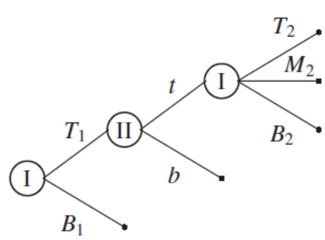
Departamento de Economia
Universidade de São Paulo
EAE-1301 - Lista 3
Prof.: Pedro Forquesato
2º semestre de 2025

Instruções: Os workshops são resolvidos em grupo **durante a aula** com a ajuda dos colegas e do docente, mas cada aluno deve *escrever e entregar a lista separadamente*. Constitui **violações do código de ética** da disciplina:

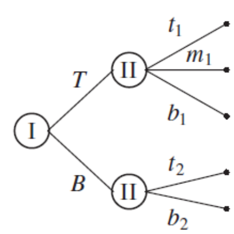
- Olhar as resoluções escritas dos colegas;
- Escrever na lista dos colegas ou trocar anotações de respostas;
- Trazer para a aula qualquer tipo de resoluções dos exercícios do workshop.

Workshop 3. Jogos dinâmicos de informação perfeita

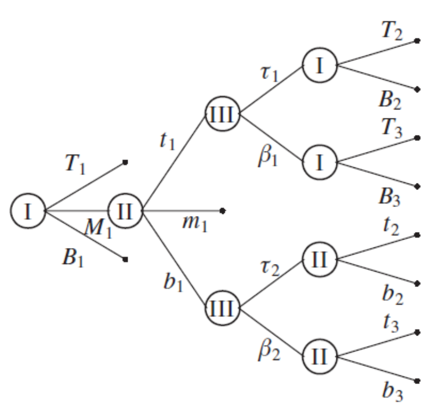
1. **(Estratégias)** Em jogos em forma extensiva (de informação perfeita), estratégias especificam ações como resposta a cada histórico de jogo, isto é, para cada vértice (em que aquele jogador é chamado a jogar), mesmo aqueles "impossíveis" de serem atingidos dada a estratégia daquele jogador em etapas anteriores do jogo! Para cada jogo abaixo (sem *payoffs*), especifique o número estratégias de cada jogador.



Game A

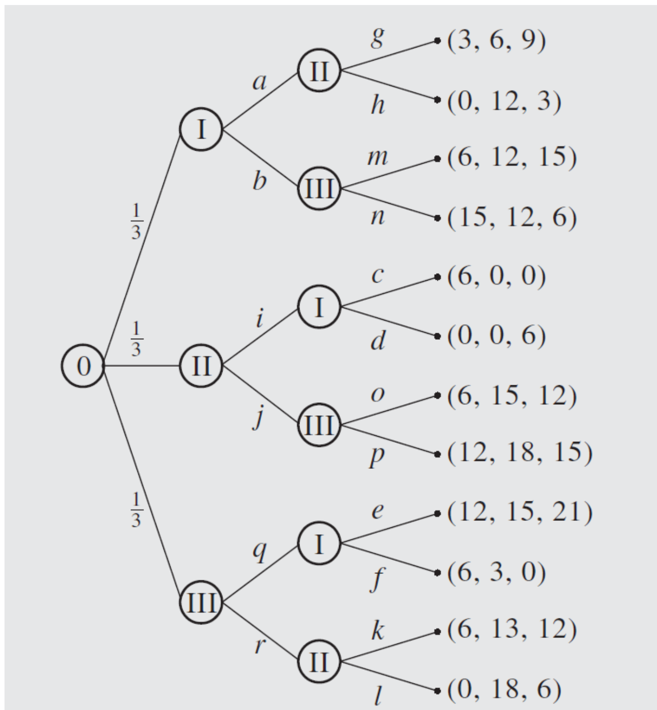


Game B

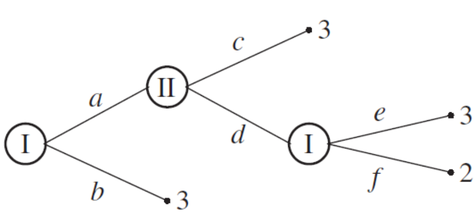


Game C

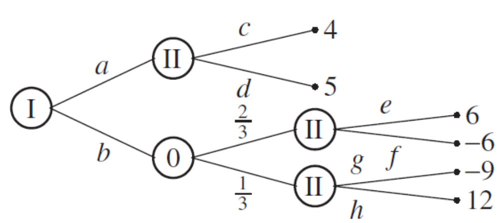
2. **(Indução para trás)** Usando o método de indução para trás (*backward induction*, em inglês) denote por setas as ações ótimas de cada jogador (em cada nódulo em que ele é chamado a jogar) no jogo em forma extensiva abaixo. Qual é o (único!) *payoff* esperado de cada jogador nesse equilíbrio de Nash perfeito em subjogos?



3. **(EN e ENPS em jogos de soma-zero)** Para cada um dos jogos de soma-zero abaixo (que como antes, o número indicado é o *payoff* do jogador 1, sendo o do jogador 2 o inverso): escreva o jogo em forma normal, ache os equilíbrios de Nash, e os compare com os equilíbrios perfeitos em subjogos encontrados por *backward induction*.



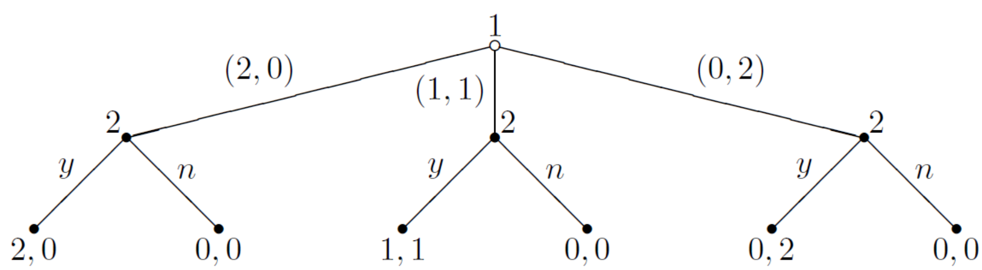
Game A



Game B

4. **(Pegar ou largar)** O jogo abaixo, também conhecido como jogo do ultimato (em inglês, *ultimatum game*) é um dos jogos mais estudados em economia experimental. Esse jogo é famoso pois em experimentos as pessoas agem de forma muito diferente das predições da teoria dos jogos (por exemplo, um resultado frequente é uma divisão 50-50).

   Considere o seguinte método de dividir entre duas pessoas dois bombons (fechados). O jogador 1 propõe uma divisão, e o jogador 2 aceita (y) ou rejeita (n) a proposta. Se o jogador 2 aceitar, ela é efetivada, se ele rejeitar, os dois bombons são doados.



   Esse jogo é representado na figura acima. Quais são os equilíbrios de Nash do jogo? Quais deles são perfeitos em subjogos?

5. **(O dilema do professor e a cola)** Um professor (jogador 1) suspeita que um aluno (jogador 2) colou na prova. O professor anuncia que vai verificar a similaridade das provas, mas ele e o aluno sabem que esse processo é aleatório (muitas provas) e só vai identificar a cola com 50% de chance. O jogo continua na seguinte sucessão: o professor descobre se tem provas ou não e daí decide se acusa o aluno de cola ou desiste. O aluno (sem saber o resultado do processo) então decide se admite a cola ou se nega ter colado. Se o professor desiste, ambos ficam com *payoff* 0. Se o professor acusa e o aluno confessa, o professor fica com 2 por ter cumprido a sua obrigação profissional e o aluno é reprovado com *payoff* -2. Se o aluno não confessa, então se o professor não identificou a cola ele é cancelado nas redes sociais, recebendo *payoff* -4, enquanto o aluno tem utilidade 4, mas se ele identificou a cola, então o aluno é suspenso, com utilidade contrária entre os dois.

   Descreva a situação como um jogo em forma extensiva de informação imperfeita: jogadores, o grafo, conjuntos informacionais, estratégias e *payoffs*. Ache então os equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos do jogo.

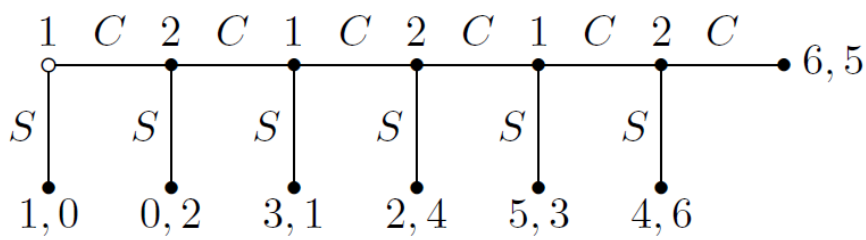
6. **(Nim reverso)** Considere um jogo em que há três pilhas de fósforos, uma com 1 fósforo, a segunda com 2 e última com 3 fósforos. A cada turno, um jogador retira fósforos, pelo menos um e quantos quiser, desde que da mesma pilha. O jogador que remover o último

fósforo perde o jogo. (Vide o jogo de Nim no exercício 12, esse é reverso pois quem pegar o último fósforo perde, e não ganha como no Nim usual.)

Descreva a situação como um jogo em forma extensiva: jogadores, o grafo, estratégias e *payoffs*. Use *indução para trás* para resolver o jogo para a estratégia sequencialmente racional. Quem pode garantir a vitória, o primeiro ou segundo jogador?

7. **(O jogo centípede)** Embora um conceito importantíssimo em teoria dos jogos, não passou despercebido pelos teoristas que nem sempre o equilíbrio perfeito em subjogos dá predições de comportamento que soam razoáveis. Um exemplo em que isso acontece é o canônico jogo centípede, pensado por Rosenthal em 1981.

   Nesse jogo, 2 jogadores agem de forma alternada, escolhendo se param ou continuam o jogo. Parar aumenta o *payoff* (acumulado) em 2, mas termina o jogo, enquanto continuar aumenta em apenas 1, mas o jogo continua, como na figura abaixo, para um jogo de 6 períodos.



   Qual é o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos do jogo (isto é, o que resulta de um processo de *backward induction*)? Há outros equilíbrios de Nash que esse?

8. **(Jogo de barganha)** No estudo da teoria dos jogos, uma classe importante de jogos são os *jogos de barganha*, pensados por Stahl (1972, 1977) e Rubinstein (1982), em que jogadores precisam chegar a um acordo ("barganhar") para a divisão de algum bem ou excedente.

   Os jogadores se revezam propondo divisões do bolo, que o outro jogador pode aceitar, e então o jogo acaba com aquela divisão, ou rejeitar, e o jogo continua até o próximo período, quando o jogador que rejeitou faz a sua contra-proposta. E assim em diante, até um final pré-determinado do jogo após T períodos. (Fica então claro que o jogo do ultimato da questão 4 nada mais é que um jogo de barganha de Stahl-Rubinstein com $T = 1$.)

   No jogo, tempo tem um custo: a cada período que passa, os jogadores perdem 3 unidades do bolo.[1] Considere que o tamanho do bolo é 10, o jogo tem 3 períodos e o jogador 1 é o

[1] Rubinstein (1982) analisa tanto o caso de custo fixo do tempo, como aqui, quanto a perda de uma proporção δ_i do bolo, como vimos em aula. Este último caso tem apelo maior a economistas, por ter correspondência direta a uma taxa de desconto intertemporal, e assim a segunda especificação do modelo se tornou muito mais comum.

primeiro a fazer uma oferta.

(a) Descreva a situação como um jogo em forma extensiva: jogadores, o grafo, estratégias e *payoffs*. Quais são os equilíbrios de Nash do jogo?

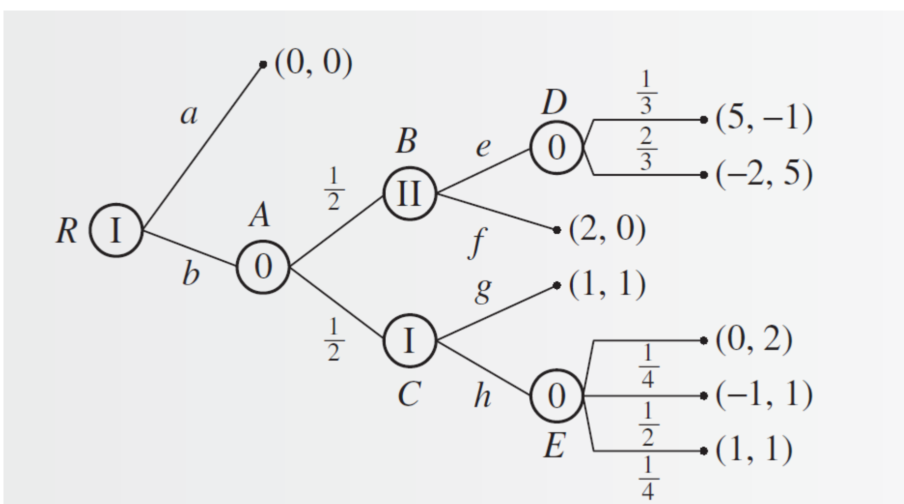
(b) Qual ou quais desses equilíbrios são perfeitos em subjogos?

9. **(Rotten kid theorem)** Imagine um jovem universitário que escolhe como se comportar morando sozinho, escolhendo um nível de mal comportamento a. Esse comportamento causa um dano econômico para si, reduzindo a sua riqueza $c(a)$, assim como para os seus pais, reduzindo a riqueza deles $p(a)$, onde $c(a) < p(a)$ sempre.

   O filho é inteiramente egoísta, e se preocupa apenas com o seu próprio dinheiro. Já os pais são inteiramente altruístas (em relação ao filho), querendo maximizar o mínimo entre $p(a)$ e $c(a)$, e ajudam o filho a morar fora de casa dando a ele uma mesada. Depois do universitário escolher a, os pais decidem o quanto transferir de dinheiro para ele.

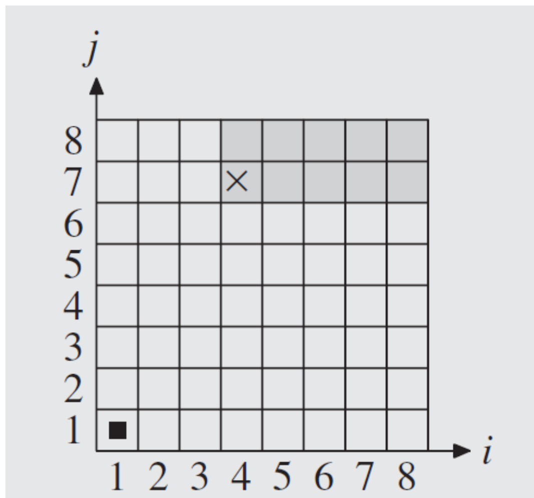
   Descreva a situação como um jogo em forma extensiva: jogadores, o grafo, estratégias e *payoffs*. Mostre que no equilíbrio perfeito em subjogos, o universitário escolhe o nível de mal comportamento maximizando a soma do seu dinheiro e dos pais. Interprete.

10. **(Jogos com movimentos da sorte)** Considere o jogo em forma extensiva com movimentos da sorte abaixo, onde o jogador zero é a natureza. Use o princípio de *indução para trás* e ache os equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos.



11. **(Chomp)** As próximas questões lidam com jogos de vencedor e perdedor (soma-zero) de informação perfeita entre dois jogadores, como o xadrez, a dama ou o go (todos eles infelizmente complicados demais para os nossos propósitos). O estudo desses jogos na matemática forma a *teoria dos jogos combinatórios*.

Chomp é um jogo combinatorial inventado por David Gale em 1974, que é jogado em um tabuleiro de tamanho $m \times n$. Ele é bem simples: os jogadores se alternam (o jogador 1 começa), e a cada movimento o jogador captura um quadrado do tabuleiro. Quando esse quadrado é capturado, todos os quadrados no nordeste dele são removidos do tabuleiro. Ao final, quem capturar o quadrado $(1, 1)$ perde o jogo. Um exemplo para $m = n = 8$ é apresentado na figura a seguir, onde um jogador capturou $(4, 7)$, eliminando os quadrados escurecidos.



(a) Descreva o jogo de David Gale para $m = n = 2$ em forma extensiva: jogadores, o grafo, estratégias e *payoffs*. O jogador 1 pode garantir a vitória, o jogador 2 pode garantir a vitóra, ou ambos podem garantir o empate?

(b) O que acontece agora para um "tabuleiro vertical" $1 \times n$?

(c) E se tivermos um tabuleiro "só com as bordas" e os lados de tamanho igual, isto é, $(m, 1) \cup (1, n)$ e $m = n$? (Para quem gostou do jogo, continuamos a análise do Chomp na questão 16 desse workshop.)

12. **(Nim)** Outro jogo combinatorial que é relativamente simples é o Nim (ou jian3shi2zi), que existe desde a antiguidade na China, chegando na Europa já no século XV. (Ele também é bastante importante na teoria de jogos combinatórios, já que é conhecido que uma grande classe de jogos (incluindo o Chomp) podem ser representados como diferentes tipos de Nim.)

O jogo de Nim funciona de tal maneira: há N pilhas de pedras, cada uma com M_n pedras nela. Os jogadores revezam em pegar pedras, quantas quiser desde que sejam da mesma pilha. Quem pegar a última pedra ganha.

O jogo de Nim foi inteiramente resolvido, e tem uma estratégia ótima bastante interessante: escreva os números de pedras em cada pilha em colunas *em base 2*. Definimos uma "posição vencedora" como uma em que o número de 1s em todas as colunas é par. Por exemplo, se há 4 pilhas, com 2, 12, 13 e 21 pedras, respectivamente, escrevemos de forma:

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Nas colunas (da direita para a esquerda) 1 e 4 temos números de 1 par, mas nas colunas 2, 3, e 5 não. Se pegarmos 18 pedras da última pilha, ela fica com 3 (11 em binário), nos dando uma posição vencedora:

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{array}$$

Argumente que com a estratégia de sempre criar uma posição vencedora o jogador inicial sempre consegue garantir a vitória, desde que a posição inicial não seja posição vencedora (em tal caso que o oponente consegue assegurar a vitória).

13. **(Marx não passa frio)** Marx famosamente escreveu: "Salários são determinados pela briga antagonística entre o capitalista e o trabalhador. Mas a vitória necessariamente vai ao capitalista, pois o capitalista pode viver mais tempo sem o trabalhador que o trabalhador sem o capitalista".

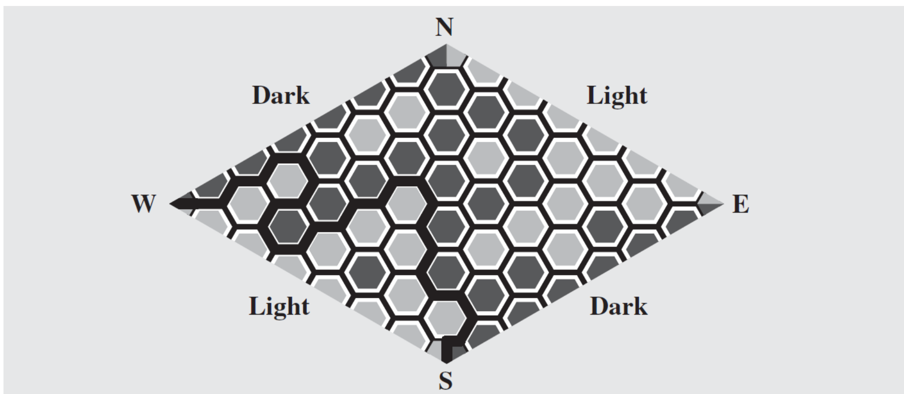
    O jogador 1 (capitalista) e o jogador 2 (trabalhador) estão dividindo um excedente de produção de 10 mil reais. A cada período (mês) de barganha (sem trabalhar), o capitalista perde 2 mil reais e o trabalhador 5 mil reais. A duração do jogo é infinita (e os jogadores podem ter *payoffs* negativos, se o acordo demorar o suficiente).[2]

    Mostre que o resultado do único equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo é o capitalista absorver para si todo o excedente da produção.

14. **(Hex)** Hex é um jogo inventado em 1942 por Piet Hein, e reinventado (independentemente) em 1948 por ninguém menos que John Nash (Nobel '94). Ele é jogado em um tabuleiro de hexágonos como na figura abaixo (no caso, tabuleiro de tamanho 6), onde um dos jogadores

[2]Note que essa é apenas uma aplicação do modelo de Stahl-Rubinstein da questão 8 com $T = \infty$ e custos diferentes de espera para cada jogador.

é "Dark" e o outro "Light". Os jogadores se revezam colorindo da sua cor hexágonos do tabuleiro, e ganha quem fizer um caminho de hexágonos da sua cor entre os dois lados que possui do tabuleiro (no caso da figura abaixo, que representa um jogo completo, "Dark" ganhou).



A princípio, poderíamos imaginar que é possível uma configuração final em que nenhum dos dois jogadores ganha (um empate), mas isso é impossível. Um argumento intuitivo para isso é que se os hexágonos escuros são água e os claros são pedra, então sempre ou vamos ter uma ponte de pedra ou o rio cruzando para o outro lado.[3]

Use isso para construir uma demonstração o mais rigorosa possível de que o primeiro jogador sempre pode garantir a vitória. A ideia é pensar o que o 1º jogador poderia fazer caso houvesse alguma estratégia que o 2º jogador poderia fazer para garantir a vitória.

15. **(Chomp de novo)** Na teoria de jogos combinatórios, há jogos simples como o Nim que sabemos quem ganha e a estratégia vencedora (vide questão 12), e há jogos muito complexos que (ainda) não sabemos nem que lado pode garantir a vitória (ou ambos o empate), como o xadrez. O interesse teórico no Chomp vem do fato bastante curioso de que podemos provar que o jogador 1 tem uma estratégia que sempre garante a vitória em todo jogo de Chomp, embora para n, m não pequenos *ninguém saiba qual é*! (Nem computadores conseguem calcular a estratégia ótima mesmo para n, m não tão grandes.)
    (a) Utilize os resultados da questão 11 para achar uma estratégia para o jogador 1 que garante a vitória em tabuleiros quadrados (i.e., quando $n = m$).
    (b) Argumente que (mesmo para tabuleiros não quadrados) se o jogador 2 pode garantir a vitória no jogo, então o jogador 1 também pode garantir.

[3]Mas a prova formal desse fato não é tão simples. Na verdade, já se provou que o Hex não ter empate é equivalente ao Teorema de Ponto-fixo de Brouwer.

(c) Algo interessante da teoria de jogos combinatórios é que podemos brincar com extensões dos jogos que obviamente não são factíveis no mundo real. Que jogador tem estratégia vencedora em um jogo de Chomp jogado em um tabuleiro de tamanho $2 \times \infty$? E em $\infty \times \infty$? Descreva a estratégia vencedora.