Sprawozdanie

Obliczenia naukowe

Lista 3

Piotr Gałwiaczek

Numer indeksu: 221495

1. **Zadanie 1** – metoda bisekcji znajdowania pierwiastka funkcji

1.1. Opis problemu

W tym zadaniu mamy napisać funkcję znajdującą pierwiastek równania metodą bisekcji.

1.2. Rozwiązanie

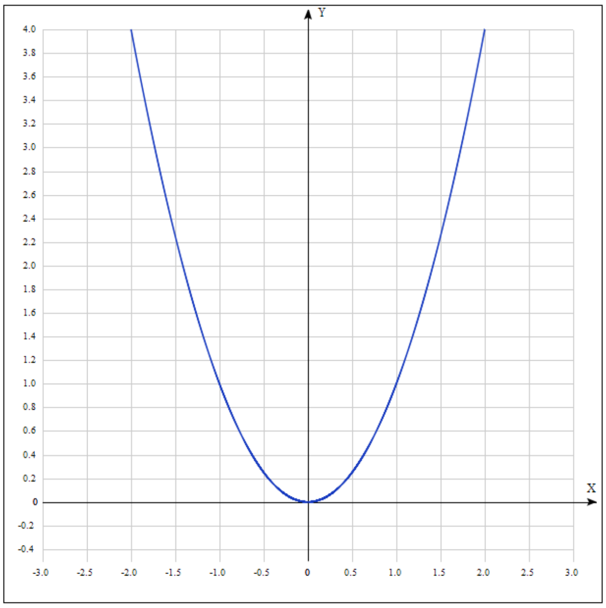
Do rozwiązania tego zadania utworzona została następująca funkcja:

```
functionmbisekcji(f, a, b, δ, ε)
        u = f(a)
        v = f(b)
        e = b-a
        ifsign(u) = sign(v)
                return -1, -1, 0, 1
        end
        i = 0
        whiletrue
                i++
                e=/Float64(2)
                c = a+e
                w=f(c)
                if |e|<δor |w|<ε
                return c, w, i, 0
                ifsign(w) ≠sign(u)
                        b = c
                        v = w
                else
                        a = c
                        u = w
```

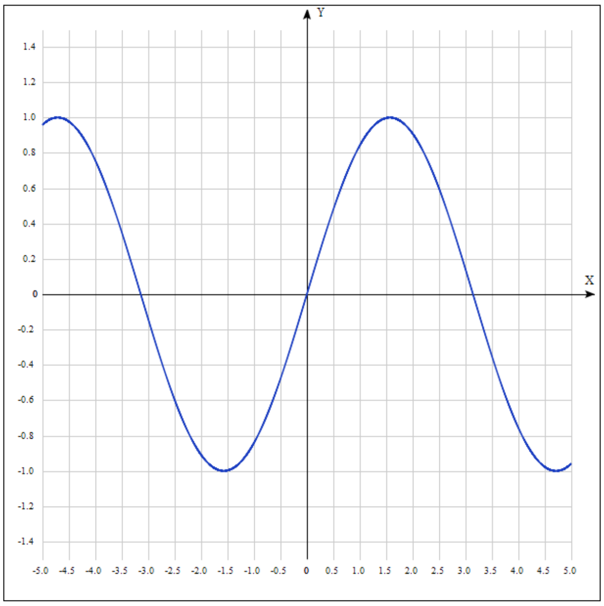
1.3. Wyniki oraz ich interpretacja

W celu przetestowania funkcji została ona użyta do znalezienia pierwiastków równań:

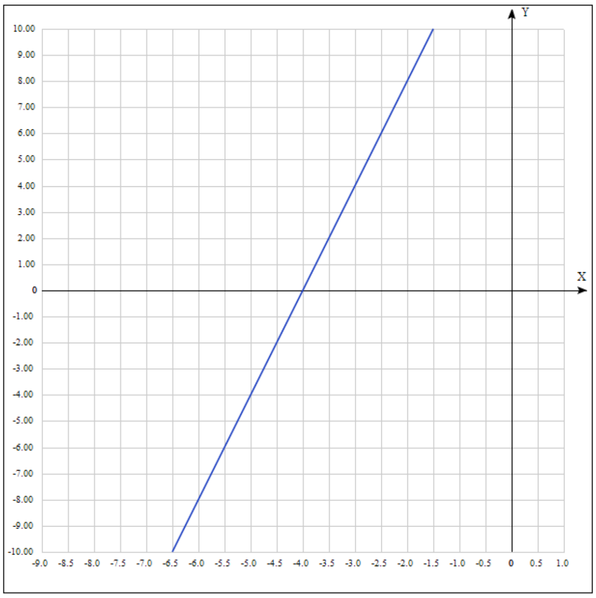
- x^2
- $\sin(x)$
- $4(x+4)$
- $\cos(x)$

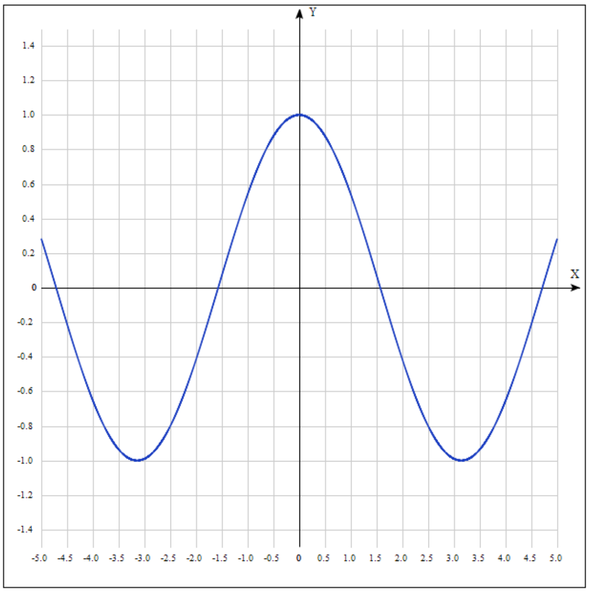


Rysunek 1 Wykres funkcji x^2



Rysunek 2 Wykres funkcji sin(x)





Rysunek 4Wykres funkcRysunek 3 Wykres funkcji cos(x)

W tabeli zamieszczonej poniżej kolumny oznaczają odpowiednio:

- $[a, b]$ – przedział początkowy
- $\widetilde{x_0}$ - przybliżenie pierwiastka równania f(x)
- $f(\widetilde{x_0})$ – wartość pierwiastka
- iteracje – liczba wykonanych iteracji
- err - sygnalizacja błędu (0 – brak błędu, 1 – funkcja nie zmienia znaku w przedziale [a,b]

Wartości przybliżenia wynoszą $\delta = \varepsilon = 10^{-5}$.

Metoda bisekcji					
	$[a,b]$	$\widetilde{x_0}$	$f(\widetilde{x_0})$	iteracje	err
$\boldsymbol{x^2}$	[-1, 1]	-1	-1	0	1
$\mathbf{sin}\,(\boldsymbol{x})$	[2,4]	3.1416015625	-8.908910206643689e-6	11	0
$\mathbf{4}(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})$	[-5,-3]	-4.0	0.0	1	0
$\mathbf{cos}\,(\boldsymbol{x})$	[0, 3]	1.5707931518554688	3.1749394278638972e-6	17	0

1.4. Wnioski

Przy liczeniu miejsca zerowego x^2 funkcja zwraca błąd. Dzieje się tak, ponieważ wartości funkcji w punktach a=-1 oraz b=1 są dodatnie. Wnioskujemy stąd, że obliczenie miejsca zerowego dla funkcji $f(x) = x^2$ stosując metodę bisekcji jest niemożliwe.

Widać również, że przy dobrze ustawionych przedziałach metoda bisekcji potrafi dla niektórych funkcji bardzo szybko znaleźć ich pierwiastek. Tak dzieje się w przypadku $f(x) = 4(x+4)$ – metoda potrzebowała tylko jednej iteracji.

Dla funkcji $\sin(x)$ oraz $\cos(x)$ funkcja poprawnie odnalazła przybliżoną wartość pierwiastka, lecz potrzebowała na to dużo iteracji.

2. **Zadanie 2** – metoda Newtona (stycznych) znajdowania pierwiastka funkcji

2.1. Opis problemu

W zadaniu należy zaimplementować funkcję znajdującą pierwiastek równania metodą stycznych.

2.2. Rozwiązanie

Do rozwiązania tego zadania utworzono następującą funkcję:

```
functionmstycznych(f, pf, x0, δ, ε, maxit)
    v = f(x0)
    if |v|< ε
        return 0, x0, v, 0
    for k = 1:maxit
        poch = pf(x0)
        if|poch| ≤eps(Float64) || poch == NaN || |poch|=∞
            return x0, v, k, 2
        x1 = x0-v/poch
        v = f(x1)
        if |x1-x0|<δor |v|<ε
            return x1, v, k, 0
        x0 = x1
    return x0,f(x0),maxit,1
```

2.3. Wyniki oraz ich interpretacja

Metodę przetestowano na tych samych funkcjach na których przetestowano metodę bisekcji.

W tabeli poniżej $x0$ oznacza przybliżenie początkowe.

Metoda stycznych					
	$x0$	$\widetilde{x_0}$	$f(\widetilde{x_0})$	iteracje	err
$\boldsymbol{x^2}$	2	0.001953125	3.814697265625e-6	10	0
$\mathbf{sin}\,(\boldsymbol{x})$	4	3.1415923871630587	2.6642673457455806e-7	3	0
$\mathbf{4}(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})$	-3	-4.0	0.0	1	0
$\mathbf{cos}\,(\boldsymbol{x})$	3	1.5708040082580965	-7.681463199823219e-6	2	0

2.4. Wnioski

Jak widać stosując metodę stycznych udało nam się obliczyć miejsce zerowe funkcji $f(x) = x^2$.

Pozostałe pierwiastki funkcji wyznaczane są również w sposób dokładny, lecz w porównaniu z metodą bisekcji metoda Newtona potrzebuje znacznie mniej iteracji.

3. **Zadanie 3** – metoda siecznych znajdowania pierwiastka funkcji

3.1. Opis problemu

W zadaniu tym należy napisać funkcję znajdującą pierwiastek równania metodą siecznych.

3.2. Rozwiązanie

W celu wykonania tego zadania utworzona została następująca funkcja:

```
functionmsiecznych(f, x0, x1, δ, ε, maxit)
    fa = f(x0)
    fb = f(x1)
    for k=1:maxit
        if |fa|>|fb|
            x0↔ x1
            fa ↔ fb
        s = (x1−x0)/(fb−fa)
        x1 = x0
        fb = fa
        x0 = x0 - fa*s
        fa = f(x0)
        if |x1-x0|< δor |fa|< ε
            return x0, fa, k, 0
    return x0, fa, maxit, 1
```

3.3. Wyniki oraz ich interpretacja

Tą metodę również przetestowano na tych samych funkcjach co w poprzednich zadaniach.

W tabeli poniżej x0 oraz x1 oznaczają przybliżenia początkowe.

Metoda siecznych					
	$[x0, x1]$	$\widetilde{x_0}$	$f(\widetilde{x_0})$	iteracje	err
$\boldsymbol{x^2}$	[1.5, 2]	0.002718622564567286	7.390908648574408e-6	13	0
$\mathbf{sin}\,(\boldsymbol{x})$	[4,4.5]	3.141592653590422	-6.287078564677739e-13	4	0
$\boldsymbol{4(x+4)}$	[-5,-4.5]	-4.0	0.0	1	0
$\mathbf{cos}\,(\boldsymbol{x})$	[2, 2.1]	1.5707960334755222	2.9331937440607515e-7	3	0

3.4. Wnioski

Metoda dobrze wyznacza przybliżone wartości pierwiastka funkcji i podobnie jak w metodzie Newtona, zajęło jej to mniej iteracji niż metodzie bisekcji.

Metoda siecznych ma tę zaletę, że do jej wykonania niepotrzebna jest znajomość pochodnej danej funkcji, gdyż przybliżamy ją za pomocą wzoru $f'(x) \approx \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$, gdzie do wykonania metody Newtona znajomość pochodnej była niezbędna.

4. **Zadanie 4** – znajdowanie pierwiastka równania $\sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2$ stosując metody bisekcji, Newtona, oraz siecznych

4.1. Opis problemu

W zadaniu tym należy wyznaczyć pierwiastki równania $\sin(x) - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 0$ stosując wcześniej zaprogramowane metody.

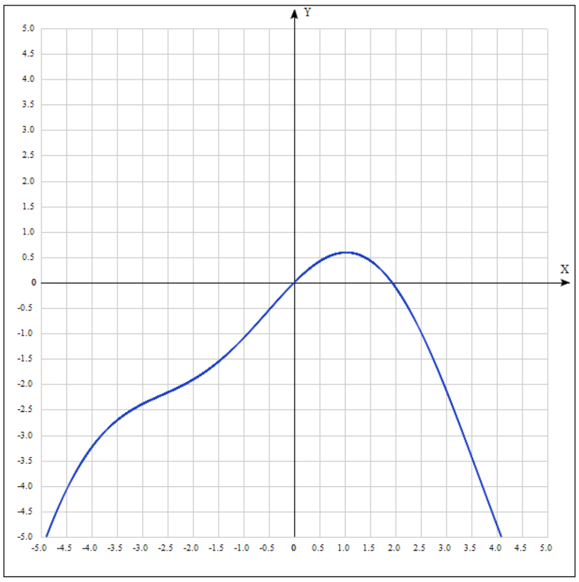
4.2. Rozwiązanie

Metody

- bisekcji z przedziałem początkowym [1.5, 2]
- Newtona z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1.5$
- siecznych z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1, x_1 = 2$

uruchomiono w celu znalezienia pierwiastka podanej funkcji z przybliżeniami $\delta = \varepsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$.

4.3. Wyniki oraz ich interpretacja



Rysunek 5Wykres funkcji $sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2$

	$\widetilde{x_0}$	$f(\widetilde{x_0})$	iteracje	err
Metoda bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	0
Metoda stycznych	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4	0
Metoda siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	0

4.4. Wnioski

Metody wyznaczyły miejsca zerowe z podobną dokładnością, lecz metodzie bisekcji zajęło to 4 razy więcej iteracji niż dwóm pozostałym. Metody stycznych oraz siecznych są dużo szybsze niż bisekcji.

5. **Zadanie 5** – znajdowanie przecięcia dwóch funkcji stosując metodę bisekcji

5.1. Opis problemu

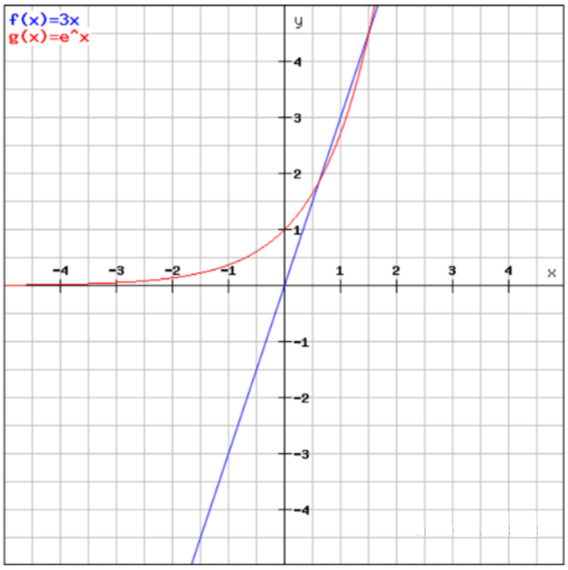
W zadaniu tym mamy znaleźć wartość zmiennej x, dla której przecinają się wykresy funkcji$y = 3x$ oraz $y = e^x$ z dokładnością $\delta = \ \varepsilon = 10^{-4}$ stosując metodę bisekcji.

5.2. Rozwiązanie

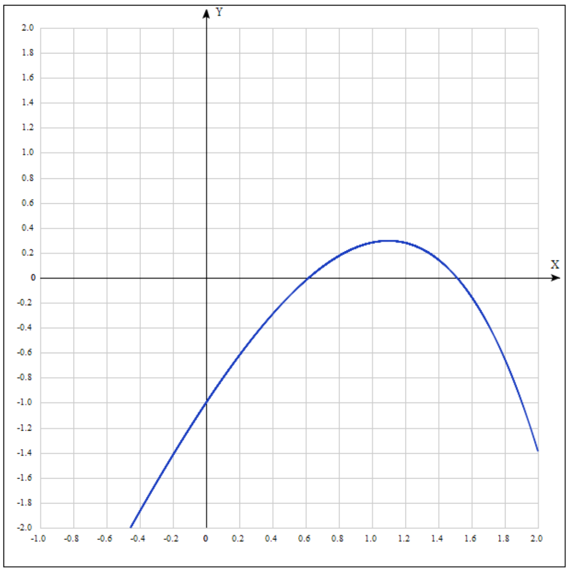
Znalezienie wartości x przecięcia danych funkcji jest równoważne ze znalezieniem miejsc zerowych

$$f(x) = 3x - e^x$$

Do wyznaczenia przedziału początkowego dla metody bisekcji posłuży nam analiza wykresu $f(x)$.



Rysunek 7 Wykresy funkcji $3x$oraz e^x, prezentujący miejsca ich przecięcia.



Rysunek 6 Wykres funkcji $3x - e^x$

Jak widzimy funkcja posiada dwa pierwiastki. Rozsądnymi przedziałami do ich wyznaczenia będą odpowiednio:

- [0, 1]
- [1, 2]

5.3. Wyniki oraz ich interpretacja

Przedział początkowy	$\widetilde{x_0}$	$f(\widetilde{x_0})$	iteracje	err
[0, 1]	0.619140625	9.066320343276146e-5	9	0
[1, 2]	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13	0

5.4. Wnioski

Jak widzimy metoda bisekcji dobrze wyznaczyła wartość x miejsc które przecinają funkcje $y = 3x$ oraz $y = e^x$. Lecz jednak gdybyśmy nieodpowiednio dobrali przedziały początkowe tj:

$$a < x_0 \; oraz \; b > x_1, \text{ gdzie } f(x_0) = f(x_1) = 0 \;\wedge\; x_0 < x_1$$

zastosowanie metody bisekcji do tego przykładu nie dałoby nam rozwiązania, gdyż wartości funkcji w tych przedziałach posiadają ten sam znak, czyli

$$f(a) < 0 \;\wedge f(b) < 0$$

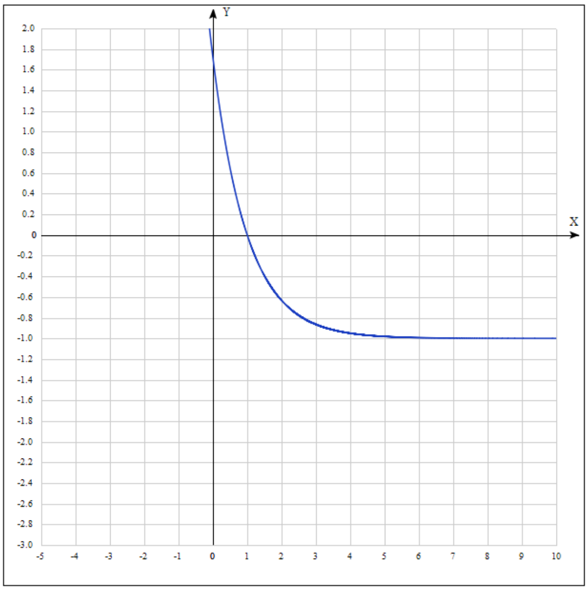
6. **Zadanie 6** – znajdowanie miejsc zerowych funkcji $f(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f(x) = xe^{-x}$

6.1. Opis problemu

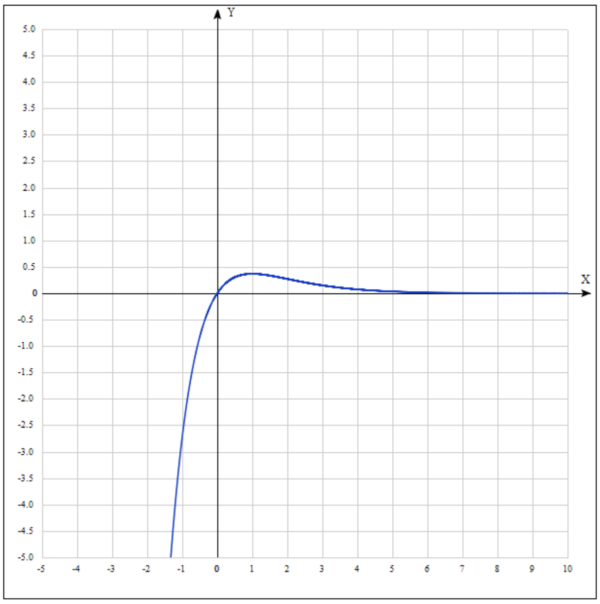
Problemem w tym zadaniu jest wyznaczenie miejsc zerowych funkcji $f(x) = e^{1-x} - 1$ oraz$g(x) = xe^{-x}$ za pomocą metod bisekcji, Newtona i siecznych, z dokładnością obliczeń $\delta = \varepsilon = 10^{-5}$.

6.2. Rozwiązanie

Podobnie jak w zadaniu 5 do wyboru przedziałów początkowych sugerowaliśmy się wykresami funkcji.



Rysunek 9Wykres funkcji $e^{1-x}-1$



Rysunek 8 Wykres funkcji xe^{-x}

Analiza wykresu przyczyniła się do tego, że jako wartości początkowe wybraliśmy:

Wartości początkowe			
Funkcja	Metoda bisekcji	Metoda stycznych	Metoda siecznych
$e^{1-x}-1$	[0, 2]	2	[1.5, 2]
xe^{-x}	[-0.1, 0.1]	-1	[-1, -0.5]

6.3. Wyniki oraz ich interpretacja

$e^{1-x}-1$				
Metoda	$\widetilde{x_0}$	$f(\widetilde{x_0})$	iteracje	err
bisekcji	1.0	0.0	1	0
stycznych	0.9999999810061002	1.8993900008368314e-8	5	0
siecznych	1.0000034269838276	-3.4269779555229363e-6	5	0

xe^{-x}				
Metoda	$\widetilde{x_0}$	$f(\widetilde{x_0})$	iteracje	err
bisekcji	0.0	0.0	1	0
stycznych	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	0
siecznych	-1.2229958402039555e-7	-1.2229959897758473e-7	6	0

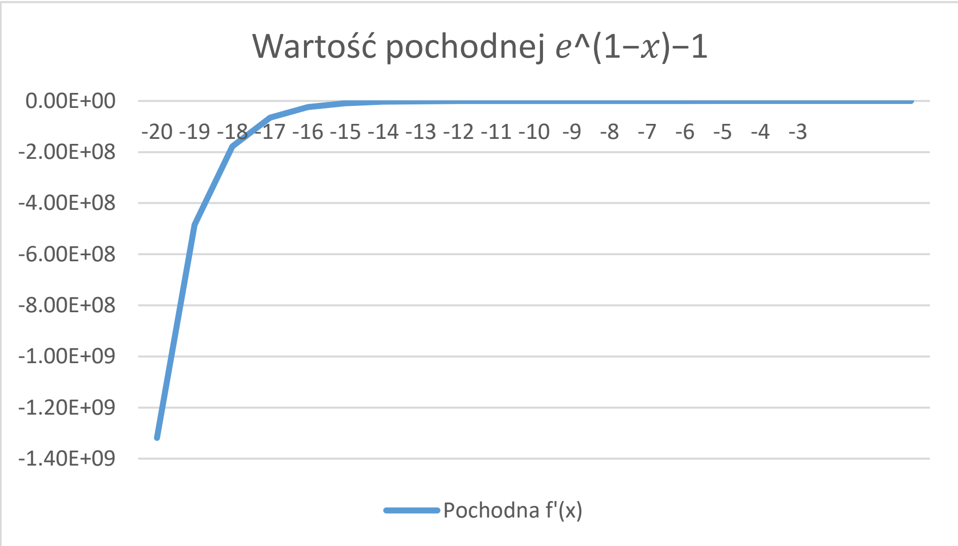
Metody dobrze wyznaczyły wartość przybliżoną pierwiastków.

6.4. Wnioski

Przy odpowiednim doborze wartości początkowych metody dobrze wyznaczają przybliżoną wartość pierwiastków w zadawalającym nas czasie. Lecz podane przykłady posiadają tą własność, że dla źle podanych wartości początkowych, wyniki zwracane przez metody nie są satysfakcjonujące.

Funkcja $f(x) = e^{1-x} - 1$ jest bardzo szybko malejąca dla x < 1, co za tym idzie, w tych punktach ma ona bardzo dużą wartość pochodnej.

Na poniższym wykresie widzimy wartość pochodnej $f'(x)$ w przedziale



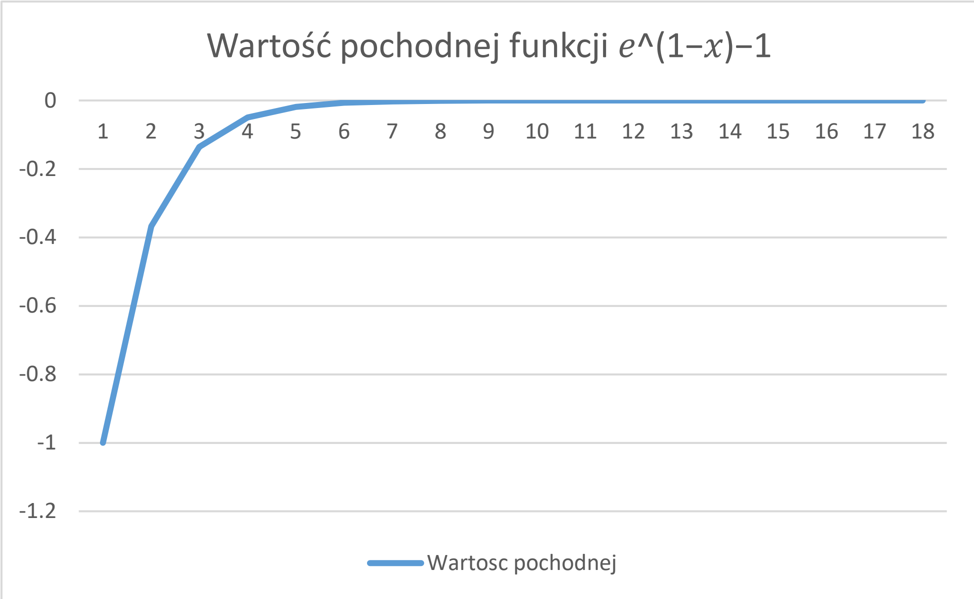
Rysunek 10 Wykres prezentujący wzrost wartości pochodnej funkcji f(x)

$x \in <-20, 0>$.

Jak widzimy wartość ta jest bardzo duża – dla x=-100 wynosi ona aż -2.6881171418161356e43. Wnioskujmy stąd, że metody stycznych oraz siecznych będą działały bardzo wolno ustawiając przedziały początkowe będące dużo mniejsze od 0.

$e^{1-x} - 1$					
Metoda	**w. początkowe**	$\widetilde{x_0}$	$f(\widetilde{x_0})$	iteracje	err
bisekcji	*[-100, 50]*	0.999993085861206	6.9141626966029435e-6	23	0
stycznych	*-100*	0.9999999998780821	1.2191803122618694e-10	105	0
siecznych	*[-100, -99]*	0.9999974070188858	2.592984476024185e-6	149	0

Jak widzimy metody siecznych i stycznych ze względu na bardzo dużą wartość pochodnej, potrzebowały na wyznaczenie miejsca zerowego bardzo dużo iteracji, zaś metoda bisekcji rozwiązała problem w o wiele lepszym czasie.



Rysunek 11 Wartość pochodnej funkcjje^{1-x} $- 1$i w przedziale x ∈ <1, 18>

Dla tej funkcji problemem jest również zbyt mała wartość pochodnej dla x>6.

Wtedy nie uda nam się obliczyć wartości pierwiastka metodami Newtona oraz siecznych, gdyż występuje zjawisko dzielenia przez 0.

$e^{1-x} - 1$					
Metoda	**w. początkowe**	$\widetilde{x_0}$	$f(\widetilde{x_0})$	iteracje	err
stycznych	*50*	50.0	-1.0	1	2
siecznych	*[50, 51]*	NaN	NaN	500	1

Jak widzimy w metodzie siecznych został wykryty błąd dzielenia przez 0, zaś metoda siecznych po dojściu do wartości *NaN*musiała kontynuować iteracje z tą wartością.

Dla funkcji xe^{-x}pojawia się ten sam problem, mianowicie, funkcja ta jest bardzo szybko rosnąca dla x<0.

xe^{-x}					
Metoda	**w. początkowe**	$\widetilde{x_0}$	$f(\widetilde{x_0})$	iteracje	err
bisekcji	*[-100, 50]*	-5.9604644775390625e-6	-5.96050000478173e-6	23	0
stycznych	*-100*	-4.356806237879908e-6	-4.356825219681853e-6	108	0
siecznych	*[-100, -99]*	-1.1427784692888112e-7	-1.1427785998830816e-7	155	0

Jednakże w tej funkcji pojawia się kolejny problem:

Funkcja dla x>1 jest malejąca oraz przybiera wartości bardzo bliskie 0.

xe^{-x}					
Metoda	**w. początkowe**	$\widetilde{x_0}$	$f(\widetilde{x_0})$	iteracje	err
bisekcji	*[-10, 200]*	95.0	5.245028163177106e-40	1	0
stycznych	*1.1*	14.27212393829051	9.040322779745433e-6	3	0
siecznych	*[1, 1.5]*	14.633260759544537	6.459467411373784e-6	12	0

Metoda bisekcji już w pierwszej iteracji znalazła zadowalającą ją wartość która jest mniejsza niż oczekiwane przez nas przybliżenie. W związku z tym zwróciła wartość pierwiastka równą 95, co oczywiście daje niepoprawny wynik.

Gdy ustawiliśmy początek metody stycznych w punkcie w którym funkcja maleje metoda ta „poruszała się w złym kierunku", aż do momentu gdy natrafiła na wartość funkcji akceptującą dane przybliżenie. Oczywiście pierwiastek przez nią zwrócony jest niepoprawny.

To samo zjawisko występuje w przypadku zastosowania metody siecznych.