Departamento de Economia
Universidade de São Paulo
EAE-1301 - Lista 2
Prof.: Pedro Forquesato
2º semestre de 2025

Instruções: Os workshops são resolvidos em grupo **durante a aula** com a ajuda dos colegas e do docente, mas cada aluno deve *escrever e entregar a lista separadamente*. Constitui **violações do código de ética** da disciplina:

- Olhar as resoluções escritas dos colegas;
- Escrever na lista dos colegas ou trocar anotações de respostas;
- Trazer para a aula qualquer tipo de resoluções dos exercícios do workshop.

Workshop 2. Outros jogos estáticos de informação completa

1. **(O enigma do chapéu do rei)** Esse enigma segundo o matemático Littlewood foi bastante famoso no começo do século XX. Dez sábios ("perfeitamente racionais") estão sentados em um círculo com chapéus que podem ser brancos ou pretos. Cada um pode ver o chapéu dos outros nove, mas não o seu próprio. Um anunciador diz: "Vocês estão usando chapéus que podem ser brancos ou pretos, e pelo menos um é branco. Eu vou contar até 100. Sempre que eu falar um número vocês podem levantar a mão, mas apenas se souberem a cor do seu chapéu."Após quantos números alguém levantará a mão? Explique.

2. **(O dilema do viajante de Basu)** O economista Kaushik Basu criou esse jogo famoso em 1994, que, como alguns outros jogos que veremos adiante no curso, critica a noção de racionalidade da teoria dos jogos: ele imagina a situação na qual uma companhia aérea perdeu as malas de dois viajantes, e quer que eles revelem o valor real dos conteúdos para a companhia fazer a compensação.

   Acontece que por coincidência o valor das duas malas é o mesmo, já que eles compraram antiguidades iguais no destino em que estavam, e é um valor entre 100 e 400 reais. Então a companhia aérea propõe o seguinte procedimento: cada viajante separadamente vai escrever um valor de 100, 200, 300 ou 400 em um pedaço de papel. Cada viajante vai receber o menor dos dois valores reportados, mas se o valor for diferente entre os dois viajantes, o menor valor vai receber um bônus de 125 reais (por ser honesto) e o maior valor uma penalidade de 5 reais.

   Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Escreva o jogo na forma normal e descubra quais estratégias são racionalizáveis para os dois viajantes. Você consegue ver por que esse é um dilema?[1]

[1] Uma discussão ótima desse dilema pelo próprio Kaushik Basu para a revista Scientific American está disponível em https://www.scientificamerican.com/article/the-travelers-dilemma/.

3. **(Leilão de primeiro preço)** Cláudia está vendendo a sua casa, que Ana e Bernardo querem comprar. Ambos Ana e Bernardo valoram a casa em 1 milhão de reais, e isso é conhecimento comum. Tendo estudado teoria dos jogos, Cláudia então pede para ambos escreverem (separadamente) em um papel quanto estão dispostos a pagar, e ela então abrirá os envelopes e dará a casa pelo preço escrito para quem escrever no papel o valor maior (isso é um *leilão de primeiro-preço*).
   (a) Qual é o único equilíbrio de Nash do jogo? Por que?
   (b) E se Cláudia definir um custo de 100 mil reais para participar do leilão, o que acontece? (Considere que os jogadores agora podem decidir não participar do jogo, obtendo *payoff* zero.)

4. **(Leilão de segundo-preço)** Um livro autografado de teoria dos jogos será vendido em um leilão. (Veremos mais sobre leilões em outros workshops do curso.) Há N participantes, cada um com uma valoração própria de v_i para o livro, que é um número fixo dado e de conhecimento comum. Cada participante escreve o seu *bid* b_i em um papel. Todos os *bids* são abertos e o item é dado para o *bid* maior. (Em caso de empate, é dado para cada um dos empatados com probabilidade igual.) Mas o preço pago pelo vencedor é o *segundo* maior valor oferecido.

   Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Mostre que para cada participante i, fazer um bid b_i igual à sua valoração v_i para o item é uma estratégia fracamente dominante. Quantos equilíbrios de Nash há no jogo?

5. **(O problema do bar El Farol)** Mais um jogo famoso é baseado em um bar em Santa Fé, o El Farol. Esse bar é muito divertido, mas pequeno. Imagine que há 10 pessoas em Santa Fé. Se até 6 forem ao bar, então elas se divertem mais que ficando em casa (que dá utilidade zero), tendo *payoff* $1/2$. Mas se mais de 6 forem, então elas ficam apertadas, obtendo *payoff* $-1/2$, e prefeririam assim ter ficado em casa (mas agora já é tarde demais porque pagaram o Uber).

   Um *jogo simétrico* é um jogo em que alterar a posição dos jogadores não altera o problema que eles enfrentam. (Se convençam que o problema do bar El Farol é um jogo simétrico!) Chamamos então um perfil de estratégias de um jogo simétrico de *estratégias simétricas* se as estratégias de todos os jogadores são iguais. Um equilíbrio em estratégias simétricas é chamado de **equilíbrio simétrico**.
   (a) Esse jogo tem equilíbrio simétrico em estratégias puras? Por quê? E não simétrico?
   (b) Busque um equilíbrio simétrico em estratégias mistas para o jogo.

6. **(Adivinhe 2/3 da média)** Em 1981, Alain Ledoux inventou esse jogo como um desempate em sua revista *Jeux et Stratégie*, como forma de "investigar a profundidade de raciocínio" dos

leitores. Desde então ele se tornou um clássico na teoria dos jogos.

O jogo é simples: cada participante escreve um número (para os nossos propósitos um inteiro entre 1 e 20) em um papel, e ganha quem acertar mais próximo de 2/3 da média dos números apostados (se for empate dividem o dinheiro). (Ao contrário do famoso "concurso de beleza"de Keynes, que as pessoas tentam acertar a média.)

Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Ache o perfil de estratégias que sobrevivem eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas.

7. **(Guerra de Atrito)** Um jogo clássico em teoria dos jogos (proposto por Maynard Smith em 1974) é a guerra de atrito, ou em inglês *war of attrition*. Em uma das várias motivações possíveis, dois países implementam entre si embargos econômicos como forma de forçar o outro país a ceder algum território em disputa. Cada mês t com sanções econômicas custa 1 bilhão de reais igualmente para ambos os países. O território em disputa tem valor de R$10 bilhões para o país A, e R$5 bilhões para o país B. Quando qualquer jogador desiste do território, a guerra (o jogo) acaba *imediatamente* e o território se torna posse do outro país.

   Embora a guerra de atrito se desenrole no tempo, podemos modelar ela como um jogo estático, em que cada país (A e B) escolhe como estratégia um tempo (contínuo) t quando irá desistir. Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de payoff, e caracterize os (infinitos!) equilíbrios de Nash em estratégias puras do jogo.

8. **(Soma 100)** Considere um jogo de dois jogadores, cada um deles escolhe (separadamente) um número. Se a soma dos dois números é menor ou igual a 100, então cada um recebe o número que escolheu. Se a soma for maior que 100, então o jogador que propor o menor número b_i recebe o que propôs, enquanto o outro recebe $100 - b_i$. Se houver empate, cada um recebe 50.

   Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Mostre que o jogo é *resolvível por dominância* e resolva-o.

9. **(Coronel Blotto)** O problema do coronel Blotto surgiu pela primeira vez em uma revista de 1924, e é o seguinte: o coronel quer capturar o maior número possível de regiões em disputa com um número limitado de divisões de exército. Infelizmente, o coronel adversário também tem divisões ao seu poder que ele divide de forma a tentar frustrar o plano de Blotto.

   Considere um dos casos mais simples possíveis dessa classe de jogos: Blotto tem 4 divisões, seu inimigo 3 divisões, e há duas regiões em disputa. Blotto domina uma região se tiver estritamente mais divisões naquela região que o exército inimigo.

   Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Escreva o jogo em forma normal. Ache todos os equilíbrios de Nash do jogo.

10. **(O dilema do voluntário)** Considere que 10 crianças estão em uma creche, onde alguém pintou a parede de vermelho. A professora irritada diz: "Se pelo menos uma criança confessar, ela fica 1 hora sem brincar e quem não confessou pode ir para o pátio. Se ninguém confessar, todos serão ficarão a tarde inteira sem brinquedo." Considere que a utilidade de brincar é de 1/hora e uma tarde tem 5 horas. Escreva o jogo em forma normal e ache os seus equilíbrios de Nash em estratégias puras e um equilíbrio simétrico em estratégias mistas. Nesse equilíbrio em estratégias mistas, se o número de crianças aumentar, o que acontece com a probabilidade de alguma delas confessar?

11. **(Racionalidade no modelo de Hotelling)** Há sete quarteirões alinhados em uma reta por uma rua. Dois pizzaiolos decidem simultaneamente em qual quarteirão abrir a sua pizzaria. Em cada quarteirão moram 50 pessoas, que vão comer na pizzaria que estiver mais próxima de sua casa. (Caso a distância seja igual metade come em cada.) O lucro com cada pizza é de $1.

    (a) Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Quais estratégias são racionais?

    (b) E se os agentes souberem que o outro pizzaiolo também é racional?

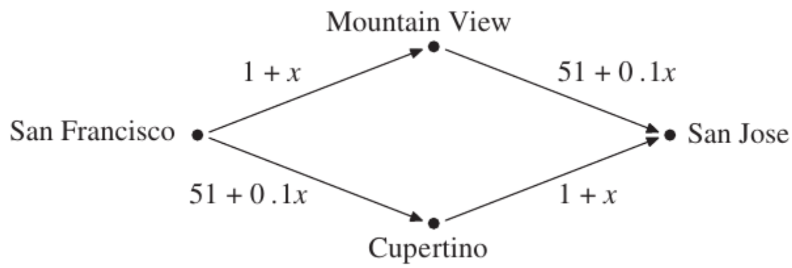
    (c) E se os pizzaiolos souberem que o outro pizzaiolo sabe que ele é racional?

    (d) E se houver conhecimento comum de racionalidade?

12. **(Morra)** Um jogo bastante comum na Roma Antiga era o *micatio*, hoje morra. (Eu também já joguei esse jogo na China, onde é um *"drinking game"* comum.) Nele, cada jogador simultaneamente levanta um número de dedos e tenta adivinhar (falando) a soma de seus dedos e do oponente. Quem acertar recebe do oponente o valor da soma, se ambos ou ninguém acertar os dois ganham nada.

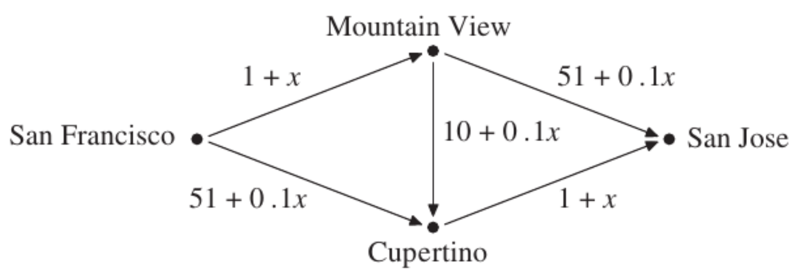
    Vamos analisar uma versão simplificada do jogo que cada jogador pode levantar 1 ou 2 dedos. Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Escreva o jogo em forma normal. Ache todos os equilíbrios de Nash do jogo.

13. **(Paradoxo de Braess)** Para ir de São Francisco para San José as pessoas podem ir pelas montanhas ou por Cupertino. O tempo de deslocamento depende do número de carros, como na figura abaixo, onde x é o número de carros que escolhem, a cada momento, transitar por aquela via. São 60 carros transitando pela região em um dado momento.



(a) Quais são os equilíbrios? Quanto demora para ir de São Francisco para San José?

(b) E se construirmos uma rodovia entre as montanhas e Cupertino como na segunda figura abaixo? O que acontece com o tempo de viagem? Por que essa situação é considerada paradoxal?



14. **(Jogo de Silverman)** Esse jogo de soma zero bastante estudado em matemática (com suas várias generalizações) é da seguinte forma: há dois jogadores, cada um deles escolhe um número natural. Se o número do jogador 1 for maior que o do jogador 2, mas menos que 3 vezes maior, o jogador 1 recebe 10 reais do jogador 2. Se for igual, os dois continuam como está, e nos outros casos, o jogador 1 entrega 10 reais para o jogador 2.

    Descreva o jogo: jogadores, estratégias e funções de *payoff*. Ache o único equilíbrio de Nash desse jogo. Argumente por que ele é único.

15. **(Jogos em redes sociais)** Considere a versão abaixo de um jogo de bem público "best-shot". Por exemplo, considere que cada aluno de teoria dos jogos pode assinar um serviço de *streaming* a um custo 1 e compartilhar com os seus amigos. (Assuma que os jogadores gostam de seus amigos, e preferem compartilhar a custo zero a conta que não o fazer.) Já assistir *streaming* dá utilidade 2. Imagine que o grafo de amizades dos alunos de teoria dos jogos seja do formato abaixo, onde cada nódulo é um aluno e um vértice representa amizade. Caracterize os equilíbrios de Nash do jogo e dê um exemplo.