中山大学计算机院本科生实验报告

（2024学年秋季学期）

课程名称：微分方程及其数值解

实验	编程实现Adams内插法和外插法	专业(方向)	信息与计算科学
学号	22336313	姓名	郑鸿鑫
Email	zhenghx57@mail2.sysu.edu.cn	完成日期	2024/11/15

实验要求

用三阶Adams内插法和外插法分别解初值问题$u' = -5u, u(0) = 1$的解，取步长h为0.1,0.05,观察解在$t = 1$处的误差，并与Euler法计算的结果进行比较

实验过程

根据实验要求，编写代码如下（只展示关键函数,此次实验用到的计算精确解和计算均方误差，欧拉法等函数都是复用上一次实验，故此处不展示）：

```
//三阶的Adams外插法
void Adams_Bashorth(double (*f)(double, double), double x[], double y[], double h, int n, double *
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        ans[i] = y[2];
        double f_0 = f(x[0],y[0]);
        double f_1 = f(x[1],y[1]);
        double f_2 = f(x[2],y[2]);
        double y_next = y[2] + (1.0/12.0) * h * (23 * f_2 - 16 * f_1 + 5 * f_0);
        x[0] = x[1];
        x[1] = x[2];
        x[2] = x[2] + h;
        y[0] = y[1];
        y[1] = y[2];
        y[2] = y_next;
    }
}
//三阶的Adams内插法
void Adams_Moulton(double (*f)(double, double), double x[], double y[], double h, int n, double *a
    double local_x[3] = {x[0], x[1], x[2]};
    double local_y[3] = {y[0], y[1], y[2]};
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        // 保存当前的 y[1] 为结果
        ans[i] = local_y[1];
        // 计算下一步的 x 值
        double x_next = local_x[2] + h;
        // 初始估计 y_next，直接用 y[2] 的值作为初始猜测
        double y_next = local_y[2];
        // 使用 Adams-Moulton 的隐式公式迭代
        for (int i = 0; i < 5; i++) { // 固定迭代次数，也可用误差收敛控制
            double f_0 = f(local_x[0], local_y[0]);
            double f_2 = f(local_x[2], local_y[2]);
            double f_next = f(x_next, y_next);
            // 更新 y_next
            y_next = local_y[2] + (1.0 / 12.0) * h * (5 * f_next + 8 * f_2 - f_0);
        }
        // 更新历史值
        local_x[0] = local_x[1];
        local_x[1] = local_x[2];
        local_x[2] = x_next;
```

```
            local_y[0] = local_y[1];
            local_y[1] = local_y[2];
            local_y[2] = y_next;
        }
}
```

注： 值得说明的一点是，由于Adams内插和外插都需要多个初值才可以进行，一般可以选择用欧拉法等单步方法先计算得到所需的初值，这里为了方便直接使用的是精确解的值作为初始条件：

```
//外插法的初值：
double x_1[3] = {-2*h,-h,0};
double y_1[3] = {exp(-5*x_1[0]),exp(-5*x_1[1]),1};
//内插法的初值：
double x_2[3] = {-h,0,h};
double y_2[3] = {exp(-5*x_2[0]),1,exp(-5*x_2[2])};
```

实验结果

对于三种方法我们先以步长h = 0.1进行近似,得到结果如下：

```
                  t: 0.0     0.1     0.2     0.3     0.4     0.5     0.6     0.7     0.8     0.9     1.0
          exact_ans: 1.00000 0.60653 0.36788 0.22313 0.13534 0.08208 0.04979 0.03020 0.01832 0.01111 0.00674
  Adams_Moulton_ans: 1.00000 0.60653 0.39141 0.25038 0.15902 0.10121 0.06446 0.04104 0.02613 0.01663 0.01059
 Adams_Bashorth_ans: 1.00000 0.57451 0.34712 0.18913 0.11961 0.05876 0.04278 0.01604 0.01695 0.00248 0.00806
          Euler_ans: 1.00000 0.50000 0.25000 0.12500 0.06250 0.03125 0.01562 0.00781 0.00391 0.00195 0.00098
MSE:
Euler: 0.004068712,AB: 0.000339237,AM: 0.000241942
```

t	exact_ans	Adams_Moulton_ans	Adams_Bashorth_ans	Euler_ans
0.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.1	0.60653	0.60653	0.57451	0.50000
0.2	0.36788	0.39141	0.34712	0.25000
0.3	0.22313	0.25038	0.18913	0.12500
0.4	0.13534	0.15902	0.11961	0.06250
0.5	0.08208	0.10121	0.05876	0.03125

t	exact_ans	Adams_Moulton_ans	Adams_Bashorth_ans	Euler_ans
0.6	0.04979	0.06446	0.04278	0.01562
0.7	0.03020	0.04104	0.01604	0.00781
0.8	0.01832	0.02613	0.01695	0.00391
0.9	0.01111	0.01663	0.00248	0.00195
1.0	0.00674	0.01059	0.00806	0.00098

Method	MSE
Euler	0.00406871
Adams_Bashorth	0.000339237
Adams_Moulton	0.000241942

再用h = 0.5进行近似，得到结果如下：

```
                t: 0.00    0.05    0.10    0.15    0.20    0.25    0.30    0.35    0.40    0.45    0.50    0.55    0.60    0.65    0.70    0.75    0.80    0.85    0.90    0.95    1.00
        exact_ans: 1.00000 0.77880 0.60653 0.47237 0.36788 0.28650 0.22313 0.17377 0.13534 0.10540 0.08208 0.06393 0.04979 0.03877 0.03020 0.02352 0.01832 0.01426 0.01111 0.00865 0.00674
 Adams_Moulton_ans: 1.00000 0.77880 0.61200 0.48075 0.37753 0.29647 0.23282 0.18284 0.14358 0.11276 0.08855 0.06954 0.05461 0.04289 0.03368 0.02645 0.02077 0.01631 0.01281 0.01006 0.00790
Adams_Bashorth_ans: 1.00000 0.77710 0.60432 0.46962 0.36508 0.28374 0.22056 0.17142 0.13325 0.10356 0.08050 0.06257 0.04863 0.03780 0.02938 0.02284 0.01775 0.01380 0.01072 0.00834 0.00648
        Euler_ans: 1.00000 0.75000 0.56250 0.42188 0.31641 0.23730 0.17798 0.13348 0.10011 0.07508 0.05631 0.04224 0.03168 0.02376 0.01782 0.01336 0.01002 0.00752 0.00564 0.00423 0.00317
MSE:
Euler: 0.000872876,AB: 0.000002826,AM: 0.000035303
Press any key to continue...
```

t	exact_ans	Adams_Moulton_ans	Adams_Bashorth_ans	Euler_ans
0.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.05	0.77880	0.61200	0.77710	0.75000
0.10	0.60653	0.48075	0.60432	0.56250
0.15	0.47237	0.37753	0.46962	0.42188
0.20	0.36788	0.29647	0.36508	0.31641
0.25	0.28650	0.23282	0.28374	0.23730
0.30	0.22313	0.18284	0.22056	0.17798
0.35	0.17377	0.14358	0.17142	0.13348
0.40	0.13534	0.11276	0.13325	0.10011

t	exact_ans	Adams_Moulton_ans	Adams_Bashorth_ans	Euler_ans
0.45	0.10540	0.08855	0.10356	0.07508
0.50	0.08208	0.06954	0.08050	0.05631
0.55	0.06393	0.05461	0.06257	0.04224
0.60	0.04979	0.04289	0.04863	0.03168
0.65	0.03020	0.03368	0.03780	0.02376
0.70	0.02352	0.02645	0.02938	0.01782
0.75	0.01832	0.02077	0.02284	0.01336
0.80	0.01426	0.01631	0.01775	0.01002
0.85	0.01111	0.01281	0.01380	0.00752
0.90	0.00865	0.01006	0.01072	0.00564
0.95	0.00674	0.00648	0.00834	0.00423
1.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Method	MSE
Euler	0.000873976
AB	0.000002826
AM	0.0000035303

可以看到，三阶的Adams内插法和外插法的均方误差都比欧拉法要小，而且随着步长的缩小，数值解与精确解之间更加接近。