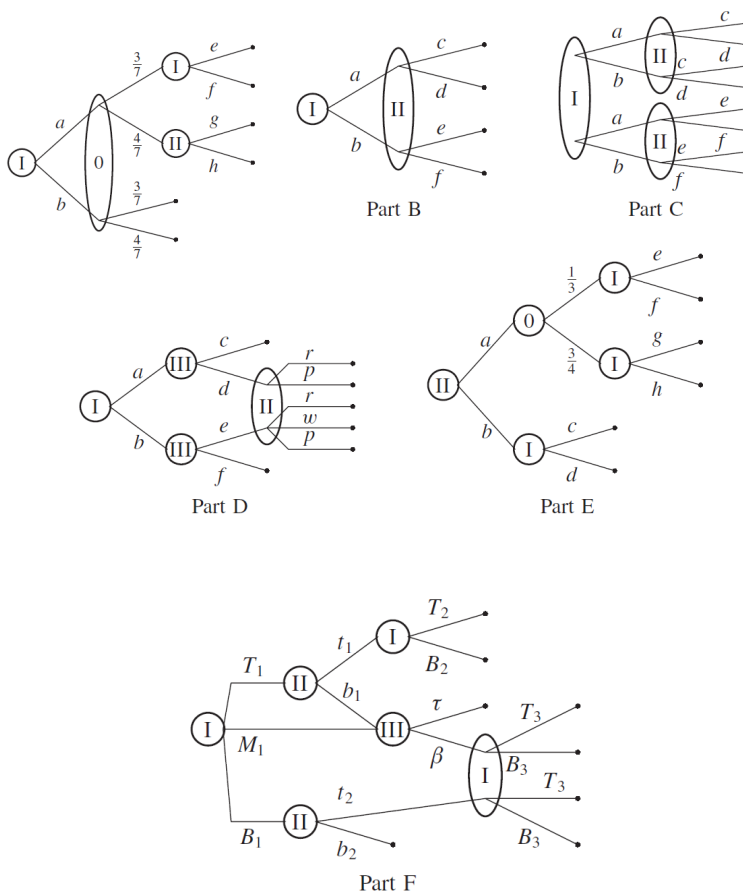


Instruções: Os workshops são resolvidos em grupo **durante a aula** com a ajuda dos colegas e do docente, mas cada aluno deve *escrever e entregar a lista separadamente*. Constitui **violações do código de ética** da disciplina:

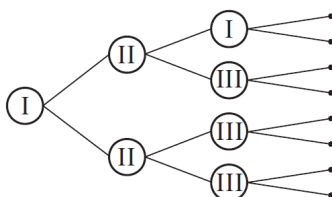
- Olhar as resoluções escritas dos colegas;
- Escrever na lista dos colegas ou trocar anotações de respostas;
- Trazer para a aula qualquer tipo de resoluções dos exercícios do workshop.

Workshop 4. Jogos dinâmicos de informação imperfeita

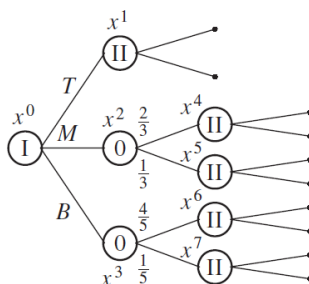
1. **(Todo grafo é igual, mas alguns grafos são mais iguais do que os outros)** Todos os grafos abaixo não podem representar um jogo em forma extensiva. Para cada um deles, explique o porquê.



2. **(Conjuntos de informação)** No “esboço” de jogo abaixo, desenhe os conjuntos de informação para cada situação descrita.

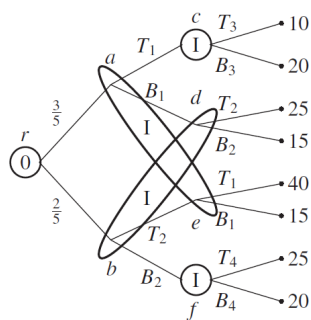


- (a) O jogador II não sabe o que o jogador I escolheu. O jogador III sabe o que o jogador I escolheu, mas se o jogador I moveu para baixo, III não sabe o que o jogador II escolheu.
- (b) Jogador II não sabe o que o jogador I escolheu, e o jogador III não sabe nem o que o jogador I nem o jogador II escolheu.
- (c) Em todos os seus momentos de decisão o jogador I não consegue lembrar se ele já fez ou não qualquer lance.
3. **(Conjuntos de informação II)** No “esboço” de jogo abaixo, desenhe os conjuntos de informação para cada situação descrita.
- (a) O jogador II, nos seus momentos de decisão, sabe o que o jogador I escolheu, mas não o resultado do movimento da sorte.
- (b) O jogador II, nos seus momentos de decisão, sabe o resultado da sorte (quando relevante). Ele sabe se o jogador I escolheu T, mas se I escolheu M ou B, ele não sabe qual foi escolhido.
- (c) O jogador II quando chamado a jogar não sabe tanto o movimento da sorte quanto a escolha do jogador I.

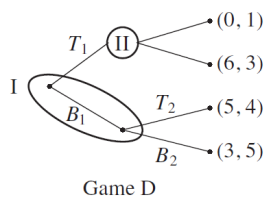
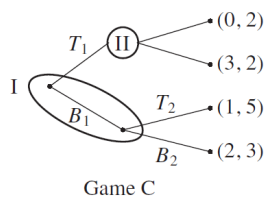
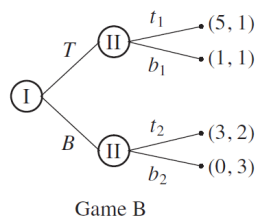
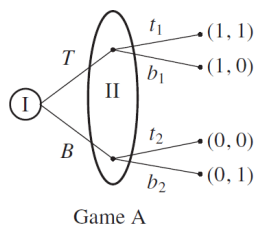


4. Sobre o “jogo” de um jogador em forma extensiva abaixo, responda as seguintes perguntas:

- (a) O que o jogador I sabe e o que ele não sabe em cada conjunto de informação?
- (b) Quantas estratégias o jogador I tem?
- (c) O que você recomendaria que o jogador I jogasse nesse jogo? (O número reportado em cada folha do grafo é o seu *payoff* naquele *outcome*.)



5. Encontre todos os equilíbrios perfeitos em subjogos de cada um dos jogos abaixo.



6. **(Agora de novo)** Considere o jogo estático de dois jogadores abaixo, e responda:

		Player II	
		L	R
Player I	T	3, 0	1, 2
	B	2, 0	1, 5

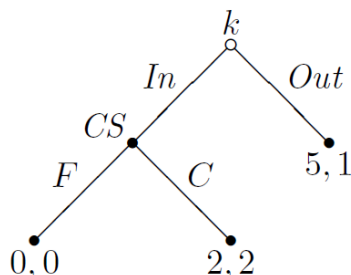
- (a) Quais são os equilíbrios de Nash do jogo?
- (b) Agora considere que o jogo é repetido duas vezes, sendo que na segunda vez eles sabem o que foi jogado na primeira, e portanto podem condicionar a sua ação na segunda repetição ao que ocorreu na primeira.
Escreva esse jogo em forma extensiva. Quais são os subjogos?
- (c) Ache os equilíbrios perfeitos em subjogos do jogo repetido.
7. **(O dilema dos prisioneiros repetido)** Assim como o dilema dos prisioneiros é o jogo mais importante da teoria dos jogos, a sua versão repetida é o mais conhecido e estudado dos jogos repetidos. O livro-texto do Osborne, por exemplo, tem um capítulo inteiro apenas sobre o dilema dos prisioneiros repetido, e teremos nesse workshop nada menos que 8 questões relacionadas com esse jogo.

O dilema dos prisioneiros, como é bem conhecido, tem o formato (por exemplo) abaixo. Imagine que esse jogo de estágio é repetido 10 vezes. Quantos ENPS o jogo repetido tem (e quais)? E quantos equilíbrios de Nash (e quais)?

	C	D
C	2,2	0,3
D	3,0	1,1

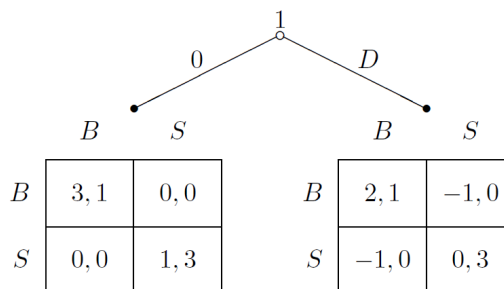
8. **(O paradoxo da cadeia de lojas)** Além do centípede, que já estudamos, outro jogo famoso que exemplifica problemas com o raciocínio de *indução para trás* é o paradoxo da cadeia de lojas (*chain-store paradox*, em inglês), apresentado por Reinhard Selten (o criador do equilíbrio perfeito em subjogos e Nobel '94).

O jogo se dá em 100 estágios. Em cada estágio (um após o outro), o jogador 1 CS ("Pão de Açúcar") enfrenta em um mercado diferente um supermercado local (jogador 2), que decide se compete ou não com a cadeia de lojas. Se o supermercado local entrar, então o Pão de Açúcar decide se desafia ou cede à concorrência. Isto é, em cada estágio k CS joga com uma empresa diferente o jogo de *dissuasão estratégica de entrada* abaixo.



Descreva a forma dos (muitos!) equilíbrios de Nash do jogo repetido. Qual deles é (o único) perfeito em subjogos? Por que Selten (e muitos outros) consideraram esse ENPS pouco convincente? (*Dica*: pense nas crenças dos jogadores em subjogos que não ocorrem no caminho de equilíbrio.)

9. **(Queimando dinheiro)** Uma classe interessante de jogos primeiro estudada por Van Damme (não o ator) em 1984 é a de *burning money games*. Considere uma versão da clássica batalha dos sexos abaixo, em que antes de jogarem o jogo estático usual o homem pode decidir queimar um real. Queimar um real faz exatamente o que o nome diz: a utilidade do homem (mas não da mulher) diminui em 1 não importa o que ocorrer, como na figura abaixo.



10. **(Crenças em jogos dinâmicos)** Já vimos em jogos estáticos a importância de crenças dos agentes sobre a racionalidade dos outros jogadores, o tema de estudo da *teoria dos jogos epistemológica*. Jogos dinâmicos trazem ainda mais dificuldades para esse estudo, que são exemplificadas no jogo abaixo.¹

No jogo acima, um colega de sala pediu para você e Bárbara ajudarem ele a se mudar. Mas na verdade ele só precisa de um, então ele pretende fazer um leilão no dia da mudança e

¹Aqui fazemos um leve abuso de notação utilizando uma mistura de forma extensiva e forma normal. Como toda forma normal pode ser representada em uma forma extensiva (com a aplicação adequada de conjuntos informacionais), isso não nos traz nenhuma novidade conceitual, é apenas um auxílio visual.

contratar quem oferecer o menor preço (se empatar, ele tira na moeda). Interessantemente, Bárbara recebe uma ligação na véspera do dia da mudança oferecendo a ela um trabalho de motorista por 350 reais, mas exatamente no momento em que o colega tem que se mudar.

		You			
		200	300	400	500
Barbara	200	100, 100	200, 0	200, 0	200, 0
	300	0, 200	150, 150	300, 0	300, 0
	400	0, 200	0, 300	200, 200	400, 0
	500	0, 200	0, 300	0, 400	250, 250

- (a) Quais estratégias não são racionalizáveis no subjogo em que Bárbara rejeita o trabalho de motorista (i.e., no leilão de primeiro preço)? Qual é a dificuldade em que você se encontra caso descubra que Bárbara rejeitou aquele trabalho?
- (b) Imagine que você considera que Bárbara fez um erro (talvez “tremeu as mãos”) rejeitando o trabalho de motorista. O que você deveria fazer nesse caso? (Podemos chamar esse tipo de crença epistemológica de *crença na racionalidade futura* de Bárbara.)
- (c) Agora considere que você acredita que Bárbara foi inteiramente proposital ao rejeitar o trabalho de motorista. O que isso diz sobre as crenças delas? O que você deveria fazer nesse caso? (Podemos chamar esse tipo de crença epistemológica de *crença inabalável na racionalidade* de Bárbara.)
11. **(Três podem jogar)** Há dois bares próximos à USP, e três amigos, Ana, Bernardo e Claudia, decidem onde ir beber depois da aula de teoria dos jogos. Cada um tem utilidade 2 bebendo com apenas um colega, 1 se beber com ambos, e 0 se sozinho.
- Descreva o jogo de estágio em forma normal: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Quais são os equilíbrios de Nash do jogo em um estágio? E se ele for repetido por duas vezes? Quais deles são perfeitos em subjogos?

12. **(Equilíbrio perfeito em subjogos I)** Em jogos repetidos é em geral mais difícil sustentar cooperação em equilíbrio perfeito em subjogos do que em equilíbrio de Nash, sendo o primeiro um conceito mais exigente de equilíbrio, que elimina portanto várias estratégias cooperativas que não são sequencialmente racionais.

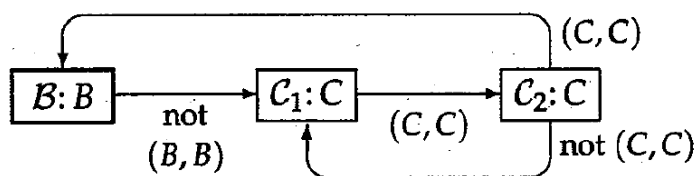
	<i>A</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	2, 3	1, 5
<i>D</i>	0, 1	0, 1

Considere o jogo abaixo repetido infinitas vezes, com fator de desconto intertemporal $1/2$. Construa um equilíbrio de Nash do jogo repetido que resulte em um caminho de (A, A) em todo período. Agora argumente que não existe equilíbrio perfeito em subjogos que gere um caminho igual a esse.

13. **(Equilíbrio perfeito em subjogos II)** No exemplo acima, o desconto intertemporal pequeno dificultou a criação do equilíbrio. Se os jogadores forem suficientemente pacientes, é possível sustentar diferentes caminhos de equilíbrio mesmo que só haja um equilíbrio de Nash.

Considere o jogo abaixo, e um fator de desconto de 0.8. Verifique que a estratégia representada pelo autômato abaixo, a dizer: (i) jogar (B, B) sempre, mas se o adversário não jogar (B, B) , então punir com (C, C) por 2 períodos e então, desde que ambos joguem (C, C) , voltar para (B, B) é um ENPS do jogo infinitamente repetido.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	4, 4	3, 0	1, 0
<i>B</i>	0, 3	2, 2	1, 0
<i>C</i>	0, 1	0, 1	0, 0



14. **(Jogos finitamente repetidos I)** Se manter cooperação perfeita em subjogos em jogos infinitos já é difícil, em jogos repetidos um número finito de vezes é ainda mais, porque temos sempre o fantasma do último período se aproximando. Ainda assim, nem sempre tudo está perdido: se o jogo tiver mais que um equilíbrio de Nash (se só tiver um não tem jeito), é possível sustentar cooperação até bem perto do final.

Considere o jogo abaixo repetido 10 vezes. Construa um equilíbrio perfeito em subjogos em que os jogadores sustentam cooperação (C, C) por 7 períodos.

	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>C</i>	3, 3	0, 4	0, 0
<i>D</i>	4, 0	1, 1	0, 0
<i>E</i>	0, 0	0, 0	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

15. **(Jogos finitamente repetidos II)** Geralmente se interpreta a cooperação como uma busca de *payoffs* melhores para os jogadores do que o que é possível apenas repetindo a cada estágio o equilíbrio de Nash do jogo. Mas os agentes também podem coordenar para resultados *piores* que qualquer equilíbrio do jogo estático.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	4, 4	0, 0	18, 0	1, 1
<i>B</i>	0, 0	6, 6	0, 0	1, 1
<i>C</i>	0, 18	0, 0	13, 13	1, 1
<i>D</i>	1, 1	1, 1	1, 1	0, 0

- (a) Mostre que no jogo acima repetido 2 vezes, é possível gerar um equilíbrio perfeito em subjogos em que o *payoff* de cada jogador é 3, mesmo o pior equilíbrio de Nash dando *payoff* 4.
- (b) Pode parecer meio estúpido que os jogadores queiram achar estratégias com *payoff* menor que conseguiriam em equilíbrio, mas isso pode ser extremamente útil! Mostre que usando a estratégia em (a) é possível achar um equilíbrio no jogo repetido 3 vezes em que os jogadores jogam (*C*, *C*) no primeiro período, algo impossível usando apenas os equilíbrios de Nash do jogo.
16. **(Um jogo com jogadores de vida longa e de vida curta)** Em jogos repetidos infinitamente, a promessa de uma longa relação entre os jogadores faz com que eles possam criar incentivos intertemporais para permitir resultados que não sejam equilíbrios de Nash do jogo de estágio.

Isso leva à pergunta natural se um jogador com planos de longo prazo consegue cooperar mesmo que seja com jogadores míópicos, porque duram apenas um período. A resposta, talvez surpreendentemente, é que frequentemente sim.

	h	ℓ		h	ℓ
H	2, 3	0, 2	H	2, 3	1, 2
L	3, 0	1, 1	L	3, 0	0, 1

Considere os jogos da figura acima, onde o jogador 1 vive infinitamente (e tem fator de desconto $1/2$), enquanto os jogadores 2 vivem cada um apenas um período, e portanto jogam sempre a melhor resposta do jogo de estágio que participam.

- (a) No jogo da esquerda, qual seria um perfil de estratégias do jogo entre dois jogadores que vivem infinitamente cujo caminho de equilíbrio perfeito em subjogos é $((H, h), (H, h), \dots)$? Faz diferença se os jogadores 2 serem de vida curta? Explique.
- (b) Agora considere o jogo da direita (a diferença é que agora L não é mais melhor resposta a l). Mostre que ainda assim existe um equilíbrio perfeito em subjogos em que o caminho de equilíbrio é sempre (H, h) , fazendo com que a estratégia do jogador 1 dê incentivos a ele mesmo se punir em caso de desvio.