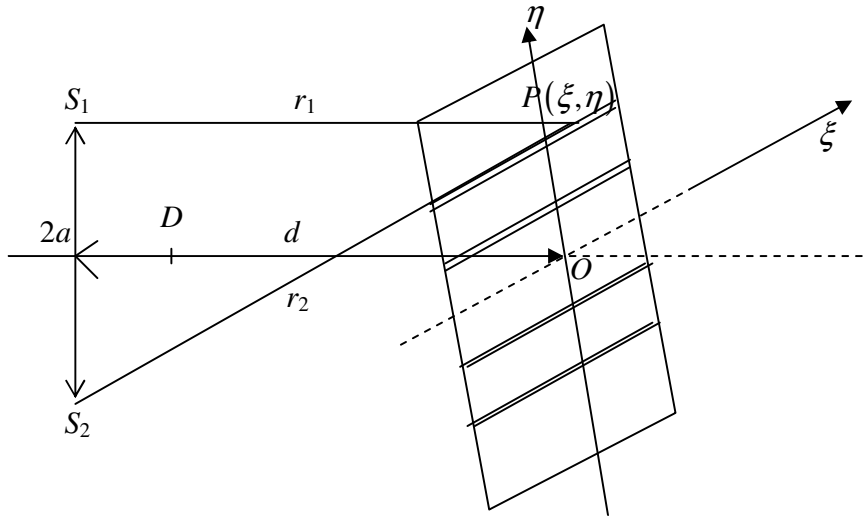


Fig. (3.11.2)

per cui:

$$r_2^2 - r_1^2 = 4\eta a \quad (3.11.33)$$

---

$(\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger)$  Si tenga conto, infatti, che ruotando di  $\alpha$  uno specchio, il raggio riflesso ruota di  $2\alpha$ .

Se la distanza  $d$  è molto grande rispetto a  $2a$  e se il punto  $P$  è prossimo all'origine  $O$  i due raggi si propagano praticamente nella stessa direzione e si ha:

$$r_1 \cong r_2 \cong d . \quad (3.11.34)$$

La (3.11.33), di conseguenza, diventa approssimativamente:

$$(r_2 - r_1) 2d = 4\eta a \quad (3.11.35)$$

e cioè:

$$r_2 - r_1 = \frac{2a\eta}{d} . \quad (3.11.36)$$

In questa situazione, manifestamente, la (3.11.30) è applicabile, basta sostituire in essa  $\Delta x$  con  $r_2 - r_1$ . Si hanno pertanto dei massimi di luce di intensità:

$$\mathcal{I}_{\max} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + 2\sqrt{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2} \quad (3.11.37)$$

per:

$$\frac{2\omega a}{c} \eta = 0, \quad 2\pi, \quad 4\pi, \quad \dots \quad (3.11.38)$$

ossia per:

$$\eta = n \frac{d}{2a} \lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.11.39)$$

Viceversa per:

$$\eta = \frac{2n+1}{2} \frac{d}{2a} \lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.11.40)$$

Si hanno dei minimi nulli, ossia delle zone oscure. Sul piano  $(O, \xi, \eta)$  (vedi fig. (3.11.2)) compare pertanto una serie di strisce chiare ed oscure parallele all'asse  $\xi$ . A questo sistema di strisce si dà il nome di frange di interferenza ed alla quantità:

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min}}{\mathcal{I}_{\max} + \mathcal{I}_{\min}} \quad (3.11.41)$$

si dà il nome di visibilità delle frange. Nel caso attuale si ha:

$$\mathcal{V} = \frac{2\sqrt{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2}}{\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2}; \quad (3.11.42)$$

in particolare quando la (3.11.21) è verificata:

$$\mathcal{V} = 1. \quad (3.11.43)$$

È da notare, infine, che la (3.11.39) può essere usata per determinare la lunghezza d'onda attraverso l'osservazione dei valori di  $\eta$ , ossia della separazione tra le frange di interferenza.

È possibile, d'altra parte, usando differenti disposizioni sperimentali, fare in modo che la differenza  $\Delta x$  risulti grande quanto si desidera. Un esempio di un simile dispositivo è l'interferometro di Michelson che è descritto in dettaglio nel paragrafo 4.4. Mediante questo strumento si possono ottenere valori di  $\Delta x$  pari anche ad alcuni metri. In queste condizioni  $\Delta x$  può diventare abbastanza grande che i valori del vettore  $\vec{E}_1(x + \Delta x - ct)$  non siano più correlati con quelli di  $\vec{E}_1(x - ct)$  e l'integrale che compare nella (3.11.24) dia risultato nullo. Per comprendere come ciò possa accadere, basta tener conto che un'onda quasi monocromatica, come già si è fatto osservare alla fine del paragrafo precedente, è paragonabile ad un'onda modulata o anche ad una successione di pacchetti d'onda emessi a caso dalla sorgente. La fig. (3.11.3) caso (a) illustra schematicamente la situazione. Ciascun pacchetto d'onda, entrando nell'interferometro, viene diviso in due pacchetti pressoché di eguali intensità, che vengono di nuovo sovrapposti dopo aver seguito due percorsi di differente lunghezza. Può accadere, pertanto, che all'atto della sovrapposizione i due pacchetti risultino spostati, lungo l'asse  $x$ , di un tratto  $\Delta x$  eguale alla lunghezza media del pacchetto (confronta fig. (3.11.3)) casi (a) e (b). In queste condizioni, ovviamente, non si ha interferenza o quantomeno la visibilità delle frange è minima; alla lunghezza  $\Delta x$  si dà il nome di lunghezza di coerenza. Corrispondentemente l'intervallo di tempo:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} \quad (3.11.44)$$

prende il nome di tempo di coerenza. È interessante osservare che, sostituendo nell'equazione (3.9.29)  $l$  con  $\Delta x$  e moltiplicando e dividendo il primo membro per  $c$ , si ottiene:

$$\Delta \left( \frac{c}{\lambda} \right) \Delta t = \frac{1}{4\pi} \quad (3.11.45)$$

ossia:

$$\Delta \nu \Delta t = \frac{1}{4\pi}. \quad (3.11.46)$$

Questa relazione stabilisce una proporzionalità inversa tra il tempo di coerenza e la larghezza di banda della luce quasi monocromatica. Usando la luce della linea rossa a  $6438 \text{ \AA}$  del cadmio, la cui larghezza di banda è pari a  $0,013 \text{ \AA}$  (\*\*\*\*\*†) corrispondenti a  $\Delta \nu = 9 \cdot 10^8 \text{ sec}^{-1}$ , Michelson osservò in accordo con l'equazione (3.11.46), una lunghezza di coerenza di circa 30 cm. equivalente ad un tempo di coerenza di  $10^{-9} \text{ sec}$ .

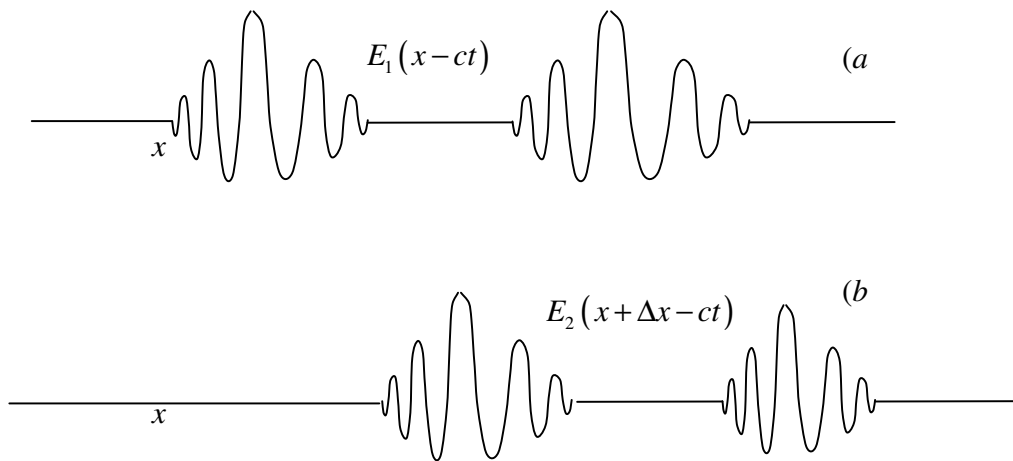


Fig. (3.11.3)

### 3.12 Irraggiamento di onde elettromagnetiche – Dipolo oscillante

Iniziamo in questo paragrafo lo studio dell'emissione di onde elettromagnetiche da parte di distribuzioni non stazionarie di cariche e correnti. Questo studio completerà i risultati del primo capitolo riguardanti i campi statici e quelli dei paragrafi 3.1 ÷ 3.10, in cui abbiamo trattato la propagazione del campo indipendentemente dalle sue sorgenti. Come primo caso concreto per sviluppare i nostri calcoli, consideriamo un dipolo elettrico oscillante; esso è di particolare importanza in quanto sia i fenomeni di irraggiamento atomici sia quelli relativi alle antenne trasmettenti possono, in un certo modo, essere considerati come dovuti a dei dipoli di momento variabile nel tempo. Benché lo strumento matematico più adatto al nostro scopo sia il vettore di Hertz (vedi paragrafo 1.8), eseguiremo i calcoli usando i potenziali  $\vec{A}$  e  $\mathcal{V}$ . In questo modo apparirà evidente come la condizione di Lorentz (1.8.11) intervenga a semplificare il problema permettendo di calcolare solo tre integrali anziché i quattro che compaiono nella (1.9.25), (1.9.26). Inoltre, tenendo conto di quanto stabilito nel paragrafo 1.11, sarà possibile confrontare attraverso le proprietà del potenziale  $\mathcal{V}$  il comportamento del dipolo oscillante con quello del dipolo statico. Ottenuti  $\vec{A}$  e  $\mathcal{V}$  le (1.8.1), (1.8.4) ci forniranno per derivazione i campi  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$ .

Date due cariche  $-q$  e  $+q$  collocate rispettivamente nei punti  $O$  e  $O + \vec{\mathcal{E}}$ , supponiamo che mentre la carica  $-q$  rimane fissa, la carica  $+q$  oscilli lungo una direzione assegnata in modo che la distanza  $\vec{\mathcal{E}}$  vari secondo la legge:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos \omega t, \quad (3.12.1)$$

o in forma complessa:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.12.2)$$

Evidentemente, al limite per  $\vec{\mathcal{E}}_0$  tendente a zero, questo sistema di cariche costituisce un dipolo il cui momento, oscillante, è dato dalla relazione.

---


$$(\text{*****}) \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{l} = \frac{(6438 \text{ \AA})^2}{30 \cdot 10^8 \text{ \AA}} = 0,013 \dots \text{ \AA}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.12.3)$$

in cui  $\vec{p}_0$  indica la quantità:

$$\vec{p}_0 = q\vec{\mathcal{E}}_0. \quad (3.12.4)$$

Non ci interessa, per il momento, considerare le forze che determinano l'oscillazione del dipolo, ciò sarà oggetto di successivo studio; le (3.12.2) e (3.12.3) vengono assunte semplicemente come dato iniziale del nostro calcolo. Ricordando la (1.2.13) e tenendo conto della (3.12.2) la densità di corrente associata al dipolo risulta essere:

$$\vec{j}(Q) = q \frac{d\vec{\mathcal{E}}}{dt} \cdot \delta[Q - (O + \vec{\mathcal{E}})] = -i\omega q \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t} \cdot \delta[Q - (O + \vec{\mathcal{E}})], \quad (3.12.5)$$

ossia, utilizzando la (3.12.4)

$$\vec{j}(Q) = -i\omega \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \cdot \delta[Q - (O + \vec{\mathcal{E}})]. \quad (3.12.6)$$

Supponendo il vettore  $\vec{\mathcal{E}}$  trascurabile di fronte alla distanza  $(Q - O)$  e calcolando mediante la (3.12.6) l'integrale che interviene nella (1.9.25) si ottiene subito l'espressione del potenziale  $\vec{A}$ ; esso, come è evidente dalla (1.9.25) è parallelo alla corrente  $\vec{j}$ . Di conseguenza, assumendo la direzione di  $\vec{j}$  come asse polare ed  $O$  come origine, le componenti sferiche di  $\vec{A}$  sono (vedi fig. (3.12.1)):

$$\begin{aligned} A_r(P, t) &= -\frac{i\omega |\vec{p}_0|}{c} \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \cos \vartheta, \\ A_\vartheta(P, t) &= \frac{i\omega |\vec{p}_0|}{c} \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \sin \vartheta, \quad . \end{aligned} \quad (3.12.7)$$

$$A_\varphi(P, t) = 0$$

Da esso è immediato ottenere le componenti sferiche del campo magnetico; si ha infatti dalla (1.8.1) e ricordando le espressioni delle componenti sferiche del rotore (vedi equazione (9.3.59)):

$$\begin{aligned}
 H_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] = 0, \\
 H_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} = 0, \\
 H_\varphi &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] = -\frac{i\omega |\vec{p}_0|}{c} \left( \frac{1}{r} - \frac{i\omega}{c} \right) \cdot \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \sin \vartheta.
 \end{aligned} \tag{3.12.8}$$

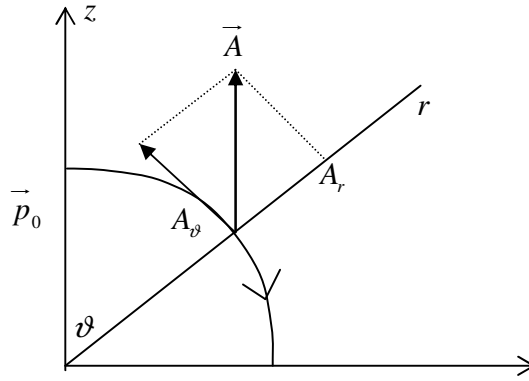


Fig. (3.12.1)

Per calcolare il potenziale  $\mathcal{V}$  occorrerebbe considerare la densità di carica associata al dipolo oscillante. Tuttavia possiamo arrivare più rapidamente al risultato utilizzando la condizione di Lorentz (1.8.11). Si ha infatti in coordinate polari (vedi equazione (9.3.57)):

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} = -c \operatorname{div} \vec{A} = -c \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right]. \tag{3.12.9}$$

Ossia, usando le (3.12.7):

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} = -|\vec{p}_0| i\omega \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \cos \vartheta \left[ \frac{1}{r} - \frac{i\omega}{c} \right]. \quad (3.12.10)$$

Integrando questa relazione si ottiene:

$$\mathcal{V}(P, t) = |\vec{p}_0| \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \cos \vartheta \left[ \frac{1}{r} - \frac{i\omega}{c} \right] + \mathcal{V}_0(P), \quad (3.12.11)$$

dove  $\mathcal{V}_0(P)$  è una funzione del posto indipendente dal tempo. Al limite per  $\omega$  tendente a zero il potenziale (3.12.11) diventa:

$$\mathcal{V}(P) = \frac{|\vec{p}_0| \cos \vartheta}{r^2} + \mathcal{V}_0(P). \quad (3.12.12)$$

Questa espressione deve coincidere con il potenziale di un dipolo statico di momento  $\vec{p}_0$ , di conseguenza, confrontando la (3.12.12) con la (1.11.8), si verifica immediatamente che  $\mathcal{V}_0(P)$  è nullo. Possiamo ora ricavare dalla (1.8.4) il campo elettrico; si ha con qualche calcolo (vedi equazione (9.3.56)):

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_r}{\partial t} = 2|\vec{p}_0| \cos \vartheta \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{i\omega}{c} \right), \\ E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vartheta} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial t} = |\vec{p}_0| \sin \vartheta \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r^2} \left[ \left( \frac{1}{r} - \frac{i\omega}{c} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} r \right], \\ E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (3.12.13)$$

Le equazioni (3.12.8), e (3.12.13), di cui solo la parte reale è per noi significativa, risolvono il problema dell'irraggiamento del dipolo; risulta subito da esse che il campo elettrico e quello magnetico sono tra loro ortogonali.

Analogamente a quanto è stato fatto nel paragrafo 3.6 per le onde cilindriche, studiamo le proprietà fisiche della soluzione ora trovata considerandone il comporta-



mento asintotico. A questo scopo supponiamo che  $r$  sia grande rispetto a  $\frac{c}{\omega}$  (confronta con la (3.6.23)); in questo modo, dalle (3.12.8) si ottiene:

$$H_{\varphi} \simeq -\left|\vec{p}_0\right| \frac{\omega^2}{c^2} \sin \vartheta \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}. \quad (3.12.14)$$

Osservando poi che, per l'ipotesi fatta, si ha:

$$r \frac{\omega^2}{c^2} \gg \frac{\omega}{c} \gg \frac{1}{r}, \quad (3.12.15)$$

Le (3.12.13) danno:

$$E_r = 0; E_{\vartheta} \simeq -\left|\vec{p}_0\right| \frac{\omega^2}{c^2} \sin \vartheta \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}. \quad (3.12.16)$$

Prendendo la parte reale della (3.12.14) e (3.12.16) si ottengono infine le espressioni asintotiche del campo elettromagnetico:

$$\begin{aligned} H_{\varphi} &\simeq -\left|\vec{p}_0\right| \frac{\omega^2}{c^2} \sin \vartheta \frac{\cos \omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}, \\ E_{\vartheta} &\simeq -\left|\vec{p}_0\right| \frac{\omega^2}{c^2} \sin \vartheta \frac{\cos \omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}. \end{aligned} \quad (3.12.17)$$

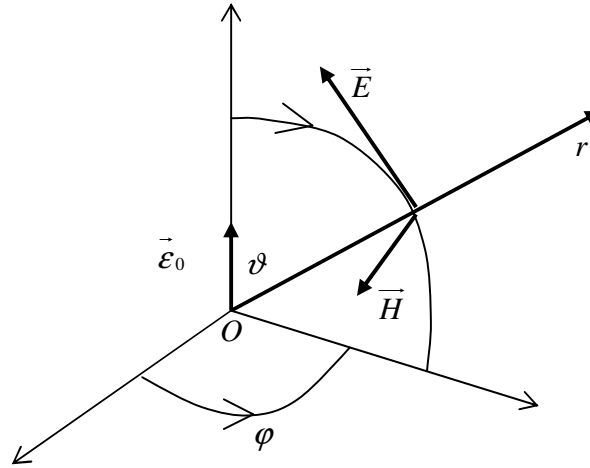


Fig. (3.12.2)

Risulta dunque che  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  sono di eguale modulo ed ortogonali alla direzione di  $r$ , oltrechè tra di loro (vedi fig. (3.12.2)). Essi si propagano sotto forma di onde TEM smorzate con legge iperbolica, la loro ampiezza è massima nel piano ortogonale all'asse del dipolo e diminuisce fino ad annullarsi quando ci si avvicina a questo asse. Ponendo  $\omega = 0$  nelle (3.12.13) si ottengono invece le componenti del campo elettrico statico:

$$E_r = \frac{2|\vec{p}_0|\cos\vartheta}{r^3}; E_\vartheta = \frac{|\vec{p}_0|\sin\vartheta}{r^3} \quad (3.12.18)$$

analogamente si vede, dalla (3.12.8), che il campo magnetico statico è nullo. È da notare che mentre la parte statica del campo diminuisce con la terza potenza di  $r$ , la parte che si propaga è solo inversamente proporzionale a  $r$ . Ne segue che a una certa distanza dal dipolo esiste una zona, detta zona delle onde, in cui il campo elettromagnetico si riduce alla sola parte propagativa.

Si può inoltre mostrare che il campo propagativo del dipolo è una soluzione dell'equazione generale delle onde (3.3.1). Per far ciò basta verificare che la soluzione in coordinate sferiche (3.5.17) può essere resa identica, con un'opportuna scelta delle costanti, alle equazioni (3.12.14) e (3.12.16) che rappresentano in forma complessa il campo. Beninteso questa verifica interessa nel campo di validità delle (3.12.14) e (3.12.16), cioè per valori di  $r$  abbastanza grandi da soddisfare la condizione (3.12.15). A questo scopo supponiamo che nella (3.5.17) siano nulli tutti i coefficienti corrispondenti a valori di  $\omega$  differenti da un valore assegnato, a valori di  $n$  differenti da zero e di  $\alpha$  differenti da uno; si ha allora:

$$f(r, \vartheta, t) = \sum_k R_{\omega, k, 1}^{(0)} \Phi_0^{(0)} \Theta_{k, 0}^{(0)} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} H_{k+\frac{1}{2}}^{(1)}\left(\frac{\omega}{c} r\right) Y_{k, 0}(\vartheta) e^{-i\omega t}, \quad (3.12.19)$$

che è una funzione indipendente da  $\varphi$ . Ricordando la formola asintotica (3.4.22), questa equazione, per valori di  $r$  grandi rispetto a  $\frac{c}{\omega}$  diventa:

$$f(r, \vartheta, t) = \sum_k R_{\omega, k, 1}^{(0)} \Phi_0^{(0)} \Theta_{k, 0}^{(0)} \cdot \sqrt{\frac{2c}{\pi\omega}} \cdot e^{-i\frac{2k+1}{4}\pi} \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} Y_{k, 0}(\vartheta). \quad (3.12.20)$$

Raggruppando i coefficienti mediante una nuova costante  $a_k$  tale che:

$$R_{\omega, k, 1}^{(0)} \Phi_0^{(0)} \Theta_{k, 0}^{(0)} \cdot \sqrt{\frac{2c}{\pi\omega}} \cdot e^{-i\frac{2k+1}{4}\pi} = -\left|\vec{p}_0\right| \frac{\omega^2}{c^2} a_k \quad (3.12.21)$$

si ottiene infine:

$$f(r, \vartheta, t) = -\left|\vec{p}_0\right| \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \sum_k a_k Y_{k, 0}(\vartheta) \right] \cdot \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \quad (3.12.22)$$

Tenuto conto che le  $Y_{k, 0}$  costituiscono un sistema completo di funzioni ortogonali, è sempre possibile determinare i coefficienti  $a_k$  in modo che nella (3.12.22) il termine in parentesi quadra rappresenti la funzione  $\sin \vartheta$ . Di conseguenza la relazione (3.12.22) risulta eguale alle (3.12.14) e (3.12.16), il che è appunto quanto si intendeva stabilire.

Calcoliamo ora il vettore di Poynting, associato al campo dato dalle equazioni (3.12.17); ricordando la (2.3.9), si ha:

$$\left|\vec{S}\right| = \frac{\left|\vec{p}_0\right|^2 \omega^4}{4\pi c^3} \sin^2 \vartheta \frac{\cos^2 \omega(t-\frac{r}{c})}{r^2}. \quad (3.12.23)$$

L'intensità di radiazione, ossia il valore medio di  $\left|\vec{S}\right|$  su un periodo è:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| dt = \frac{|\vec{p}_0|^2 \omega^4}{8\pi c^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2}. \quad (3.12.24)$$

Questa relazione stabilisce che l'intensità  $\mathcal{I}$  decresce, come è intuitivo, col quadrato della distanza mentre varia come  $\sin^2 \vartheta$  quando ci si allontana dall'asse del dipolo. L'energia totale media irradiata per unità di tempo, ossia la potenza media  $\mathcal{W}$  irradiata dal dipolo, può essere facilmente ottenuta integrando la (3.12.24) su una sfera di raggio  $r$  con centro nel dipolo:

$$\mathcal{W} = \int_{4\pi} \mathcal{I} r^2 d\Omega = \frac{|\vec{p}_0|^2 \omega^4}{8\pi c^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{|\vec{p}_0|^2 \omega^4}{3c^3}. \quad (3.12.25)$$

Questo risultato può essere espresso in altra forma introducendo l'accelerazione quadratica media  $a_m$  della carica oscillante. Si ha infatti dalla (3.12.1):

$$\frac{d^2 \vec{\mathcal{E}}}{dt^2} = -\vec{\mathcal{E}}_0 \omega^2 \cos \omega t; \quad (3.12.26)$$

da cui, prendendo il quadrato del modulo, mediando su un periodo e ricordando la (3.12.4), si ottiene<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>:

$$a_m^2 = \frac{1}{2} |\vec{\mathcal{E}}_0|^2 \omega^4 = \frac{|\vec{p}_0|^2 \omega^4}{2q^2}. \quad (3.12.27)$$

La (3.12.25) diventa perciò:

$$\mathcal{W} = \frac{2}{3} \frac{q^2 a_m^2}{c^3}, \quad (3.12.28)$$

(§§§§§§§§§§) Si ricordi che  $\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3}$  [n.d.c.].

(\*\*\*\*\*<sup>2</sup>)  $a_m^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left| \frac{d^2 \vec{\mathcal{E}}}{dt^2} \right|^2 dt = |\vec{\mathcal{E}}_0|^2 \omega^4 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2} |\vec{\mathcal{E}}_0|^2 \omega^4$  [n.d.c.].

questa equazione è di particolare importanza perché, come vedremo in seguito, l'irraggiamento di una carica in movimento qualsiasi dipende dal modulo dell'accelerazione istantanea proprio attraverso una relazione della forma (3.12.28).

### 3.13 Oscillazioni smorzate – Allargamento delle linee spettrali

Nel precedente paragrafo abbiamo studiato l'irraggiamento del dipolo supponendo costante l'ampiezza di oscillazione  $\vec{\epsilon}_0$ . Questa ipotesi, tuttavia, richiede alcune precisazioni; è evidente infatti che l'emissione di un'onda elettromagnetica fa diminuire l'energia posseduta dalla carica oscillante e di conseguenza il valore di  $\vec{\epsilon}_0$ . Ciò, beninteso, a patto che nulla intervenga a compensare l'energia persa per irraggiamento. Lo smorzamento delle oscillazioni del dipolo implica, ovviamente, l'esistenza di una forza frenante che può essere attribuita alla reazione del campo elettromagnetico sulla carica. Non ci interessa, per ora, considerare questa forza, ciò verrà fatto in modo generale nel paragrafo 4.8; nostro scopo attuale è lo studio delle caratteristiche dell'emissione nell'ipotesi che  $\vec{\epsilon}_0$  effettivamente decresca a causa dell'irraggiamento.

Dobbiamo, come prima cosa, stabilire il bilancio tra l'energia irradiata e l'energia meccanica  $H$  posseduta dalla carica oscillante; quest'ultima, nel caso di massima elongazione, cioè per  $\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_0$ , coincide coll'energia potenziale della forza elastica che determina l'oscillazione del dipolo. Si ha pertanto:

$$H = k \int_0^{|\vec{\epsilon}_0|} \vec{\epsilon} \cdot d\vec{\epsilon} = \frac{k}{2} |\vec{\epsilon}_0|^2, \quad (3.13.1)$$

dove  $k$  è la costante della forza elastica la quale è legata alla massa  $m$  della particella oscillante e alla frequenza angolare  $\omega$  dalla ben nota relazione:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (3.13.2)$$

Mediante la (3.12.4) e la (3.13.2), la (3.13.1) può essere scritta nella forma:

$$H = \frac{m\omega^2}{2q^2} |\vec{p}_0|^2. \quad (3.13.3)$$

Nell'ipotesi che lo smorzamento sia piccolo, ossia supponendo che in un tempo pari al periodo  $T$  dell'oscillatore, l'ampiezza  $\vec{\epsilon}_0$  diminuisca di una quantità trascurabile.

rabile, si può calcolare il decremento di  $H$  eguagliandolo alla potenza media irradiata. In questo modo, ricordando la (3.12.25), si ha:

$$-\frac{dH}{dt} = \frac{|\vec{p}_0|^2 \omega^4}{3c^2}, \quad (3.13.4)$$

da cui, utilizzando la (3.13.3):

$$\frac{d|\vec{p}_0|}{dt} = -\frac{q^2 \omega^2}{3mc^3} |\vec{p}_0|. \quad (3.13.5)$$

Ponendo:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{3mc^3}{q^2 \omega^2} \quad (3.13.6)$$

ed integrando, si ottiene dalla (3.13.5):

$$|\vec{p}_0| = |\vec{p}_{0i}| e^{-\gamma t} \quad (t \geq 0), \quad (3.13.7)$$

dove  $\vec{p}_{0i}$  indica il valore di  $\vec{p}_0$  all'istante  $t = 0$  in cui il dipolo inizia ad oscillare. La (3.12.3) va perciò sostituita dalle equazioni:

$$\vec{p} = 0 \quad (t < 0), \quad (3.13.8)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_{0i} e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} \quad (t \geq 0), \quad (3.13.9)$$

le quali rappresentano un'oscillazione smorzata. È evidente che è essenziale supporre, come appunto si è fatto nella (3.13.8), che per  $t < 0$  il dipolo sia in quiete; diversamente l'equazione (3.13.9) fornirebbe, al decrescere di  $t$ , dei valori di  $\vec{p}$  arbitrariamente grandi, il che manifestamente è cosa assurda. La costante  $\gamma^{-1}$  è una quantità, con dimensioni di un tempo, che prende il nome di vita media dell'oscillatore; essa rappresenta il tempo durante il quale l'ampiezza di oscillazione si riduce di un fattore  $e^{-1}$ .

L'ipotesi di un piccolo smorzamento equivale alla condizione:

$$\frac{1}{\gamma} \gg T, \quad (3.13.10)$$

cioè, ricordando le (3.1.25) ÷ (3.1.28) e la (3.13.6):

$$\frac{q^2}{mc^2} \ll \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (3.13.11)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della radiazione emessa. La quantità  $\frac{q^2}{mc^2}$ , che ha le dimensioni di una lunghezza, è il cosiddetto raggio classico della carica  $q$ ; quando  $q$  corrisponde ad una carica elettronica essa vale  $2,818 \cdot 10^{-13}$  cm. L'ipotesi fatta equivale, perciò, a supporre la lunghezza d'onda grande rispetto al raggio classico della carica oscillante. Nel caso di radiazioni luminose ( $\lambda \approx 10^{-4} \div 10^{-5}$  cm), emesse da oscillatori in cui le cariche mobili sono elettroni, essa senz'altro è verificata con largo margine.

Esaminiamo ora l'effetto della legge del moto (3.13.8), (3.13.9) sulle onde irradiate dal dipolo. È manifesto che, nell'ipotesi di un piccolo smorzamento, tutto si ridurrà a scrivere delle equazioni simili alle (3.12.16), in cui però il momento  $\vec{p}_0$  è smorzato con legge esponenziale. A partire dall'istante  $t = \frac{r}{c}$ , in cui l'onda emessa all'istante  $t = 0$  raggiunge i punti situati a distanza  $r$ , il campo elettrico sarà pertanto rappresentato dall'equazione asintotica:

$$E_{\vartheta} \approx -\left|\vec{p}_0\right| \frac{\omega^2}{c^2} \sin \vartheta e^{-\gamma t} \frac{e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r} \quad \left(t \geq \frac{r}{c}\right), \quad (3.13.12)$$

mentre, prima di questo istante:

$$E_{\vartheta} = 0 \quad \left(t < \frac{r}{c}\right). \quad (3.13.13)$$

Si può mostrare che, a causa del fattore di smorzamento, la composizione spettrale dell'onda elettromagnetica risulta alterata; essa, anziché essere rigorosamente mono-



cromatica, è costituita da una banda di frequenze con centro in  $\omega$ . Per far ciò consideriamo la variabile  $t'$ , già introdotta nel paragrafo 1.9 (vedi equazione (1.9.21)):

$$t' = t - \frac{r}{c}, \quad (3.13.14)$$

ed introducendo la costante:

$$E_{\vartheta}^{(0)} = -\left| \vec{p}_0 \right| \frac{\omega^2}{c^2} \sin \vartheta \frac{e^{-\gamma \frac{r}{c}}}{r}; \quad (3.13.15)$$

in questo modo la (3.13.12) può essere scritta in funzione di  $t'$  nella forma:

$$E_{\vartheta} = E_{\vartheta}^{(0)} e^{-(\gamma + i\omega)t'}. \quad (3.13.16)$$

Sviluppiamo ora la (3.13.16) in integrale di Fourier (vedi paragrafo 9.5, equazione (9.5.19)):

$$E_{\vartheta} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\omega') e^{-i\omega' t'} d\omega', \quad (3.13.17)$$

in cui  $K(\omega')$  è la funzione che rappresenta la composizione spettrale in questione. Dall'equazione (9.5.20) e tenendo conto che la (3.13.13) stabilisce che  $E_{\vartheta}$  è nullo per  $t' < 0$ , si ha:

$$K(\omega') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E_{\vartheta} e^{i\omega' t'} dt', \quad (3.13.18)$$

Ossia, usando la (3.13.16):

$$\begin{aligned} K(\omega') &= \frac{E_{\vartheta}^{(0)}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{[i(\omega' - \omega) - \gamma]t'} dt' = \\ &= -\frac{E_{\vartheta}^{(0)}}{2\pi} \frac{1}{i(\omega' - \omega) - \gamma} = \frac{E_{\vartheta}^{(0)}}{2\pi} \frac{e^{ig^{-1} \frac{\omega' - \omega}{\gamma}}}{\sqrt{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2}} \end{aligned} \quad (3.13.19)$$

Sostituendo nella (3.13.17) il campo propagativo assume la forma:

$$E_{\vartheta}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{E_{\vartheta}^{(0)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t'^{-i\left[\omega'\left(t - \frac{r}{c}\right) - tg^{-1}\frac{\omega' - \omega}{\gamma}\right]}}{\sqrt{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2}} d\omega', \quad (3.13.20)$$

esso è pertanto costituito da uno spettro continuo di onde con ampiezze di densità:

$$A(\omega') = \frac{E_{\vartheta}^{(0)}}{2\pi\sqrt{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2}}; \quad (3.13.21)$$

il termine:  $tg^{-1}\frac{\omega' - \omega}{\gamma}$  rappresenta invece una costante di fase. Mediante la (3.9.9), l'intensità associata all'onda di frequenza angolare  $\omega'$  risulta essere:

$$\mathcal{I}(\omega') = \frac{c}{8\pi} \left( \frac{E_{\vartheta}^{(0)}}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2}; \quad (3.13.22)$$

ponendo:

$$\frac{c}{8\pi} \left( \frac{E_{\vartheta}^{(0)}}{2\pi\gamma} \right)^2 = \mathcal{I}_m, \quad (3.13.23)$$

l'espressione (3.13.22) assume la forma:

$$\mathcal{I}(\omega') = \mathcal{I}_m \frac{\gamma^2}{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2}. \quad (3.13.24)$$

La funzione  $\mathcal{I}(\omega')$ , che prende il nome di lorentziana, è rappresentata in fig. (3.113.1). Il suo massimo valore  $\mathcal{I}_m$  corrisponde ad  $\omega' = \omega$ ; si ottiene subito inoltre:

$$\mathcal{I}(\omega + \gamma) = \frac{1}{2} \mathcal{I}_m, \quad (3.13.25)$$

per cui la costante  $\gamma$  rappresenta anche la semiampiezza della distribuzione  $\mathcal{I}(\omega)$  a metà altezza massima. In altri termini: il reciproco della vita media dell'oscillatore è



dove  $w$  è l'energia associata al fotone. L'interpretazione quantistica di questa relazione è la seguente: l'oscillatore irradia fotoni la cui energia è affetta da una indeterminazione  $\Delta w$ ; l'istante in cui ciò avviene è contenuto nell'intervallo di tempo  $2\Delta t$ , ossia è affetto a sua volta dall'indeterminazione temporale  $\Delta t$ . Il prodotto delle due indeterminazioni è costante e vale  $\frac{h}{2\pi}$ . Questo appunto è l'enunciato del principio di indeterminazione di Heisenberg nel caso in cui voglia studiare la dipendenza dal tempo dell'energia di una particella. Esso completa il risultato ottenuto nel paragrafo 3.9 in relazione alla propagazione di un pacchetto d'onde.

Un'altra importante peculiarità della distribuzione spettrale (3.12.24) può essere ottenuta esprimendo la semiampiezza  $\gamma$  in termini di lunghezza d'onda. ricordando la (3.1.28) si ha infatti:

$$\gamma = \Delta\omega = \left| \Delta \left( \frac{2\pi c}{\lambda} \right) \right| = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \Delta\lambda, \quad (3.13.28)$$

per cui, tenendo conto della (3.13.6):

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{q^2 \omega^2}{3mc^3} = \frac{2\pi}{3} \frac{q^2}{mc^2}. \quad (3.13.29)$$

Questa equazione stabilisce che la semiampiezza  $\Delta\lambda$  è indipendente dalla frequenza ed è data, a parte il fattore  $\frac{2\pi}{3}$ , dal raggio classico della carica  $q$ ; quando  $q$  coincide con la carica elettronica [l'ampiezza  $2*$ ] (\*\*\*\*\*))  $\Delta\lambda$  è una costante universale e vale  $0,000116\text{\AA}$ .

È da rilevare infine che, oltre alla reazione del campo elettromagnetico, altre forze, dovute ad esempio alla collisione della carica oscillante con la circostante materia, possono intervenire a smorzare le oscillazioni del dipolo. Indicando con  $T$  la costante di smorzamento complessiva, vale ancora una relazione analoga alla (3.12.24) in cui, tuttavia,  $T$  sostituisce  $\gamma$ . Ovviamente la larghezza della riga spettrale è data in questo caso da  $T$ .

---

(\*\*\*\*\*) [n.d.c.].

### 3.14 Dipolo oscillante in presenza di un campo magnetico – Effetto Zeeman

Vogliamo ora studiare l'irraggiamento di un dipolo oscillante sottoposto all'azione di un campo magnetico statico. Come nel paragrafo 3.12, supponiamo che il dipolo sia costituito da una carica  $-q$  fissa nel punto  $O$  e da una carica  $+q$  mobile. Ammettendo per maggiore generalità, che esista anche un campo elettrico statico ed utilizzando una terna di assi con origine  $O$  e l'asse  $z$  parallelo al campo magnetico, le equazioni per il moto della carica  $+q$  sono:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + qE_x + \frac{q}{c} \dot{y}H \\ m\ddot{y} &= -ky + qE_y - \frac{q}{c} \dot{x}H \\ m\ddot{z} &= -kz + qE_z \end{aligned} \right\} \quad (3.14.1)$$

dove  $k$  ed  $m$  indicano rispettivamente, come nel paragrafo precedente, la costante della forza elastica e la massa della particella oscillante. Introducendo le quantità:

$$\omega_H = \frac{qH}{2mc} \quad (3.14.2)$$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{qE_x}{k} \\ y_0 &= \frac{qE_y}{k} \\ z_0 &= \frac{qE_z}{k} \end{aligned} \right\} \quad (3.14.3)$$

e ponendo, analogamente alla (3.13.2)

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad (3.14.4)$$

le equazioni (3.14.1) possono essere scritte nella forma:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 (x - x_0) - 2\omega_H \dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 (y - y_0) + 2\omega_H \dot{x} &= 0 \\ \ddot{z} + \omega_0^2 (z - z_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14.5)$$

Per dedurre la soluzione stazionaria delle (3.14.5), procedendo come fatto nel paragrafo 3.12 (confronta equazioni (3.12.2)), poniamo:

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= \varepsilon_{0x} e^{-i\omega t} \\ y - y_0 &= \varepsilon_{0y} e^{-i\omega t} \\ z - z_0 &= \varepsilon_{0z} e^{-i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (3.14.6)$$

In questo modo le prime due delle (3.14.5) diventano:

$$\left. \begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) \varepsilon_{0x} + 2i\omega\omega_H \varepsilon_{0y} &= 0 \\ -2i\omega\omega_H \varepsilon_{0x} + (\omega_0^2 - \omega^2) \varepsilon_{0y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14.7)$$

mentre la terza si riduce a:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \varepsilon_{0z} = 0 \quad (3.14.8)$$

Da quest'ultima equazione, supponendo  $\varepsilon_{0z}$  differente da zero e tenendo conto che  $\omega$  è per definizione una quantità positiva, si ottiene immediatamente:

$$\omega = \omega_0 \quad (3.14.9)$$

e, di conseguenza:

$$z = z_0 + \varepsilon_{0z} e^{-i\omega_0 t}. \quad (3.14.10)$$

Analogamente se si vuole che  $\varepsilon_{0x}$  ed  $\varepsilon_{0y}$  non siano nulle deve essere:

$$\text{Det} \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & 2i\omega\omega_H \\ -2i\omega\omega_H & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.14.11)$$

e cioè:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \mp 2\omega\omega_H \quad (3.14.12)$$

Quando l'emissione del dipolo avviene nell'intervallo delle radiazioni ottiche la quantità  $\omega_H$ , in generale, è piccola rispetto ad  $\omega_0$ . Per un elettrone immerso in un campo di 1000 Gauss, ad esempio,  $[2*]^{(§§§§§§§§§§§§§§§§)} \omega_H$  vale  $1,76 \cdot 10^{10} \text{ sec}^{-1}$  mentre  $\omega_0$  può andare da  $2 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1}$  per l'infrarosso lontano a  $10^{17} \text{ sec}^{-1}$  per l'ultravioletto estremo (confronta tabella (3.1.1)). In questo caso possiamo scrivere pertanto:

$$\omega = \omega_0 \pm \omega_H \quad (3.14.13)$$

D'altra parte, inserendo la (3.14.12) in una qualunque delle (3.14.7), si ha:

$$\mathcal{E}_{0y} = \mp i \mathcal{E}_{0x} = e^{\mp i \frac{\pi}{2}} \mathcal{E}_{0x} \quad (3.14.14)$$

e le prime due delle (3.14.6) diventano:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \mathcal{E}_{0x} e^{-i(\omega_0 \pm \omega_H)t} \\ y &= y_0 + \mathcal{E}_{0x} e^{-i[(\omega_0 \pm \omega_H)t \pm \frac{\pi}{2}]} \end{aligned} \right\} \quad (3.14.15)$$

Queste due equazioni, assieme alla (3.14.10) costituiscono la soluzione richiesta; indicando con  $\mathcal{E}_{\parallel 0}, \mathcal{E}_{\perp 0}$  rispettivamente le quantità  $\mathcal{E}_{0z}, \mathcal{E}_{0x}$  e prendendo le parti reali, esse assumono la forma:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \mathcal{E}_{0\perp} \cos(\omega_0 \pm \omega_H)t \\ y &= y_0 \mp \mathcal{E}_{0\perp} \sin(\omega_0 \pm \omega_H)t \\ z &= z_0 + \mathcal{E}_{0\parallel} \cos \omega_0 t \end{aligned} \right\} \quad (3.14.16)$$

---

(§§§§§§§§§§§§§§§§) [n.d.c.].

Possiamo dunque concludere che la carica mobile esegue un movimento ad elica risultante dalla composizione di una rotazione con frequenza angolare  $\omega_0 + \omega_H$  in verso [anti]orario<sup>(\*\*\*\*\*)</sup> (o con frequenza  $\omega_0 - \omega_H$  in verso [anti]orario) nel piano ortogonale ad  $\vec{H}$  e di una oscillazione con frequenza  $\omega_0$  lungo  $\vec{H}$ . Si tratta perciò di un moto non periodico il quale, tuttavia, diventa periodico rispetto ad un sistema di riferimento che ruoti attorno alla direzione di  $\vec{H}$  con velocità angolare  $\omega_H$  (o rispettivamente  $-\omega_H$ ). Questo risultato è noto sotto il nome di teorema di Larmor. Il centro del movimento, inoltre, non coincide con l'origine  $O$  in cui sta la carica in quiete, ma è spostato nel punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  per effetto del campo elettrico. Si deve notare, però, che quest'ultima circostanza è inessenziale ai nostri scopi in quanto corrisponde all'intervento di una componente statica nel momento dipolare delle due cariche mentre l'irraggiamento dipende solo dalla parte oscillante.

Per determinare il campo irradiato è sufficiente applicare a ciascuna delle componenti del dipolo i risultati del paragrafo 3.12. Consideriamo, pertanto, il vettore elettrico delle onde irradiate nelle direzioni parallela ed ortogonale al campo magnetico. Chiaramente ricordando la (3.12.17) e ponendo:

$$p_{0\perp} = q\mathcal{E}_{0\perp}, \quad (3.14.17)$$

l'onda emessa lungo la direzione di  $\vec{H}$  è espressa dalle equazioni<sup>(+++++)</sup>:

$$E_{\parallel x} = p_{0\perp} \frac{(\omega_0 \pm \omega_H)^2}{c^2} \frac{\cos[(\omega_0 \pm \omega_H)(t - \frac{r}{c})]}{r}, \quad (3.14.18)$$

$$E_{\parallel y} = \mp p_{0\perp} \frac{(\omega_0 \pm \omega_H)^2}{c^2} \frac{\sin[(\omega_0 \pm \omega_H)(t - \frac{r}{c})]}{r} \quad (3.14.19)$$

---

(\*\*\*\*\*) guardando nel verso di  $z$  [n.d.c.].

(+++++) Per la componente  $x$  del dipolo, indicando  $\mathcal{E}_{0x}$  con  $\mathcal{E}_{0\perp}$ , l'onda viene emessa nella direzione  $z$  (quindi con componenti del campo  $x$  e  $y$ ), corrispondente a  $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$  nella (3.12.17); sostituendo allora questo valore nella (3.12.17), e ricordando la (3.14.13) essendo  $\mathcal{E}_{0x} \neq 0$ , si ottiene per la componente  $x$  del campo la (3.14.18). Per la componente  $y$ , essendo per le (3.14.14) e (3.14.13)  $\mathcal{E}_{0y} = e^{\mp i\frac{\pi}{2}} \mathcal{E}_{0x} = e^{\mp i\frac{\pi}{2}} \mathcal{E}_{0\perp} \neq 0$ , si trova la (3.14.19) [n.d.c.].



dove  $E_{\parallel x}$  ed  $E_{\parallel y}$  indicano le componenti del campo che si propaga nella direzione dell'asse  $z$ . Si tratta, quindi, di due onde, di frequenze angolari  $\omega_0 + \omega_H$  e  $\omega_0 - \omega_H$  polarizzate circolarmente in versi opposti (onde  $c$ ). Analogamente, ponendo:

$$p_{0\parallel} = q\mathcal{E}_{0\parallel}, \quad (3.14.20)$$

le componenti del campo dell'onda emessa ortogonalmente ad  $\vec{H}$  nella direzione dell'asse  $y$  sono<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>:

$$E_{\perp x} = p_{0\perp} \frac{(\omega_0 \pm \omega_H)^2}{c^2} \frac{\cos\left[(\omega_0 \pm \omega_H)\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]}{r}, \quad (3.14.21)$$

$$E_{\perp z} = p_{0\parallel} \frac{\omega_0^2}{c^2} \frac{\cos \omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \quad (3.14.22)$$

In questo caso la radiazione è costituita da tre differenti tipi di onde; due<sup>(\*\*\*\*\*)</sup> di rispettive frequenze angolari  $\omega_0 + \omega_H$  ed  $\omega_0 - \omega_H$ , polarizzate linearmente nel piano passante per il campo magnetico e la direzione di propagazione (onde  $\sigma$ ) ed una<sup>(\*\*\*\*\*)</sup> terza (onda  $\pi$ ), di frequenza angolare  $\omega_0$ , polarizzata in un piano ortogonale ad  $\vec{H}$ .

La fig. (3.14.1) illustra schematicamente la situazione nei due casi in cui il vettore di propagazione  $\vec{\tau}$  è parallelo od ortogonale al campo magnetico. Considerando le onde emesse ortogonalmente ad  $\vec{H}$  ma in una direzione differente da quella dell'asse  $y$  si trovano gli stessi risultati salvo, per le onde di frequenze angolari  $\omega_0 \pm \omega_H$ , una co-

<sup>(\*\*\*\*\*)</sup> Per la componente  $z$  del dipolo, indicando  $\mathcal{E}_{0z}$  con  $\mathcal{E}_{0\parallel}$ , l'onda viene emessa lungo  $y$  perpendicolarmente alla direzione del dipolo (quindi con componenti del campo  $x$  e  $z$ ), corrispondente a  $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$  nella (3.12.17); la componente  $x$  del campo, data dalla (3.14.21), è la stessa già ricavata sopra ed espressa dalla (3.14.18), mentre la componente  $z$ , ricordando la (3.14.9) essendo  $\mathcal{E}_{0z} \neq 0$ , è data dalla (3.14.22) [n.d.c.].

<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>  $E_{\perp x}$  [n.d.c.].

<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>  $E_{\perp z}$  [n.d.c.].

formalmente analoghe alle (3.14.18) e (3.14.19) [n.d.c.].

L'effetto del campo magnetico sull'emissione di radiazioni elettromagnetiche venne

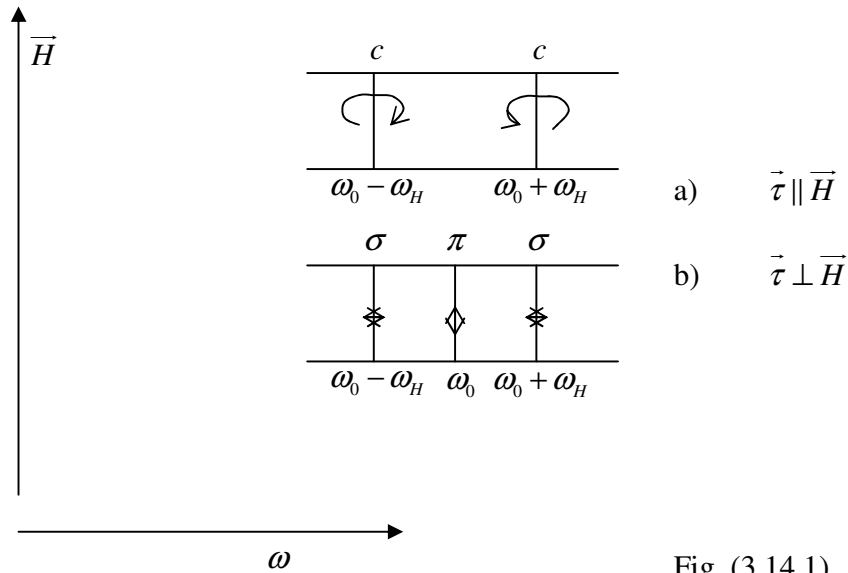


Fig. (3.14.1)

previsto da Faraday ed osservato da P. Zeeman nel 1896 sulla luce gialla del sodio. Successivamente l'effetto venne riscontrato anche sull'emissione del cadmio e dello zinco. Fu pure possibile ottenere, attraverso la misura di  $\omega_H$ , il valore del rapporto tra la carica e la massa dell'elettrone in accordo coi risultati delle esperienze sul moto degli elettroni in un campo elettromagnetico. Ulteriori studi, tuttavia, ben presto dimostrarono che l'effetto Zeeman testé descritto (effetto Zeeman normale) è un caso piuttosto eccezionale. In generale si ottiene un multipletto costituito da parecchie linee spettrali (effetto Zeeman anormale). L'interpretazione di questo fenomeno fu possibile solo dopo la scoperta (G. E. Uhlenbeck e S. Goudsmith, 1925) dell'esistenza di un momento angolare intrinseco dell'elettrone (vedi paragrafo 4.0).

### 3.15 Irraggiamento di un'antenna lineare

Il presente paragrafo è dedicato allo studio dell'irraggiamento di uno dei più semplici, ma anche più significativi, tipi di antenna lineare. Precisamente consideriamo (vedi fig. (3.15.1)) il sistema formato da due barre metalliche di lunghezza  $\frac{d}{2}$  allineate e collegate, per le estremità contigue, a un generatore di oscillazioni elettriche funzionante con frequenza angolare  $\omega$ . Le barre sono sede di una corrente elettrica di densità:

$$\vec{j} = \vec{k} \frac{I_0}{S} e^{-i\omega t} \sin \frac{\omega}{c} \left( |z| - \frac{d}{2} \right), \quad (3.15.1)$$

dove  $S$  è la sezione delle barre e  $I_0$  la massima intensità di corrente che le percorre. Risulta subito, dall'equazione (3.15.1), che la corrente alle estremità opposte delle due barre è nulla; la (3.15.1), inoltre, implica che la corrente percorra le barre sotto forma di onde che si propagano con velocità  $c$ . Non ha importanza, per i nostri scopi attuali, stabilire le modalità di questa propagazione; ciò, più propriamente, riguarda lo studio dei fenomeni di conduzione. Interessa invece valutare il campo elettromagnetico, prodotto dalla corrente che percorre l'antenna, in punti situati a grande distanza da essa.

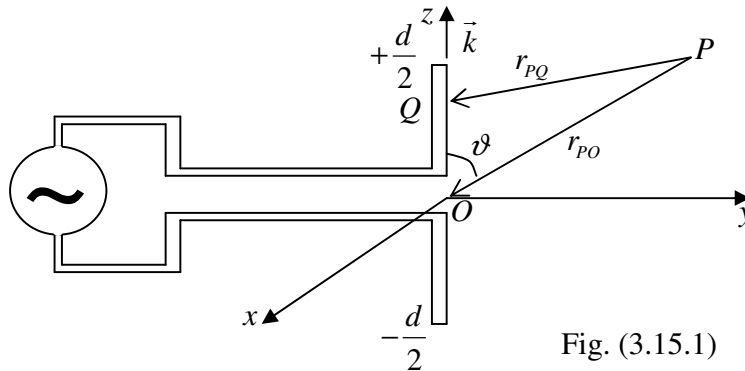


Fig. (3.15.1)

Per sviluppare i calcoli utilizziamo il metodo del vettore di Hertz introdotto nel paragrafo 1.8. Occorre innanzitutto ricavare il vettore  $\vec{Q}$ ; ricordando la (1.8.19), dalla (3.15.1) si ottiene:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} = \bar{k} \frac{I_0}{S} e^{-i\omega t} \sin \frac{\omega}{c} \left( |z| - \frac{d}{2} \right), \quad (3.15.2)$$

da cui integrando:

$$\bar{Q} = \bar{k} \frac{I_0}{S} \frac{ie^{-i\omega t}}{\omega} \sin \frac{\omega}{c} \left( |z| - \frac{d}{2} \right). \quad (3.15.3)$$

Mediante la (1.9.19) si ha pertanto:

$$\bar{Z}(P) = \int_V \frac{\bar{Q}(Q, t - \frac{r_{PQ}}{c})}{r_{PQ}} dV_Q = \bar{k} \frac{I_0}{S} \frac{i}{\omega} \int_V \frac{e^{-i\omega(t - \frac{r_{PQ}}{c})} \sin \frac{\omega}{c} \left( |z| - \frac{d}{2} \right)}{r_{PQ}} dV_Q \quad (3.15.4)$$

dove l'integrazione è estesa su tutto il volume occupato dalle sbarre dell'antenna. Supponendo la distanza  $r_{PQ}$  grande rispetto a  $d$  si può scrivere<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>:

$$r_{PQ} = r_{PO} + \left( \text{grad}_Q r_{PQ} \cdot \vec{k} \right)_{Q=O} |Q-O| + \dots \simeq r_{PO} + \frac{r_{PO} \cdot \vec{k}}{r_{PO}} z = r_{PO} - \cos \vartheta z; \quad (3.15.5)$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo tra la direzione di  $P-O$  e l'asse dell'antenna (vedi fig. (3.15.1)). Inserendo questa relazione approssimata nella (3.15.4) e trascurando i termini proporzionali alle potenze di  $r_{PO}^{-1}$  superiori alla prima, l'espressione di  $\bar{Z}$  diventa:

$$\bar{Z}(P) \simeq \bar{k} \frac{I_0}{S\omega} \frac{ie^{-i\omega(t - \frac{r_{PO}}{c})}}{r_{PO}} \int_V e^{-i\frac{\omega}{c} \cos \vartheta z} \sin \frac{\omega}{c} \left( |z| - \frac{d}{2} \right) dV_Q. \quad (3.15.6)$$

Tenendo conto che:

$$dV = S dz, \quad (3.15.7)$$

(\*\*\*\*\*) Sviluppando in serie intorno a  $Q=O$  con  $P$  fissato:

$$r_{PQ} = r_{PQ}(Q=O) + \left[ \frac{\partial r_{PQ}}{\partial (Q-O)} \right]_{Q=O} \cdot (Q-O) + \dots = r_{PO} + \left[ \frac{\partial r_{PQ}}{\partial (Q-O)} \cdot \vec{k} \right]_{Q=O} |Q-O| + \dots$$

[n.d.c.].



la (3.15.9) diventa infine:

$$rot \vec{Z} = \vec{i}_\varphi \frac{2I_0}{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\omega d}{2c}\right) - \cos\left(\frac{\omega d}{2c} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}. \quad (3.15.12)$$

Applicando la (1.8.27) possiamo ora dedurre l'espressione asintotica del campo magnetico; si ha:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} rot \vec{Z} = -\vec{i}_\varphi \frac{2I_0}{c} \frac{ie^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\omega d}{2c}\right) - \cos\left(\frac{\omega d}{2c} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}. \quad (3.15.13)$$

Analogamente, applicando la (1.8.26) e ricordando che, per la (1.8.19), il vettore  $\vec{Q}$  è differente da zero solo dove esiste la distribuzione di corrente, ossia nel volume interno alle barre dell'antenna, si ottiene:

$$\vec{E} = rot rot \vec{Z} = rot \left[ \vec{i}_\varphi \frac{2I_0}{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\omega d}{2c}\right) - \cos\left(\frac{\omega d}{2c} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \right]. \quad (3.15.14)$$

Tenendo conto che<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>:

$$\vec{i}_r \wedge \vec{i}_\varphi = -\vec{i}_\vartheta \quad (3.15.15)$$

ed utilizzando la (9.3.20) e la (3.15.10), l'espressione asintotica di  $\vec{E}$  risulta essere pertanto:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= grad \left[ \frac{2I_0}{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\omega d}{2c}\right) - \cos\left(\frac{\omega d}{2c} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \right] \wedge \vec{i}_\varphi = \\ &= -\vec{i}_\vartheta \frac{2I_0}{c} \frac{ie^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\omega d}{2c}\right) - \cos\left(\frac{\omega d}{2c} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \end{aligned} \quad (3.15.16)$$

Basta ora prendere la parte reale delle (3.15.13) e (3.15.16) per ottenere le espressioni asintotiche finali di  $\vec{E}$  e di  $\vec{H}$ :

---

<sup>(\*\*\*\*\*)</sup> Vedi nota precedente [n.d.c.].

$$\begin{aligned}\vec{H}(P,t) &\cong -\vec{i}_\varphi \frac{2I_0}{c} \frac{\sin \omega(t - \frac{r}{c})}{r} \frac{\cos(\frac{\omega d}{2c}) - \cos(\frac{\omega d}{2c} \cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \\ \vec{E}(P,t) &\cong -\vec{i}_\vartheta \frac{2I_0}{c} \frac{\sin \omega(t - \frac{r}{c})}{r} \frac{\cos(\frac{\omega d}{2c}) - \cos(\frac{\omega d}{2c} \cos \vartheta)}{\sin \vartheta}.\end{aligned}\quad (3.15.17)$$

Le equazioni testè ottenute sono paragonabili alle (3.12.17): il campo si propaga sotto forma di onde trasversali,  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  sono tra loro ortogonali e di eguale modulo. La dipendenza da  $\vartheta$ , però, è alquanto complessa e contiene, come parametro, la lunghezza dell'antenna.

Per completare questi risultati, non resta che scrivere l'espressione del vettore di Poynting; ricordando la (2.3.9) e tenendo conto che i versori  $\vec{i}_r$ ,  $\vec{i}_\vartheta$ ,  $\vec{i}_\varphi$  formano una terna destrorsa, essa è:

$$\vec{S} = \frac{I_0^2}{\pi c} \vec{i}_r \frac{\sin^2 \omega(t - \frac{r}{c})}{r^2} \left[ \frac{\cos(\frac{\omega d}{2c}) - \cos(\frac{\omega d}{2c} \cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \right]^2. \quad (3.15.18)$$

Ne segue che l'intensità di radiazione vale:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| dt = \frac{I_0^2}{2\pi c r^2} \left[ \frac{\cos(\frac{\omega d}{2c}) - \cos(\frac{\omega d}{2c} \cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \right]^2. \quad (3.15.19)$$

Questa equazione richiede un'analisi accurata per stabilire, in relazione alla lunghezza dell'antenna, la dipendenza da  $\vartheta$  dell'energia irradiata. Osserviamo innanzitutto che si può scrivere, ricordando la (3.1.28):

$$\frac{\omega d}{2c} = \frac{\pi d}{\lambda}. \quad (3.15.20)$$

Quando la lunghezza dell'antenna è piccola rispetto alla lunghezza d'onda  $\lambda$ , la (3.15.19) diventa, sviluppando in serie i coseni:

$$\mathcal{J} = \frac{I_0^2}{2\pi c r^2} \left[ \frac{1}{8} \frac{\omega^2 d^2}{c^2} \frac{1 - \cos^2 \vartheta}{\sin \vartheta} \right]^2 = \left( \frac{I_0 d^2}{4c} \right)^2 \frac{\omega^4}{8\pi c^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2}; (d \approx 0). \quad (3.15.21)$$



Ne segue, confrontando con la (3.12.24), che l'irraggiamento dell'antenna coincide con quello di un dipolo oscillante per il quale si abbia:

$$|\vec{p}_0| = \frac{I_0 d^2}{4c}. \quad (3.15.22)$$

Particolarmente importante è il caso in cui la semilunghezza  $d$  dell'antenna è uguale a un numero intero di semilunghezze d'onda, cioè:

$$d = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.15.23)$$

Tenendo conto della (3.15.20) e sostituendo nella (3.15.19) si ottiene per  $n$  pari:

$$\mathcal{J} = \frac{I_0^2}{2\pi c r^2} \frac{[1 \pm \cos(\frac{n}{2} \pi \cos \vartheta)]^2}{\sin^2 \vartheta}, \quad (3.15.24)$$

in cui i due segni si riferiscono al caso in cui  $\frac{n}{2}$ , a sua volta, è rispettivamente pari o dispari. Per  $n$  pari la (3.15.24) può quindi essere messa nella forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{2I_0^2}{\pi c r^2} \frac{\cos^4(n \frac{\pi}{4} \cos \vartheta)}{\sin^2 \vartheta}; \quad (n = 2, 6, 10, \dots) \\ \mathcal{J} &= \frac{2I_0^2}{\pi c r^2} \frac{\sin^4(n \frac{\pi}{4} \cos \vartheta)}{\sin^2 \vartheta}; \quad (n = 4, 8, 12, \dots) \end{aligned} \quad (3.15.25)$$

Per  $n$  dispari si ha invece:

$$\mathcal{J} = \frac{I_0^2}{2\pi c r^2} \frac{\cos^2(n \frac{\pi}{2} \cos \vartheta)}{\sin^2 \vartheta}; \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (3.15.26)$$

In fig. (3.15.2) sono riportati, per vari valori di  $n$ , i grafici polari della dipendenza angolare di  $\mathcal{J}$ ; da essi appare evidente che al crescere di  $n$  l'emissione diventa via via più direzionale e si allontana dal piano ortogonale all'antenna.

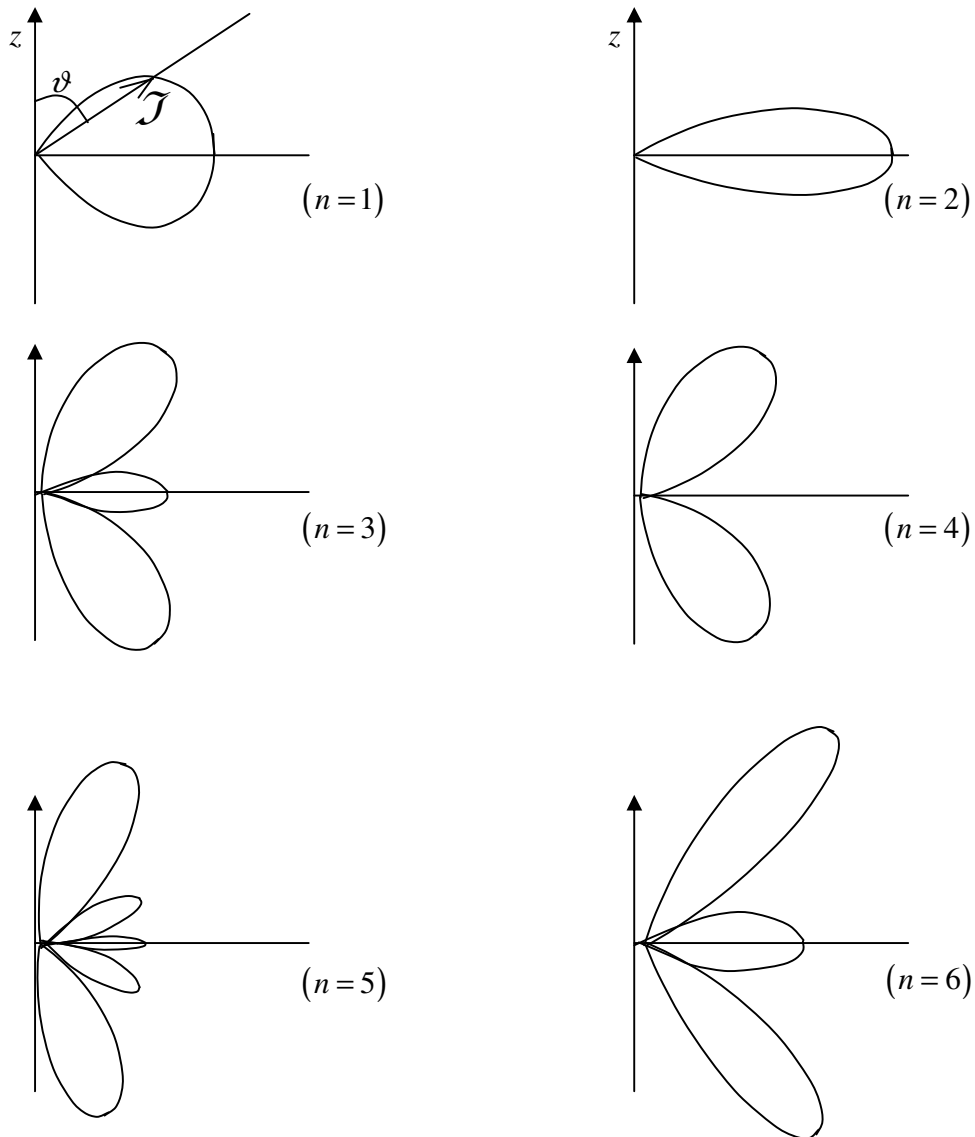


Fig. (3.15.2)

Consideriamo ora, limitatamente al caso in cui  $n = 1$ , l'energia totale irradiata da un'antenna. Analogamente a quanto fatto nel paragrafo 3.12 per il dipolo, occorre calcolare l'integrale:

$$\mathcal{W} = \int_{4\pi} \mathcal{T} r^2 d\Omega = \frac{I_0^2}{c} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin^2 \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (3.15.27)$$

Sostituendo  $\cos \vartheta$  con  $x$ , usando la formola di duplicazione per il coseno e l'identità:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right), \quad (3.15.28)$$

si ottiene:

$$\mathcal{W} = \frac{I_0^2}{4c} \left[ \int_{-1}^{+1} \frac{1+\cos \pi x}{1+x} dx + \int_{-1}^{+1} \frac{1+\cos \pi x}{1-x} dx \right]. \quad (3.15.29)$$

Sostituendo ancora  $x$  con  $\frac{z}{\pi} - 1$  e con  $1 - \frac{z}{\pi}$  rispettivamente nel primo e nel secondo integrale, si ha:

$$\mathcal{W} = \frac{I_0^2}{2c} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos z}{z} dz, \quad (3.15.30)$$

ossia, ricordando la definizione della funzione integral-coseno ed indicando con  $C$  la costante di Eulero ( $C = 0,57722$ ) (\*\*\*\*\*).

$$= \frac{I_0^2}{2c} \left[ C + \lg 2\pi - Ci(2\pi) \right] = 2,44 \frac{I_0^2}{2c}. \quad (3.15.31) \quad (*****)$$

---

(\*\*\*\*\*) Vedi per esempio E. Jahnke-P. Emde, "Tables of function", 2<sup>nd</sup> edition, Leipzig 1933, pag. 79.

(\*\*\*\*\*)  $\lg 2\pi = 1,83787\dots$ ,  $Ci(2\pi) = -0,022\dots$ , che può essere ottenuto dalle tavole mediante la formola d'interpolazione

È da notare che per  $d = \lambda$ , cioè nel caso di  $n = 2$ , vale una relazione analoga alla (3.15.31) salvo che il coefficiente di proporzionalità passa da 2.44 a  $6,72^{(\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger)}$ . Viceversa per  $d = 10^{-2} \lambda$ , nel qual caso l'antenna è approssimabile con un dipolo oscillante e la potenza irradiata può essere ottenuta sostituendo la (3.15.21) nella (3.15.25), si ha:

$$\mathcal{W} = \frac{d^4 \omega^4}{24c^4} \frac{I_0^2}{2c} = \frac{2}{3} \pi^4 10^{-8} \frac{I_0^2}{2c}; \quad (3.15.32)$$

il coefficiente di conseguenza si riduce a  $6,49 \cdot 10^{-7}$ . Se ne conclude che l'efficienza di irraggiamento delle antenne supera di gran lunga quella del dipolo.

$$\begin{aligned} Ci(x+h) - Ci(x) = & \frac{h \cos x}{x} \left\{ 1 - \frac{h}{2x} + \right. \\ & + h^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{h}{4x} \right) \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 \cdot 2} \right) + \\ & + h^4 \left( \frac{1}{5} - \frac{h}{6x} \right) \left( \frac{1}{x^4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot x^2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right) + \\ & \left. + \dots \right\} \\ & - \frac{h^2 \sin x}{x} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{h}{3x} + \right. \\ & + h^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{h}{5x} \right) \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right) + \\ & \left. + \dots \right\} \end{aligned}$$

per  $x=6$ ,  $h=0,283184\dots$  prendendo  $Ci(6) = -0,068\,057\dots$  (Vedi J. W. L. Glaisher, Tables of the Numerical Values of the Sine-integral, Cosine-integral, and Exponential-integral. Proceedings of the Royal Society of London, Volume 18, pp. 367-388, 1870) [n.d.c.].

$(\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger)$  Procedendo come prima e usando le tavole:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{I_0^2}{2c} \cdot 2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos z)^2}{z} dz = \dots = \frac{I_0^2}{2c} \cdot 2 \cdot \left\{ 2 \left[ C + \lg 2\pi - Ci(2\pi) \right] - \frac{1}{2} \left[ C + \lg 4\pi - Ci(4\pi) \right] \right\} = \\ &= \frac{I_0^2}{2c} \cdot (4 \cdot 2,44 - 3,14) = \frac{I_0^2}{2c} \cdot 6,62 \text{ [n.d.c.]}. \end{aligned}$$

## **Capitolo 9. Appendici matematiche**

## 9.2 Vettori ed operatori vettoriali

In questo paragrafo vengono brevemente riportate le più importanti nozioni sui vettori di cui si è fatto uso in questo testo. Sono discusse solo le proprietà essenziali e quelle meno facilmente reperibili nella letteratura; per le altre rimandiamo agli appositi trattati.

Consideriamo una terna di assi cartesiani ortogonali e con origine  $O$ ; nel passaggio da questa terna ad un'altra, pure essa ortogonale e con origine in  $O$ , le coordinate di un generico punto  $P$  si trasformano secondo le relazioni:

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, \quad (i=1,2,3), \quad (9.2.1)$$

in cui  $x_1, x_2, x_3$  e  $x'_1, x'_2, x'_3$  indicano le coordinate di  $P$  rispettivamente nella vecchia e nella nuova terna. Vogliamo mostrare che le quantità  $a_{ij}$  devono sottostare a delle relazioni le quali impongono che la trasformazione sia effettivamente ortogonale e che l'unità di misura delle lunghezze sia la stessa nelle due terne di assi. Tenendo conto dell'ortogonalità degli assi si ottiene:

$$r^2 = \sum_{j=1}^3 x_j^2 = \sum_{i=1}^3 x_i'^2 \quad (9.2.2)$$

dove  $r$  indica la distanza del punto  $P$  dall'origine; sostituendo le espressioni (9.2.1) delle  $x'_i$  la (9.2.2) diventa:

$$\sum_{j=1}^3 x_j^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{r=1}^3 a_{ir} x_r \sum_{s=1}^3 a_{is} x_s = \sum_{r,s=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 a_{ir} a_{is} \right) x_r x_s. \quad (9.2.3)$$

Affinché questa equazione sia verificata qualunque siano i valori delle  $x_i$ , si deve avere:

$$\sum_{i=1}^3 a_{ir} a_{is} = \delta_{rs}. \quad (9.2.4)$$

Queste sono appunto le relazioni richieste. La trasformazione inversa alla (9.2.1) è:

$$x_j = \sum_{i=1}^3 A_{ij} x'_i, \quad (9.2.5)$$

in cui  $A_{ij}$  indica il complemento algebrico di  $a_{ij}$  (ossia il minore complementare di  $a_{ij}$  nella matrice  $|a_{ij}|$ , diviso per  $\text{Det}|a_{ij}|$ ). Sostituendo la (9.2.5) nella (9.2.1) si ha:

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \sum_{r=1}^3 A_{rj} x'_r = \sum_{r=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 a_{ij} A_{rj} \right) x'_r. \quad (9.2.6)$$

Questa relazione è identicamente verificata se:

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} A_{rj} = \delta_{ir}; \quad (9.2.7)$$

Moltiplicando membro a membro per  $a_{is}$  e sommando sull'indice  $i$ , si ottiene:

$$\sum_{j=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{is} \right) A_{rj} = a_{rs}, \quad (9.2.8)$$

da cui, inserendo la (9.2.4):

$$\sum_{j=1}^3 \delta_{js} A_{rj} = a_{rs}, \quad (9.2.9)$$

ossia:

$$A_{rs} = a_{rs}. \quad (9.2.10)$$

La (9.2.5) diventa pertanto:

$$x_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} x'_i. \quad (9.2.11)$$

Da essa, procedendo come per la (9.2.1) si ottiene:

$$\sum_{i=1}^3 a_{ri} a_{si} = \delta_{rs} \quad (9.2.12)$$

che è equivalente alla (9.2.4). Mediante le relazioni (9.2.4), (9.2.12), è immediato calcolare  $\text{Det}|a_{ij}|$ ; si ha infatti eseguendo il quadrato di  $|a_{ij}|$  per colonne, oppure per righe, ed utilizzando rispettivamente la (9.2.4) o la (9.2.12):

$$|a_{ij}|^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (9.2.13)$$

tenendo conto che:

$$\left[ \text{Det}|a_{ij}| \right]^2 = \text{Det}|a_{ij}|^2 = 1, \quad (9.2.14)$$

si ha:

$$\text{Det}|a_{ij}| = \pm 1. \quad (9.2.15)$$

Esistono pertanto, in relazione ai due valori del determinante, due tipi di trasformazioni ortogonali; alla trasformazione:

$$x'_i = -x_j, \quad (9.2.16)$$

che è un'inversione degli assi, compete evidentemente il segno meno. Il segno positivo invece è associato alle rotazioni le quali, al più, rovesciano il verso a due assi. Si può dire, in altro modo, che il segno negativo compete alle trasformazioni che fanno passare da una terna destrorsa ad una sinistrorsa (cioè da una terna in cui gli assi  $x$ ,  $y$ ,  $z$  siano orientati come pollice, indice e medio della mano destra, disposti mutuamente ortogonali, ad una analoga terna in cui gli assi siano orientati come le dita della mano sinistra) mentre quello positivo riguarda le trasformazioni che ruotano la terna senza cambiare il carattere di elicità.

Ciò premesso dicesi vettore un insieme di tre grandezze  $v_1, v_2, v_3$  le quali, eseguendo la trasformazione (9.2.1) diano luogo alle nuove grandezze:



$$v_i' = \sum_{j=1}^3 a_{ij} v_j \quad (i=1,2,3). \quad (9.2.17)$$

Ovviamente dovrà valere anche la relazione inversa:

$$v_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} v_i', \quad (9.2.18)$$

che è analoga alla (9.2.11) ed equivalente alla (9.2.17). Le quantità  $v_i$ ,  $v_i'$  prendono il nome di componenti del vettore; la (9.2.17) stabilisce, pertanto, che le componenti di un vettore obbediscono alla stessa legge di trasformazione delle coordinate. Sinteticamente un vettore viene rappresentato col simbolo:

$$\vec{v} = \vec{v}(v_1, v_2, v_3). \quad (9.2.19)$$

Riportando, con opportuna unità di misura, le quantità  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  sui tre assi, il vettore è geometricamente rappresentato dal segmento orientato che va dall'origine al punto  $P$  di coordinate  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  (vedi fig. (9.2.1)); si può anche scrivere perciò:

$$\vec{v} = P(v_1, v_2, v_3) - O. \quad (9.2.20)$$

Un primo semplice esempio di vettore è la distanza  $\vec{r}$  del punto  $P(x, y, z)$  dall'origine  $O$ , cioè:

$$\vec{r} = P(x, y, z) - O. \quad (9.2.21)$$

Modulo di un vettore è, per definizione, la quantità:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2}. \quad (9.2.22)$$

ossia la lunghezza del segmento che lo rappresenta. Particolarmente importanti sono i vettori di componenti:

$$\begin{aligned}
\vec{i} &= \vec{i}(1, 0, 0), \\
\vec{j} &= \vec{j}(0, 1, 0), \\
\vec{k} &= \vec{k}(0, 0, 1),
\end{aligned}
\tag{9.2.23}$$

ossia tre vettori di modulo unitario orientati parallelamente agli assi coordinati; essi prendono il nome di versori degli assi.

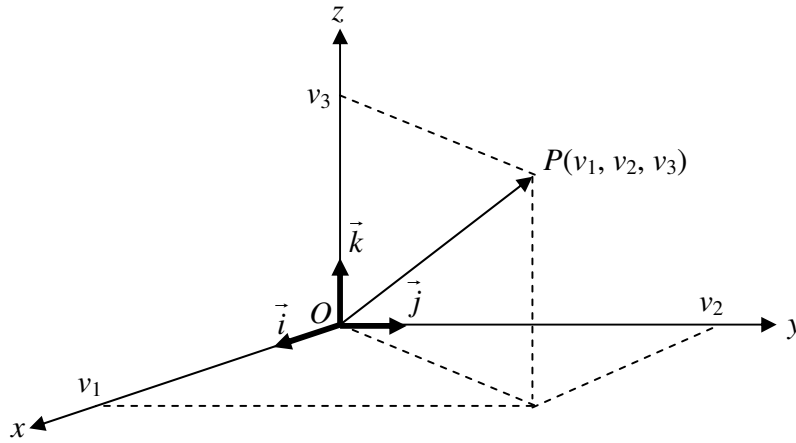


Fig. (9.2.1)

La somma di due vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  è definita come un vettore  $\vec{w}$  la cui componente  $i$ -esima è la somma delle componenti  $i$ -esime di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , cioè:

$$\vec{u}(u_1, u_2, u_3) + \vec{v}(v_1, v_2, v_3) = \vec{w}(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).
\tag{9.2.24}$$

Da questa definizione risulta subito che per costruire il segmento rappresentativo di  $\vec{w}$  basta spostare parallelamente a se stesso quello di  $\vec{v}$  fin tanto che esso abbia origine nel punto  $P(u_1, u_2, u_3)$ ; in questo modo congiungendo il punto estremo di  $\vec{v}$  con l'origine  $O$  si ottiene il segmento richiesto (vedi fig. (9.2.2)). La definizione ora posta può essere ovviamente estesa alla differenza di vettori (basta infatti considerare la somma di  $\vec{u}$  con il vettore:  $-\vec{v}(-v_1, -v_2, -v_3)$ ) ed alla combinazione lineare di due o

più vettori (basta considerare la somma di vettori della forma:  $k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$ ). Tenendo conto di quanto abbiamo stabilito e ricordando le (9.2.23) appare possibile esprimere un vettore come combinazione lineare dei versori degli assi, ossia nella forma:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (9.2.25)$$

in cui abbiamo denotato le componenti con gli indici  $x, y, z$  anziché  $1, 2, 3$  come nella (9.2.19).

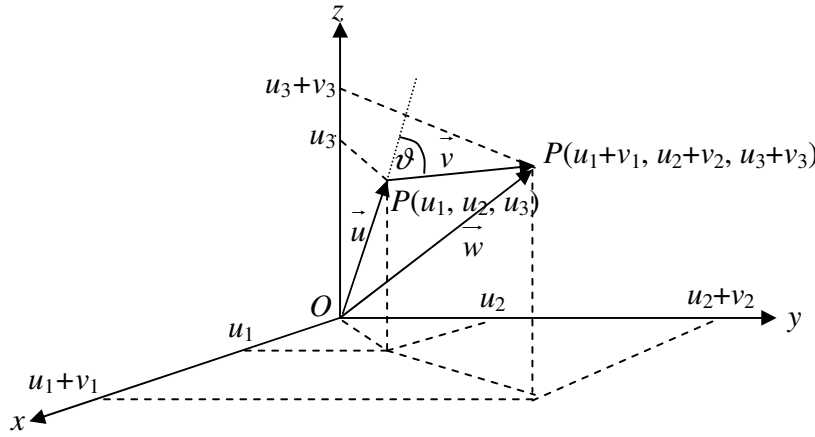


Fig. (9.2.2)

Dati due vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  consideriamo la seguente quantità, detta prodotto interno dei due vettori:

$$|\vec{u}| |\vec{v}| \cos \vartheta \equiv \vec{u} \cdot \vec{v} \quad (9.2.26)$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo tra le direzioni orientate di  $\vec{u}$  e di  $\vec{v}$ . Dimostriamo che essa è una invariante rispetto ad una trasformazione di assi. Applicando il prodotto interno ai versori (9.2.23) si hanno le relazioni:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \quad (9.2.27)$$

e:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad (9.2.28)$$

le quali impongono la mutua ortogonalità degli assi e l'unitarietà dei moduli di  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Con riferimento alla (9.2.25) si può scrivere, pertanto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z; \quad (9.2.29)$$

mediante la (9.2.17) e tenendo conto delle (9.2.4) si vede subito che:

$$\sum_{j=1}^3 u_j' v_j' = \sum_{i=1}^3 u_i v_i \quad (9.2.30)$$

che è appunto quanto si voleva dimostrare. Qualunque grandezza che soddisfi a questa condizione viene detta scalare ed il prodotto interno  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , pertanto, prende anche il nome di prodotto scalare dei vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Mediante il prodotto scalare è possibile esprimere in modo sintetico il modulo di un vettore e quello della somma di due vettori; si ha infatti:

$$v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \equiv \sqrt{v^2} \quad (9.2.31)$$

e:

$$w = \sqrt{u^2 + v^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}}. \quad (9.2.32)$$

La (9.2.32) esprime in forma vettoriale il teorema di Carnot.

Consideriamo ora una quantità  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , detta prodotto esterno dei vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , caratterizzata dalle seguenti proprietà:

- a) ad  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  è associato un segmento orientato ortogonalmente al piano di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e diretto in modo da formare con  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  una terna destrorsa (cioè deve essere possibile disporre pollice, indice e medio della mano destra rispettivamente secondo  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ; vedi fig. (9.2.3),

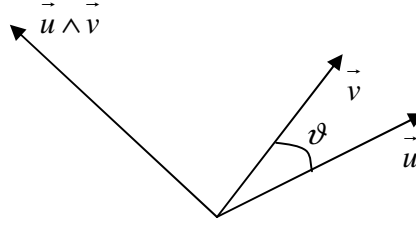


Fig. (9.2.3)

b) indicando con  $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$  la lunghezza del segmento orientato rappresentativo del prodotto esterno, si ha:

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \vartheta \quad (9.2.33)$$

dove il significato di  $\vartheta$  è come nella (9.2.26).

Vogliamo dimostrare, in base a questa proprietà, che  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , se la trasformazione è una rotazione, si comporta come un vettore mentre ciò non accade per le inversioni di assi. A questo scopo osserviamo che applicando le proprietà a) e b) ai versori degli assi e supponendo che questi, a loro volta formino una terna destrorsa (vedi fig. (9.2.1)) si ha:

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0, \quad (9.2.34)$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}. \quad (9.2.35)$$

È importante osservare che le (9.2.35) sono delle equazioni in cui ci si limita a stabilire la corrispondenza tra i segmenti rappresentativi delle quantità che compaiono nei due membri. Non è necessario per la validità della dimostrazione far uso della legge di trasformazione (9.2.35); ciò, d'altra parte, richiederebbe che l'enunciato del teorema fosse già dimostrato. Esprimendo  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  nella forma (9.2.25) e tenendo conto delle (9.2.34), (9.2.35) si ha:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (9.2.36)$$

Occorre pertanto dimostrare che le quantità:

$$\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)_i = \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ v_j & v_k \end{vmatrix} \quad (9.2.37)$$

dove  $i, j, k$  sono una qualunque permutazione ciclica di  $x, y, z$  si trasformano secondo le (9.2.18). Si ha infatti, inserendo le (9.2.18) ed eseguendo successive semplificazioni delle somme su  $r$  ed  $s$ :

$$\begin{aligned} u_j v_k - u_k v_j &= \sum_{r=1}^3 a_{rj} u_r' \sum_{s=1}^3 a_{sk} v_s' - \sum_{r=1}^3 a_{rk} u_r' \sum_{s=1}^3 a_{sj} v_s' = \\ &= \sum_{r \neq s=1}^3 (a_{rj} a_{sk} - a_{rk} a_{sj}) u_r' v_s' = \sum_{r < s=1}^3 (a_{rj} a_{sk} - a_{sj} a_{rk}) (u_r' v_s' - u_s' v_r') = \\ &= \text{Det} \left| a_{ij} \right| \sum_{t=1}^3 A_{ti} (\vec{u}' \wedge \vec{v}')_t, \end{aligned} \quad (9.2.38)$$

dove  $t$  forma con  $r$  ed  $s$  una permutazione ciclica degli indici. Ricordando la (9.2.10) e la (9.2.15) possiamo scrivere pertanto:

$$\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)_i = \pm \sum_{t=1}^3 a_{ti} (\vec{u}' \wedge \vec{v}')_t. \quad (9.2.39)$$

Questa relazione, supposto che la (9.2.1) sia una rotazione, assume la forma (9.2.18) e stabilisce perciò che  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  si comporta come un vettore. Per questo motivo il prodotto esterno prende anche il nome di prodotto vettoriale. Ciò non accade tuttavia nel caso di una inversione di assi in cui, nella (9.2.39), interviene il segno meno. Un insieme di tre grandezze che si trasformano secondo la (9.2.39) viene detto vettore assiale per distinguerlo dal vettore, propriamente detto o vettore polare. È in qualche caso opportuno distinguere tra vettori assiali e vettori polari usando per essi due differenti simboli; scriveremo pertanto, a seconda che  $\vec{v}$  sia vettore polare o vettore assiale<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>.

---

(\*\*\*\*\*) Risulta subito dalla (9.2.39) che le componenti di un vettore assiale non cambiano di segno in una inversione di assi; ciò equivale a quanto accadrebbe se il segmento rappresentativo fosse privo di una definita orientazione. Il simbolo  $\leftrightarrow$  è stato scelto proprio per tenere conto di questa circostanza.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v} \quad (\text{vettore polare}) \\ \vec{v} &= \vec{v} \quad (\text{vettore assiale})\end{aligned}\tag{9.2.40}$$

È importante osservare che eseguendo, mediante la (9.2.29), il prodotto scalare di un vettore polare e di uno assiale si ottiene una quantità che è invariante rispetto ad una rotazione di assi, ma che cambia segno se la trasformazione è una inversione. Una simile quantità viene detta pseudoscalare; un tipico esempio di pseudoscalare è il prodotto misto di tre vettori polari  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Si ha cioè:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = -(\vec{u}' \wedge \vec{v}') \cdot \vec{w}'\tag{9.2.41}$$

dove  $\vec{u}'$ ,  $\vec{v}'$ ,  $\vec{w}'$  sono i vettori trasformati per inversione degli assi.

Consideriamo ora la legge di trasformazione delle derivate, di una qualunque funzione  $f(P)$ , rispetto alle coordinate  $x_1, x_2, x_3$ . Tenendo conto della (9.2.1) si ha:

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f(P)}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 a_{ij} \frac{\partial f(P)}{\partial x'_i}.\tag{9.2.42}$$

Analogamente, ricordando le (9.2.11), risulta subito che le derivate rispetto a  $x'_1, x'_2, x'_3$  si trasformano secondo le relazioni:

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f(P)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial f(P)}{\partial x_j}.\tag{9.2.43}$$

Le (9.2.42) e (9.2.43) sono formalmente paragonabili alle (9.2.18) e (9.2.17); ne segue che quando la funzione  $f(P)$  è uno scalare le quantità  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$  sono le componenti di un vettore. Introducendo l'operatore:

---

Il vettore assiale, qualche volta, viene anche indicato con il nome di pseudovettore.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (9.2.44)$$

avremo pertanto:

$$\nabla f = \vec{v} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right); \quad (9.2.45)$$

al vettore  $\vec{v}$  così ottenuto si dà il nome di gradiente di  $f$ , esso viene generalmente indicato col simbolo:

$$\text{grad} f \equiv \vec{v} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (9.2.46)$$

Un'operazione direttamente connessa al gradiente è quella della cosiddetta derivata direzionale di una funzione del posto  $f(P)$ . Per vedere in che cosa consiste, consideriamo il vettore infinitesimo  $d\vec{P}$  di componenti  $dx, dy, dz$ , cioè:

$$d\vec{P} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}. \quad (9.2.47)$$

Mediante esso possiamo esprimere il differenziale di  $f$  nella forma:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \text{grad} f \cdot d\vec{P}. \quad (9.2.48)$$

Introduciamo il vettore unitario  $\vec{\tau}$  parallelo a  $d\vec{P}$ , cioè:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{P}}{|d\vec{P}|}, \quad (9.2.49)$$

e definiamo la derivata nella direzione di  $\vec{\tau}$  come il rapporto fra l'incremento della funzione  $f(P)$ , quando  $P$  passa da  $P$  a  $P + d\vec{P}$ , e il modulo di  $d\vec{P}$ . Ponendo per indicare questa derivata:



$$\frac{df}{|d\vec{P}|} \equiv \frac{df}{d\vec{\tau}}, \quad (9.2.50)$$

si avrà:

$$\frac{df}{d\vec{\tau}} = \text{grad}f \cdot \vec{\tau}, \quad (9.2.51)$$

che è il risultato richiesto; la derivata direzionale di  $f(P)$  è pertanto una quantità scalare. Supponendo che  $\vec{\tau}$  coincida con uno dei versori degli assi, ad esempio il versore  $\vec{i}$ , l'equazione precedente stabilisce che la derivata nella direzione di  $\vec{i}$  coincide con la componente  $x$  del gradiente, cioè con  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .

Dato un generico vettore  $\vec{v}$  di componenti  $v_1, v_2, v_3$  consideriamo la seguente quantità detta divergenza di  $\vec{v}$ :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \equiv \text{div} \vec{v}. \quad (9.2.52)$$

È ovvio che essa può essere espressa, formalmente, come prodotto scalare tra  $\vec{v}$  e l'operatore  $\nabla$ , ossia:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \equiv \nabla \cdot \vec{v}; \quad (9.2.53)$$

ciò, ricordando il risultato ottenuto nella (9.2.30), basta a provare che  $\text{div} \vec{v}$  è una quantità scalare. Abbiamo così dimostrato che l'operatore  $\nabla$  fa passare da quantità scalari a quantità vettoriali mentre inversamente l'operatore  $\nabla \cdot$  trasforma i vettori in scalari. Un caso particolare lo si ottiene considerando la divergenza del gradiente di una funzione scalare  $f$ , cioè:

$$\text{div grad} f = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \quad (9.2.54)$$

Questo operatore, che prende il nome di operatore laplaciano e viene indicato col simbolo  $\Delta_2$  cioè:

$$\Delta_2 f \equiv \text{divgrad} f, \quad (9.2.55)$$

Trasforma lo scalare  $f$  in un'altra quantità pure essa scalare.

Un altro operatore vettoriale fondamentale è il rotore; esso, utilizzando l'operatore  $\nabla$ , può essere definito sotto forma di un prodotto esterno, cioè:

$$\text{rot} \vec{v} \equiv \nabla \wedge \vec{v}. \quad (9.2.56)$$

Questa definizione, mediante la (9.2.36) e la (9.2.44) può essere espressa nella forma equivalente:

$$\text{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (9.2.57)$$

Dalle (9.2.56), (9.2.57), ricordando le proprietà del prodotto esterno, risulta subito che il rotore trasforma un vettore polare in un vettore assiale; potremo scrivere pertanto, usando i simboli indicati nelle (9.2.40):

$$\text{rot} \vec{v} = \overleftrightarrow{\text{rot} \vec{v}}. \quad (9.2.58)$$

L'operazione di rotore, d'altra parte, può essere applicata anche ad un vettore assiale; in questo caso, come si può immediatamente verificare con lo stesso procedimento usato per ottenere la (9.2.39), il rotore trasforma il vettore assiale in vettore polare, cioè:

$$\text{rot} \vec{v} = \overrightarrow{\text{rot} \vec{v}}. \quad (9.2.59)$$

Una situazione di questo genere interviene, ad esempio, quando si considera il rotore del prodotto esterno di due vettori polari.

### 9.3 Equazioni relative ai vettori ed agli operatori vettoriali

In questo paragrafo sono elencate le principali relazioni di calcolo vettoriale utilizzate nei precedenti capitoli. Non vengono date le dimostrazioni in quanto esse sono argomento di numerosi testi specializzati.

Un primo gruppo di equazioni riguarda le proprietà del prodotto interno ed esterno di due o più vettori. Esse sono le proprietà distributiva e commutativa del prodotto interno:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \quad (9.3.1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \quad (9.3.2)$$

le proprietà distributiva ed anticommutativa del prodotto esterno:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}, \quad (9.3.3)$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}, \quad (9.3.4)$$

la proprietà ciclica del prodotto misto:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}), \quad (9.3.5)$$

la formula per il doppio prodotto vettoriale:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \quad (9.3.6)$$

e le relazioni da esse deducibili:

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = 0, \quad (9.3.7)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = 0, \quad (9.3.8)$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{w} \wedge \vec{z}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{z}) - (\vec{u} \cdot \vec{z})(\vec{v} \cdot \vec{w}), \quad (9.3.9)$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = [\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})]^2. \quad (9.3.10)$$

Per gli operatori vettoriali le relazioni più importanti sono le seguenti:

$$\text{grad}(f + g) = \text{grad}f + \text{grad}g, \quad (9.3.11)$$

$$\text{grad}(fg) = f\text{grad}g + g\text{grad}f, \quad (9.3.12)$$

$$\text{grad}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \text{grad})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{u} + \vec{u} \wedge \text{rot}\vec{v} + \vec{v} \wedge \text{rot}\vec{u}, \quad (9.3.13)$$

dove, in coordinate cartesiane:

$$(\vec{u} \cdot \text{grad})\vec{v} = \left( \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \right) \vec{i} + \left( \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \right) \vec{j} + \left( \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial v_3}{\partial x_i} \right) \vec{k} \quad (9.3.14)$$

ed analogamente scambiando  $\vec{u}$  con  $\vec{v}$ . Si ha poi:

$$\text{div}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{div}\vec{u} + \text{div}\vec{v}, \quad (9.3.15)$$

$$\text{div}(f\vec{u}) = \vec{u} \cdot \text{grad}f + f\text{div}\vec{u}, \quad (9.3.16)$$

$$\text{div}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{rot}\vec{u} - \vec{u} \cdot \text{rot}\vec{v}, \quad (9.3.17)$$

$$\text{divrot}\vec{u} = 0, \quad (9.3.18)$$

$$\text{rot}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{rot}\vec{u} + \text{rot}\vec{v}, \quad (9.3.19)$$

$$\text{rot}(f\vec{u}) = \text{grad}f \wedge \vec{u} + f\text{rot}\vec{u}, \quad (9.3.20)$$

$$\text{rot}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u}\text{div}\vec{v} - \vec{v}\text{div}\vec{u} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \text{grad})\vec{v}, \quad (9.3.21)$$

$$\text{rotgrad}f = 0, \quad (9.3.22)$$

$$\text{rotrot}\vec{u} = \text{graddiv}\vec{u} - \Delta_2 \vec{u}, \quad (9.3.23)$$

dove, in coordinate cartesiane:

$$\Delta_2 \vec{u} = \Delta_2 u_1 \vec{i} + \Delta_2 u_2 \vec{j} + \Delta_2 u_3 \vec{k}, \quad (9.3.24)$$

$$(\text{rot}\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0. \quad (9.3.25)$$

Queste relazioni possono essere facilmente dedotte utilizzando coordinate cartesiane ed eseguendo le derivazioni contenute negli operatori vettoriali.

È utile ricordare anche le seguenti relazioni che ricorrono di frequente nelle applicazioni:

$$\text{grad}_P r_{PQ} = -\text{grad}_Q r_{PQ} = \frac{\vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}}, \quad (9.3.26)$$

$$\text{grad}_P (\vec{r}_{PQ} \cdot \vec{r}_{PQ}) = -\text{grad}_Q (\vec{r}_{PQ} \cdot \vec{r}_{PQ}) = 2\vec{r}_{PQ}, \quad (9.3.27)$$

$$\text{grad}_P \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right) = -\text{grad}_Q \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right) = -\frac{\vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3}, \quad (9.3.28)$$

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}_P) \vec{r}_{PQ} = -(\vec{v} \cdot \text{grad}_Q) \vec{r}_{PQ} = \vec{v}, \quad (9.3.29)$$

$$\text{div}_P \vec{r}_{PQ} = -\text{div}_Q \vec{r}_{PQ} = 3, \quad (9.3.30)$$

$$\Delta_{2P} \frac{1}{r_{PQ}} = \Delta_{2Q} \frac{1}{r_{PQ}} = 0, (r_{PQ} \neq 0) \quad (9.3.31)$$

$$\text{rot}_P \vec{r}_{PQ} = \text{rot}_Q \vec{r}_{PQ} = 0. \quad (9.3.32)$$

In esse si ha:

$$\vec{r}_{PQ} = P - Q = (x_P - x_Q)\vec{i} + (y_P - y_Q)\vec{j} + (z_P - z_Q)\vec{k}, \quad (9.3.33)$$

$$r_{PQ} = |\vec{r}_{PQ}| \quad (9.3.34)$$

e gli indici  $P$  e  $Q$  applicati agli operatori denotano rispetto a quale delle variabili sono da eseguire le derivazioni.

Consideriamo ora un gruppo di equazioni che collegano gli integrali, estesi a domini di vario tipo (volumi, superfici, linee), di espressioni contenenti gli operatori vettoriali. Premettiamo una importante relazione tra integrali di volume e di superficie (Lemma di Gauss) mediante la quale è possibile ottenere i risultati relativi agli operatori gradiente e divergenza:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int_S f n_x dS, \quad \int_V \frac{\partial f}{\partial y} dV = \int_S f n_y dS, \quad \int_V \frac{\partial f}{\partial z} dV = \int_S f n_z dS, \quad (9.3.35)$$

in queste equazioni  $S$  è una superficie che racchiude il volume  $V$  e  $n_x, n_y, n_z$  sono le componenti del versore  $\vec{n}$  ortogonale alla superficie  $S$  e diretto all'esterno. Da esse si ha immediatamente:

$$\int_V \text{grad} f dV = \int_S f \vec{n} dS, \quad (9.3.36)$$

$$\int_V \text{div} \vec{v} dV = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS, \quad (9.3.37)$$

$$\int_V \text{rot} \vec{v} dV = \int_S \vec{n} \wedge \vec{v} dS. \quad (9.3.38)$$

La (9.3.37) è nota col nome di teorema della divergenza. Applicando le tre relazioni (9.3.35) rispettivamente a  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$  e sommando si ha:

$$\int_V \Delta_2 f dV = \int_S \text{grad} f \cdot \vec{n} dS = \int_S \frac{df}{dn} dS. \quad (9.3.39)$$

Applicando invece la (9.3.37) ai vettori  $f \text{grad} g$  e  $g \text{grad} f$ , trasformando le espressioni ottenute mediante la (9.3.16) e sottraendo membro a membro si ha:

$$\int_V (f \Delta_2 g - g \Delta_2 f) dV = \int_S \left( f \frac{dg}{dn} - g \frac{df}{dn} \right) dS; \quad (9.3.40)$$

questo risultato, che generalizza la (9.3.39) prende il nome di Lemma di Green. Una relazione tra integrali di superficie ed integrali di linea è data dal teorema di Stokes:

$$\int_S \text{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l}. \quad (9.3.41)$$

In questa equazione  $S$  è una superficie aperta il cui orlo coincide con la linea chiusa  $\gamma$  ed  $\vec{n}$  è la normale assiale alla superficie  $S$ ; essa è orientata nel verso in cui avanza una vite destrorsa che ruoti attorno alla sua direzione nel senso in cui viene percorsa la linea  $\gamma$  (regola della vite, vedi fig (9.3.1). Dalla (9.3.41) è possibile ottenere la seguente altra relazione:

$$\oint_{\gamma} f d\vec{l} = \int_S \vec{n} \wedge \text{grad} f dS. \quad (9.3.42)$$

La dimostrazione delle (9.3.41) e (9.3.42) è riportata nel paragrafo 9.4.

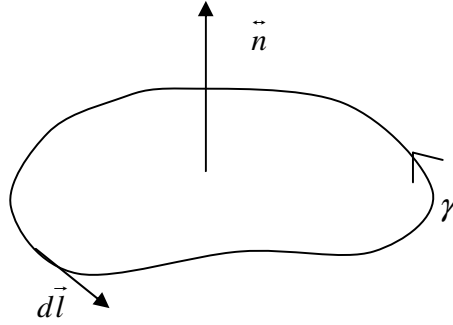


Fig. (9.3.1)

Consideriamo ora le espressioni degli operatori vettoriali quando, anziché quelle cartesiane, si usino coordinate curvilinee ortogonali. Le coordinate curvilinee possono essere definite in generale mediante le equazioni:

$$q_1 = q_1(x, y, z), q_2 = q_2(x, y, z), q_3 = q_3(x, y, z) \quad (9.3.43)$$

le quali associano ad un punto  $P(x, y, z)$  i tre parametri  $q_1, q_2, q_3$ . Supponendo che le equazioni siano invertibili si può risalire da  $q_1, q_2, q_3$  al punto  $P$ ; possiamo scrivere pertanto:

$$P = (q_1, q_2, q_3) \quad (9.3.44)$$

in cui  $q_1, q_2, q_3$  sono appunto le coordinate curvilinee in questione. Al variare di  $q_i$  il punto  $P$  descrive una traiettoria che prende il nome di linea coordinata  $q_i$ , su di essa si avrà (vedi fig. (9.3.2)):

$$ds_i = \left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i} \right| dq_i = H_i(q_1, q_2, q_3) dq_i. \quad (9.3.45)$$

versori delle linee coordinate; essi sono esprimibili nella forma (\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$):

(9.3.46)

mediante essi la condizione di ortogonalità assume la forma:

(9.3.47)

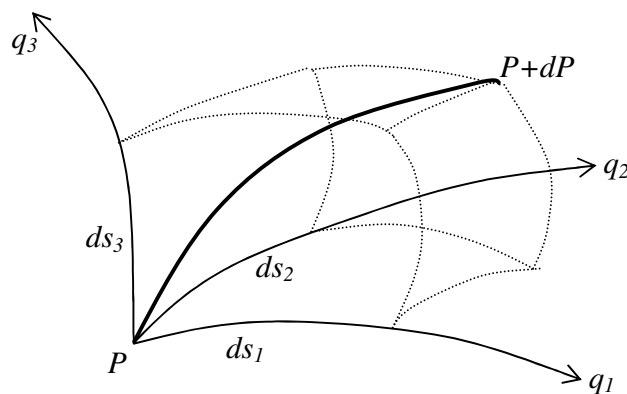


Fig. (9.3.2)

(\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$)  $d\vec{P} = (ds_1, ds_2, ds_3) = \sum \vec{i}_{q_i} ds_i$  dove  $\vec{i}_{q_i} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial s_i}$  è il vettore unitario tangente alla

linea coordinata  $q_i$ , da cui la (9.3.45). Dalla (9.3.44)  $d\vec{P} = \sum \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_i} dq_i$ , da cui per la (9.3.45) segue la (9.3.46) [n.d.c.].



Ciò premesso, si dimostra che le componenti del gradiente secondo le linee coordinate sono:

$$(gradf)_{q_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}. \quad (9.3.48)$$

Così pure indicate con  $v_i$  le componenti di un vettore secondo le linee  $q_i$ , cioè:

$$v_i = \vec{v} \cdot \vec{i}_{q_i}, \quad (9.3.49)$$

si ha:

$$div \vec{v} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 v_3) \right]. \quad (9.3.50)$$

L'espressione del laplaciano risulta essere pertanto:

$$\Delta_2 f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (9.3.51)$$

Per le componenti del rotore valgono invece le equazioni:

$$\begin{aligned} (rot \vec{v})_{q_1} &= \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 v_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (H_2 v_2) \right], \\ (rot \vec{v})_{q_2} &= \frac{1}{H_3 H_1} \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 v_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 v_3) \right], \\ (rot \vec{v})_{q_3} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 v_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 v_1) \right]. \end{aligned} \quad (9.3.52)$$

Le coordinate polari sono definite dalle equazioni (vedi fig. (9.3.3):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (9.3.53)$$

ossia:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta. \quad (9.3.54)$$

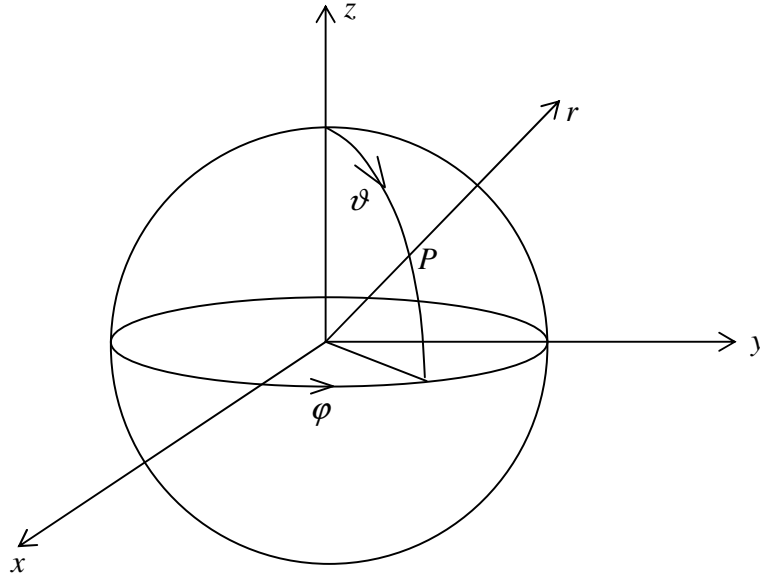


Fig. (9.3.3)

È immediato constatare, sostituendo le (9.3.54) nella (9.3.47), che la condizione di ortogonalità è verificata. Per esse si ha:

$$H_r = 1, \quad H_{\vartheta} = r, \quad H_{\varphi} = r \sin \vartheta, \quad (9.3.55)$$

di conseguenza le espressioni degli operatori vettoriali risultano essere:

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \vec{i}_{\vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{i}_{\varphi} \quad (9.3.56)$$

$$\text{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta v_{\vartheta}) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \varphi} \quad (9.3.57)$$

$$\Delta_2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (9.3.58)$$

$$\begin{aligned}
\text{rot} \vec{v} = & \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta v_\varphi) - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_r + \\
& + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) \right] \vec{i}_\vartheta + \\
& + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\vartheta) - \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{i}_\varphi.
\end{aligned} \tag{9.3.59}$$

In base a questi risultati l'espressione del laplaciano di un vettore è data in coordinate polari dall'equazione:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 \vec{v} = & \text{grad div} \vec{v} - \text{rot rot} \vec{v} = (\Delta_2 v_r) \vec{i}_r + (\Delta_2 v_\vartheta) \vec{i}_\vartheta + \\
& + (\Delta_2 v_\varphi) \vec{i}_\varphi - \frac{2}{r^2} \left[ v_r + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta v_\vartheta) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_r + \\
& + \frac{1}{r^2} \left[ 2 \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\vartheta}{\sin^2 \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_\vartheta + \\
& + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left[ 2 \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + 2 \cos \vartheta \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} - v_\varphi \right] \vec{i}_\varphi,
\end{aligned} \tag{9.3.60}$$

essa, pertanto, non consiste nella semplice applicazione di  $\Delta_2$  alle componenti di  $\vec{v}$  come accade nel caso delle coordinate cartesiane.

Le coordinate cilindriche sono definite dalle equazioni (vedi fig. (9.3.4)):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z \equiv z, \tag{9.3.61}$$

ossia:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z \equiv z. \tag{9.3.62}$$

Anche esse, analogamente alle coordinate sferiche, soddisfano alla condizione di ortonormalità (9.3.47). Tenendo conto che:

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_z = 1, \tag{9.3.63}$$

Le espressioni degli operatori vettoriali diventano:

$$\text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{i}_z, \quad (9.3.64)$$

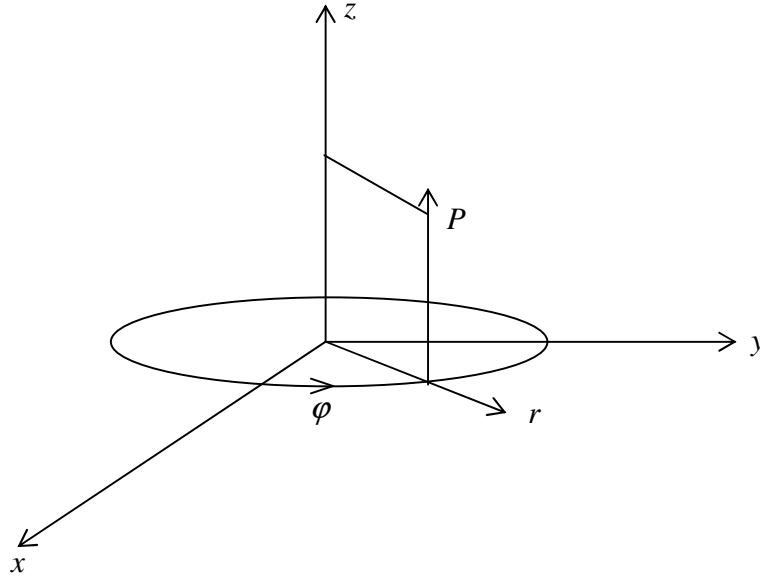


Fig. (9.3.4)

$$\text{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (9.3.65)$$

$$\Delta_2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (9.3.66)$$

$$\text{rot} \vec{v} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right] \vec{i}_r + \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \vec{i}_\varphi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_z. \quad (9.3.67)$$

L'espressione in coordinate cilindriche del laplaciano di un vettore è:

$$\begin{aligned} \Delta_2 \vec{v} = \text{grad} \text{div} \vec{v} - \text{rot} \text{rot} \vec{v} = & (\Delta_2 v_r) \vec{i}_r + (\Delta_2 v_\varphi) \vec{i}_\varphi + \\ & + (\Delta_2 v_z) \vec{i}_z - \frac{1}{r^2} (v_r \vec{i}_r + v_\varphi \vec{i}_\varphi) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi \vec{i}_r - v_r \vec{i}_\varphi). \end{aligned} \quad (9.3.68)$$

## 9.4 Il teorema di Stokes

Molte dimostrazioni del teorema di Stokes (vedi equazione (9.3.40)) fanno intervenire la normale alla superficie su cui si esegue l'integrale, senza metterne chiaramente in evidenza il carattere vettoriale, cioè senza precisare se essa è vettore polare o vettore assiale. Questo modo di procedere, ovviamente, non è soddisfacente; di conseguenza, onde evitare possibili malintesi, sviluppiamo in questo paragrafo una dimostrazione da cui appaia chiaro che la normale in questione è assiale.

Consideriamo (vedi fig. (9.4.1)) la linea chiusa  $\gamma$  orlo della superficie  $S$  e rappresentiamo parametricamente la superficie mediante le equazioni:

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \quad z = z(\xi, \eta). \quad (9.4.1)$$

È ovvio che quando  $P$  nello spazio  $x, y, z$  percorre la linea  $\gamma$  il punto  $P^\dagger$ , che mediante la (9.4.1) gli corrisponde nel piano  $\xi, \eta$ , percorre una linea chiusa  $\gamma^\dagger$ . Così pure al va-

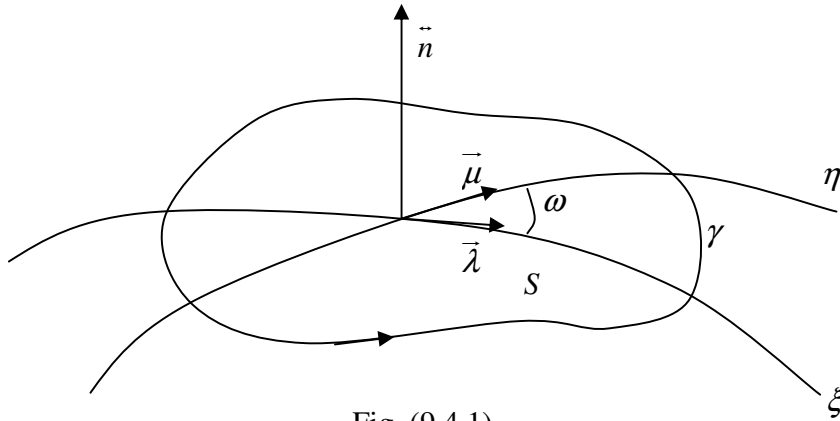


Fig. (9.4.1)

riare di  $P^\dagger$  lungo l'asse  $\xi$  il punto  $P(x, y, z)$  descrive una linea, appartenente alla superficie  $S$  che prende il nome di linea coordinata  $\xi$ ; indichiamo con  $\vec{\lambda}$  il versore tangente a questa linea. Analogamente  $\vec{\mu}$  è il versore tangente alla linea coordinata  $\eta$ . Si avrà cioè:

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{E}} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \vec{k} \right), \quad (9.4.2)$$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \vec{k} \right), \quad (9.4.3)$$

dove:

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2, \quad (9.4.4)$$

$$G = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2. \quad (9.4.5)$$

La normale assiale ad  $S$  è data pertanto dalla relazione:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\lambda} \wedge \vec{\mu}}{\sin \omega} = \frac{1}{\sin \omega \sqrt{EG}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (9.4.6)$$

dove  $\omega$  indica l'angolo tra i vettori  $\vec{\lambda}$  e  $\vec{\mu}$ .

D'altra parte l'elemento di superficie  $dS$  può essere espresso mediante  $d\xi$  e  $d\eta$  nella forma:

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \vec{P}}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta = \sqrt{EG} |\vec{\lambda} \wedge \vec{\mu}| d\xi d\eta, \quad (9.4.7)$$

ossia, utilizzando la (9.4.6):

$$dS = \sqrt{EG} \sin \omega d\xi d\eta. \quad (9.4.8)$$

Ricordando poi che, dato nel piano  $\xi, \eta$  un integrale esteso alla linea chiusa  $\mathcal{Y}^\dagger$ , sussistono le seguenti relazioni:

$$\oint_{\mathcal{Y}^\dagger} f d\xi = - \int_{S^\dagger} \frac{\partial f}{\partial \eta} d\xi d\eta, \quad \oint_{\mathcal{Y}^\dagger} f d\eta = \int_{S^\dagger} \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi d\eta \quad (9.4.9)$$

dove  $S^\dagger$  è l'area racchiusa dentro  $\mathcal{Y}^\dagger$ ; esse costituiscono l'analogo del lemma di Gauss (9.3.34) nel caso di uno spazio a due dimensioni.

Ciò premesso consideriamo l'integrale:

$$\oint_{\mathcal{Y}} v_x dx = \oint_{\mathcal{Y}^\dagger} \left( v_x \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + v_x \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \right) \quad (9.4.10)$$

dove  $v_x$  è una componente di un generico vettore  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . Mediante il lemma di Gauss (9.4.9) la (9.4.10) diventa:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{Y}} v_x dx &= \int_{S^\dagger} \left[ -\frac{\partial}{\partial \eta} \left( v_x \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( v_x \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right] d\xi d\eta = \\ &= \int_{S^\dagger} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (9.4.11)$$

Ora è:

$$\frac{\partial v_x}{\partial \xi} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad (9.4.12)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial \eta} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad (9.4.13)$$

per cui, sostituendo nella (9.4.11) e semplificando, si ha:

$$\oint_{\mathcal{Y}} v_x dx = \int_{S^\dagger} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial v_x}{\partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right] d\xi d\eta. \quad (9.4.14)$$

Inserendo, mediante la (9.4.6), le componenti di  $\vec{n}$  si ottiene:

$$\oint_{\gamma} v_x dx = \int_{S^+} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} n_y - \frac{\partial v_y}{\partial z} n_x \right) \sin \omega \cdot \sqrt{EG} d\xi d\eta. \quad (9.4.15)$$

Procedendo allo stesso modo per le componenti  $v_x$ ,  $v_z$  si deduce analogamente:

$$\oint_{\gamma} v_y dy = \int_{S^+} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} n_z - \frac{\partial v_z}{\partial x} n_y \right) \sin \omega \cdot \sqrt{EG} d\xi d\eta, \quad (9.4.16)$$

$$\oint_{\gamma} v_z dz = \int_{S^+} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} n_x - \frac{\partial v_x}{\partial y} n_z \right) \sin \omega \cdot \sqrt{EG} d\xi d\eta. \quad (9.4.17)$$

Sommando membro a membro le (9.4.15), (9.4.16), (9.4.17) si arriva così alla relazione:

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{S^+} \left[ \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) n_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) n_y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) n_z \right] \sin \omega \cdot \sqrt{EG} d\xi d\eta \quad (9.4.18)$$

ossia, ricordando le espressioni (9.2.57) delle componenti del rotore, utilizzando la (9.4.8) ed osservando che nel passaggio da  $\xi, \eta$  a  $x, y, z$   $S^+$  si trasforma nella superficie  $S$ :

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (9.4.19)$$

che coincide con la (9.3.41).

Partendo dal teorema di Stokes è ora facile ricavare la relazione (9.3.42); si ha infatti:

$$\vec{i} \cdot \oint f d\vec{l} \equiv \oint (f \vec{i}) \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} (f \vec{i}) \cdot \vec{n} dS. \quad (9.4.20)$$

Ricordando la (9.3.20) ed applicando la proprietà ciclica del prodotto misto di tre vettori (vedi equazione (9.3.5)) la (9.4.20) diventa:

$$\vec{i} \cdot \oint f d\vec{l} = \int_S \text{grad} f \wedge \vec{i} \cdot \vec{n} dS = \vec{i} \cdot \int_S \vec{n} \wedge \text{grad} f dS. \quad (9.4.21)$$



Ripetendo questo calcolo usando, anziché  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ , l'equazione dei due membri della (9.3.42) risulta dimostrata in quanto essi posseggono lungo i tre assi le stesse componenti.

## 9.5 Serie di Fourier

In questo paragrafo sono brevemente riportate le nozioni sulle serie di Fourier di cui abbiamo fatto uso nei precedenti capitoli.

Consideriamo, nell'intervallo:

$$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad (9.5.1)$$

le funzioni:

$$y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-in2\pi\frac{t}{T}} \quad (n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots), \quad (9.5.2)$$

e verifichiamo che esse formano un sistema ortonormale. Si ha infatti:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y_n^* y_m dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{i(n-m)2\pi\frac{t}{T}} dt = \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{2i(n-m)\pi} = \frac{\sin(n-m)\pi}{(n-m)\pi} = \delta_{nm}, \quad (9.5.3)$$

Mediante le  $y_n$  è possibile rappresentare nell'intervallo (9.5.1) una generica funzione  $f(t)$  purché questo intervallo sia divisibile in un numero finito di tratti in cui  $f(t)$  è continua e monotona (Condizione di Dirichlet). Esiste cioè la serie:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m y_m(t); \quad (9.5.4)$$

per la dimostrazione di questa eguaglianza rimandiamo agli appositi trattati. Le costanti  $c_n$  sono immediatamente ottenibili integrando membro a membro nell'intervallo (9.5.1) ed applicando la (9.5.3); si ha in questo modo:

$$c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y_n^* f(t) dt. \quad (9.5.5)$$

Assumendo:

$$c_n = c_n^*, \quad (9.5.6)$$

è possibile dare alla (9.5.4) forma reale; infatti ponendo:

$$c_0 = \sqrt{T} a_0, \quad (9.5.7)$$

$$c_n = \frac{\sqrt{T}}{2} (a_n + i b_n) \quad (n \neq 0), \quad (9.5.8)$$

si ha:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left[ c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( c_n e^{-in2\pi \frac{t}{T}} + c_n^* e^{in2\pi \frac{t}{T}} \right) \right] = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \operatorname{Re} \left[ (a_n + i b_n) e^{-in2\pi \frac{t}{T}} \right] \right\} = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos n2\pi \frac{t}{T} + b_n \sin n2\pi \frac{t}{T} \right). \end{aligned} \quad (9.5.9)$$

Mediante la (9.5.5) risulta subito che le espressioni dei coefficienti  $a_0, a_n, b_n$  sono:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad (9.5.10)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos n2\pi \frac{t}{T} f(t) dt, \quad (9.5.11)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sin n2\pi \frac{t}{T} f(t) dt. \quad (9.5.12)$$

È manifesto, da queste equazioni, che quando la funzione  $f(t)$  è pari (cioè  $f(t) = f(-t)$ )  $b_n$  vale zero e la serie si riduce ai soli termini proporzionali ai coseni; quando viceversa  $f(t)$  è dispari (cioè  $f(t) = -f(-t)$ ) la serie risulta costituita solo dai seni.

È evidente, osservando che le funzioni  $y_n$  sono periodiche con periodo  $T$  (cioè  $y\left(t - \frac{T}{2}\right) = y\left(t + \frac{T}{2}\right)$ ), che lo sviluppo (9.5.4) definisce a sua volta una funzione periodica con periodo  $T$ . La (9.5.4) è pertanto accettabile per rappresentare su tutto l'asse reale ( $-\infty \leq t \leq +\infty$ ) delle funzioni periodiche; quando tuttavia  $f(t)$  non fosse periodica si può ancora usare una espressione simile alla (9.5.4) supponendo però di fare tendere  $T$  ad infinito. Per vedere come ciò sia possibile, poniamo innanzitutto:

$$c_m = \pi \frac{2}{\sqrt{T}} \varphi_m, \quad (9.5.13)$$

$$\omega_m = m \frac{2\pi}{T}; \quad (9.5.14)$$

mediante queste relazioni le (9.5.4) e (9.5.5) diventano rispettivamente:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \varphi_m e^{-i\omega_m t}, \quad (9.5.15)$$

$$\varphi_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{i\omega_m t} f(t) dt. \quad (9.5.16)$$

Utilizzando la (9.5.14) si può ancora trascrivere la (9.5.15) nella forma:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_m e^{-i\omega_m t} (\omega_{m+1} - \omega_m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_m e^{-i\omega_m t} \Delta\omega, \quad (9.5.17)$$

da essa appare ovvio che al limite per  $T \rightarrow \infty$  la quantità:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (9.5.18)$$

e corrispondentemente la somma su  $m$  diventano eguali rispettivamente al differenziale e all'integrale relativi alla variabile continua  $\omega$ . Si ha così:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (9.5.19)$$

in cui:

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt ; \quad (9.5.20)$$

queste equazioni costituiscono appunto il risultato che si voleva ottenere. È implicito che esse sono applicabili solo se le funzioni  $f(t)$  e  $\varphi(\omega)$  si comportano all'infinito in modo da rendere limitati i valori degli integrali che compaiono nelle loro espressioni. Alla funzione  $\varphi(\omega)$  si dà il nome di trasformata di Fourier di  $f(t)$ , inversamente  $f(t)$  è la trasformata di Fourier di  $\varphi(\omega)$ . Le equazioni (9.5.19), (9.5.20) valgono rigorosamente anche se il procedimento impiegato per ottenerle ha carattere soprattutto euristico.

È importante notare che le (9.5.19), (9.5.20) possono essere facilmente generalizzate al caso tridimensionale. A questo scopo consideriamo una generica funzione del posto  $f(x, y, z)$ ; utilizzando la (9.5.19) per la dipendenza dalla variabile  $x$ , si ha:

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''(k_x; y, z) e^{-ik_x x} dk_x \quad (9.5.21)$$

dove si è scritto  $k_x$  al posto di  $\omega$  e  $\varphi''$  al posto di  $\varphi$ . Analogamente sviluppando  $\varphi''$  rispetto ad  $y$ :

$$\varphi''(k_x; y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(k_x, k_y; z) e^{-ik_y y} dk_y \quad (9.5.22)$$

e  $\varphi'$  rispetto a  $z$ :

$$\varphi'(k_x, k_y; z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k_x, k_y, k_z) e^{-ik_z z} dk_z, \quad (9.5.23)$$

ne segue, sostituendo la (9.5.23) nella (9.5.22) e quest'ultima nella (9.5.21):

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k_x, k_y, k_z) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y dk_z, \quad (9.5.24)$$

ossia:

$$f(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{k}, \quad (9.5.25)$$

dove per brevità si è introdotto il vettore  $\vec{k}(k_x, k_y, k_z)$  e il simbolo  $d^3\vec{k}$  per indicare il prodotto dei differenziali delle componenti. D'altra parte, applicando la (9.5.20) rispettivamente alle (9.5.23), (9.5.22) e (9.5.21), si ha:

$$\varphi(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_z z} \varphi'(k_x, k_y; z) dz, \quad (9.5.26)$$

$$\varphi'(k_x, k_y; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_y y} \varphi''(k_x; y, z) dy, \quad (9.5.27)$$

$$\varphi''(k_x; y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_x x} f(x, y, z) dx, \quad (9.5.28)$$

per cui, eliminando successivamente  $\varphi''$  e  $\varphi'$ :

$$\varphi(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(x, y, z) d^3\vec{r}. \quad (9.5.29)$$

Questa relazione e la (9.5.25) generalizzano nel caso tridimensionale le (9.5.19) e (9.5.20).

Una immediata conseguenza dell'equazione (9.5.5) è un teorema (di Hurwitz – Liapounoff) che permette di calcolare la somma dei quadrati dei coefficienti della serie di Fourier, quando sia nota la funzione  $f(t)$  di cui si considera lo sviluppo. Mediante le (9.5.20), (9.5.29), il teorema può poi essere generalizzato per valutare gli integrali del modulo al quadrato delle funzioni  $\varphi(\omega)$  e  $\varphi(\vec{k})$ . Per stabilirlo osserviamo che utilizzando la (9.5.5) si ottiene:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m^* c_m = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m^* \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y_m^*(t) f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m^* y_m^*(t) dt. \quad (9.5.30)$$

Inserendovi la coniugata della (9.5.4), questa relazione diventa:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt, \quad (9.5.31)$$

che è il teorema in questione. Sostituendo nella (9.5.31) la (9.5.7), (9.5.8), si ha:

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt, \quad (9.5.32)$$

che è equivalente alla (9.5.31) nel senso in cui si consideri una serie di Fourier in forma reale. Per gli integrali di Fourier valgono delle relazioni analoghe; tenendo conto della (9.5.20) si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(\omega) \varphi(\omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \varphi^*(\omega) d\omega \right] dt, \end{aligned} \quad (9.5.33)$$

ossia inserendo la coniugata della (9.5.19):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt, \quad (9.5.34)$$

che è il risultato che si voleva ottenere. Nel caso tridimensionale, partendo dalla (9.5.29), si ha analogamente:

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(\vec{k})|^2 d^3\vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y, z)|^2 dV. \quad (9.5.35)$$

Il teorema ora dimostrato completa le proprietà generali delle serie di Fourier che è necessario conoscere per i nostri scopi.

Una delle più importanti applicazioni delle equazioni testè ottenute è la rappresentazione in forma integrale della funzione  $\delta$  di Dirac; essa è definita dalla relazione:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t' - t) f(t') dt', \quad (9.5.36)$$

in cui  $f$  è una funzione arbitraria. Sostituendo la (9.5.20) (in cui si sia scritto  $t'$  al posto di  $t$ ) nella (9.5.19) e riordinando gli integrali, si ha infatti:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t'} f(t') dt' \right] e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t'-t)} d\omega \right] f(t') dt'; \quad (9.5.37)$$

confrontando con la (9.5.36), risulta subito che:

$$\delta(t' - t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t' - t)} d\omega. \quad (9.5.38)$$

Essendo l'integrazione su  $\omega$  estesa da  $-\infty$  a  $+\infty$ , è evidente che questa espressione di  $\delta$  non muta il valore cambiando  $i$  con  $-i$ ; la funzione  $\delta$ , di conseguenza, è reale e simmetrica attorno all'origine. Questo risultato è immediatamente generalizzabile al caso tridimensionale; si ha infatti:

$$f(P) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(P' - P) f(P') dV_{P'} \quad (9.5.39)$$

e sostituendo la (9.5.29) (in cui sia scritto  $P'(x', y', z')$  al posto di  $P(x, y, z)$ ) nella (9.5.25):

$$\begin{aligned} f(P) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} f(P') dV_{P'} \right] e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{k} = \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})} d^3 \vec{k} \right] f(P') dV_{P'}, \end{aligned} \quad (9.5.40)$$

da cui:

$$\delta(P - P') = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})} d^3 \vec{k}; \quad (9.5.41)$$

a questa relazione sono applicabili le stesse considerazioni che abbiamo svolto per la (9.5.38).

Mediante la funzione  $\delta$  tridimensionale è possibile rappresentare il valore del laplaciano della funzione  $(1/r)$  nel punto  $r = 0$  in cui essa è singolare. Consideriamo infatti lo sviluppo in integrale di Fourier di  $(1/r)$ ; dalla (9.5.25) si ha:

$$\frac{1}{r} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{k}, \quad (9.5.42)$$



in cui per la (9.5.29):

$$\varphi(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} d^3 \vec{r}. \quad (9.5.43)$$

Introducendo coordinate polari prendendo la parte principale dell'integrale su  $r$ , si ha<sup>(\*\*\*\*\*)</sup>:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ikr \cos \vartheta} r \sin \vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin kr}{k} dr = \frac{1}{2\pi^2 k^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon \xi} \sin \xi d\xi = \frac{1}{2\pi^2 k^2}, \end{aligned} \quad (9.5.44)$$

per cui sostituendo nella (9.5.42):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{k^2} d^3 \vec{k}. \quad (9.5.45)$$

Basta ora applicare l'operatore laplaciano e confrontare con la (9.5.41) per ottenere:

$$\Delta_2 \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{k} = -4\pi \delta(P). \quad (9.5.46)$$

Questa relazione generalizza la (9.3.31) eliminando la restrizione relativa ad  $r \neq 0$ .

È possibile partendo dall'equazione (9.5.38), scrivere l'espressione di  $\delta$  sotto forma di limite della funzione seno. Si ha infatti:

$$\delta(t' - t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{+A} e^{i\omega(t' - t)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{iA(t' - t)} - e^{-iA(t' - t)}}{i(t' - t)}, \quad (9.5.47)$$

ossia:

---

(\*\*\*\*\*) Integrando per parti  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon \xi} \sin \xi d\xi = 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \cdot \int_0^\infty e^{-\varepsilon \xi} \cos \xi d\xi = 1$  [n.d.c.].

$$\delta(t'-t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\sin A(t'-t)}{\pi(t'-t)}. \quad (9.5.48)$$

Assegnando ad  $A$  un valore finito l'andamento della funzione che compare a secondo membro di questa relazione è quello riportato in fig. (9.5.1); (essa coincide con lo

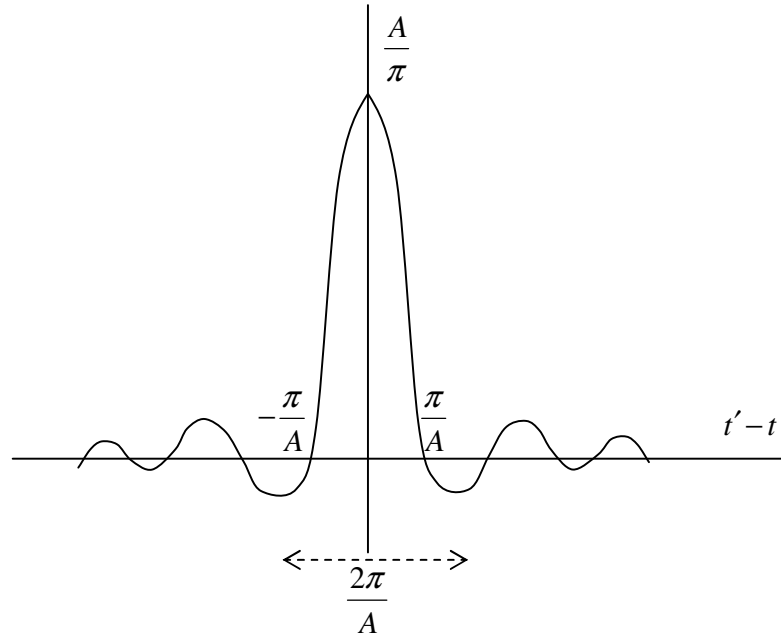


Fig. (9.5.1)

spettro, riportato in fig. (3.9.2) del pacchetto d'onde (3.9.14)). Facendo crescere  $A$  appare evidente che la funzione  $\delta$  sostanzialmente si riduce ad un picco la cui altezza  $A/\pi$  cresce infinitamente mentre la larghezza che è misurabile mediante l'intervallo:

$$\Delta(t'-t) = \frac{2\pi}{A}, \quad (9.5.49)$$

diminuisce in modo da lasciare l'area costante. Questa è proprio la struttura che si attribuisce alla funzione  $\delta$  quando la si usa per rappresentare delle concentrazioni puntiformi di carica.

Un altro tipo di funzioni, connesse alla funzione  $\delta$ , sono le cosiddette funzioni a gradino. Per studiarne le proprietà consideriamo innanzitutto la trasformata di Fourier della funzione  $1/z$ , ossia l'integrale:

$$I(t) = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itz}}{z} dz \quad (9.5.50)$$

dove  $P$  indica la parte principale. Esso può venire facilmente calcolato mediante il teorema di Cauchy. Infatti supposto  $t$  positivo si consideri, nel piano complesso, il percorso  $\gamma$ , che racchiude l'origine, indicato in fig. (9.5.2); ponendo:

$$z = \rho e^{i\vartheta} \quad (9.5.51)$$

l'integrazione lungo il semicerchio  $c$ , che supponiamo di raggio  $\varepsilon$  infinitesimo, dà contributo:

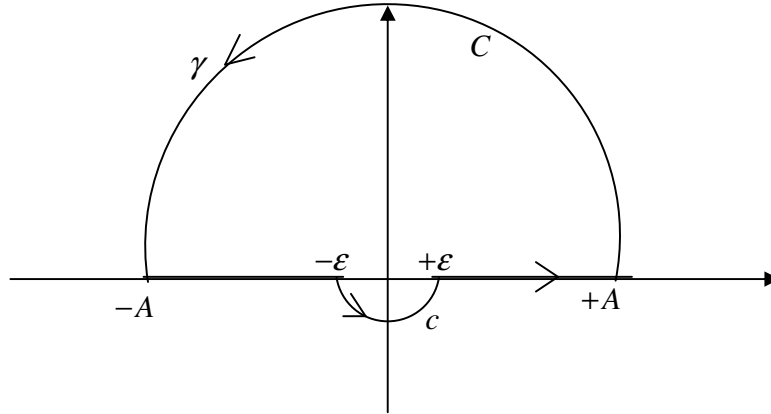


Fig. (9.5.2)

$$\int_c \frac{e^{itz}}{z} dz = \int_{-\pi}^0 (1 + it\rho e^{i\vartheta} + \dots) i d\vartheta = i\pi + 2it\varepsilon + \dots \quad (9.5.52)$$

L'integrale sul semicerchio  $C$  di raggio  $A$  diventa invece:

$$\int_C \frac{e^{itz}}{z} dz = \int_0^\pi e^{itA\cos\vartheta - tA\sin\vartheta} i d\vartheta, \quad (9.5.53)$$



Quando  $t$  invece è negativo si può calcolare l'integrale scegliendo il percorso  $\gamma'$  indicato in fig. (9.5.3). In questo modo l'integrale su  $C'$ , analogo all'integrale (9.3.53), si annulla quando  $A$  tende ad infinito. Vale quindi ancora, salvo la sostituzione di  $\gamma$  con  $\gamma'$  la (9.5.54); tuttavia il primo membro, essendo l'origine esterna a  $\gamma'$ , assume valore nullo. Pertanto:

$$I(t) = -\pi i. \quad (9.5.57)$$

Ciò premesso consideriamo le funzioni:

$$H^{(+)}(t-t') = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega} d\omega \right] \quad (9.5.58)$$

$$H^{(-)}(t-t') = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega} d\omega \right]. \quad (9.5.59)$$

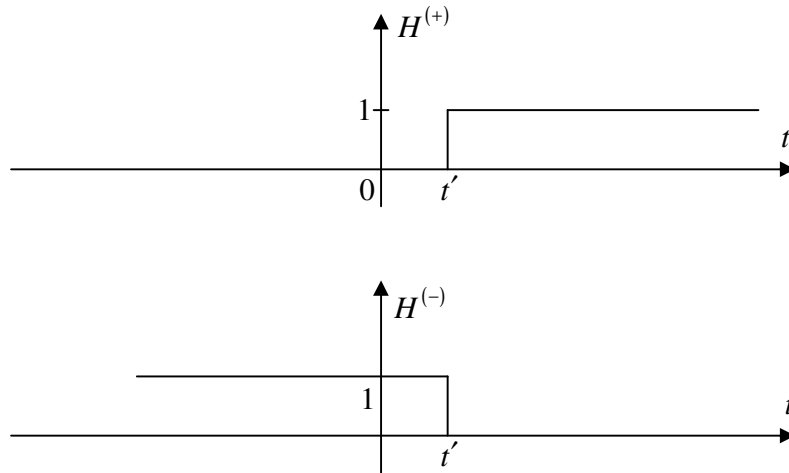


Fig. (9.5.4)

Mediante le equazioni (9.5.56) e (9.5.57) risulta subito che la funzione  $H^{(+)}(t-t')$  vale 1 per  $t-t' > 0$  mentre è nulla per  $t-t' < 0$ , l'andamento di  $H^{(-)}(t-t')$  è analogo salvo un rovesciamento di segno; queste funzioni sono illustrate nella fig. (9.5.4). Derivando le (9.5.58), (9.5.59) e confrontando colla (9.5.38) si ottiene:

$$\frac{dH^{(+)}(t-t')}{dt} = \delta(t-t'), \quad (9.5.60)$$

$$\frac{dH^{(-)}(t-t')}{dt} = -\delta(t-t'), \quad (9.5.61)$$

che è il legame esistente colla funzione  $\delta$ . Combinando assieme più funzioni di questo tipo è possibile rappresentare anche funzioni contenenti due gradini. Ad esempio la funzione:

$$f(t) = H^{(+)}(t-t') - H^{(+)}(t-t''), \quad (9.5.62)$$

rappresenta un rettangolo di base  $t'' - t'$  e altezza 1, se  $t'' > t'$ ; mentre se  $t'' < t'$  si ha rettangolo di base  $t' - t''$  e altezza -1 (vedi fig. (9.5.5)). Anche queste funzioni trovano utile impiego in molte applicazioni.

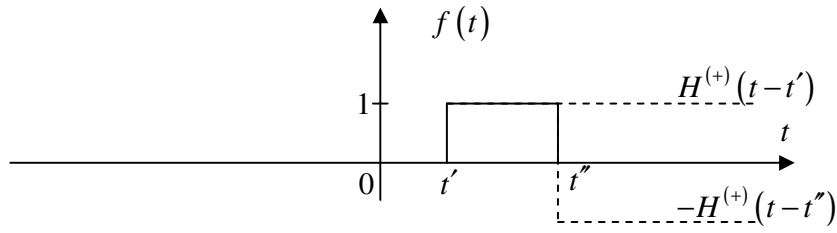


Fig. (9.5.5)