Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar

Pénzügyi buborékok detektálása és előrejelzése

Az S&P 500 index abszolút hozamai
és az illikviditási paraméter közötti kapcsolat vizsgálata

Készítette: Fürjész Péter
Alkalmazott közgazdaságtan alapszak
Szakdolgozat
2022

Szakszeminárium-vezető: Dr. Ferenci Tamás

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke **3**

1. Bevezetés **7**

2. Irodalmi összefoglaló **9**

2.1. Elméleti modellek – értékpapír buborék modellek legfőbb csoportjai . . . 9

2.2. Elméleti modellek – az értékpapír buborék és a likviditás kapcsolata . . . 12

2.3. A Bid-ask spread és a likviditás kapcsolata 15

3. Az európai index opciók és az adatok bemutatása **16**

3.1. Az európai index opciók szabályozási háttere 16

3.2. Az európai index opciók szerződési paraméterei 18

3.3. A vizsgált európai index opciós szerződések 19

4. Bid-ask ár modell **22**

4.1. Black Scholes modell 22

4.2. A Black-Scholes modell alkalmazása bid és ask árak becslésére 29

5. Az illikviditási paraméter és az SP500 index kapcsolatának vizsgálata **35**

5.1. A gamma paraméter becslése valós adatokon 35

5.2. A VAR-modell 39

5.3. Kapcsolat vizsgálat - eredmények 41

6. Összefoglalás **42**

6.1. Limitációk 44

7. Függelék A - Python kódok pénzügyi számítások **45**

7.1. Számítások 45

8. Függelék B - Statisztikai tesztek és számítások eredményei **50**

9. Hivatkozások **52**

Ábrák jegyzéke

1. Vizsgált szerződés specifikációi 20
2. Put (bal) és Call (jobb) opciók last árai az adat pótlás előtt 21
3. Put (bal) és Call (jobb) opciók last árai az adat pótlást követően 21
4. Geometriai Brown mozgás - szimuláció 23
5. GBM szimuláció vs. valós adatok 24
6. Black-Scholes modell érzékenysége az egyes paraméterekre 27
7. Volatilitás smile 2022-09-04 - out-of-money calls 28
8. Elfogadható nulla költségű pénzáramlások (acceptable zero-cost cash flows) 30
9. Egyszerű torzítási függvény 32
10. Normális eloszlás torzítása Wang transzformációval 33
11. Gamma növelésének hatása a bid és az ask árakra 35
12. Valós vs. Becsült bid és ask árak 37
13. Különböző gamma idősorok és az SP 500 index időbeli alakulása 39
14. ATM gamma értékek időbeli alakulása különböző tau paraméterek esetén 41
15. Súlyozott gamma értékek időbeli alakulása különböző tau paraméterek esetén 42

Nyilatkozat saját munkáról

Budapesti Corvinus Egyetem
Corvinus University of Budapest

I. számú melléklet

NYILATKOZAT SAJÁT MUNKÁRÓL

Név: Fürjész Péter

Szak: Alkalmazott Közgazdaságtan Alapszak

A szakdolgozat címe magyarul:

Pénzügyi buborékok detektálása és előrejelzése

A szakdolgozat címe angolul:

Detection and Prediction of Financial Bubbles

Szakszeminárium-vezető/konzulens neve: Dr. Ferenci Tamás

Én, Fürjész Péter (a hallgató neve) **teljes felelősségem tudatában kijelentem, hogy a nevezett szakdolgozatban szereplő minden szövegrész, ábra és táblázat – az előírt szabályoknak megfelelően hivatkozott részek kivételével – eredeti és kizárólag a saját munkám eredménye, más dokumentumra vagy közreműködőre nem támaszkodik.**

Kelt: 2022.12.08.

Fürjész Péter

hallgató aláírása

Nyilatkozat a dolgozat nyilvánosságáról

Budapesti Corvinus Egyetem
Corvinus University of Budapest

II. számú melléklet

NYILATKOZAT A SZAKDOLGOZAT NYILVÁNOSSÁGÁRÓL

Név (nyomtatott betűvel): Fürjész Péter

Szak neve (amelyen a jelenlegi Szakdolgozatát megírta): Alkalmazott Közgazdaságtan Alapszak

Szakdolgozatom elektronikus változatának (pdf dokumentum), nyilvánosságra hozatalához az alábbiak szerint járulok hozzá.

TELJES NYILVÁNOSSÁGGAL
A könyvtári honlapon keresztül elérhető a Szakdolgozatok/TDK adatbázisban (http://szd.lib.uni-corvinus.hu/), a világháló bármely pontjáról hozzáférhető, fentebb jellemzett pdf dokumentum formájában.

KORLÁTOZOTT NYILVÁNOSSÁGGAL
A könyvtári honlapon keresztül elérhető a Szakdolgozatok/TDK adatbázisban (http://szd.lib.uni-corvinus.hu/), a kizárólag a Budapesti Corvinus Egyetem Könyvtárából és internethálózatáról hozzáférhető, fentebb jellemzett pdf dokumentum formájában.

NEM NYILVÁNOS (Ezt a nyilatkozatot csak azon hallgatóknak van lehetősége megtenni, akik 2019 szeptembere előtt kezdték el szakdolgozatuk írását.)
A dolgozat a Corvinus Egyetemi Könyvtárának nyilvántartásában semmilyen formában (bibliográfiai leírás vagy teljes szöveges változat) nem szerepel.

Budapest, 2022.12.08.

Fürjész Péter

hallgató (szerző) aláírása

Absztrakt

Dolgozatomban valós adatokon kalibrálom a Conic Black-Scholes modellt és meghatározom húsz put és húsz call Európai S&P 500 index opció bid és ask árát miden nap 2022-04-14 és 2022-11-16 között. A kalibráció során volatilitás paraméternek a last árak alapján számított Black-Scholes implied volatilitást használom. A gamma illikviditási vagy más néven torzítási paramétert a teljes négyzetes eltérések minimalizálásával határozom meg minden szerződés esetén. Ezen minimalizálás során négy különböző ablak nagysággal végzem el a számításokat.

A különböző strike árral rendelkező call vagy put opciók adott gamma idősorait két különböző gamma idősorral reprezentálom. Az első esetben csak az at-the-money szinthez legközelebbi call vagy put opció gamma paraméterét veszem figyelembe (ATM gamma idősor). A másik esetben az egyes szerződések adott időpontbeli moneyness-ének az egytől való négyzetes eltérésvel fordítottan arányosan súlyozom az egyes szerződések adott időpontbeli gamma paraméterét. Ezen súlyokkal számított súlyozott összeg a súlyozott put vagy call gamma idősor adott időpontbeli értéke. Utóbbi két idősor és az S&P 500 index abszolút hozamainak kapcsolatát VAR modellel vizsgálom. A VAR modellek alapján elutasítom hipotézisemet, hogy szignifikáns negatív kapcsolat van az abszolút hozam tárgyidőszaki és az ATM gamma vagy a súlyozott gamma idősor késleltetett értékei között.

Key Words:

Conic Finance, Illikviditási paraméter, Black -Scholes modell, Wang-transzformáció

JEL klasszifikáció: *G01, G12*

1. Bevezetés

A Conic Finance elmélete új terület a pénzügyi szakirodalomban és gyakorlati alkalmazása csak nem régen kezdődött meg. Ezzel szemben a pénzügyi buborékok és visszaesések régóta a kutatások középpontjában állnak.

Vizsgálat tárgya

Dolgozatomban a Conic Finance segítségével valós adatok alapján becsülöm meg az európai index opciók bid és ask árát. A Conic Black-Scholes modell gamma paraméterét valós árakhoz kalibrálom 2022-04-14 és 2022-11-16 között, négy különböző ablaknagysággal. Végül VAR modell segítségével feltárom a gamma paraméter késleltett értékei és az S&P500 index tárgyidőszaki értéke közötti kapcsolatot.

Kutatási kérdésem és hipotézisem

<u>Hipotézisem:</u> Szignifikáns negatív kapcsolat van az SP 500 index abszolút hozamainak tárgyidőszaki és az ATM gamma vagy a súlyozott gamma idősor késleltetett értékei között.

<u>Kutatási kérdésem:</u> Lehetséges-e a szélsőséges visszaesések előrejelzése a gamma paraméter ismeretében VAR modell alkalmazásával.

A téma relevanciája

A likviditás a pénzügyi piacok normális működésének alapvető feltétele. A pénzügyi piacok likviditása, pontosabban annak hiánya, hatással van az egész pénzügyi rendszerre és az egész gazdaságra. A dolgozatomban vizsgált torzítási vagy másnéven illikviditási paraméter lehetőséget ad arra, hogy a derivatíva piac alapján következtessünk a kereskedők mögöttes termékre és a termék piacának likviditására vonatkozó várakozásaira.

A dolgozat szerkezeti felépítése

A **2.1** alfejezetben a keresési kulcsszó [1] a Financial Bubble volt, ami 3 990 találatot adott az EBSO Super Search-ben. Ebben az alfejezetben áttekintést adok a pénzügyi buborékok létrejöttét modellezni kívánó elméletekről és az áttekintés során a vizsgált kutatásokat három fő csoportba sorolom.

A **2.2** alfejezetben a keresési kulcs szó [2] a Liquidity Security Bubble volt, ami 1 295 találatot adott az EBSO Super Search-ben. Az alfejezetben három kutatást mutatok be, melyek mikropénzügyi eszközökkel modellezik az értékpapír buborékokat és vizsgálják

[1] A CÍM tartalmazza a Financial Bubble szavakat

[2] A keresési kritérium az, hogy a SZÖVEG tartalmazza az security bubble ÉS a liquidity szót

azok kialakulásának okát kiemelt szerepet tulajdonítva a likviditásnak.

A **2.3** alfejezetben bemutatom a spread és a likviditás kapcsolatát, valamint azt, hogy miként jelent meg a spread a korábbi kutatásokban.

A **3.** fejezetben bemutatom, hogy pontosan milyen opciós szerződéseket vizsgálok, és kitérek arra is, hogy az Egyesült Államokban milyen törvények szabályozzák és milyen szervezetek felügyelik az opciós kereskedést. Ezt követően bemutatom a számításokhoz használt adatokat és azt, miként pótlom a hiányzó last árakat.

A **4.1** alfejezetben bemutatom a Black-Scholes modellt és mögöttes termék modellezésére használt Geometriai Brown mozgást. Szimulációval megmutatom, hogy a valós hozamok más eloszlást követnek, mint amit a GBM alapján feltételezünk.

Az **4.2** alfejezetben röviden bemutatom a Conic Finance elméletét és a koherens kockázati mérték fogalmát. Ezt követően megvizsgálom, miként torzítja az opciók kifizetésének eloszlását a Wang-transzformáció a Black -Scholes modellben.

A **5.1** alfejezetben valós adatokon kalibrálom a Conic Black-Scholes modellt és a különböző strike árak esetén kalibrált gamma paraméterek idősorából két intuitív idősort számítok.

Az **5.2** alfejezetben bemutatom a VAR modellhez kapcsolódó legfontosabb fogalmakat és teszteket, valamint azt, hogy milyen megfontolások mentén döntöttem a modell alkalmazhatóságáról.

Az **5.3** alfejezetben röviden összefoglalom, hogy a VAR modell alapján milyen következtetésre jutottam a torzítási paraméter késleltett és az abszolút hozamok tárgyidőszaki értéke közötti kapcsolatot illetően.

Végül a **6.** fejezetben összefoglalom dolgozatom eredményeit, döntést hozok hipotézisemmel kapcsolatban és megválaszolom kutatási kérdésem.

2. Irodalmi összefoglaló

Az irodalmi áttekintés során a Google Scholar-t [3], az EBSCO Super Search-t [4] és a Corvinus TDK és szakdolgozat gyűjteményt [5] használtam.

A gazdasági válság (*economic crisis*) vagy gazdasági világválság (*global economic crisis*) általában az egész világot vagy egy ország egészét minősíti és magában foglalja a recessziót, a magas inflációt, valamint a magas munkanélküliséget. Ezzel szemben a pénzügyi válság jóval konkrétabb fogalom. A pénzügyi válság vagy összeomlás (*financial crisis, financial crash*) az eszközárak hirtelen, általánosan megfigyelhető csökkenését jelenti, melynek következtében a vállalkozások és a fogyasztók nem tudják kifizetni adósságaikat, a pénzintézetek pedig likviditáshiányt tapasztalnak. A pénzügyi válságok okát gyakran a pánikkal vagy a bankokkal szembeni bizalmatlansággal (*bank run*) hozzák összefüggésbe, amelyek során a befektetők eladják pénzügyi eszközeiket vagy pénzt vesznek ki a megtakarítási számláikról attól tartva, hogy az eszközök értéke csökkenni fog, ha a pénzintézetnél marad. A piac összeomlása (*market crash*) egy szektor értékpapírjainak vagy egy bizonyos értékpapír árának ugrásszerű visszaesését jelenti.

A piaci összeomlást vagy a nagymértékű visszaesést megelőző állapotot gyakran pénzügyi szektor vagy értékpapír buboréknak (*financial sector / security bubble*) nevezik. "Az értékpapír buborék általánosan egy adott értékpapír piaci árának a fundamentális értéktől való tartós eltérése." Francesca B. 2022 o.:3

2.1. Elméleti modellek – értékpapír buborék modellek legfőbb csoportjai

2.1.1. Racionális buborékok

A racionális buborékok elmélete feltételezi, hogy a piacon racionális szereplők vannak, és azt vizsgálja, milyen körülmények között alakulhatnak ki buborékok. Ezen megközelítés alapját Blanchard és Watson O.J. Blanchard 1982 fektette le. Modelljük szerint az értékpapír ára két komponensből tevődik össze: a belső értékből (*intrinsic value*) és a buborék komponensből (*bubble component*):

[3] https://scholar.google.com/
[4] https://discovery.ebsco.com/
[5] http://szd.lib.uni-corvinus.hu/

$$\dot{A}r_t = \dot{A}r_t^{\text{Fund}} + B_t = E_t\left[\sum_{\tau=t+1}^{\infty}\frac{CF_t}{(1+d)^{T-1}}\right] + \lim_{T\to\infty} E_t\left(\frac{B_T}{1+d^{T-t}}\right)^n \tag{1}$$
$$\text{ahol } B_T = B_0(1+d_B)^{r-t}$$

Három fő hibát érdemes kiemelni a modellel kapcsolatban. Egyrészről, ha $d_B > d$ akkor a buborék komponens nagysága végtelen, azaz az ár is végtelen nagy. Másrészrészről, ha feltesszük, hogy az értékpapír nem örök életű, azaz T nem végtelen, akkor rekurzívan arra az eredményre jutunk, hogy reálisan senki sem lesz hajlandó a fundamentális komponens értékétől többet fizetni egyik időszakban sem az értékpapírért. Végül a buborék exponenciális növekedése mellett, az ár cash-flow ratio értéke végtelen, mely nem felel meg a valóságnak. Utóbbi probléma kezelésének céljából Froot és Obstfeld André Orléan 1989 a buborék komponenst az idő helyett a pénzáramlástól tették függővé. A buborékmentes piac feltételezése mellett a modell alapján az ár cash-flow ratio értéke konstans kell, hogy legyen. Publikációjuk során buborékmentességről szóló hipotézisüket az S&P 500 index 1900-1988 közötti vizsgálata során elutasították. Az alapmodell másik hibás elvárása az volt, hogy az eszköz örök életű legyen. Ezen probléma feloldására alkotta meg modelljét Allen F. Allen 1993, ahol a racionalitás feltevése mellett nem várta el, hogy teljes legyen a közösségi tudás *(common knowledge)*.

A kutatások másik ága - Allen F. Allen 1993 -hez hasonlóan - csoportokat képez a kereskedőkből, immár nem tudásuk, hanem magatartásuk / stratégiájuk alapján. Ezen kutatási ág alapmodelljei két fő kereskedői csoportot különböztetnek meg: racionális kereskedők (*rational arbitrageurs*) és viselkedési visszajelző kereskedők *(behavioral feedback traders)*. A racionális kereskedőket feltételező modellek ezen csoportja a buborékok kialakulásának okát a kereskedői csoportok interakciójának eredményeként implementálja.

2.1.2. Heterogénvárakozás-buborékok

Heterogénvárakozásokról akkor beszélhetünk, amikor az ágensek eltérően vélekednek a fundamentális értéket illetően. Miller Miller 1977 publikációjában megmutatta: a fundamentális érték eltérő értékeléséből fakadó eltérő hozam az egyensúlyi árat magasabb szinten rögzíti. Ez annak köszönhető, hogy az optimisták feljebb srófolják az árat, míg a pesszimisták vélekedésük miatt nem kereskednek az adott piacon, így nem tudják kompenzálni a felfelé srófolás hatását. Harrison és Kreps J.M. Harrison 1978 munkájában azt vizsgálja, szükséges-e elvárni azt, hogy az egyes ágensek eltérően vélekedjenek a fundamentális értéket illetően. Ahogy az előzőleg említett publikációban, úgy itt is korlátozták a shortolás lehetőségét. Xiong W. Xiong 2003 már sokkal általánosabban vizsgálta azt, hogy a kereskedési volumen miként hat a tartós és hirtelen bekövetkezett túlértékelésekre, azaz a buborékokra. Érdekes módon arra a következtetésre jutott, hogy a buborékokat magasabb kereskedési volumen jellemzi, ami empirikusan is megfigyelhető.

2.1.3. Viselkedési buborékok

A viselkedési buborékok irányzata nem feltételezi a piaci szereplőkről, hogy teljes mértékben racionálisak, ezzel ellentmondva az EMT (*Efficient Market Theory*) elméleti alapjainak. A viselkedési pénzügyekhez hasonlóan ez az irányzat is nagy hangsúlyt fektet az emberek pszichológiai elfogultságára (*psychological biases*), mely szisztematikus hibákhoz (*systematic erros*) vezet. Shiller Robert 2002 kutatásában számos olyan „viselkedési mechanizmust” nevez meg, amely a buborékok kialakulásának alapjául szolgálhat. Jó példa erre a pozitív visszajelzési ciklus (*positive feedback loops*), mely az árak és a kereskedők „lelkesedése” között figyelhetők meg. Ezek a pozitív visszajelzési ciklusok önbeteljesítő jóslatoknak tekinthetők. A buborékok kialakulásához vezető viselkedésre egy másik jellegzetes példa a terelés (*herding*) jelensége, ami azt írja le, hogy kereskedők hajlamosak utánozni egymást vagy akár azonos stratégiát is alkalmazni.

Az Ising modell számos alkalmazására láthatunk példát. A modell adaptációján keresztül matematikailag is modellezhető a kereskedők közötti utánzás jelensége és az, hogy miként vezet ez a mechanizmus bipoláris aggregált vélekedések kialakulásához. Az alapmodell tömören azt a mechanizmust írja le, hogy ha egy adott kereskedő olyan kereskedőkkel van körülvéve, akik eladnak, ő is hajlamosabb lesz az eladásra. A kereskedők elhelyezkedése, ezáltal az érintettek köre is teljesen véletlenszerű az alapmodellben.

Ezzel szemben Cont és Bouchaud Cont 1998 az egyes kerekedők kapcsolatait random gráfon keresztül reprezentálta (*random graph topology*). A random gráf egy olyan hálózat, ahol egy kereskedő c/N valószínűséggel van kapcsolatban egy másikkal, ahol N a kereskedők száma c pedig a kapcsolatok átlagos száma. A modellben - az Ising modell eredeti adaptációjához hasonlóan - az egymással kapcsolatban lévő kereskedők „hajlamosak” hasonló döntést hozni a kereskedés során. A kutatás legfőbb eredménye az volt, hogyha $0 < c < 1$ értéket választunk, akkor a hozamok még követhetnek közel normális eloszlást. Ha c a $c = 1$ kritikus értéket meghaladja, akkor a legnagyobb hatást gyakorló elemek nyomán a hozamok szélsőségessé válnak, mely túl- vagy alulértékelést okozhat.

Egy másik, inkább játékelméleti megközelítésben, Orléan A. Orléan 1989 a Bayse-i döntési mechanizmus hatását vizsgálta homogén és heterogén vélekedések esetén. Abban az esetben, amikor a vélekedés heterogén, a stratégiák alkalmazásának eloszlása „fele-fele” volt. Ezzel szemben homogén vélekedés esetén a kereskedői interakciók kétcsúcsú eloszláshoz vezettek, azaz a kereskedők nagy többsége vagy eladni, vagy venni akart. A racionális buborékokhoz hasonlóan Lux Lux 1995 két kereskedői csoportot reprezentált kutatásában: spekulatív kereskedőket, akik döntéseiket a többi kereskedő típusáról való vélekedéseik és az ár dinamika alapján hozták, továbbá a fundamentalista kereskedőket, akik a döntéseiket a piaci ár fundamentális értéktől való eltérése alapján hozták meg. Az „utánzásra hajlamos” spekulatív kereskedők és fundamentalista kereskedők interakciója, olyan árdinamikát okozott mely az egyensúlyi ár körül mozgott, buborék és "zuhanási" ciklusokkal.

2.2. Elméleti modellek – az értékpapír buborék és a likviditás kapcsolata

Jarrow, Protter és Roch Robert A. Jarrow 2011 az értékpapír buborékok kialakulásához vezető mikro-pénzügyi kölcsönhatásokat matematikailag modellezi. Kutatásukban definiálnak egy exogén sztochasztikus fundamentális érték folyamatot és egy kereskedési aktivitás által meghatározott, endogén ár folyamatot. Folytonos modellükben két fajta kereskedőt szerepeltetnek: limit ajánlattal kereskedőt és piaci áras ajánlattal kereskedőt. A limitáras kereskedők ajánlatai biztosítják a likviditást, míg a piaci áras kereskedők ajánlata azonnal teljesül.

A megbízási könyvet a $\rho_t(z)$ sűrűség függvénnyel reprezentálják, így a kereskedő, aki X részvényt szeretne vásárolni $\int_{S_t}^{z_x} z\rho_t(z)\,\mathrm{d}z$ dollárt fog fizeni t időpontban, ahol S_t az árfolyam folyamat értéke t-ben. Ha beérkezik egy piaci áras ajánlat, akkor az eloszlásban szakadás (*gap*) keletkezik. Bank és Baum Bank és Baum 2004 nagykereskedők modelljében ez az szakadás tartósan fennmarad, míg Cetin Cetin, R. és Protter 2004 modelljében az a szakadás azonnal „feltöltődik” új limit áras megbízással. Jarrow, Protter és Roch kutatásában egy harmadik $R = (R)_{t\geq 0} \in [0,1]$ sztochasztikus folyamat írja le a „regenerálódás mértékét”, azaz a piaci áras ajánlat által okozott szakadás nagyságát t időpontban az eloszlásfüggvényben.

Az endogén árfolyamat definiálásához még két további sztochasztikus folyamat szükséges. Feltesszük, hogy az ár valamilyen sztochasztikus folyamat szerint tart a fundamentális folyamathoz. $\kappa = (\kappa_t)_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamat t beli éréke a fundamentális értékhez való tartás "nagyságát" (*speed of decay*) adja meg t időpontban. Másrészről, az aggregált piaci ajánlatok számának időbeli alakulását számszerűsíti az $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ aggregált piaci áras ajánlat folyamat. Így a sztochasztikus árfolyamat a következő alakot veszi fel:

$$S_t = F_t + \int_0^t 2\mathrm{e}^{-\int_s^t \kappa_\mathrm{u} \mathrm{d}u} \Lambda_{s-} M_{s-} \mathrm{d}X_s \quad (t \leq \tau) \tag{2}$$

Ahol:

- F_t az exogén fundamentális érték folyamat
- $2\mathrm{e}^{-\int_s^t \kappa_u \mathrm{d}u}$ egyszerüsítve a fundamentális értékhez való tartás hatása az árra

valamint:

$$\Lambda_{s-} M_{s-} \mathrm{d}X_s \tag{3}$$

a kereskedés hatása az árra, ahol:

- $\Lambda_{s-} = 1 - R_s$ az ajánlati könyv regenerálódásának mértéke
- X_s az aggregált piaci áras ajánlatok nagysága

A buborék nagysága ekkor t időpontban:

$$\beta_t = S_t - F_t, \ \ t \leq \tau \tag{4}$$

Ebben az esetben a likviditás mint az ajánlati könyv - mennyiségi hatással szembeni - regenerálódási képessége jelenik meg. Ha a lassú regenerálódás W. Xiong 2003 alapján elvárhatóan magas számú piaci áras ajánlattal egészül ki, akkor a fundamentális értékhez való tartás nem képes ellensúlyozni a kereskedés hatását és buborék alakul ki. Amikor a kereskedés lassul, azaz az illikviditás csökkenni kezd, az ár elkezd nagymértékben a fundamentális értékhez tartani és a buborék kidurran.

Biagini, Mazzon, Meyer és Oberpriller Francesca B. 2022 bemutatja az előző, folytonos idejű modellnek a diszkrét idejű változatát, amely hasonlóan Robert A. Jarrow 2011-hez igyekszik megmagyarázni buborékok kialakulását, azaz S_t piaci árnak az F_t fundamentális értéktől való eltérését. Ebben a modellben a kereskedők három típusát különbözetik meg: optimista, pesszimista és neutrális. Ennek megfelelően, az optimisták vételi, a pesszimisták eladási, míg a neutrálisak semmilyen ajánlatot nem adnak be a kereskedés során. A kerekedők befektetési magatartása véletlenszerű párosítással *(random matching)* változik. Ez a megközelítés lehetővé teszi a buborék felfúvódását irányító öngerjesztő mechanizmus modellezését és képes megragadni az értékpapír buborékok viselkedési jellemzőit.

Jarrow és Lamichhane S. Lamichhane 2021 publikációjában mikropénzügyi egyensúlyi modellt alkot, de a korábbi modellektől eltér abban, ahogy a buborékot definiálja. Kutatásuk szerint a buborék a piacon megfigyelhető ár és az egyén által egyedileg megítélt fundamentális érték különbsége. Ennek eredményeképpen lehetséges, hogy bizonyos piaci szereplők buborékot látnak, míg más szereplők nem. Ebben a modellben Cetin, R. és Protter 2004 -el összhangban és Robert A. Jarrow 2011 ellentétben csak ideiglenes mennyiségi hatása van a kereskedésnek. Az ágensek kockázatkerülőek és az $Y_{t+1} = Y_t - \Delta X_{t+1} s_t(\Delta X_{t+1})$ önfinanszírozó stratégia alapján kockázat mentes (például: kötvény) és/vagy kockázatos értékpapírral (például: részvény) kereskednek és próbálják maximalizálni várható hasznossági függvényüket. A likviditást ez esetben egy konkrét likviditási költség folyamatként reprezentálják $xs_t(x,\omega) \equiv \varphi_t(x,\omega)s_t(0,\omega) = \varphi_t(x,\omega)S_t$ alakban, x a vásárolni kívánt részvény mennyisége és $\omega \in , \varphi_t(\cdot,\omega) : R \to (-\infty,\infty]$ szigorúan konvex, azaz nagyobb mennyiség vétele (eladása) költségesebb (kevesebb bevételt jelent).

A dolgozat szempontjából fontos a likviditás publikációjukban meghatározott definíciója, mely szerint ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_t^l(x)}{dx} &< \frac{d\varphi_t^{nl}(x)}{dx} \text{ ha } x > 0 \\ \frac{d\varphi_t^{nt}(x)}{dx} &< \frac{d\varphi_t^l(x)}{dx} \text{ ha } x < 0 \end{aligned} \tag{5}$$

akkor $\varphi_t^l(x)$ likviditási költséggel rendelkező piac likvidebb, mint a φ_t^{nl} likviditási költséggel rendelkező. Kutatásukban megmutatták, hogy a piac likviditásának csökkenésével csökken az ágensek között azok aránya, akik érzékelik a buborékot. Végeredményül kimutatták, hogy buborék meglétét érzékelők arányának növekedése növeli a szisztematikus kockázatot. Ez azt is jelenti, hogy modelljük alapján a likviditás (illikviditás) növekedése (csökkenése) növeli a jelentős visszaesések, avagy buborékok "kidurranásának" valószínűségét.

2.3. A Bid-ask spread és a likviditás kapcsolata

A 2.1 fejezetben láthattuk, hogy a likviditás hiányának nagy szerepet tulajdonítanak napjaink buborékelméleteiben. S. Lamichhane 2021 és Cetin, R. és Protter 2004 alapján elmondható, hogy magas likviditás esetén könnyebben alakulnak ki buborékok, majd a buborék növekedésével csökken a likviditás ami a visszaesést megelőzően és a krízisek során rendkívül alacsony.

Charles 1993 alapján a tőzsdén kereskedett pénzügyi termékek estében a bid-ask spread elfogadott mérőszáma a likviditásnak. Egy pénzügyi tranzakcióban két felet különböztetünk meg: aki a likviditás iránti keresletet biztosítja és a másik felet *(counterparty)* aki a likviditást kínálja. A pénzügyi piacok szereplői a likviditási kínálatot limitáras ajánlatokkal, míg a likviditási keresletet ellentétes irányú piaci áras ajánlatokkal biztosítják. Angerer 2016 alapján elmondható, hogy egy ilyen tranzakció költsége *(transaction cost)* két fő komponensből áll: explicit költségekből *(explicit cost)* mint jutalékok *(comisson fee)* és az implicit költségek *(implicit cost)* mint az illikviditási prémium, amit Charles 1993 a kereskedési ár és a jegyzett spread különbségeként definiál.

Az értékpapír piacok esetén a bid ask spread és a likviditás egymás szinonímájaként használható. A szakirodalomban különböző spread számítási módot találhatunk.
Az abszolút spread az ajánlati könyvben szereplő legmagasabb bid ár és a legalacsonyabb ask ár különbsége. A jegyzett spread *(quoted spread)* ami a $\text{Jegyzett Spread} = \frac{\text{minimális ask ár} - \text{maximális bid ár}}{\text{midpoint}} \times 100$ képlet alapján számítható, ahol a középérték *(mid point)* a bid és ask ár számtani közepe. Az effektív spread a $\text{Effektív Spread} = 2 \times \frac{|\text{ Kereskedett ár } - \text{ Midpoint }|}{\text{Midpoint}} \times 100$ képlet alapján számítható, ahol a kereskedési ár a legutóbbi megvalósult tranzakció költsége.
Végül $\text{Realizált Spread}_k = 2 \times \frac{|\text{ Midpoint}_{k+1} - \text{Kereskedett ár}_k\,|}{\text{Midpoint}_k} \times 100$ képlet alapján számítandó a realizált spread. A realizált spread H. Bessembinder 1997 szerint elkülöníti az azonnaliság költségét, ezért valós implicit költségnek is szokás nevezni. Dolgozatomban spread alatt a kereskedési nap végén számított abszolút spreadet értem.

Az eddigi bemutatott kutatásokban láthattuk, hogy a bid-ask spread és a likviditás szoros kapcsolatban állnak egymással. Cetin, R. és Protter 2004 esetében az ajánlati könyv reprezentálásra szolgáló eloszlásfüggvényben megfigyelhető „rés” nagysága volt felelős a növekvő árakért. ΔX_t vásárlás esetén a limitáras ajánlati könyv eloszlásának értéke nulla lesz S_t és $S_t + 2M_t\Delta X_t$ között, míg az eloszlás függvény fennmaradó részén $\rho_{t-}(z)$, így a legkedvezőbb ask ár $S_t + 2M_t\Delta X_t$, míg a legkedvezőbb bid ár S_t lesz. Látható, hogy ebben a modellben a gap növekedése – mely a buborék kialakulásának oka - nem más, mint a bid-ask spread növekedése. S. Lamichhane 2021 esetén a relatíve növekvő (csökkenő) spread az (5) egyenlet alapján definiált likvidvitás relatív csökkenését (növekedését) eredményezi. Kimondható tehát, hogy a növekvő bid ask spread a likviditás csökkenésének jele, és szélőséges értéke jelentős visszaesést jelezhet.

3. Az európai index opciók és az adatok bemutatása

3.1. Az európai index opciók szabályozási háttere

(1) A pénzügyi instrumentumok (financial instrument) a felek közötti monetáris szerződések, amelyek létrehozhatóak, kereskedhetők, módosíthatóak és kiegyenlíthetőek. [6]

(2) Az értékpapír kifejezés olyan helyettesíthető (fungible), átruházható (negotiable) pénzügyi instrumentumra utal, amely valamilyen monetáris értékkel bír. [7]

A gyakorlatban, a tőzsdén kereskedett pénzügyi instrumentumokra szokás értékpapírként hivatkozni, amelyek négy fő csoportba sorolható: - Részvények (equity securities) ; - Hitel érték papírok (debt securities) ; - Hybrid érték papírok (Hybrid securities) ; - Származtatott értékpapírok (Derivative Securities)

(3) A részvények olyan értékpapírok, amelyek a részvényeseknek tulajdonrészt biztosítanak egy vállalatban. [8]

[6] 26 USC § 731(c)(2)(C)

[7] SECURITIES ACT OF 1933 SEC. 2. [77b] (a) DEFINITIONS.

[8] https://www.investor.gov/introduction-investing/investing-basics/investment-products/stocks

(4) A piaci index az amerikai részvénypiac vagy gazdaság egy adott piacát, vagy szektorát reprezentáló részvények meghatározott "kosarának" teljesítményét követi. [9]

Az opció a *7 U.S.C. Section 1a (36)* -ben általánosan van definiálva, egyszerűbb definíciója A Legal Information Institute alapján:

(5) Az opciók olyan szerződések, amelyek a vevőt feljogosítják - de nem kötelezik - arra, hogy meghatározott időn belül meghatározott áron megvásároljon vagy eladjon egy értékpapírt (esetünkben pénzügyi eszközt). A részvényopciókkal számos tőzsdén kereskednek. [10]

(6) Európai stílusú opció olyan opció, amelynek lehívásáról csak annak lejárati napján lehet értesítést küldeni. [11]

(7) Európai stílusú index opció esetén az ügyletek elszámolása a lehívás napján érvényes index záró értéke valamint a lehívási ár és az index szorzójának szorzata közötti különbség kifizetésével történik [12]

Az Amerikai Egyesült Államokban a pénzügyi termékek kereskedését három fő szinten szabályozzák:

- Szövetségi (Federal)
- Állami (State)
- Szervezeti vagy önszabályozó (Self-Regulatory Organization)

Szövetségi szinten a SEC (Security and Exchange Commission) a legfőbb szabályozásért és betartatásért felelős szerv. Az értékpapírokkal való kereskedést mind a szövetségi hatóságok, mind az állami értékpapír felügyeletek szabályozzák. Az opciós kereskedést a SEC a Rule 6 -ban SEC6 é. n. szabályozza amit index opciók esetén kiegészít a Rule 7 -el. SEC7 é. n..

A Congressional Research Service CRS é. n. alapján az szövetségi értékpapír-törvények kifejezetten lehetővé teszik az egyidejű állami szabályozást. Az állami értékpapír-törvények

[9] https://www.sec.gov/answers/indices.htm

[10] https://www.investor.gov/introduction-investing/investing-basics/glossary/options

[11] SEC RULE Definitions (m)

[12] SEC Rule 7.17

hagyományosan a közzétételre és az értékpapírok forgalmazására korlátozódnak valamint általános csalásellenes rendelkezésekkel rendelkeznek.

Az értékpapír-kereskedésnek két fő helyszíne van: tőzsdék (Exchange-Traded Markets) és az OTC (Over-the-counter) piac. A legfőbb derivatíva kereskedéssel foglalkozó tőzsde a CME csoport. Az OTC Markets Group, korábbi nevén National Quotation Bureau (NQB), egy olyan szervezet, amely megkönnyíti a tőzsdén kívüli (OTC) részvények és egyéb értékpapírok kereskedelmét. A tőzsdén kívüli részvény olyan pénzügyi értékpapír, amellyel hivatalos tőzsdén nem kereskednek. Ezekkel az értékpapírokkal inkább a kereskedői hálózaton keresztül, mint például az OTC Market Group, kereskednek. OTC piacon elektronikus jegyzést és a hivatalos tőzsdénél alacsonyabb jegyzési követelményeket állítanak.

Az OTC piacok legfőbb szabályozó szerve a FINRA [13]. A CME Group a CME, CBOT, NYMEX ÉS COMEX tőzsdék összeolvadásából jött léte, de az SRO funkciókat továbbra is – mint önálló entitások – az utóbbi négy tőzsdéből kialakult szervezetek látják el.[14] Az OTC piacokon a kereskedés Broker-Dealer hálózaton kereszül történik, ahol a bróker-kereskedő (B-D) olyan személy vagy cég, aki vagy amely saját számlára vagy ügyfelei nevében értékpapírok vételével és eladásával foglalkozik. Ha az OTC piacon megegyeznek egy tranzakcióban akkor vagy benyújtják azt a CCP (Central Counterparty) vagy kétoldalúan (bilaterálisan) elkönyvelik.

A tőzsdéken ezzel szemben elszámoló házon (clearing house) keresztül bonyolítják le a tranzakciókat. Ebben az esetben az elszámoló ház a szövetségi és állami szabályozásokon felül, az SRO-szabályozásoknak megfelelően (ami sok esetben a tőzsde saját szabályrendszere) szabályozza a kereskedést és előre rögzített letételi követelményeket fektet a felekkel szemben.

3.2. Az európai index opciók szerződési paraméterei

Put európai típusú index opció alapján, az opciós jog tulajdonosa (long fél) legtöbbször a lehívását (maturity date / expiry date) követő kereskedési napon a strike árnak és mögöttes termék lehívás időpontja béli (záró) árának a különbségét megszorozva egy előre rögzített értékkel (index szorzó) kapja meg készpénzben, míg a kötelezettséget vállaló

[13] https://www.sec.gov/divisions/marketreg/mrotc

[14] https://www.cmegroup.com/market-regulation/rulebook/

(short-fél) ugyan ezt az összeget fizeti ki, pontosabban:

Bevétel put long (t*+1 üzleti nap)= max (0, K-S(t*)) * N

Kifizetés put short(t*+1 üzleti nap) = min (0,K-S(t*)) * N

ahol t* a lejárati dátum N az index szorzó.

Az opcióban long fél a mögöttes termék lehívás időpontja béli (záró) árának és a strike árnak a különbségét megszorozva az index szorzóval kapja meg kézpénzben, míg a short fél ugyan ezt az összeget fizeti ki, pontosabban:

Bevétel call long (t*+1 üzleti nap)= max (0, S-K) * N

Kifizetés call short(t*+1 üzleti nap) = min (0,S- K) * N

ahol t* a lejárati dátum N az index szorzó.

A tőzsdéken a központosítottság nem csak azt jelenti, hogy jóval kisebb a credit kockázat, de azt is, hogy standardizált termékekkel kereskednek. A dolgozatomban vizsgált európai típusú index opciókat is előre rögzített szabályok szerint írják ki. A kiírási dátumok opciós ciklusok alapján számítódnak, az Egyesült Államokban a kiírás történhet Januári, Februári Márciusi ciklusban. A lejárat valamilyen előre rögzített idő intervallummal (tenor) követi a kiírás időpontját és álltalában a lejárati hónap harmadik péntekét követő első szombat (Hull).

Részvény opciók esetén, ahol fizikai kézbesítés (physically settled) van a long fél álltalában 100 darab részvény rögzített áron történő eladására vagy vételére kap jogot. Készpénz alapú kifizetés (Cash-Settled) esetén a fizikai kézbesítéshez hasonlóan (S&P500 index opció esetén) a kifizetési szorzó $100 szokott lenni.

Az opciókkal - avagy az opciós vételi vagy eladási jogokkal – másodlagos piacokon kereskednek. Az opciók kereskedése – a részvényekhez hasonlóan – a tőzsdéken ajánlati könyvben történik. Limit áras vételi megbízás ára a bid ár, azaz, hogy maximálisan mennyit hajlandó fizetni a fél az opciós jogért. Limit áras eladási megbízás ára az ask ár, azaz, hogy minimum mennyiért hajlandó megválni a vételi / eladási jogtól.

3.3. A vizsgált európai index opciós szerződések

Dolgozatomban az S&P 500 indexre CBOE által kiírt európai opciós szerződéseket vizsgálom, melyek a következők szerint vannak specifikálva:

Forrás: CBOE és Bloomberg

1. ábra. Vizsgált szerződés specifikációi

Szerződési szempontok	*Európai Index Call*	*Európai Index Put*
Strike ár	*például: $3700*	*például: $3700*
Első kereskedési nap	*2022-Mar-21*	*2022-Mar-21*
Utolsó kereskedési nap	*2023-Mar-31*	*2022-Mar-31*
Lehívás stílusa (Exercise type)	*Európai*	*Európai*
Elszámolás értéke (Settlement Value)	$max\left(0, S^{nyitó\ ár}_{lehívás+1} - K\right)$	$max\left(0, K - S^{nyitó\ ár}_{lehívás+1}\right)$
Elszámolás típusa (Settlement Style)	*Készpénz*	*Készpénz*
Mögöttes termék	*S&P 500 index*	*S&P 500 index*
Index szorzó	*$100*	*$100*
Kereskedés helyszíne	*Chicago Board Option Exchange*	*Chicago Board Option Exchange*

A specifikációk a Bloomberg security description (DES) és a CBOE weboldalán [15] található szerződés specifikációi menüpont [16] adatai alapján lettek meghatározva. A szerződés árát számos egyéb paraméter befolyásolja, mint például a letéti kötelezettségek *(margin requirements)* melyet tőzsdén történő kereskedés esetén maga a tőzsde, esetünkben a CBOE szabályoz. Ezen nem feltüntetett paraméterek nem képezik semelyik későbbiekben bemutatott modell részét.

Az adattábla tartalmazza a mögöttes termék kiírás időpontjában vett spot árára szimmetrikusan elhelyezkedő 5$-osával növekvő (csökkenő) strike-al rendelkező put és call opciókat. Ez azt jelenti, hogy a kiírás idején 1-1 arányban voltak az in-the-money és out-of-money put és call opciók. Az adat tábla put és call opciók esetén is közel minden napon tartalmaz vételi és eladási ajánlatokat, ezzel szemben last árat, azaz megvalósult tranzakció árát már csak a napok 1/3-án. Az első adat táblában a megfigyelések, technikai okok miatt 2022-04-14 -től 2022-11-16 szerepelnek.

[15] https://www.cboe.com/tradable_products/sp_500/spx_options/

[16] https://www.cboe.com/tradable_products/sp_500/spx_options/specifications/

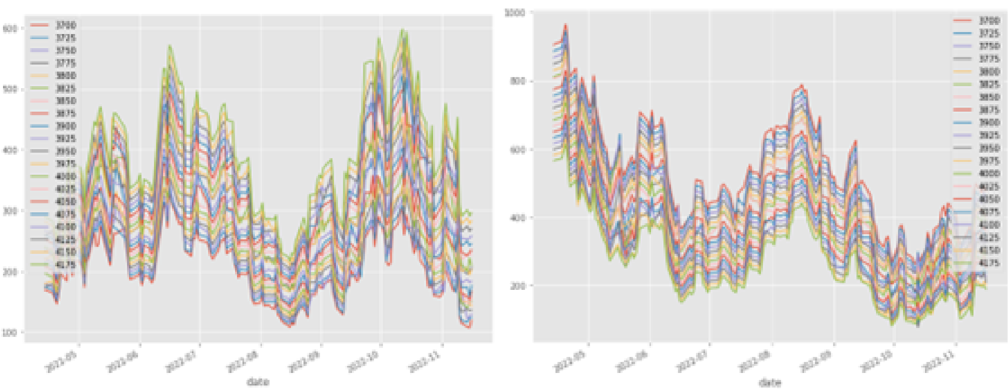
Forrás: Saját python vizualizáció

2. ábra. Put (bal) és Call (jobb) opciók last árai az adat pótlás előtt

A későbbi számítások fontos eleme a Black-Scholes implied volatilitás, melyhez szükségesek a vizsgált opciók last árai. Ezen célból a hiányzó last árakat az azonos szerződés azonos napi bid és ask árainak számtani átlagával pótoltam. Nem volt olyan időpont ahol a bid és az ask ár nem állt rendelkezésre.

Forrás: Saját python vizualizáció

3. ábra. Put (bal) és Call (jobb) opciók last árai az adat pótlást követően



Az adatpótlást követően húsz put és húsz call (azonos lejáratú 2023-03-31) európai SP500 index opció bid, ask és (pótolt) last (mid) ára áll rendelkezésre 2022-04-14 és 2022-11-16 között (minden kereskedési napon), mely összesen 18150 árat jelent. Ezen felül az adattábla tartalmazza az SP 500 index last árait 2022-04-11 és 2022-11-16-között.

4. Bid-ask ár modell

4.1. Black Scholes modell

Definíció: A $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ Valószínüségi térben értelmezett $(W_t)_{t\geq 0}$ folyamatot nevezzük Wiener-folyamatnak vagy Brown mozgásnak ha kielégíti akövetkező feltételeket:

1. $(W_t)_{t\geq 0}$ független, állandó növekményű, pontosabban $W_y - W_t$ és $W_s - W_v$ független minden $v < s \leq t < y$ esetén.

2. $(W_t)_{t\geq 0}$ folytonos trajektóriájú.

3. $W_t - W_s$ nulla várható értékü és $\sqrt{t-s}$ szorásu norális eloszlású azaz $W_t - W_s \sim N(0, \sqrt{t-s})$ minden $0 \leq s < t$.

Valamint nevezzük Standard Brown mozgásnak ha nulla a kiinduló értéke. A mögöttes termék hozama kövessen Geometriai Brown mozgást, azaz :

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{6}$$

Ahol μ a drift tag σ pedig a volatilitás. Ha felteszük, hogy $S_0 = x_0$ akkor az Ito-lemma alapján a sztochasztikus differenciál egyenlet megoldása:

$$S(t) = e^{\log x_0 + \hat{\mu}t + \sigma W(t)} = S(0)e^{\hat{\mu}t + \sigma W(t)} \; ahol \; \hat{\mu} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \tag{7}$$

Ebben az esetben $S(t)$ lognormális eloszlású valamint:

- $Var(S(t)) = S(0)^2 * e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$
- $E[S(t)] = S(0)e^{\mu t}$

(7) -et felasználva két tetszőleges időpont között a következő összefüggést kapjuk:

$$ln\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right) = \hat{\mu}(t_2 - t_1) + \sigma(W(t_2) - W(t_1)) \tag{8}$$

A $t_2 - t_1 = \Delta t$ *valamint* $t_1 = t$ helyettesítéssel és felhasználva a Wiener folyamat azon tulajdonságát, hogy a változás Δt időtartamra $N\left(0, \sqrt{\Delta t}\right)$ valószínüségi változó, továbbá legyen:

- $\mu = r$ ahol r a kockázat mentes betét / kötvény éves hozama folytonosítva

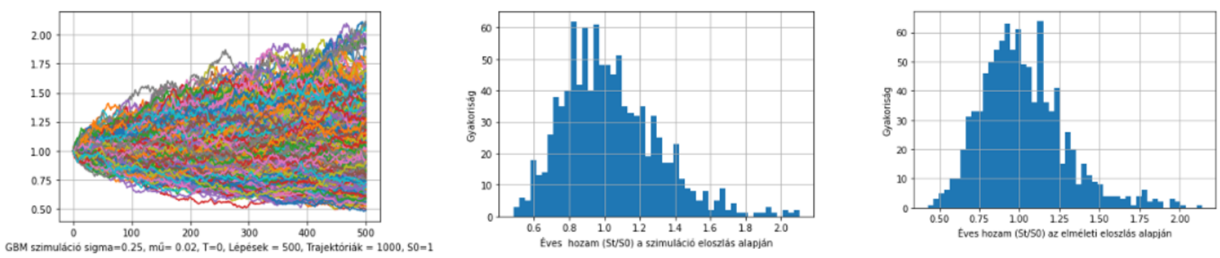
- S_t a szimuláció kezdetén az árfolyam értéke
- σ a volatilitás azaz a hozamok standard szórása
- N standard normális valószínüségi változó

$$S_t = S_{t-\Delta t}\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z_t\right) \tag{9}$$

A (9)-es egyenlet alapján az GBM árfolyam modell szimulálható, felhasználva, hogy $N\left(0,\sqrt{\Delta t}\right)$=$\sqrt{\Delta t} * N(0,1)$ valamint a z_t-k egymástól független standard normális eloszlású valószínüségi változók. Legyen a szmuláció $\sigma = 0.25$, $\mu = r = 0.02$, a trajektóriák száma legyen 1000, az időhorizont legyen $[0,1]$ $(T = 1)$ a lépés szám pedig 500. Ekkor $\Delta t = \frac{1}{1000}$. Hasonlítsuk össze az egyes szimulációk teljes időszakra számítot hozamának (S_1/S_0) eloszlását, a teoretikus lognormális eloszlással. Ehhez a *numpy.random.lognormal* függvényt használom aminek a mögöttes normális $(\hat{\mu}t + \sigma W(t))$ eloszlás paramétereit kell megadni, azaz a várható értéke: $\hat{\mu}T$, ahol $\widehat{\mu} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$, a szórás pedig $\sigma\sqrt{T} = \sigma * 1$. (T=1) Ebből az eloszlásból generálok a trajektóriák számával megegyező darab számot, felhasználva, hogy $log(S_{t+1}) - log(S_t) = log\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$. Ekkor a szimuláció eredményei:

Forrás: Saját python szimuláció

4. ábra. Geometriai Brown mozgás - szimuláció

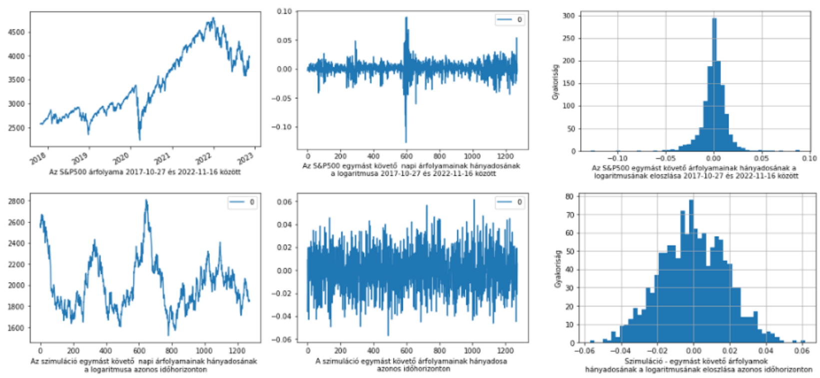


Használjuk a csúcsosság (*skew*) mérésére a Fisher-Pearson együtthatót, azaz $g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$ ahol $m_i = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x[n] - \overline{x})^i$. A ferdeség negatív értékei balra ferde adatokat, a pozitív értékek pedig jobbra ferde adatokat jeleznek. A balra ferde alatt azt értjük, hogy a bal farok hosszú a jobb farokhoz képest. Hasonlóképpen, a jobbra ferde azt jelenti, hogy a jobb farok hosszú a bal farokhoz képest. Ha az adatok multimodálisak, akkor ez befolyásolhatja a ferdeség előjelét. A Fisher-Pearson együttható értéke a szimulált adatok esetén 0.792 míg a teoretikus eloszlás alapján generált értékek esetén 0.974 lett. Azzal a feltevésünkel, hogy a eloszlás logaritmikus mind a két eredmény összhangban van, hiszen a log-normális eloszlások pozitívan (jobbra) ferdék, hosszú jobb oldali farokkal, ami a véletlen változók alacsony átlagértékeinek és nagy szórásainak köszönhető.

A csúcsosság (*kurtosis*) számszerüsítve a standardizált negyedik centrális momentum, azaz $\frac{\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^4/N}{\sigma^4}$. Ha a Fisher-féle definíciót használjuk, akkor az eredményből le kell vonni hármat, hogy normális eloszlás esetén nullát kapjunk. Negítív értékek esetén a normálistól laposabb, pozítív értékek esetén csúcsosabb eloszlásról beszélhetünk. A Fisher féle csúcsosság értéke a szimuláció esetén 0.905, míg a teoretikus eloszlás alapján generált értékek esetén 1.305 mind a két esetben, tehát mind a két esetben a normálistól csúcsosabb eloszlásról beszélhetünk. Hasonlítsuk össze, a napi százalékos hozamok logaritmusainak eloszlását az egy trajektórián belüli százalékos hozamok logaritmusainak eloszlásával.

Forrás: Saját python szimuláció

5. ábra. GBM szimuláció vs. valós adatok



Az előző esetben (4. ábra) a kiinduló értékek és a végső érték hányadosát számoltuk ki ötszáz szimuláció alapján, valamint utóbbi értéket ötszárszor "generáltuk" a megfelelő lognormális eloszlásból. Ezzel szemben egy trajektórián belül a százalékos hozamok logaritmusainak elosza közell normális kell, hogy legyen. (5-ös ábra alsó sor) Ha a feltevésünk igaz, hogy az valós árfolyamok is GBM-et (Geometria Brown mozgást) követnek, akkor a valós értékek esetén is közel normális eloszlást kapunk. (5-ös ábra felső sor) Mind két esetben 1273 megfigyelésünk van. A Fisher-Pearson együttható értéke a szimuált adatok esetén -0.017, míg a valós adatok esetén -0.825 lett. Ez azt jelenti, hogy a szimulált adatok közel szimetrikus eloszlást, míg a valós napi megfigyelések enyhén jobbra ferde eloszlást követnek a mintában. A Fisher féle csúcsosság értéke a szimuláció esetén 0.068, míg a valós adatok esetén 13.534 lett. Ez azt jelenti, hogy a szimulált adatok csúcsossága közel megegyezik a normális eloszlás csúcsosságával. Ezzel szemben a valós adatok eloszlása jelentősen csúcsosabb, azaz jóval gyakoribbak a kis ingadozások mint amit a GBM alapján elvárnánk. A valós adatok enyhe ferdeségét és jelentős csúcsosságát szokás *asymmetric leptokurtic* tulajdonságnak nevezni.

A Black -Scholes opció árazási modell F. Black 1973 jelentős áttörést jelentett az európai opciók árazása terén. A modell nagy hatással volt és van arra, ahogyan a kereskedők árazzák és fedezik (*hedge*) az európai opciókat. A modell számos feltevéssel él a mögöttes teméket, a piacot és az opciós szerződést illetően.

1. A short-olás megengedett
2. Nincsenek adók és tranzakciós költésgek és a mögöttes termék tökletesen felosztható
3. A piac arbitrázs lehetőség mentes
4. A kereskedés folytonos
5. A kamatláb állandó és minden lejáratra azonos
6. Feltételezi, hogy a mögöttes termék ára Geometriai Brown Mozgást követ ahol μ és σ rögzített, azaz:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{10}$$

Jelöljük egy opció árát $f = f(t,\ (S(t))$, azaz az opció ára (a konsans stike áron és a kockázatmentes hozamon felül) csak az időtől és a mögöttes temék árától függ. Ekkor az Ito-lemma Shreve 2000 alapján:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dW \tag{11}$$

Tegyük fel hogy short pozícióban vagyunk, egy adott opcióban. Szeretnénk a portfóliónkat kiegészíteni megfelelő mennyiségü részvénnyel úgy, hogy dt időváltozás esetén a portfólió értéke (ami jelenleg ismeretlen) ne változzon a Wiener folyamat változásának következtében. Az opció értéke a Winer folyamattól dt intervallumban csak $\frac{\partial f}{\partial S}\sigma SdW$ szerint függ. Ezt a "hatást" szeretnénk megfelelő mennyiségü részvénnyel semlegesíteni.

Tekintsük a következő porfóliót: vegyünk fel short pozíciót egy opciós szerződésben, valamint $\partial f/\partial S$ nagyságú short vagy long pozíciót a mögöttes termékben. Jelöljük a portfólió értékét X(t)-vel és ekkor ennek a változása (11) alapján:

$$dX = d\left(\frac{\partial f}{\partial S} * S - f\right) = \frac{\partial f}{\partial S} * dS - df = \tag{12}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial S} * (\mu Sdt + \sigma SdW) - \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt - \frac{\partial f}{\partial S}\sigma SdW \tag{13}$$

Ekkor látható, hogy a $\frac{\partial f}{\partial S}\mu S * dt$ és a $\frac{\partial f}{\partial S}\sigma SdW$ tagok kiesnek. Így megszünik a Wiener folyamattól való függőség dt idő intervallumban.

$$dX = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt \tag{14}$$

Mivel (14) már nem függ a Winer-folyamattól - a modellben lévő egyetlen kockázattól - meg kell hogy egyezzen a portfólió értékének kokcázat mentes hozam szerinti érték növekedésével dt időszakban.

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt = rXdt \tag{15}$$

Ha X értékét behelyettesítjük:

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt = r\left(\frac{\partial f}{\partial S} * S - f\right)dt \tag{16}$$

Átrendezve:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \tag{17}$$

Utóbbi a Black-Scholes parciális differenciál egyenlet. Ezen differenciál egyenlet megoldásával és call esetén $f = \max(S-K,0)$ when $t = T$ put esetén $f - \max(K-S,0)$ when $t - T$ peremfeltétellel a (nem sztochasztikus) parciális differenciál egyenlet megoldása call opció árazása esetén, a jól ismert:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \tag{18}$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{19}$$

$$ahol:$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(r + \sigma^2/2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{20}$$

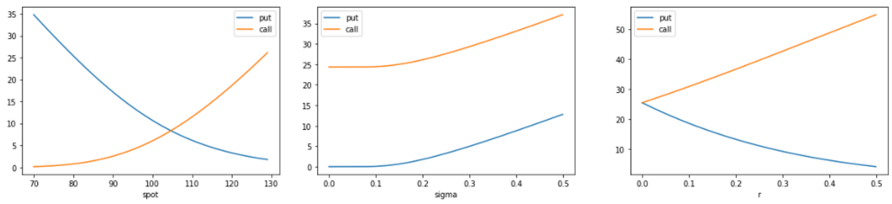
$$valamint:$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + \left(r - \sigma^2/2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{21}$$

Érdemes megvizsgálni, hogy hogyan alakul egy elméleti opciós szerződés ($K = 100, T = 1$) ára, amennyiben megváltoztatjuk a többi paramétert:

Forrás: Saját python vizualizáció

6. ábra. Black-Scholes modell érzékenysége az egyes paraméterekre



A spot ár megváltoztatásával a call opció értéke (bal szélső ábra) nem lineárisan nő, míg a put opció értéke nem lineárisan csökken. Ez várható, hiszen a (18) egyenlet S_0 szerinti deriváltja call estén pozitív, put esetén negatív. Ezzel szemben a volatilitás növekedése (középső ábra) mind a put, mind a call opció árát növeli mivel, a volatilitás növekedésével nő annak a valószínüsége, hogy az opcióknak pozitív lesz a kifizetése és $\frac{\delta c}{\delta \sigma} > 0$ valamint $\frac{\delta p}{\delta \sigma} > 0$. Az r hatása szintén indokolt (jobb oldali ábra), hiszen kedvező kamatkörnyezetben többet hajnaldók egy call opciós jogért fizetni, mivel magasabb hozammal tarthatják a részvény árát betétben. Put opció esetén magasabb kamaton fektetheti be a prémiumot a kötelezettséget vállaló, valamint $\frac{\delta c}{\delta r} > 0$ valamint $\frac{\delta p}{\delta r} < 0$.

A Black-Scholes-Merton árazási formula egyetlen olyan paramétere, amely közvetlenül nem figyelhető meg, az a részvényárfolyam volatilitása. Tegyük fel, hogy egy call opció ára adott azaz megfigyelhető a piacon. Jelöljük az árat C^* -gal. Ekkor nevezzük implied volatilitásnak az σ^{imp} értéket, mely megoldása a $C\left(S_t, K, t, T, r, \sigma^{imp}\right) = C^*$ egyenletnek. A gyakorlatban szokás a sigma értékének meghatározását a Black-Scholes modell kalibrálásának nevezni. Ez az jelenti, hogy valamilyen minimalizáló algoritmus segítségével megoldják a következő egyváltozós minimalizálási problémát (S_t, K, t, T, r, C^* ismert)

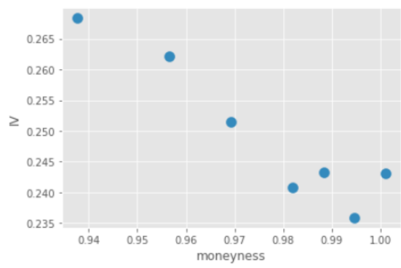
$$\begin{aligned} min: \quad f(\sigma) &= C(\sigma) - C^* \\ ha: \ 0.001 < \sigma &< \ 3 \end{aligned} \tag{22}$$

A számítások sorás a *scipy.optimize.minimize_scalar függvényt használom és az optimalizáló algoritmust bounded -nek választottam. Ebben az esetben a (22)-es egyenlet feltételét meg kell adni, azaz azt az intevallumot, amelyen a sigma optimális értékét keresi Brent algoritmus szerint.*

A volatilitási smile az implied volatilitás geometriai mintázata egy olyan opciós sorozatnak, melyben a lejárati dátumok megegyeznek. A kötési árakkal szemben ábrázolva ezek az implikált volatilitások egy konvex görbét mintáznak, innen ered a "smile" kifejezés. A volatilitási mosolyok a standard Black-Scholes opciós elmélet alapján soha nem fordulhatnak elő, amely általában teljesen lapos volatilitási görbét követel meg. Az első figyelemre méltó volatilitási mosoly az 1987-es tőzsdei összeomlást követően jelent meg. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy az out-of-money opciókat a Black-Scholes modell álltal indokolt ártól magasabb áron kereskedik. Saját adatbázis alapján meghatároztam a 2022-09-14-dikei call opció árakból számított implied volatilitás görbét:

Forrás: Saját python számítás Függelék B / 9.0.4

7. ábra. Volatilitás smile 2022-09-04 - out-of-money calls



Az x tengelyen a moneyness látható ami a $\frac{S_t}{K}$ összefüggés alapján számítandó.

- In-the-money (ITM) call (put) opciónak nevezünk egy opciót ha az aktuális ára a mögöttes terméknek elosztva az opció strike árával kisebb (nagyobb) mint egy.
- At-the-money (ATM) call opciónak nevezük egy opciót, ha a fenti hányados értéke egyhez közeli.

- Out-of-the-money (OTM) call (put) opciónak nevezük egy opciót, ha a fenti hányados értéke nagyobb (kisebb) mint egy.

Az opció kiírásának időpntjában az S&P 500 index ára 3946.01 volt, míg a számítás időpontjában 4392.59. Ez azt jelenti, hogy megváltozott az in-the-money és az out-of-the-money opciók kezdeti 1-1 aránya. Az ábrán a volatilitás smile negítv meredekségü szakasza látható.

4.2. A Black-Scholes modell alkalmazása bid és ask árak becslésére

A Black-Sholes modell (mint ahogy a hagyományos árképzési elméletek általában) az *egy ár törvényére* épülnek, miközben figyelmen kívül hagyják a *piaci likviditásnak* az ajánlati árkülönbözetekre (bid-ask spread) gyakorolt hatását. Az egy ár feltevésére épülő (vagy *egyensúlyi ár*) modellek esetén feltesszük, hogy egy adott áron tudunk venni és eladni. A hagyományos és előzőleg is bemutatott, kockázatsemleges mértékkel reprezentált "világban" egy derivatíva ára vagy értéke a diszkontált kockázatsemleges mérték szerinti várhatóérték, pontosabban: $V(X) = \exp(-rT)E_Q[X]$, ahol Q a kockázatsemleges mérték (*risk neutral measure*) .

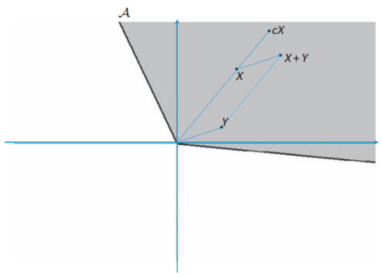
Ezzel szemben a valós piacokon folyamatosan két árat figyelhetünk meg, nevezetesen azt az árat, amelyen a piac hajlandó vásárolni (bid) és az árat, amelyen a piac hajlandó eladni (ask). A conic finance elmélete az *egy ár törvényét* helyettesíti a *két ár törvényével* lehetővé téve, hogy a piaci szereplők a bid áron adjanak el a piacnak és a magasabb ask áron vásároljanak a piactól.

A conic finance alapjául az Artzner P. Artzner 1999 által bemutatott koherens kockázati mértékek szolgállnak. Kusuoka Kusuoka 2001 megmutatta, hogy mindig létezik olyan torzítási függvény halmaz Ψ_γ mely alkalmas a későbbiekben bemutatott $\mathscr{D}_\gamma$ mérték halmaz "helyettesítésére". Wang Wang 2002 bemutatotta a Wang-transzformációt, mint torzítási függvényt, mely később számos kutatás alapjául szollgált. A concic finance kialakulása Madan és Cherry nevéhez kötődik. Publikációikat A. S. Cherny 2006 A. S. Cherny 2008 A. S. Cherny 2010 összefoglalja Madan 2016-os könyve D. Madan 2016. Számos kutatás írodott az elmult évekekben melyek legfőbb célja különböző derivatíva piaci jelenségek magyarázata és derivatívák bid és ask árának meghatározása volt, a Conic Finane feltevéseit alapul véve. Karimov 2017 európai index opciók árazását vizsgálta a Black - Scholes modell és a Kou-modell átalakításával. Z. Lia 2019 a Herston modell-t alakította át a MINMAXVAR torzítási függvény alkalmazásával. W. Wang 2022 amerikai típusú opciók bid és ask árát határozata meg. míg K. Xiang 2018 geometriai ázsiai opciók esetén tette ezt. M. Michielon és Spreij 2021 Azt vizsgálta, miként változik meg az Black-Scholes implied volatilitás, ha last árak helyett a megfigyelt bid és ask árak alapján, a conic (Wang torzított) Black-Sholes modell segítségével számítja ki azt. F. Guillaume 2019 Az illikviditási γ paraméter segítségével magyarázta az európai opciók piacán megfigyelhető bid-ask spread-et és szintén conic (Wang torzított) Black-Sholes modell segítségével tette ezt.

Legyen X valószínűségi változó egy derivatíva - esetünkben opció - kifizetése (jövőbeli) T időpntban (továbbiakban kockázat - risk) az $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ mezőben. Legyen $\mathscr{A}$ konvex halmaza ezeknek a kockázatoknak, és nevezzük konvex halmaznak ha bármely $X, Y \in \mathscr{A}$ esetén $0 \leq \alpha \leq 1, \alpha X + (1-\alpha)Y \in \mathscr{A}$.

Forrás: D. Madan 2016

8. ábra. Elfogadható nulla költségű pénzáramlások (acceptable zero-cost cash flows)



Továbbá nevezzük tölcsérnek (cone) $\mathscr{A} - t$ ha bármely $X \in \mathscr{A}$ esetén $c * X \in \mathscr{A}$ ahol $c > 0$. A kockázati mérték (risk measure) nem más, mint egy olyan függvény, amely egy nemnegatív valós számot rendel egy kockázathoz, jelöljük $\rho\ (X)$ -el. Legyen $\rho\ (X)$ koherens kockázati mérték, ami a $[0, \infty]$ invervallum értékekeit rendeli minden valószínűségi változóhoz. D. Madan 2016 alapján a koherens mértékek rendeljenek értékeket a kockázatokhoz az alábbi négy kritérium megtartása mellet, ahol $X, Y \in \mathscr{A}$ valamint X és Y nem negatív valószínűségi változó:

1. $\rho(X + c) = \rho(X) + c$ (tranzitivitás)

2. $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ (sub-additivitás)

3. Minden $c > 0$ esetén $\rho(cX) = c\rho(X)$ (pozitív homogenitás)

4. ha $P(X \leq Y) = 1$, akkor $\rho(X) \leq \rho(Y)$ (monotonitás)

Legyen X kockázat elfogadható γ szinten ha $\rho\ (X)\ > \gamma$. Ekkor A. S. Cherny 2010 alapján létezik a valószínüségi mértékek egy olyan $\mathscr{D}_\gamma$ halmaza, mely esetén:

$$\rho(X) \geq \gamma \Longleftrightarrow E^Q[X] \geq 0 \text{ bármely } Q \in \mathscr{D}_\gamma \tag{23}$$

Egy koherens mérték esetén a legmagasabb γ elfogadási szint az a legnagyobb γ, amelyhez tartozó mérték halmazból kiválasztott bármely mérték szerinti várhatóérték nagyobb vagy egyenlő mint nulla. Formálisan D. Madan 2016:

$$max_\gamma = \sup\left\{\gamma \geq 0 : E^Q[X] \geq 0 \text{ bármely } Q \in \mathscr{D}_\gamma\right\} \tag{24}$$

míg a minimális elfogadási szint:

$$min_\gamma = \inf\left\{\gamma \geq 0 : E^Q[X] \geq 0 \text{ bármely } Q \in \mathscr{D}_\gamma\right\} \tag{25}$$

Tekinsünk egy helyzetet, amikor γ adott. Mikor hajlandó valaki a piacon lemondani egy kockázatról? Akkor ha az eladásból származó cash-flow különbözet $\mathscr{D}_\gamma$ mérték halmaz bármely mértéke szerint vett várható értéke pozitív. Legyen *ask* ár az a minimális ár, melyért a piac hajladó eladni egy X kockázatot. Ekkor adott γ szinten:

$$\begin{aligned} ask_\gamma(X) &= \inf\{\ a : \alpha(a - X) \geq \gamma\} \\ &= \inf\left\{a : E^Q[a - X] \geq 0 \text{ bármely } Q \in \mathscr{D}_\gamma\right\} \\ &= \sup_{Q \in \mathscr{D}_\gamma} E^Q[X]. \end{aligned} \tag{26}$$

Látható, hogy az "értékeléseinek" *felső határáét* hajnaldó csak megválni a bizonytalan pénzáramlástól. Legyen *bid* ár az a maximális ár, melyet a piac hajladó fizetni egy X kockázatért. Ekkor adott γ szinten:

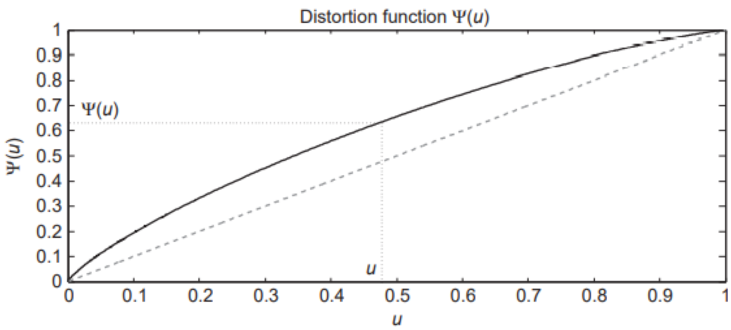
$$bid_\gamma(X) = \sup\left\{b : E^Q[X - b] \geq 0 \text{ bármely } Q \in \mathscr{D}_\gamma\right\} = \inf_{Q \in \mathscr{D}_\gamma} E^Q[X]$$

Látható, hogyha valaki venni akar (random pénzáramlást), akkor "értékeléseinek" *minimumát* hajlandó csak fizetni érte γ szinten.

Definíció: Nevezzük torzító fügvénynek a $\Psi : [0,1] \to [0,1]$ *függvényt, akkor és csak akkor ha monton és* $\Psi(0) = 0$,$\Psi(1) = 1$. Tehát, egy kokváv torzítási függvény egy konkáv eloszlás függvény a $[0,1]$ intervallumon.

Forrás: D. Madan 2016

9. ábra. Egyszerű torzítási függvény



Legyen a $\Psi \circ P$ halaz függévny következő képpen definiálva: $\Psi \circ \mathrm{P}(A) = \Psi(\mathrm{P}(A)),\ A \in F$ ahol $\Psi(\mathrm{P}(A))$ -t nevezzük P mérték torzítottjának. Ψ álltal. Legyen $\hat{\Psi}$ a Ψ torzítási függvénynek a komplementer torzítási függvénye, ha kielégíti a $\hat{\Psi}(x) = 1 - \Psi(1-x),\ x \in [0,1]$ feltételt. Tegyük fel, hogy a X valószínüségi változó F_X eloszlást követ és a piaci szereplők csak a valószínüségi változó eloszlása alapján döntenek arról, hogy mennyire tartanak kockázatosnak egy kifizetést. Ekkor Kusuoka 2001 alapján létezik, olyan konkáv torzítási függvény halmaz a $[0,1]$ intevallumon, hogy $\Psi(F_X(x))$ "torzítás esetén".

$$\mathrm{bid}(X) = \exp(-rT) \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}\Psi(F_X(x)) \tag{27}$$

valamint:

$$\mathrm{ask}(X) = -\exp(-rT) \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}\Psi(F_{-X}(x)) \tag{28}$$

Legyen S egy halmaz és $\mathscr{F}$ az S halmaz részhalmazainak halmaza, valamint $f : S \to R$ egy függvény és $\nu : \mathscr{F} \to R^+$ pedig egy monoton halmaz függvény. Ekkor f-nek a v szerinti Choquet integrálja legyen:

$$\int f d\nu := \int_{-\infty}^{0} (\nu(s \mid f(s) \geq x\}) - \nu(S))\, dx + \int_{0}^{\infty} \nu(s \mid f(s) \geq x\})\, dx \tag{29}$$

Ahol az egyenlet jobb oldala egyszerü Reiman Integrál. (27) és (29) alapján:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}\Psi(F_X(x)) = -\int_{-\infty}^{0} \Psi(F_X(x)) \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} (1 - \Psi(F(x))) \mathrm{d}x \tag{30}$$

Ekkor a (30) egyenlet alapján számítható az X változó torzított vagy Choquet várható értéke. Látható, hogy a jobb oldali kifejezés csak X szerinti integrálokat tartalamz (egyszerü várható érték). Ekkor a bid ár:

$$\text{bid}(X) = \exp(-rT)\left(-\int_{-\infty}^{0}\Psi(F_X(x))\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty}(1-\Psi(F_X(x)))\mathrm{d}x\right) \tag{31}$$

Felhasználva, hogy $\hat{\Psi}(x) = 1-\Psi(1-x)$:

$$\text{bid}(X) = \exp(-rT)\left(-\int_{0}^{\infty}\Psi(1-F_{-X}(x))\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty}\hat{\Psi}(1-F_X(x))\mathrm{d}x\right) \tag{32}$$

Az ask ár:

$$\text{ask}(X) = \exp(-rT)\left(-\int_{0}^{\infty}\Psi(1-F_X(x))\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty}\hat{\Psi}(1-F_{-X}(x))\mathrm{d}x\right) \tag{33}$$

A torzítási függvényt eddig csak mint abszrakt foglamat használtuk. D. Madan 2016 öt különböző torzítási függvényt [17] mutat be. Tekintsük a Wang traszormációt Wang 2002, azaz:

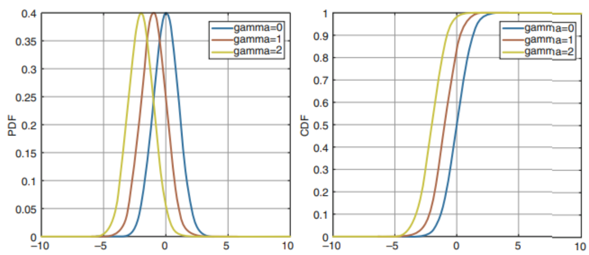
$$\Psi^{\gamma}(u) = \Phi\left(\Phi^{-1}(u)+\gamma\right), u \in [0,1], \gamma \geq 0. \tag{34}$$

torzító függvényt ami konkánkáv, azaz nagyobb gamma esetén nagyobb valószínünéget rendel a kisebb értékekhez. Vizsgáljuk meg, hogyan módosítja a normális eloszlás várható értékét a torzítás:

$$\Psi_{\gamma}^{\text{WANG}}\left(\text{N}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) = \text{N}\left(\text{N}^{[-1]}\left(\text{N}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)+\gamma\right) \quad = \text{N}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}+\gamma\right) = \text{N}\left(\frac{x-(\mu-\gamma\sigma)}{\sigma}\right) \tag{35}$$

Forrás: Karimov 2017

10. ábra. Normális eloszlás torzítása Wang transzformációval



Látható, hogy minél nagyobb a γ, annál nagyobb a torzítás mértéke, azaz a fentiekben kapott kockázattal korrigált eloszlásfüggvények nagyobb súlyt tulajdonítanak a vesztéseknek, mint az eredeti eloszlási függvények.

[17]Ezek: MINVAR, MAXVAR, MAXMINVAR, MINMAXVAR és WANG-transform

Alkalmazzuk a torzító függvényt a Black-Sholes modellre. Jelölje F_{CT} valószínüségi változó az opció kifizetését. Legyen $b_\gamma(C)$ egy call opció bid ára γ torzítás esetén.

Ekkor a (27) egyenlet alapján (diszkontálás nélkül):

$$b_\gamma(C) = \int_0^\infty (x-K)d\Psi^\gamma(F_{C_T}(x)) \tag{36}$$

A call opció kifizetése számítható a mögöttes termék árából S_T (részvény ára T időpontban) és a K strike árból. A opció csak K részvény ár felett kerül lehívásra, ezért változtassuk meg az integrálási határokat és integráljunk S_t szerint:

$$b_\gamma(C) = \int_K^\infty (x)d\Psi^\gamma(F_{S_T}(x)) \tag{37}$$

A korábbiakban beláttuk $S_T - S_{T-\Delta t}$ árfolyam változás lognormális eloszlást követ GBM esetén. Továbbá, a hozamok logaritmusa normális eloszlást követ $\mu = \mu^* - \frac{1}{2}\sigma^{*2}$ és $\sqrt{\Delta t} * \sigma^*$ szórással. Legyen az árfolyam értéke t-ben S_t. Legyen T a lejárat időpontja. Ekkor az árfolyam logaritmusának az eloszlása T időpontban normális, $\mu = lnS_t + \left(\mu^* - \frac{1}{2}\sigma^{*2}\right)(T-t)$ várható értékkel és $\sigma = \sqrt{T-t} * \sigma^*$ szórással, ahol σ^* s μ^* az GBM paraméterei. Legyen $\mu^* = r$. Ekkor $F_{lnS_T}(x)$ felírható normalizált alakban: $\Phi\left[\frac{y - \ln S_t - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^{*2}\right)(T-t)}{\sigma^*\sqrt{T-t}}\right]$. Láthattuk a (35)-es egyenletben, hogy a Wang torzító függvény $\gamma * \sigma$ nagysággal csökkenti az eloszlás várható értékét.

Ekkor a $\Psi^\gamma(F_{lnS_T}(x))= \Phi\left[\frac{y - \ln S_t - \left(r - \frac{1}{2}\sigma*^2\right)(T-t) + \gamma\sigma^*\sqrt{T-t}}{\sigma^*\sqrt{T-t}}\right]$ mivel $\sigma = \sigma^* * \sqrt{T-t}$. Helyettesítsünk be a (37)-es egyenletbe. Ekkor:

$$b_\gamma(C) = \int_K^\infty xd\Phi\left[\frac{y - \ln S_t - \left(r - \frac{1}{2}\sigma*^2\right)(T-t) + \gamma\sigma^*\sqrt{T-t}}{\sigma^*\sqrt{T-t}}\right] \tag{38}$$

Karimov 2017 Függelék B megoldja a (38)-as integrált és hasonlóan kiszámítja a call opció ask és a put opció bid és ask árát:

Opció	Ár	d_1	d_2
$b_\gamma(C)$	$S_l e^{-\gamma\sigma\sqrt{T-1}}\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2)$	$\frac{\ln\frac{S_l}{K}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)-\gamma\sigma\sqrt{T-I}}{\sigma\sqrt{T-t}}$	$d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$
$a_\gamma(C)$	$S_l e^{\gamma\sigma\sqrt{T-l}}\Phi(d_1) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2)$	$\frac{\ln\frac{S_l}{K}-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\gamma\sigma\sqrt{T-l}}{\sigma\sqrt{T-t}}$	$d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$
$b_\gamma(P)$	$e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2) - S_l e^{\gamma\sigma\sqrt{T-l}}\Phi(d_1)$	$\frac{\ln\frac{K}{S_l}-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)-\gamma\sigma\sqrt{T-t}}{\sigma\sqrt{T-t}}$	$d_1 + \sigma\sqrt{T-t}$
$a_\gamma(P)$	$e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2) - S_l e^{-\gamma\sigma\sqrt{T-l}}\Phi(d_1)$	$\frac{\ln\frac{K}{S_l}-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\gamma\sigma\sqrt{T-t}}{\sigma\sqrt{T-t}}$	$d_1 + \sigma\sqrt{T-t}$

További számításaimban a fentebbi formulákat veszem alapul [Függelék B / 7.0.3]

5. Az illikviditási paraméter és az SP500 index kapcsolatának vizsgálata

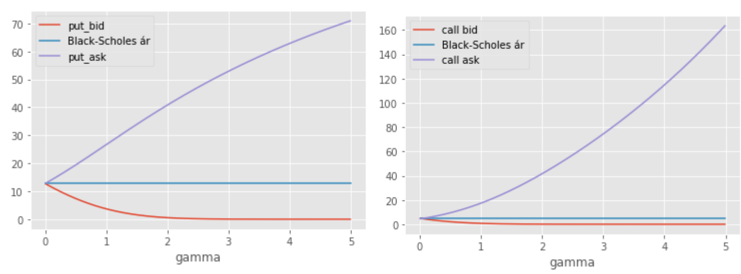
Az előző fejezetben láthattuk, hogy a hogy a γ paraméter (a torzítási függvényen keresztül), lehetővé teszi, hogy az árazás során szerepeltessük a piac mögöttes termékre, (ezen keresztül a) illikviditásra vonatkozó várakozásait, úgy, hogy modellünk összhangban legyen a piacról alkotott elméleti feltevéseinkel. Habár azt láttuk, hogy a gamma paraméter növekedése "csökkenti" (Black-Scholes modell és Wang transzformáció esetén) a mögöttes árfolyamat várhatóértékét, azt nem láttuk, hogy pontosan hogyan hat az árra.

5.1. A gamma paraméter becslése valós adatokon

Tekintsünk egy out-of-the-money call és egy in-the-money put opciót. Legyen $K = 110$, $S_0 = 100$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.02$.

Forrás: Saját python számítások

11. ábra. Gamma növelésének hatása a bid és az ask árakra



Az ábrán a kék színü nulla meredekségü egyenes a Black-Scholes ár (melyre nem hat a γ paraméter véltozása). Látható, hogy $\gamma = 0$ esetén a BS ár megegyezik a bid és ask árakkal (ekkor a torzítás mértéke nulla). Az ábrán nem kivehető, de a call opció BS ára 4.943 míg a put opció BS ára 12.765. Várható volt, hogy a call ár kisebb lesz hiszen out-of-the-money call-t és in-the-money put-ot vizsgálunk. Másrészről az árak teljesítik a put-call paritást, azaz $BS(call) - BS(put) = S_0 - K * e^{-rt}$ teljesül, hiszen: $4.943 - 12.765 = -7.821$ és $100 - 110 * e^{-0.02*1} = -7.821$. Látható, hogy a gamma paraméter növekedésével a bid ár mind két esetben csökken az ask ár pedig mind két esetben nő, azaz nő a spread. A korábbiakban bemutatott kutatásokban láthattuk, a növekvő bid-ask spread a likviditás csökkenésének jele (az elméleti modellek alapján) és szélsőséges esetben a visszaesések (buborék durranások) előjele.

Hogyan kalibrálható a modell? A BS modell esetén láthattuk, hogy a modell karibrálásakor az egyetlen nem megfigyelhető paraméter, a σ értékének megválasztása volt, mely alapján a BS ár megegyezik a piacon megfigyelhető árral. A conic vagy torzított BS modellnek két nem megfigyelhető paramétere van, a σ és a γ. Dolgozatomban a σ paraméter a BS imlied volatilitással becsülöm. Tekintve, hogy sok esetben az opció last árát a bid és ask árak átlagával pótoltam. Ekkor a gamma paraméter az egyetlen becsülendő, nem megfigyelhető paraméter. Láthattuk, hogy az egyszerü BS modell esetén a BS implied volatilitás visszahelyettesítésekor (ha egy árhoz kalibráltunk) pontosan vissza kaptuk a piaci árat. A conic BS esetén nem tudjuk pontosan kalibrálni a modell-t a bid és ask árakhoz, hiszem két árra próbáljuk ráilleszteni a modell-t egyetlen paraméter optimalizálásával. Optimalizáljuk a γ paramétert a kövekezők szerint:

$$TSE_{bid,ask}(\gamma) = \sum_{i=1}^{\tau} \left((bid_i - b_{\gamma,i})^2 + (ask_i - a_{\gamma,i})^2 \right) \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \min_{\gamma}: \quad & TSE_{\text{bid,ask}}(\gamma) \\ ha: \quad & \gamma \geq 0 \end{aligned} \tag{40}$$

ahol τ (39) az jelöli, hogy hány nap megfigyeléseihez (hányszor két megfigyeléshez) optimalizáljuk a modellt. Felmerül a kérdés, az adott időpontot megelőző vagy adott időpontot követő megfigyelésekhez optimalizáljunk. Mivel az elsődleges cél a visszaeséseket megelőző buborék állapot jelen időben történő azonosítása, ezért dolgozatomban mindig korábbi megfigyelésekhez (bid -ask árakhoz) optimalizáltam.

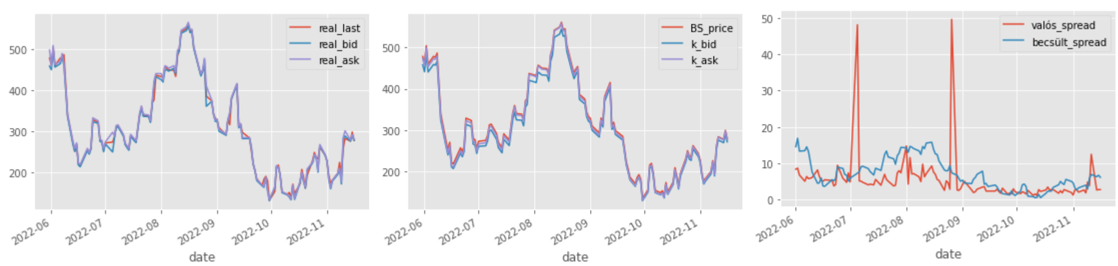
Valós, más időpont béli a paraméterek megválasztása komplikáltabb feladat. Ahogy korábban említettem adott napi γ becslés esetén $\sigma = \sigma^{imp}$. Az r esetén három megközelítés lehetséges:

1. Legyen T^* a becslés időpontja valamit T a lejárat időpontja. Legyen r a minden egyes napra kölön interpolált hozam görbe Y_{T*} (*yield curve*) $T - T^*$ helyen felvett értékéből számított folytonos kamatláb.
2. Legyen T_0 a vizsgálat kezdetének időponja, T a lejárat időpontja és legyen a hozamgözbe T_0 -ban Y_0. Legyen r az Y_0 hozamgörbe $T - T^*$ helyen felvett értékéből számított folytonos kamatláb.
3. Legyen r konstans folytonos kamatláb.

Dolgozatomban a harmadik megközelítést választottam. Összesen húsz put és húsz call szerződés (azonos lejáratú 2023-03-31) historikus last, bid és ask árai, valamint az S&P500 index last árai azonos idő intevallumon az input adatok. Az opció árak 2022-04-14 és 2022-11-16 között állnak rendelkezésre, ami összesen 18150 árat jelent. Természetesen az optimalizálás következtében a becsült gamma értékek és bid-ask árak csak τ-val kevesebb napon számíthatóak. Ekkor válasszunk ki - a vizsgálat elején in-the-money - call opciót és legyen $K =$ 4000, $\tau = 14$.

Forrás: Saját python számítások

12. ábra. Valós vs. Becsült bid és ask árak



A bal szélső ábrán a valós bid, last és ask árak időbeli alakulását láthatjuk. A középső ábrán a Conic BS alapján becsült bid és ask árak valamint a BS alapján becsült last árak időbeli alakulását láhatjuk. A BS last árak és a valós last árak azonosak, hiszen a számítás során $\sigma_t = \sigma_t^{imp}$. A jobb szélő ábrán a valós és a becsült spread időbeli alakulását láthatjuk. Nem látható szélsőséges eltérés - a MAPE[18] értéke 38.104 - , de a valós (Bloomberg) adatokban látható két nagymértékü kiugrás, melyek adathibák.

A dolgozomban az illikviditási (vagy torzítási) γ paraméter és az S&P index index kapcsolatát modellezem. Az elkövetkezőkben három külömböző gamma paraméter kapcsolatát fogom vizsgálni az S&P 500 index-el:

Egyszerű gamma: A későbbiekben $K = pl.: 4000$ $\tau = pl.: 14$ call vagy put egyszerü gamma idősornak nevezem a $K = 4000$ strike-al rendelkező call vagy put opció $\tau = 14$ parméterrel becsült gamma idősorát.

At-the-money-gamma: ATM call vagy put gamma idősor értéke minden t^* időpontban megeggyezik a "leginkább" at-the-money call vagy put opció egyszerű gamma idősorának t^* béli értékével, azaz: $gamma_{ATM}(t) = gamma_{min(abs(K-S_{t*}))}$(t). Az ilyen módon számított γ számítás indokolt, hiszen F. Guillaume 2019 alapján elmondható, hogy az opciókkal nagyobb volumenben kereskednek, ha a kötési (strike) ár közel van az aktuális piaci árhoz, mivel nagyobb valószínűséggel járnak le az opciók in-the-money. A nagyobb kereskedési volumen azt is jelenti, hogy az ATM opciók γ paramétere jobban képes tükrözni a piac mögöttes termékkel kapcsolatos vélekedését.

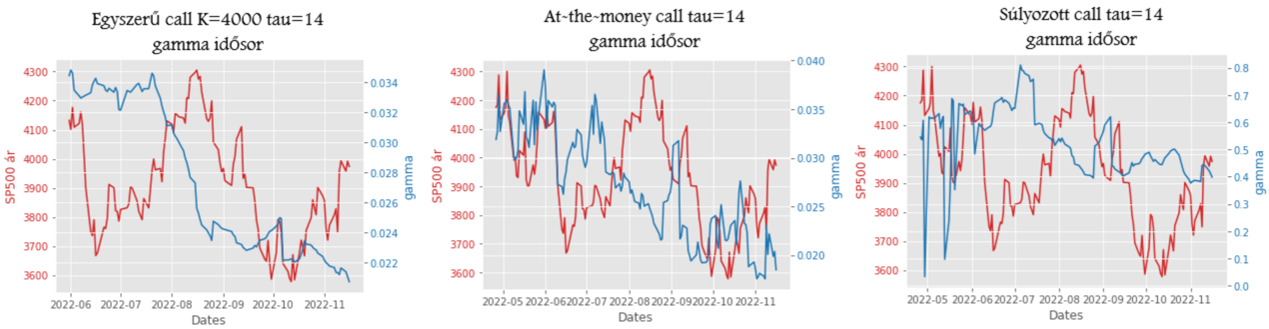
Súlyozott gamma (WG): Legyen a számítás során $\tau = \tau^*$. Jelöljük $\gamma_K(t)$-vel a K strike-al rendelkező opció τ^* paraméterrel számított egyszerü gamma idősorának értékét t időpontban. Legyen M_K(t) a K strike-al rendelkező call vagy put opció moneyness értéke t időpontban. Végül legyen $w_K(t)$ a $\gamma_K(t)$ súlya t időpontban, ahol $w_K(t) = \left(1-(1-M_K(t))^2\right)$. Ekkor legyen WG idősort értéke t időpontban: $WG(t) = \sum_{K \in \; elrhet \; K} w_K(t) * \gamma_K(t)$.

Összefoglalva minden időpontban vegyük figyelembe minden call vagy minden put opciók gamma értékét az at-the-money szintől való eltéréstől fordítottan arányosan. Ez az at-the-money gammához hasonlóan intuitív hiszen a várt kerekedési aktivitással arányosan veszi figyelembe az egyes opciók illikviditási paraméterét. Másrészről nem csak egy szerződés alapján következtet a piac várakozásaira, hanem esetünkben 20-20 (put-call) szerződés alapján becsüli a γ értékét. Ekkor azonos call opció esetén ($K = 4000$, $\tau = 14$.):

[18] $MAPE = \frac{1}{n} \times \sum \left| \frac{\text{valós érték} - \text{becsült érték}}{vals\ rtk} \right|$

Forrás: Saját python számítások

13. ábra. Különböző gamma idősorok és az SP 500 index időbeli alakulása



5.2. A VAR-modell

Ha nincs jó okunk arra, hogy két idősor között egyirányú oksági kapcsolatot feltételezzünk, akkor úgy gondolhatunk a kapcsolatukra, mint kölcsönhatásra. Egy k dimenziós p-ed rendü VAR modell, $\phi(B)z_t = \phi_0 + a_t$ alakban írható fel ahol $\phi(B) = I_k - \sum_{i=1}^{p} \phi_i B^i$ ahol $\phi_p \neq \mathbf{0}$, de jobban átlátható a következő alakban (két dimenziós esetben):

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \beta_0 + \beta_{11}Y_{t-1} + \beta_{12}Y_{t-2} + \cdots + \beta_{1k}Y_{t-k} + \beta_{21}X_{t-2} + \cdots + \beta_{2k}X_{t-k} + u_t \\
X_t &= \alpha_0 + \alpha_{11}Y_{t-1} + \alpha_{12}Y_{t-2} + \cdots + \alpha_{1k}Y_{t-k} + \alpha_{21}X_{t-2} + \cdots + \alpha_{2k}X_{t-k} + v_t
\end{aligned}
\tag{41}
$$

ahol X és Y endogén változók és X_t az S&P500 index tárgyidőszaki abszolult megváltozása, Y_t pedig az $ATMgamma_\tau$ idősor tárgyidőszaki értéke, valamint u_t s v_t fehérzaj. Becslésre használhatjuk a legkisebb négyzetek (LS) módszerét, a maximum likelihood (ML) módszert vagy a Bayes-módszert. Dolgozatomban OLS becslést alkalmazok, mely előírja az idősorok stacionaritását. Mielőtt a VAR modellt előrejelzésre, vagy oksági kapcsolat meghatározására használnák, szükséges több szempont szerint tesztelni.

A VAR modell OLS becslése esetén feltétel, a modellben szerepeltetett idősorok stacionaritása. A dolgozatomban az ADF (Augmented Dickey Fuller Test) tesztet használom. Az ADF-teszt az egyszerü Dickey-Fuller-tesztnél összetettebb modelleket is képes kezelni, ennek ellenére óvatosan kell használni, mert - a legtöbb egységgyök- teszthez hasonlóan - viszonylag magas az I. típusú hibaaránya. Dolgozatomban a *aTSA* pacgake *adf.test* függvényét halsználom type1 beállitással. Ez azt jelenti, hogy a teszt során konstas nélküli modell-t[19] alkalmaz. Az ADF-teszt szerint egy idősor nem stacionárius, ha β = 1, mikor is az AR(1) folyamat véletlen bolyongás. A null hipotézis $H_o : \beta = 0$ az alternatív hipotézis: $H_a : \beta < 0$. $p > \alpha$ esetén nem tudjuk elutasítani a H_0 hipotézist, azaz a folyamat tartalmaz egységgyököt (nem stacioner).

Ha az idősor sztochasztikus trendet tartalmaz $\left(Y_t^{(S)} = Y_{t-1}^{(S)} + \alpha + u_t\right)$, akkor az egyszerü differenciázás ($Y_t' = Y_t - Y_{t-1}$) valóban stacionerré teszi az idősort, hiszen ekkor $Y_t' = \alpha + u_t$. Ferenci 2019

Az optimális késleltetés megválasztásához a *vars* package *VARselect* függvényét használtam és minden esetben a legszigorubb Schwartz információs kritérium alapján választottam meg az alkalmazott késleltetést.

A hibatagokat együttesen a *Portmanteau* próbával tesztelem. Ebben az esetben a teszt statisztika[20] χ^2 eloszlású, ezért ha $Q < \chi^2(1-\alpha)$ akkor elfogadjuk a H_0 hipotézist, azaz ha $p > \alpha$ elfogadjuk, hogy a hibatagok együttesen fehérzajnak tekinthetőek. Ez a teszt meglehetősen szigorú, hiszen a hibatag saját múltján túl a többi hibataggal sem korrelálhat, de előnye, hogy nem csak normális fehér zaj mellett használható. A hibatagokat külön-külön Breusch–Godfrey tesztel teszteltem melynek H_0 hipotézise, hogy a hibatagok önmagukban fehérzajnak tekinthetőek. Colonescu 2016

A VAR modell akkor stabil, ha minden “tiszta AR részben” stacionáriusnak tekinthető. Ezt minden egyenlet karakterisztikus polinomjainak gyökeivel tudjuk ellenőrizni. Ha minden AR rész karakterisztikus polinomjának gyöke abszolult értékben kisebb mint egy, akkor a modell stabillnak tekinthető.

X idősor Granger okozza Y-t, ha X valamelyik múltja (lagje) szignifikáns hatással van Y aktuális értékére. Utóbbi feltevést hipotézis vizsgálattal tesztelik, hogy a *VAR* egyenletben, ahol az eredményváltozó a tárgyidőszaki Y_t, lehet -e X összes késleltetett értékének együtthatója lehet-e 0. Formálisan ezt Wald-próbával vizsgálják meg. A Wald teszt összehasonlítja a következő két modell letljesítményét (két változós esetben): egy szükített modell ($y_t = c_2 + \sum_{i=1}^{3} \alpha_{2,i} y_{t-i} + \varepsilon_{x,t}$) ahol feltesszük, hogy $\beta_{2,1} = \beta_{2,2} = \beta_{2,3} = 0$ (H_0) és egy nem szükített modell ($y_t = c_2 + \sum_{i=1}^{3} \alpha_{2,i} y_{t-i} + \sum_{i=1}^{3} \beta_{2,i} x_{t-i} + \varepsilon_{x,t}$) ahol feltesszük

[19] $\Delta z_t = \beta z_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \phi_i^* \Delta z_{t-i} + a_t$

[20] $Q = T \cdot \sum_{\tau=1}^{h} \hat{r}^2(\tau)$

hogy legalább egy $\beta_{2,1}, \beta_{2,2}, \beta_{2,3} \neq 0$ (H_A). Összefoglalva, a H_0 hipotézis az, hogy X nem Granger okozza Y-t. R. H. Shumway 2011

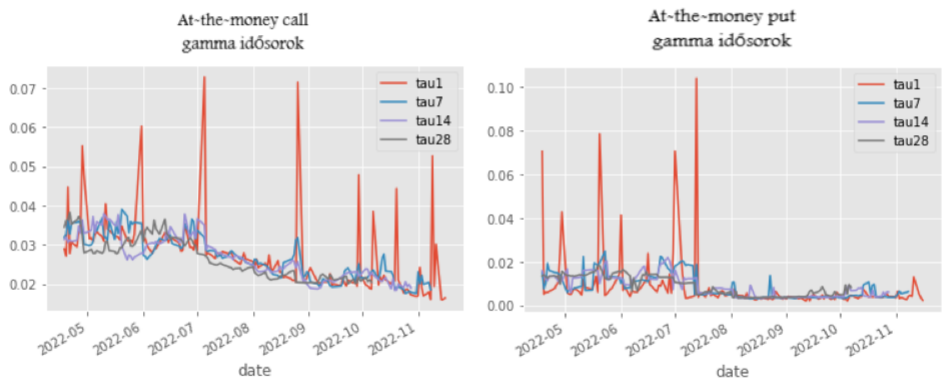
5.3. Kapcsolat vizsgálat - eredmények

Mind at-the-money gammákat mind a súlyozott gammákat $\tau \in [1, 7, 14, 28]$ értékkel számítom. Ezen számításokat elvégzem mind call mind put opciókra. Így összesen 16 idősor és az S&P 500 index abszlult hozamainak kapcsolatát vizsgálom VAR modellel. A statisztikai számításokhoz használt kódok és adatok a `https://github.com/pfurjesz/Szakdolgozat_2022` linken keresztül érhetőek el **VAR Modellek** néven.

5.3.1. At-the-money gamma idősorok

Forrás: Saját python számítások

14. ábra. ATM gamma értékek időbeli alakulása különböző tau paraméterek esetén

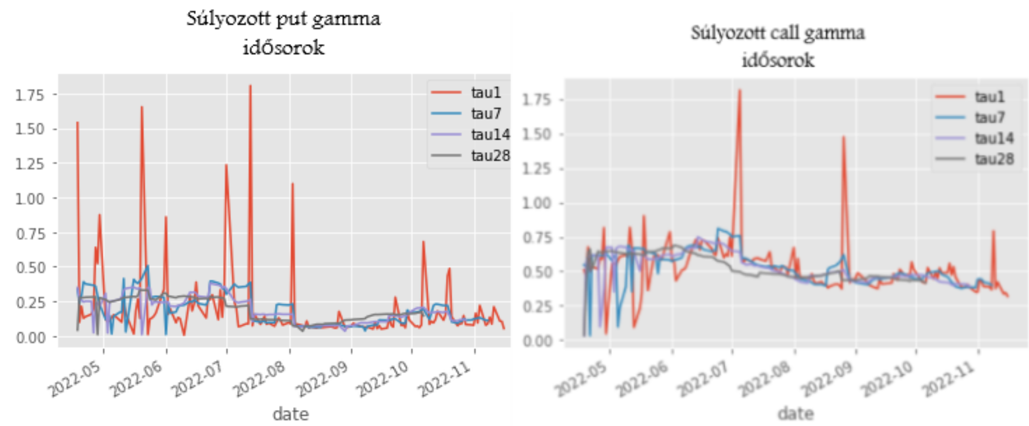


A 14-es ábrán átható, hogy $\tau = 1$ esetén a gamma idősor nagyon érzékeny a kiugró értékekre, hiszen ebben az esetben csak két megfigyeléshez van kalibrálva. A különböző ATM gamma idősorok és az S&P 500 index abszolult hozamainak kapcsolatát vizsgáló VAR modelleket az Függelék C 9.0.1 és 9.0.2 -ben foglaltam össze. A $\Delta S\&P500$ - at magyarázó modellek egyike sem volt szignifikáns. A gamma értékét magyarázó modellek több esetben is szignifikánsak bizonyultak. Ezen modellekben minden esetben a szignifikáns változó a gamma késleltettje volt, ezért a gamma idősorok ezekben az esetekben autoregresszívnek mondhatóak, hiszen $\alpha = 1\%$-os szignifikancia szinten a késleltetett gamma értékek szignifikáns hatással vannak a tárgyidőszaki gamma értékre. A korrigált R^2 ezekben az esetekben is 30% alatt volt. Ezen modellek esetén ($\tau = 7$ eset kivételével) mind a Portmanteau próba, mind a Breusch–Godfrey teszt p értéke 0.05 alatt volt, így a hibatagok sem együttesen sem külön külön nem tekinthetőek fehérzajnak.

5.3.2. Súlyozott gamma idősorok

Forrás: Saját Python számítások

15. ábra. Súlyozott gamma értékek időbeli alakulása különböző tau paraméterek esetén



Súlyozott gamma idősor (15. ábra) esetén szintén megfigyelhető, hogy $\tau = 1$ esetén a gamma idősor nagyon érzékeny a kiugró értékekre. A különböző ATM gamma idősorok és az S&P 500 index abszolult hozamainak kapcsolatát vizsgáló VAR modelleket az Függelék C 9.0.3 és 9.0.4 -ben foglaltam össze. A $\Delta S\&P500$ - at magyarázó modellek egyike sem volt szignifikáns. A gamma értékét magyarázó modellek több esetben is szignifikánsak bizonyultak és ebben az esetben is a gamma idősorok autoregresszívnek mondhatók. Ezen modellek esetén mind a Portmanteau próba, mind a Breusch–Godfrey teszt p értéke 0.05 alatt volt, így a hibatagok sem együttesen sem külön külön nem tekinthetőek fehérzajnak.

6. Összefoglalás

Az irodalmi áttekintés során bemutattam a - jelentős visszaeséseket gyakran megelőző – pénzügyi buborék állapot okát vizsgáló modellek három fő csoportját. Ezt követően azon kutatásokra fókuszáltam melyek valamilyen módon, a megváltozott piaci likviditást helyezték az elméleti modellek központjába. Láthattuk, hogy a likviditás visszaesése – a bemutatott elméleti modellekben – gyakran a buborékok durranásának, jelentős visszaeséseknek az előjele. Ezt követően bemutattam a spread különböző típusait, és megmutattam, hogy miként jelenik meg a likviditás szerepét vizsgáló modellekben és megmutattam, hogy a növekvő spread – az elméleti modellek szerint is – a csökkenő likviditás jele. Ezek a modellek mind egy adott termék likviditása és ára közötti kapcsolatot modellezték. Dolgozatomban az S&P 500 index és a rá vonatkozó európai index opciók bid és ask árából számított illikviditási paraméter kapcsolatát vizsgáltam. Bemutattam, hogy pontosan milyen opciós szerződéseket vizsgálok, és kitértem arra is, hogy az Egyesült Államokban milyen törvények szabályozzák és milyen szervezetek felügyelik az opciós kereskedést. Ezt követően bemutattam a Black-Scholes modellt és mögöttes termék modellezésére használt Geometriai Brown mozgást. Láthattuk, hogy a valós hozamok más eloszlást követnek, mint amit a GBM alapján feltételezünk.

A Conic Finance feloldja az egy ár feltevését. Bemutattam a koherens kockázati mérték fogalmát és azt, hogy minden koherens kockázati mérték megfeleltethető egy (normális eloszlású) valószínűségi változó (indukált mértékének) torzítottjának minden elfogadási szinten. Ezt követően a bemutattam, miként torzítja az opció kifizetésének eloszlását a Wang-transzformáció a Black-Scholes modellben, de a későbbi számítások során Karimov 2017 levezetésére támaszkodtam.

Ezt követően valós adatokon becsültem meg az illikviditási vagy másnéven torzítási paramétert. A számításokat négy különböző tau paraméterrel is elvégeztem. A különböző strike-al rendelkező, de azonos típusú és lejáratú opciók gamma paraméterét két módszerrel (ATM és súlyozott gamma) egy-egy likviditási paraméterbe „tömörítettem". Utóbbi két paraméter kapcsolatát az abszolút hozamokkal VAR modellel vizsgáltam. <u>Hipotézisem</u> szerint a gamma paraméter késleltetett értékei és a tárgyidőszaki hozamok között szignifikáns negatív kapcsolat van. A VAR modellek alapján nincs szignifikáns kapcsolat a gamma paraméter késleltetett értékei és a tárgy időszaki abszolút hozamok között. Ezt a hipotézisemet elutasítom a VAR modellek alapján. <u>Kutatási kérdésem</u> az volt, hogy lehetséges-e a becsült gamma paraméter alapján előre jelezni a szélsőséges visszaeséseket. Ezt a kérdést csak részben válaszoltam meg, hiszem hiszen nem a szélsőséges gamma paraméter és a szélsőséges visszaesések kapcsolatát vizsgáltam, hanem a gamma paraméter és a hozamok kapcsolatát. Másrészről a vizsgált időszak nem tartalmazott szélsőséges visszaesést, ezért a módszert csak normál piaci körülmények között lett tesztelve. A kutatási kérdés megválaszolásához a limitációk feloldása mellet a modell (leginkább az árfolyam idősor reprezentációjának) fejlesztése szűkséges.

6.1. Limitációk

Annak ellenére, hogy az adatokat a Blooméról gyűjtöttem a modell legfőbb limitációjának az input adatot látom. Egyrészőr is a vizsgált opciók kereskedési volumene nagyon alacsony volt, láthattuk, hogy a megfigyelések nagyrészében nem is állt rendelkezésre last ár. Másrészről az adatsor számos kiugró értéket tartalmazott melyek jelentősen torzíthatják a gamma paraméterek értékét, hiszem nagy tau esetén egy kiugró érték az idősor többi értékét is torzítja. Másrészről mind a mögöttes termék árak mind az opció árak esetén napi adatokat használtam, ezért semmi nem garantálja (kis opció kereskedési volumen esetén), hogy az opció értékesítése során a mögöttes termék ára a last ár volt, így torzulhatott az implied volatilitás értéke is és ezen pontatlanság mértékét növeli az is, hogy olyan napokon is számítottam implied volatilitást, ahol nem is volt az opciónak last ára (mid árral pótoltam azt).

6.1.1. Fejlesztési lehetőségek

Elsődleges fejlesztési lehetőség nagyobb a frekvenciájú adat használat az illikviditási paraméter becslése során. Célszerű a kiugró értékeket eltávolítani, hiszen nagyban befolyásolják a kalibrált gamma értékét (hosszú távon is). Másrészről láthattuk, hogy magának a Black-Scholes modellnek is számos licitációja van, melyek közül esetünkben a legnagyobb hatású GBM dinamika feltételezése a mögöttes termék ár folyamatáról. Célszerű lehet más opció árazási modelleket (például a Kou-modellt) és más torzítási függvényeket is tesztelni.

7. Függelék A - Python kódok pénzügyi számítások

7.1. Számítások

Minden számítások során használt adat elérhető a https://github.com/pfurjesz/Szakdolgozat_2022 linken. **Függelék A - Python kódok pénzügyi számítások 7.2.1. – től 7.2.10. -ig** input adatai **option_v1_csv** néven. A **Függelék A - Python kódok pénzügyi számítások / 7.2.11. At-the-money és súlyozott gamma idősorok előállítása** számítások input adatai pedig **final_v3 néven**.

7.1.1. Használt könyvtárak

```
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')
from math import log, sqrt, pi, exp
from scipy.stats import norm
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('ggplot')
import math as math
import os
import datetime
from datetime import datetime
from scipy.optimize import minimize_scalar
import scipy
N = norm.cdf  x norm lis eloszl s jel l se
```

7.1.2. Black-Sholes árazás

```
def BS_CALL(S_t, K, T, r, sigma):
    d1 = (np.log(S_t/K) + (r + sigma**2/2)*T) / (sigma*np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
    return S_t * N(d1) - K * np.exp(-r*T)* N(d2)

def BS_PUT(S_t, K, T, r, sigma):
    d1 = (np.log(S_t/K) + (r + sigma**2/2)*T) / (sigma*np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sigma* np.sqrt(T)
    return K*np.exp(-r*T)*N(-d2) - S_t*N(-d1)
```

7.1.3. Kamirov bid-ask árazás

```
def Kamirov_Black_Sholes_call(S_t,sigma,K,r,gamma,T):
    #bid
    d1_bid_call=(log(S_t/K)+(r+(1/2)*sigma**2.)*T-gamma*sigma*math.sqrt(T))/(sigma*math.sqrt(T))
    d2_bid_call=d1_bid_call-sigma*math.sqrt(T)
    bid_price=S_t*math.exp(-gamma*sigma*math.sqrt(T)) * N(d1_bid_call) - math.exp(-r * T)* K * N(d2_bid_call)
    #ask
    d1_ask_call=(log(S_t/K)-(r+1/2*sigma**2.)*T+gamma*sigma*math.sqrt(T))/(sigma*math.sqrt(T))
    d2_ask_call=d1_ask_call-sigma*math.sqrt(T)
    ask_price=S_t*math.exp(gamma*sigma*math.sqrt(T)) * N(d1_ask_call) - math.exp(-r * T)* K * N(d2_ask_call)
    return(bid_price,ask_price)
```

```
def Kamirov_Black_Sholes_put(S_t,sigma,K,r,gamma,T):
    d1_bid_put=(log(K/S_t)-(r+1/2*sigma**2.)*T-gamma*sigma*math.sqrt(T))/(sigma*math.sqrt(T))
    d2_bid_put=d1_bid_put+sigma*math.sqrt(T)
    bid_price=math.exp(-r*T)*K*N(d2_bid_put)-S_t*math.exp(gamma*sigma*math.sqrt(T))*N(d1_bid_put)
    d1_ask_put=(log(K/S_t)-(r+1/2*sigma**2.)*T+gamma*sigma*math.sqrt(T))/(sigma*math.sqrt(T))
    d2_ask_put=d1_ask_put+sigma*math.sqrt(T)
    ask_price=math.exp(-r*T)*K*N(d2_ask_put)-S_t*mah.exp(-gamma*sigma*math.sqrt(T))*N(d1_ask_put)
    return(bid_price,ask_price)
```

7.1.4. Implied volatilitás becslés

```
def implied_vol(real, S_t, K, T, r, type):

    def call_obj(sigma):
        return (BS_CALL(S_t, K, T, r, sigma) - real)**2

    def put_obj(sigma):
        return (BS_PUT(S_t, K, T, r, sigma) - real)**2

    if type == 'call':
        res = minimize_scalar(call_obj, bounds=(0.01,6), method='bounded')
        return res.x
    elif type == 'put':
        res = minimize_scalar(put_obj, bounds=(0.01,6),
                              method='bounded')
        return res.x
    else:
        raise ValueError("type_ must be 'put' or 'call'")
```

7.1.5. Gamma paraméter kalibrálás

```
def gamma_calibrator(real_bid_vec, real_ask_vec, K, T_vec,real_S_t_vec,IV_vec, r, type):

    def call_obj(gamma):
        TSE=0
        for k in range (0,len(real_bid_vec)):
            T=T_vec[k]
            S_t=real_S_t_vec[k]
            sigma=IV_vec[k]
            real_ask=real_ask_vec[k]
            real_bid=real_bid_vec[k]
            estimated_bid=Kamirov_Black_Sholes_call(S_t,sigma,K,r,gamma,T)[0]
            estimated_ask=Kamirov_Black_Sholes_call(S_t,sigma,K,r,gamma,T)[1]
            TSE=TSE+(((real_bid-estimated_bid)**2)+((real_ask-estimated_ask)**2))

        return TSE

    def put_obj(gamma):
        TSE=0
        for k in range (0,len(real_bid_vec)):
            T=T_vec[k]
            S_t=real_S_t_vec[k]
            sigma=IV_vec[k]
            real_ask=real_ask_vec[k]
            real_bid=real_bid_vec[k]
            estimated_bid=Kamirov_Black_Sholes_put(S_t,sigma,K,r,gamma,T)[0]
            estimated_ask=Kamirov_Black_Sholes_put(S_t,sigma,K,r,gamma,T)[1]
            TSE=TSE+(((real_bid-estimated_bid)**2)+((real_ask-estimated_ask)**2))
```

```
        return TSE

    if type == 'call':
        res = minimize_scalar(call_obj, bounds=(0.001,100), method='bounded')
        return res.x
    elif type == 'put':
        res = minimize_scalar(put_obj, bounds=(0.001,100),
                              method='bounded')
        return res.x
    else:
        raise ValueError("A tipusnak callnak vagy putnak kell lennie")
```

7.1.6. Adat tisztítás

```
def cleaner(Option_SPX):
    selector=[]
    Option_SPX["average"]=""
    for i in range(0,Option_SPX.shape[0]):
        if Option_SPX["price_type"].iloc[i]=="last" and np.isnan(Option_SPX["price"].iloc[i].item())==True:

            loc_bid=np.where((Option_SPX['date']==Option_SPX["date"].iloc[i]) &
                             (Option_SPX['type']==Option_SPX["type"].iloc[i]) &
                             (Option_SPX['strike']==Option_SPX["strike"].iloc[i]) &
                             (Option_SPX['price_type']=="bid"))[0][0]

            same_bid=Option_SPX["price"].iloc[loc_bid].item()

            loc_ask=np.where((Option_SPX['date']==Option_SPX["date"].iloc[i]) &
                             (Option_SPX['type']==Option_SPX["type"].iloc[i]) &
                             (Option_SPX['strike']==Option_SPX["strike"].iloc[i]) &
                             (Option_SPX['price_type']=="ask"))[0][0]

            same_ask=Option_SPX["price"].iloc[loc_ask].item()

            if np.isnan(same_bid) or np.isnan(same_ask):
                pass
            else:
                Option_SPX["price"][i]=(same_ask+same_bid)/2
                Option_SPX["average"][i]=1
                selector=selector+[loc_ask, loc_bid, i]

        elif Option_SPX["price_type"].iloc[i]=="last" and np.isnan(Option_SPX["price"].iloc[i].item())==False:


            loc_bid=np.where((Option_SPX['date']==Option_SPX["date"].iloc[i]) &
                             (Option_SPX['type']==Option_SPX["type"].iloc[i]) &
                             (Option_SPX['strike']==Option_SPX["strike"].iloc[i]) &
                             (Option_SPX['price_type']=="bid"))[0][0]

            same_bid=Option_SPX["price"].iloc[loc_bid].item()

            loc_ask=np.where((Option_SPX['date']==Option_SPX["date"].iloc[i]) &
                             (Option_SPX['type']==Option_SPX["type"].iloc[i]) &
                             (Option_SPX['strike']==Option_SPX["strike"].iloc[i]) &
                             (Option_SPX['price_type']=="ask"))[0][0]

            same_ask=Option_SPX["price"].iloc[loc_ask].item()

            if np.isnan(same_bid) or np.isnan(same_ask):
                pass
            else:
                Option_SPX["average"][i]=0
                selector=selector+[loc_ask, loc_bid, i]
```

```
    Option_SPX=Option_SPX.iloc[selector].reset_index(drop=True)
    return(Option_SPX)
```

7.1.7. Moneyness számítás

```
def moneyness(option_df,s_df):
    option_df["moneyness"]=""
    for i in range(0,option_df.shape[0]):
        date=option_df["date"].iloc[i]
        strike=option_df["strike"].iloc[i].item()
        spot=s_df["last"].loc[s_df["date"] == date].item()
        option_df["moneyness"][i]=spot/strike
    return(option_df)
```

7.1.8. Gamma paraméter becslésa valós adatokon

```
def gamma_estimator(K,ctype,tau,r,spx,spx_option): # row zero min date
    tech_param=0
    out = pd.DataFrame(columns=['date','SP','real_last','real_bid', 'real_ask', 'BS_price',
                                'gamma','k_bid','k_ask','average'])

    K_selected=spx_option.loc[spx_option['strike'] == K]
    type=K_selected.loc[spx_option["type"] == ctype]
    last=type.loc[type['price_type'] == "last"]
    last=last.reset_index(drop=True)
    bid=type.loc[type['price_type'] == "bid"]
    bid=bid.reset_index(drop=True)
    ask=type.loc[type['price_type'] == "ask"]
    ask=ask.reset_index(drop=True)
    bid_tau=[None] * tau
    ask_tau=[None] * tau
    IV_tau=[None] * tau
    T_tau=[None] * tau
    S_t_tau=[None] * tau
    last_tau=[None] * tau
    average_tau=[None] * tau
    for i in range(tau,last.shape[0]):
        date=last["date"].iloc[i]
        for j in range (0,tau):
            bid_tau[j]=bid["price"].iloc[i-j].item()
            ask_tau[j]=ask["price"].iloc[i-j].item()
            IV_tau[j]=last["IV"].iloc[i-j]
            T_tau[j]=last["T"].iloc[i-j]
            loc_SPX=np.where((SPX['date']==date))[0][0]
            S_t_tau[j]=SPX["last"].iloc[loc_SPX-j]
            last_tau[j]=last["price"].iloc[i-j].item()
            average_tau[j]=last["average"].iloc[i-j]
        #breakpoint()
        gamma=gamma_calibrator(bid_tau, ask_tau, K, T_tau,S_t_tau,IV_tau, r, ctype)
        if ctype=="call":
            BS_price=BS_CALL(S_t_tau[0], K, T_tau[0], r, IV_tau[0])
            bid_est=Kamirov_Black_Sholes_call(S_t_tau[0],IV_tau[0],K,r,gamma,T_tau[0])[0]
            ask_est=Kamirov_Black_Sholes_call(S_t_tau[0],IV_tau[0],K,r,gamma,T_tau[0])[1]
        elif ctype=="put":
            BS_price=BS_PUT(S_t_tau[0], K, T_tau[0], r, IV_tau[0])
            bid_est=Kamirov_Black_Sholes_put(S_t_tau[0],IV_tau[0],K,r,gamma,T_tau[0])[0]
            ask_est=Kamirov_Black_Sholes_put(S_t_tau[0],IV_tau[0],K,r,gamma,T_tau[0])[1]
        out.loc[len(out)] = [date,S_t_tau[0],last_tau[0],bid_tau[0],ask_tau[0],BS_price,gamma,bid_est,ask_est,average_tau[0]]
    return(out)
```

7.1.9. Impied volatilitás számítása valós adatokon

```
def BS_IV(Option_SPX,r):
    Option_SPX["IV"]=""
    Option_SPX["T"]=""
    for i in range(0,Option_SPX.shape[0]):
        K=Option_SPX["strike"].iloc[i].item()
        date=Option_SPX["date"].iloc[i]
        S_t=SPX["last"].loc[SPX['date'] == date].item()
        type=Option_SPX["type"].iloc[i]
        time_to_maturity=time_of_maturity-date
        Option_SPX["T"].iloc[i]=time_to_maturity.days/360
        T=time_to_maturity.days/360
        real=Option_SPX["price"].iloc[i].item()
        Option_SPX["IV"].iloc[i]=implied_vol(real, S_t, K, T, r, type)
    return(Option_SPX)
```

7.1.10. Egyszerű gamma idősorok előállítása

```
out_main=[]
gamma_type="backward"
strikes=[3700,3725,3750,3775,3800,3825,3850,3875,3900,3925,3950,3975,4000,4025,4050,4075,4100,4125,4150,4175]
types=["call","put"]
r=0.02
taus=[1,7,14,28]
tech_param=0
out = pd.DataFrame(columns=['date','SP','real_last','real_bid', 'real_ask', 'BS_price','gamma','k_bid','k_ask','average'])
for type in types:
    for strike in strikes:
        K=strike
        for tau in taus:
            out=gamma_estimator(K,type,tau,r,SPX,Option_SPX)
            out["K"]=""
            out["type"]=""
            out["tau"]=""
            out["K"]=K
            out["type"]=type
            out["tau"]=tau
            if tech_param==0:
                out_main=out
                tech_param=1
            else:
                out_main=out_main.append(out)
out_main.to_excel("final_v3.xlsx",sheet_name='Sheet_name_1')
```

7.1.11. At-the-money és súlyozott gamma idősorok előállítása

A számítások technikai jellege és hossza miatt a kódok a https://github.com/pfurjesz/Szakdolgozat_2022 linken érhetőek el **ATM gamma és súlyozott gamma számítása** néven. A statisztikai számítások input adatai szintén elérhetőek **all_wput , allw_call, all_ATMcall** és **all_ATMput** néven.

8. Függelék B - Statisztikai tesztek és számítások eredményei

8.0.1. ATM call - gamma VAR modell eredményei

	Call tau 1	call tau 7	Call tau 14	Call tau 28
ADF-test (p-érték)	0.01	0.02	0.21	0.49
ADF-test diff (p-érték)	NA	0.01	0.01	0.01
AIC(n)	2.00	1.00	1.00	1.00
HQ(n)	1.00	1.00	2.00	1.00
SC(n)	1.00	1.00	1.00	1.00
FPE(n)	1.00	1.00	1.00	1.00
s&p500 - gamma korrigált R négyzet	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01
s&p500 - gamma F-próba p érték	0.85	0.60	0.83	0.83
gamma - s&p500 korrigált R négyzet	0.06	0.03	0.12	0.07
gamma - s&p500 F-próba p érték	0.01	0.07	0.00	0.01

8.0.2. ATM put - gamma VAR modell eredményei

	Put tau 1	Put tau 7	Put tau 14	Put tau 28
ADF-test (p-érték)	0.01	0.17	0.25	0.73
ADF-test diff (p-érték)	NA	0.01	0.01	0.01
AIC(n)	1.00	1.00	2.00	1.00
HQ(n)	1.00	2.00	2.00	1.00
SC(n)	1.00	1.00	1.00	1.00
FPE(n)	1.00	1.00	2.00	1.00
s&p500 - gamma korrigált R négyzet	-0.01	-0.01	0.01	-0.01
s&p500 - gamma F-próba p érték	0.73	0.82	0.24	0.62
gamma - s&p500 korrigált R négyzet	-0.01	0.15	0.12	0.21
gamma - s&p500 F-próba p érték	0.60	0.00	0.00	0.00

8.0.3. súlyozott call - gamma VAR modell eredményei

	Call tau 1	call tau 7	Call tau 14	Call tau 28
ADF-test (p-érték)	0.02	0.25	0.43	0.32
ADF-test diff (p-érték)	NA	0.01	0.01	0.01
AIC(n)	1.00	1.00	1.00	1.00
HQ(n)	1.00	2.00	2.00	2.00
SC(n)	1.00	1.00	1.00	1.00
FPE(n)	1.00	1.00	1.00	2.00
s&p500 - gamma korrigált R négyzet	-0.01	0.00	-0.01	-0.01
s&p500 - gamma F-próba p érték	0.83	0.32	0.83	0.62
gamma - s&p500 korrigált R négyzet	0.00	0.12	0.01	0.21
gamma - s&p500 F-próba p érték	0.33	0.00	0.22	0.00

8.0.4. súlyozott put - gamma VAR modell eredményei

	Put tau 1	Put tau 7	Put tau 14	Put tau 28
ADF-test (p-érték)	0.02	0.25	0.43	0.32
ADF-test diff (p-érték)	NA	0.01	0.01	0.01
AIC(n)	1.00	1.00	1.00	1.00
HQ(n)	1.00	2.00	1.00	2.00
SC(n)	1.00	1.00	1.00	1.00
FPE(n)	2.00	2.00	1.00	1.00
s&p500 - gamma korrigált R négyzet	-0.01	0.00	-0.01	-0.01
s&p500 - gamma F-próba p érték	0.83	0.32	0.83	0.83
gamma - s&p500 korrigált R négyzet	0.00	0.12	0.01	0.01
gamma - s&p500 F-próba p érték	0.33	0.00	0.22	0.22

9. Hivatkozások

Pénzügyi buborékok álltalánosan

Miller, . E.M. (1977). “Risk, uncertainty, and divergence of opinion”. *Journal of Economic Theory* 32.4, 1151–1168. old. URL: https://www.jstor.org/stable/pdf/2326520.pdf.

J.M. Harrison, D.M. Kreps (1978). “Speculative investor behavior in a stock market with heterogeneousexpectations”. *Q. J. Econ* 92, 323–336. old. URL: https://www.jstor.org/stable/1884166#metadata_info_tab_contents.

Orléan, A. (1989). “Mimetic contagion and speculative bubbles”. *Theor. Decis.* 27, 63–92. old. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/BF00133988.

F. Allen S. Morris, A. Postlewaite (1993). “Finite bubbles with short sale constraints and asymmetric information”. *Journal of Economic Theory* 61.2, 206–229. old. URL: https://www.sas.upenn.edu/~apostlew/paper/pdf/bubbles.pdf.

Lux, T. (1995). “Herd behaviour, bubbles and crashes”. *Econ. J.* 105, 881–896. old. URL: https://www.jstor.org/stable/pdf/2235156.pdf.

Cont, J.-P. Bouchaud R. (1998). “A Langevin approach to stock market fluctuations and crashes”. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems volume* 6, 543–550. old. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s100510050582.

Robert, J. Shiller (2002). “Bubbles, human judgment, and expert opinion.” *Financ. Anal. J.* 58.3, 18–26. old. URL: https://www.jstor.org/stable/4480389#metadata_info_tab_contents.

W. Xiong, J.A. Scheinkman (2003). “Overconfidence and speculative bubbles”. *J. Polit. Econ.* 111.6, 1183–1220. old. URL: https://www.princeton.edu/~wxiong/papers/bubble.pdf.

Buborékok és a likviditás kapcsolata

Charles, M. C. (1993). “Market Integration and Price Execution for NYSE-Listed Securities”. *Mathematics and Financial Economics* 48, 1009–1038. old. URL: https://www.jstor.org/stable/2329024#metadata_info_tab_contents.

H. Bessembinder, H. M. Kaufman (1997). “A Comparison of Trade Execution Costs for NYSE and NASDAQ-Listed Stocks”. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 32, 287–310. old. URL: https://www.jstor.org/stable/2331201#metadata_info_tab_contents.

Cetin U., Jarrow, R. és P Protter (2004). “Liquidity risk and arbitrage pricing theory”. *Finance. Stochastic* 8, 311–341. old. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s00780-004-0123-x.

Robert A. Jarrow Philip Protter, Alexandre F. Roch (2011). “A liquidity-based model for asset price bubbles”. *Quantitative Finance* 12, 1339–1349. old. URL: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14697688.2011.620976.

Angerer, M. (2016). “Bid-Ask Spread Patterns and the Optimal Timing for Discretionary Liquidity Traders on Xetra”. *Schmalenbach-Gesellschaft für Betriebswirtschaft* 70, 209–230. old. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s41464-018-0049-z.

S. Lamichhane, R. Jarrow (2021). “Asset price bubbles, market liquidity, and systemic risk”. *Mathematics and Financial Economics* 15, 5–40. old. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s11579-019-00247-9.

Francesca B. Andrea M., Thilo Meyer-B. (2022). “Liquidity-based modeling of asset price bubbles via random matching”. *Finance. Stochastic* 11, 423–476. old. URL: https://arxiv.org/abs/2210.13804.

Derivatíva kereskedés jogi szabályozása

CRS (é. n.). *Congressional Research Service- Counting Regulations: An Overview of Rulemaking, Types of Federal Regulations,and Pages in the Federal Register*. URL: https://sgp.fas.org/crs/misc/R43056.pdfl. (accessed: 11.09.2022).

SEC6 (é. n.). *Rule 6 - Options Trading*. URL: https://www.sec.gov/rules/sro/pcx/34-49451_a6.pdf. (accessed: 11.09.2022).

SEC7 (é. n.). *Rule 7 - General Trading Rules - Index Options*. URL: https://www.sec.gov/rules/sro/pcx/34-49451_a7.pdf. (accessed: 11.09.2022).

A conic finance alapjai

F. Black, M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy* 81, 637–654. old. URL: https://www.jstor.org/stable/1831029#metadata_info_tab_contents.

P. Artzner, F. Delbaen J.M. (1999). "COHERENT MEASURES OF RISK". *Mathematical Finance* 9, 3–228. old. URL: https://people.math.ethz.ch/~delbaen/ftp/preprints/CoherentMF.pdf.

Shreve, S. E. (2000). *Stochastic Calculus for Finance II*. Spnnger finance. Springer. ISBN: 0-387-401 01 -6.

Kusuoka, S. (2001). "On law invariant coherent risk measures". *Advances in Mathematical Economics* 3, 83–95. old. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-4-431-67891-5_4.

Wang, Z. (2002). "Discussion". *The Journal of Finance* 4, 1240–1245. old. URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/0022-1082.00366.

A conic finance fő publikációi

A. S. Cherny, D. B. Madan (2006). "Pricing and Hedging in Incomplete Markets with Coherent Risk". *SSRN*. URL: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=904806.

— (2008). "New Measures for Performance Evaluation". *SSRN*. URL: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=955472.

— (2010). "MARKETS AS A COUNTERPARTY: AN INTRODUCTION TO CONIC FINANCE". *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 13, 1149–1177. old. URL: https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0219024910006157.

D. Madan W, SCHOUTENS (2016). *APPLIED CONIC FINANCE*. Contributions to Management Science. Springer. ISBN: 978-1-107-15169-7.

A conic finance alkalmazásai

Karimov, A. (2017). *Identifying Stock Market Bubbles*. Contributions to Management Science. Springer. ISBN: 978-3-319-65008-1.

K. Xiang, Xuemei L. (2018). “Estimation of Ask and Bid Prices for Geometric Asian Options”. URL: https://doi.org/10.1155/2019/6276250.

F. Guillaume G. Junike, P. Leoni (2019). “Implied Liquidity Risk Premia in Option Markets”. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s10436-018-0339-y.

Z. Lia, W. Zhangb (2019). “An analytical approximation approach for pricing European options in a two-price economy”. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1062940818306065.

M. Michielon, A. Khedher és P. Spreij (2021). “Liquidity-free implied volatilities: an approach using conic finance”. URL: https://arxiv.org/abs/2110.11718.

W. Wang, Xiaoping H. (2022). “Pricing American Options by a Fourier Transform Multinomial Tree in a Conic Market”. URL: https://doi.org/10.1155/2022/8650500.

Többváltozós idősorelemzés

R. H. Shumway, D. S. Stoffer (2011). *Time Series Analysis and Its Applications*. Springer. ISBN: 978-1-4419-7864-6.

Colonescu, C. (2016). *Principles of Econometrics with R*.

Ferenci, T. (2019). “Idősorelemzés - egyetemi jegyzet”. URL: http://www.medstat.hu/.